Streszczenie

Motywem przewodnim rozprawy jest zagadnienie generowania podgrupy kwantowej ustalonej grupy kwantowej lokalnie zwartej. We właściwym dla badania grup kwantowych sformułowaniu dualnym, miast o podgrupie kwantowej generowanej przez dany zbiór kwantowy mówimy ściśle o *obrazie Hopfa morfizmu*. Terminy te powinny być uważane za tożsame, lecz ze względu na charakterystykę teorii grup kwantowych, będziemy się starali używać terminu *obraz Hopfa morfizmu*.

Grupy kwantowe przyciągnęły uwagę, gdy S. L. Woronowicz zaproponował, by używać C^*-algebraicznego formalizmu do ich badania (zob. [22, 24]). Jednym z głównych osiągnięć teorii jest jednoczesne rozszerzenie dualności Pontrjagina i dualności Tannaki-Krajna na istotnie większą klasę obiektów, zawierającą zarówno grupy abelowe (jak w klasycznej dualności Pontrjagina), jak i grupy zwarte (jak w dualności Tannaki-Krajna, która proponuje alternatywny opis dualności, w której obiektem dualnym jest kategoria zamiast przestrzeni), jak wyjaśniono w [23]. Wyniki te rozszerzono dalej do ogólnych lokalnie zwartych grup kwantowych w [15, 18], czyniąc tym samym istotny postęp w obszarze abstrakcyjnej analizy harmonicznej: istnieje dobrze zdefiniowany obiekt dualny dowolnej lokalnie zwartej grupy (niekoniecznie zwartej bądź abelowej), który jest po prostu grupą kwantową lokalnie zwartą. Co więcej, teoria ta jest zamknięta na branie obiektów dualnych.

Teoria ta, choć bardzo owocna z perspektywy analitycznej, wciąż wymaga dopracowania z perspektywy teoriogrupowej. Teoriogrupowa natura grup kwantowych nie została zbadana dokładnie i dopiero niedawno poczyniono w tym kierunku pewne postępy. Na przykład, pojęcie podgrupy ([9]) i homomorfizmu ([16]) zostały dokładnie opisane zaledwie kilka lat temu, a na przykład relacja między produktem półprostym oraz krótkimi ciągami dokładnymi została opisana bardzo niedawno ([13, 12]). To dość zaskakujące, że teoriogrupowa natura grup kwantowych pozostawała na uboczu tak długo. Aktualnie jednak stała się bardzo aktywnym polem badań.

Grupy kwantowe zostały stworzone w celu uchwycenia pewnego rodzaju kwantowych symetrii ukrytych w modelach fizycznych. Teoria grup kwantowych, choć bardzo atrakcyjna z perspektywy matematycznej, wciąż nie jest gotowa do zastosowań w fizyce. W modelach mechaniki kwantowej, obserwable modelowane są przy pomocy operatorów w przestrzeni Hilberta. Ich komutowanie może być uchwycone przy pomocy klasycznych grup. Niemniej, dla zastosowań praktycznych, nie można ograniczać się do układów operatorów komutujących (ani żadnego rodzaju restrykcje dotyczące komutowania nie powinny być nakładane), zaś to teoria grup kwantowych potrafi uchwycić symetrie zachowującą daną *miarę nieprzemienności* danego układu operatorów, zob. np. [1] i referencje tamże. Mamy nadzieję, że dalsze rozwijanie matematycznych aspektów teorii grup kwantowych pozwoli na ich zastosowanie w modelach mechaniki kwantowej bądź innych gałęziach współczesnej fizyki teoretycznej.

Klasycznie, zbiory generujące są przydatne do niektórych rozumowań indukcyjnych i w badaniu pewnego rodzaju zachowań w nieskończoności. Używa się ich do zdefiniowania grafów Cayleya (które dla grup kwantowych dyskretnych zostały wprowadzone przez Vergnioux w [21]) i bezpośrednio związane z funkcjami długości na grupach, które pozwalają na naturalne partycjonowanie grupy w większe i większe, lecz skończone (czy też zwarte) kawałki. Używa się ich do badania pewnych własności aproksymacyjnych, jak własność Haagerupa czy K-średniowalność (zob np. [8, 10] oraz [19, 20], odpowiednio). Spodziewamy się, że pogłębienie rozumienia pojęcia zbiorów generujących w kontekście lokalnie zwartych grup kwantowych może okazać się owocne i otworzyć możliwość lokalnego opisu tych własności.

