prof. Anna Zdunik
Instytutu Matematyki
Wydział Matematyki, Informatyki I Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Warszawa, 30.09.2020

Recenzja rozprawy doktorskiej pana Rezy Mohammadpour Bejargafsheh

Pan Reza Mohammadpour Bejargafsheh złożył rozprawę doktorską „Thermodynamic formalizmm and multifractal analysis for matrix cocycles and solenoids". Promotorem pracy jest dr hab. Michał Rams.

Wyniki opisane w rozprawie pochodzą z trzech artykułów, z których jeden- bez współautorów -został już opublikowany (jest to praca „Zero temperature limits of equilibrium states for subadditive potentials and approximation of maximal Lyapunov exponent", Topological Methods in Nonlinear Analysis 55 (2020)).
Pozostałe dwie prace to preprinty umieszczone w bazie Arxiv: praca bez współautorów „Lyapunov spectrum properties and continuity of the lower joint spectrum radius", oraz artykuł napisany wspólnie z M.Ramsem i F.Przytyckim: „Hausdorff and parking dimensions and measures for non-linear non-conformal thin solenoids.

Rozdział 1 pracy jest poświęcony przedstawieniu wyników rozprawy (twierdzenia 1.2.1- 1.2.7).

Bardzo obszerny rozdział 2 zawiera przegląd narzędzi używanych w pracy, oraz pewnych klasycznych twierdzeń potrzebnych w dalszych rozważaniach. Autor opisując te wyniki posiłkował się wieloma źródłami.

Pierwsza część rozdziału 3 (podrozdziały 3.1- 3.4) ma również charakter ekspozycyjny i wprowadza do szczegółowych zagadnień, których dotyczą twierdzenia 1.2.1 - 1.2.6 rozprawy. Dowody tych sześciu twierdzeń są omówione w rozdziale 3.5 (strony 45-61).

Wreszcie, rozdział 4 jest oparty na wspomnianym niedawnym preprincie wspólnym z F.Przytyckim i M. Ramsem, a dokładniej- zawiera dowód jednego z twierdzeń (Theorem A) z tego preprintu.

Poniżej omawiam i oceniam wyniki otrzymane w rozprawie.

Twierdzenia 1.2.1, 1.2.2, 1.2.4, 1.2.5, 1.2.6 dotyczą intensywnie obecnie badanych kocykli macierzowych określonych na dynamicznej przestrzeni symbolicznej Σ , na której działa topologiczny łańcuch Markowa T (subshift of finite type). Kocykl wyznacza hölderowska funkcja $\mathscr{A}$ przyporządkowująca elementowi przestrzeni Σ odwracalna macierz nad $\mathbb{R}^k$.
Dodatkowe założenie dotyczy typowości kocyklu. Autor posługuje się pojęciem typowości opisanej w pracy Parka (referencja [P] w rozprawie).

Pierwszym twierdzeniem anonsowanym przez Autora jest Theorem 3.5.1. (czyli początek Theorem 1.2.2 ze wstępu). Podaje ono dla typowego kocyklu rodzaj wariacyjnego formuły na entropię (w sensie Bowena) przekształcenia T na zbiorze $E(\overline{\alpha})$, czyli na zbiorze tych elementów przestrzeni Σ, dla których spektrum Lapunowa jest danym wektorem $\overline{\alpha}$.
Autor ograniczył się do stwierdzenia ze dowód jest prostą modyfikacją dowodów z prac [FH] i [F]. Dowód powinien być jednak zamieszczony, tym bardziej ze już wskazywane jako źródło twierdzenie 4.10 z pracy [FH] jest podane bez dowodu i opatrzone tylko komentarzem że jest to łatwa modyfikacja dowodu Theorem 1.1 z [F].

Twierdzenie 3.5.2 jest poświęcone dowodowi drugiej równości w Twierdzeniu 1.2.1. W tym dowodzie warto było sprawdzić podane własności funkcji $g(\vec{t})$ („concave and semicontinuous"). Poza tym, zabrakło szczegółowych wyjaśnień jak otrzymano ostatnią formułę, kończąca dowód.

Następnie Autor dowodzi Twierdzenia 1.2.1, które mówi że dla typowego kocyklu spektrum Lapunowa $\vec{L}$ pokrywa się z domknięciem zbioru tych wektorów $\vec{\alpha}$, dla których entropia na zbiorze $E(\vec{\alpha})$ jest dodatnia. Dowód jest modyfikacją znanego rozumowania dla przypadku jednowymiarowego, uzupełnionym nowym wynikiem Parka, mówiącym że zbiór $\vec{L}$ jest wypukły i domknięty. Potrzebna jest też informacja o tym że $\vec{L}$ ma niepuste wnętrze.

Twierdzenie 1.2.3 dotyczy szerszego zagadnienia formalizmu termodynamicznego dla potencjałów podaddytywnych. Teoria dla takich potencjałów została w ostatnich latach zbudowana , na wzór teorii dla potencjałów addytywnych, przez, między innymi, Cao , Fenga i Huanga. W zbudowanej przez nich teorii brakowało jednak omówienia granic zerotemperaturowych i miar maksymalizujących całkę z danego potencjału, czyli przeniesienia tych twierdzeń znanych z teorii „addytywnej" na przypadek subaddytywny. Autor zauważył te lukę i wypełnił ja twierdzeniem 1.2.3. Dowód twierdzenia przebiega podobnie jak w przypadku addytywnych, jednak z koniecznymi modyfikacjami; dowód Autora wydaje się modelowany na dowodzie z pracy [JMU].