Jednym z najbardziej spektakularnych zastosowań zbiorów generujących jest teoria Kestena spacerów losowych na grupach dyskretnych. W teorii tej, stan układu w chwili zero jest opisywany przy pomocy rozkładu probabilistycznego na skończonym zbiorze generującym (i nawet najprostszy rozkład jednostajny wystarcza do uzyskania istotnych wyników). Dynamika układu opisywana jest potęgami splotowymi tegoż rozkładu, zaś zachowanie asymptotyczne dynamiki pozwala uchwycić pewne nietrywialne własności grupy, np. to, czy jest (bądź nie) średniowalna (zob. oryginlna praca Kestena [14], choć dziś wynik ten jest uważany za klasyczny i znajduje się w wielu podręcznikach dotyczących metod probabilistycznych badania grup). Spodziewamy się, że nasz opis zbiorów generujących dla grup kwantowych pozwoli otworzyć nową perspektywę dla badań podobnych zagadnień na grupach kwantowych lokalnie zwartych. Należy tutaj podkreślić, że spacery losowe na grupach kwantowych były już badane ([11]), co pozwoliło uzyskać niejeden satysfakcjonujący wynik.

Badania zbiorów generujących mogą być także użyteczne w klasyfikacji podgrup ustalonej grupy kwantowej: każda z nich jest generowana przez pewien kwantowy podzbiór. Wysoka ranga opisu struktury kraty podgrup kwantowych danej grupy kwantowej nie podlega dyskusji. Zadanie to postawiono explicite w [4] w przypadku kwantowych grup permutacji S_n^+ i związane było z klasycznym rozumieniem podgrup grupy permutacji: skoro są to symetrie zbioru n-elementowego bez struktury, jej podgrupy odpowiadają symetriom zachowującym pewną (geometryczną bądź kobimnatoryczną) strukturę tej przestrzeni. Badania kwantowych symetrii grafów (m.in. [2, 6, 7]) oparte były na wskazaniu podgrup kwantowych, które zachowywały pewną strukturę klasyczną. Dokładny opis struktury podgrup kwantowych grup permutacji pozwoliłby na zidentyfikowanie pewnego rodzaju *kwantowych struktur* zbioru n-elementowego, których to struktur symetrie byłby opisywane przez te podgrupy kwantowe.

Rozprawa zawiera dokładny opis pojęcia podgrupy kwantowej generowanej przez podzbiór kwantowy (tj. obrazu Hopfa ustalonego morfizmu). Rozważamy pytania w duchu tych zaanonsowanych na wstępie, lecz kluczowym składnikiem pracy jest opis procedury generowania samej w sobie. To dokładny opis procedury generowania pozwala uzyskać wyniki dotyczące własności zbiorów generujących. Materiał jest podzielony na cztery rozdziały.

Rozdział pierwszy zawiera, głównie choć nie jedynie, przygotowania potrzebne do czytania rozprawy. Zebraliśmy rozmaite wyniki występujące w literaturze dotyczące przestrzeni Banacha i ich przekształceń (część pierwsza), teorii C^*-algebr i algebr von Neumanna (część druga) oraz teorii grup kwantowych (część trzecia). Rozbudowana prezentacja mogłaby być bardziej skondensowana, lecz zależało nam na zarysowaniu szerokiego obrazu. Szczegółowy opis niektórych elementów teorii grup kwantowych był również pomocny dla wprowadzania obiektów rozważań w bardziej naturalny i logiczny sposób. Dzięki niemu wygodniej również było wprowadzić oznaczenia. W części 1.2.2 uwzględniliśmy pewne wyniki wraz z dowodami, których nie udało nam się znaleźć w literaturze w formie, w której ich będziemy potrzebować. Ich wersja jest na pewno znana ekspertom i nie przypisujemy sobie ich odkrycia. Istotnie, główny wynik części 1.2.2 można znaleźć w Appendiksie książki [5] w przypadku reprezentacji grup, zaś my używaliśmy ich w kontekście reprezentacji C^*-algebr. Jednak nawet w przypadku reprezentacji grup dowód umieszczony w części 1.2.2 jest krótszy i łatwiejszy niż ten zawarty w książce [5].