Twierdzenie 1.2.4 jest uogólnieniem wyniku wykazanego przez Fenga i Schmerkina dla kocykli lokalnie stałych. Posługując się niedawnymi wynikami Parka, Autor dowodzi ciągłości funkcji

$$(\mathscr{A}, t) \mapsto h_{top}E_{\mathscr{A}}(\alpha_t),$$

gdzie $\mathscr{A} \in \mathscr{W}$, zaś α_t jest pochodną funkcji $P_{\Phi_{\mathscr{A}}}()$ w punkcie t. Kolejne twierdzenie dotyczy zachowania przy $t \to \infty$.
W tym dowodzie wykorzystano umiejętnie szereg ciekawych obserwacji pochodzących z wcześniejszych źródeł. Zabrakło mi wyjaśnienia półciągłości z góry dla wykładników Lapunowa oraz precyzyjnego sformułowania twierdzenia: jakiej topologii/ metryki używamy mówiąc o zbieżności ciągu kocykli.
Szkoda również ze Autor pominął dowód uogólniającego twierdzenia 3.5.21.

Rozważania rozdziału 3.5.6 wyglądają najciekawiej z tej części pracy.
Autor posługuje się pojęciem kocyklu dominowanego (dominated) - własność wyrażona w języku wartosci singularnych iteracji (w sensie kocyklu).

Twierdzenie 1.2.5 dotyczy ciągłości minimalnego wykładnika Lapunowa $\alpha(\mathscr{A})$ ze względu na kocykl, przy założeniu 1- dominacji. To zagadnienie badali Bochi i Morris.

Proposition 3.5.23 zawiera ciekawą obserwację: z istnienia rodziny stożków niezmienniczych wnioskuje się że kocykl jest „prawie multiplikatywny".
W dowodzie Proposition 3.5.23 pojawia się bez wyjaśnienia szereg własności stożków D_x, z których nie wszystkie są oczywiste, na przykład trzecia z tych własności wymaga chyba powołania się na twierdzenia 2.9.2 i 2.9.3?
W dowodzie wykorzystuje się geometryczny Lemat 3.5.24 z dość ładnym dowodem (który jednak został napisany przez Autora w wersji dwuwymiarowej(?)).
Twierdzenia 3.5.25 i 3.5.26 dotyczą ciagłości minimalnego wykładnika Lapunowa przy założeniu istnienia rodziny stożków niezmienniczych. Nie wyjaśniono wystarczająco jak mają się te twierdzenia do anonsowanego Theorem 1.2.5 a także jak ma się Theorem 1.2.5 do wyników pracy Bochi -Morris.

Wreszcie, w twierdzeniu 1.2.6 Autor zauważa ze niedawny wynik Parka dotyczący ciągłości funkcji ciśnienia dla kocyklu można uogólnić na hölderowskie kocykle. W tym celu Autor używa wyniku Backesa, Browna i Butlera o ciągłości wykładnika Lapunowa jako funkcji kocyklu.

Podsumowanie wyników Rozdziału 3 rozprawy:
W tej części Autor dokonał szerokiego przeglądu niełatwej literatury dotyczącej aktualnej i dynamicznie rozwijającej się tematyki. Już samo zapoznanie się z tak obszerna literaturą świadczy o włożonym dużym wysiłku i o pewnej umiejętności porządkowania wiedzy.
Autor w tej części rozprawy zawarł kilka interesujących obserwacji, uzupełniając budującą się teorię brakującymi elementami, częściowo wzorując się na istniejących pracach. W kilku miejscach zauważył w jaki sposób poprawić istniejące wyniki, posługując się najnowszymi pracami.
W tej części rozprawy brakuje mi bardziej rozbudowanych rozumowań, poza zawartością części podrozdziału 3.5. Niewątpliwie jednak Autor wykazał się erudycją.

Druga część rozprawy, zawarta w rozdziale 4, ma inny charakter. Cały ten rozdział jest poświęcony wnikliwej geometrycznej analizie konkretnego układy dynamicznego (niekonforemnego solenoidu). Ten rozdział zawiera wyniki pochodzące ze wspólnej pracy autora rozprawy z promotorem oraz F.Przytyckim. Omawiane wyniki stanowią uogólnienie wyników Schmellinga i Hasselblatta [HS] i odpowiadają na pytania/przypuszczenia zawarte w ich pracy. W pierwszej części pracy rozumowania są motywowane podobnymi rozumowaniami we wspomnianej pracy [HS].