Rozdział drugi zawiera kluczowe elementy rozprawy. Koncepcja obrazu Hopfa jest zaprezentowana i badana dogłębnie. W pierwszej części rozdziału podajemy dokładne sformułowanie problemu istnienia obrazu Hopfa. W części 2 podajemy konstrukcję i kilka pierwszych własności algebr von Neumanna, które grają w tej konstrukcji istotną rolę. Kończymy tę część podając dowód własności uniwersalnej obrazu Hopfa. Część trzecia poświęcona jest porównaniu naszej konstrukcji obrazu Hopfa z innymi, znanymi w literaturze, pojęciami odpowiadających generowaniu grupy kwantowej. W szczególności, konfrontujemy naszą konstrukcję z:

1. konstrukcją algebraiczną obrazu Hopfa dla *-algebr Hopfa á la Banica i Bichon;

2. konstrukcją C^*-algebraiczną obrazu Hopfa dla zwartych grup kwantowych á la Skalski i Sołtan;

3. teorio-reprezentacyjnym opisem obrazu Hopfa zwartej macierzowej grupy kwantowej á la Brannan, Collins i Vergnioux oraz

4. pojęciem (skończonego) zbioru generującego dla dyskretnej grupy kwantowej á la Izumi i Vergnioux.

W rozdziale 3 zebraliśmy rozmaite wyniki dotyczące konstrukcji obrazu Hopfa. Większość z nich jest sformułowanych dla lokalnie zwartych grup kwantowych, lecz część z nich byliśmy w stanie udowodnić jedynie przy pewnych dodatkowych założeniach. Motywem przewodnim tych wyników jest *perspektywa lokalna*, którą zapewnia pojęcie obrazu Hopfa. Formułujemy również pewne kryteria pozwalające stwierdzić, czy dany zbiór jest generującym. Dalej podajemy pierwsze przykłady kwantowych zbiorów generujących. Część z nich otrzymujemy dzięki przeinterpretowaniu istniejących wyników z literatury przy pomocy technik i wyników rozdziału 2. Formułujemy również własność (FAG) dotyczącą pewnej specjalnej roli podgrupy charakterów w procedurze generowania. Własność ta ma charakter równoważności, w której jedna z implikacji jest stosunkowo prosta i wystarczy do uzyskania pewnych konkluzji w rozdziale czwartym. Implikację przeciwna nie zachodzi w pełnej ogólności z powodów analitycznych, lecz formułujemy pewne warunki, przy których analityczne przeszkody przestają grać rolę. Jednak grupa kwantowa posiada własność (FAG), jesteśmy w stanie uzyskać kilka ciekawych wniosków.

W rozdziale czwartym podajemy również pierwszy prawdzwie kwantowy przykład zbioru generującego: kwantowe ciągi rosnące $\mathbb{I}_{2,4}$ generują kwantową grupę permutacji S_4^+, co daje odpowiedź na pytanie Skalskiego i Sołtana z [17]. Do odpowiedzi na to pytanie używamy własności badanej w rozdziale 3. Dalej podajemy pewne dodatkowe wyniki dotyczące kwantowej grupy permutacji S_4^+. Nie wszystkie z nich są bezpośrednio związane z zagadnieniem obrazu Hopfa, lecz dają lepszy opis tej grupy kwantowej. Bazując na wcześniejszej pracy Baniki i Bichona ([3]), jesteśmy w stanie:

1. podać grupę automorfizmów S_4^+;
2. sklasyfikować włożenia $O_{-1}(2) \subset S_4^+$;
3. sklasyfikować włożenia $A_5^\tau \subset S_4^+$;

Powodem, dla którego koncentrujemy się na włożeniach $O_{-1}(2)$ i A_5^τ w S_4^+ jest fakt wynikający z rezultatów otrzymanych w [3]: są to maksymalne podgrupy właściwe. Dzięki uzyskanej klasyfikacji włożeń podgrup $O_{-1}(2)$ i A_5^τ w S_4^+ jesteśmy w stanie pokazać, że S_4^+ nie ma własności (FAG), tj. (FAG) jest faktycznie własnością grupy kwantowej, nie stwierdzeniem o wszystkich grupach kwantowych. Pokazujemy również, jak przy pomocy podanego kryterium można łatwo wywnioskować hiperliniowość grupy kwantowej $\widehat{S_4^+}$.

Bibliografia

[1] A. Andersson, *Detailed balance as a quantum-group symmetry of Kraus operators*, ArXiv e-prints, (2015).

[2] T. Banica, *Quantum automorphism groups of homogeneous graphs*, J. Funct. Anal., 224 (2005), pp. 243–280.

[3] T. Banica and J. Bichon, *Quantum groups acting on 4 points*, J. Reine Angew. Math., 626 (2009), pp. 75–114.

[4] T. Banica, J. Bichon, and B. Collins, *Quantum permutation groups: a survey*, in Noncommutative harmonic analysis with applications to probability, vol. 78 of Banach Center Publ., Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2007, pp. 13–34.

[5] B. Bekka, P. de la Harpe, and A. Valette, *Kazhdan's property (T)*, vol. 11 of New Mathematical Monographs, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[6] J. Bichon, *Quantum automorphism groups of finite graphs*, Proc. Amer. Math. Soc., 131 (2003), pp. 665–673 (electronic).

[7] A. Chassaniol, *Quantum automorphism group of the lexicographic product of finite regular graphs*, ArXiv e-prints, (2015).

[8] M. Daws, P. Fima, A. Skalski, and S. White, *The Haagerup property for locally compact quantum groups*, J. Reine Angew. Math., 711 (2016), pp. 189–229.

[9] M. Daws, P. Kasprzak, A. Skalski, and P. M. Sołtan, *Closed quantum subgroups of locally compact quantum groups*, Adv. Math., 231 (2012), pp. 3473–3501.

[10] U. Haagerup, *An example of a nonnuclear C^*-algebra, which has the metric approximation property*, Invent. Math., 50 (1978/79), pp. 279–293.

[11] M. Izumi, *Non-commutative Poisson boundaries and compact quantum group actions*, Adv. Math., 169 (2002), pp. 1–57.

[12] P. Kasprzak and P. M. Sołtan, *Quantum groups with projection and extensions of locally compact quantum groups*, ArXiv e-prints, (2014).

[13] P. Kasprzak and P. M. Sołtan, *Quantum groups with projection on von Neumann algebra level*, J. Math. Anal. Appl., 427 (2015), pp. 289–306.

[14] H. Kesten, *Full Banach mean values on countable groups*, Math. Scand., 7 (1959), pp. 146–156.

[15] J. Kustermans and S. Vaes, *Locally compact quantum groups*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 33 (2000), pp. 837–934.

[16] R. Meyer, S. Roy, and S. L. Woronowicz, *Homomorphisms of quantum groups*, Münster J. Math., 5 (2012), pp. 1–24.

[17] A. Skalski and P. M. Sołtan, *Quantum families of invertible maps and related problems*, Canad. J. Math., 68 (2016), pp. 698–720.

[18] S. Vaes, *Locally compact quantum groups*, PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven, 2001.

[19] R. Vergnioux, *KK-thèorie équivariante et opérateur de Julg-Valette pour les groupes quantiques*, PhD thesis, Université Paris 7 - Denis Diderot, 2002.

[20] ———, *K-amenability for amalgamated free products of amenable discrete quantum groups*, J. Funct. Anal., 212 (2004), pp. 206–221.

[21] ———, *Orientation of quantum Cayley trees and applications*, J. Reine Angew. Math., 580 (2005), pp. 101–138.

[22] S. L. Woronowicz, *Pseudospaces, pseudogroups and Pontriagin duality*, in Mathematical problems in theoretical physics (Proc. Internat. Conf. Math. Phys., Lausanne, 1979), vol. 116 of Lecture Notes in Phys., Springer, Berlin-New York, 1980, pp. 407–412.

[23] ———, *Tannaka-Kreĭn duality for compact matrix pseudogroups. Twisted* $\mathrm{SU}(N)$ *groups*, Invent. Math., 93 (1988), pp. 35–76.

[24] ———, *Compact quantum groups*, in Symétries quantiques (Les Houches, 1995), North-Holland, Amsterdam, 1998, pp. 845–884.