Omawiana wspólna publikacja zawiera więcej wyników; w rozprawie omówiono tylko wynik dotyczący wymiaru Hausdorffa. Solenoid to zbiór graniczny dla iteracji pewnego przekształcenia pełnego torusa; torus jest reprezentowany jako produkt kartezjański $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}$. W tych współrzędnych, przekształcenie ma postać:

$$f(x, y, z) = (\eta(x), \lambda(x, y) + u(x), \nu(x, y, z) + v(x))$$

gdzie η jest rozciągającym przekształceniem okręgu oraz jest spełniony warunek nierówności między pochodnymi:

$$0 < \nu' < \lambda' < 1, \quad 1 < \eta' < \lambda',$$

gdzie przez η', λ', ν' oznaczono pochodne cząstkowe tych funkcji, odpowiednio względem x, y, z. Intuicja stojąca za dowodem mówi że ściąganie w kierunku z jest mocniejsze niż w kierunku y, co powinno skutkować tym ze wymiar daje się wyrazić tylko poprzez funkcję λ'.

Otrzymany solenoid jest więc „niekonforemny" i wyznaczenie jego wymiaru Hausdorffa napotyka na znaczne trudności, typowe dla układów niekonforemnych bądź konforemnych iteracyjnych układów funkcyjnych z przecięciami.

Kluczowe dla dowodu jest założenie transwersalności: rozpatrzmy dwie różne rozmaitości niestabilne $W^u(p), W^u(q)$, i ich rzuty na płaszczyznę (x,y). Rozmaitości niestabilne nie przecinają się, ale ich rzuty - mogą się przecinać. Założenie mówi ze każde takie przecięcie jest transwersalne. (Pozostaje do rozważenia inne, naturalne pytanie: kiedy to założenie jest spełnione?)

Twierdzenie, którego dowód został zamieszczony w rozprawie daje wzór na wymiar Hausdorffa solenoidu oraz jego przecięcia z rozmaitością stabilna. Wymiar jest wyrażony przez wersję formuły Bowena dla potencjału $t \log \lambda'$ co odpowiada wspomnianej wyżej intuicji. Założenia są formalnie słabsze niż wskazane powyżej; zamiast nierówności pomiędzy opisywanymi pochodnymi cząstkowymi wystarczy założyć odpowiednie nierówności pomiędzy całkami względem miary SRB pojawiającej się w dowodzie.

W dowodzie używa się subtelnej analizy holonomii między rozmaitościami stabilnymi, wyznaczonej przez włókna niestabilne. Wyróżnia się zbiór punktów „strong locally Lipschitz" (Definicja 4.3.2, oznaczenie L^s) . Dla dowodu kluczowe są trzy obserwacje: (lokalna) lipschitzowskość holonomii na zbiorze L^s, dalej- obserwacja mówiąca ze w punktach L^s lokalna rozmaitość silnie stabilna w przecięciu z solenoidem daje tylko ten wyjściowy punkt oraz twierdzenie mówiące ze dla miary Gibbsa μ dla potencjału $t_0 \log \lambda$ zbiór L^s jest pełnej miary.

Całość dowodu twierdzenia jest poprowadzona zgodnie z ogólna koncepcją z pracy Schmellinga i Hasselblatta. W tej wyjściowej publikacji rozpatrywano jednak liniowy uproszczony

AC

model; ogólna sytuacja omawiana w rozprawie przynosi istotne nowe trudności związane z nieliniowością.

Jest to wartościowy wynik, a narzędzia wypracowane w tej części preprintu były również użyteczne w dowodach kolejnych twierdzeń wspólnej publikacji (nie zamieszczonych w rozprawie).

Uwagi o usterkach w pracy:

Redakcja rozprawy pozostawia wiele do życzenia i jest bardzo nierówna. Obok fragmentów napisanych poprawnie trafiają się liczne zdania niepoprawne pod względem formalnym lub językowym bądź wręcz niezrozumiałe. Odnosi się wrażenie ze tylko cześć pracy została pod tym względem sprawdzona przed złożeniem.

Inne konkretne usterki:

Niefortunne, lub nieprawdziwe napisy w rozdziale 2: „ dim_H is said to satisfy the open set property <u>if (??)</u> for any bounded open set $dim_H(U) = n$".
Cytowany Lemat Frostmana ma w założeniu nierówność w przeciwna stronę.

Strona 40 (II) jest v_i zamiast v_j.

Strona 43 definicja zbioru $\overrightarrow{L}$: brakuje zależności od x w definicji.

Strona 44 Cytowane we wstępnej części pracy Theorem 3.4.16 - nie jest jasne jak (łatwo) wynika ze wskazanych źródeł.

Strona 48, w dowodzie Theorem 3.5.8 korzysta się, jak sadzę, również z tego ze zbiór $\overrightarrow{L}$ ma niepuste wnętrze. Jeśli tak, to należałoby ten fakt uzasadnić.

Strona 52 , dowód Lematu 3.5.15 trudno uznać za satysfakcjonujący. Jest to raczej (bardzo) luźno naszkicowany nieformalny zapis dowodu.

Strona 52, formuła (3.5.4.1) jest formalnie niepoprawna, nie może zachodzić przecież dla każdego $\varepsilon > 0$.

Strona 53 l-7 zdanie „Notice that the Lyapunov exponents are upper semicontinuous"...nie wyjaśniono względem czego ma być spełniona ta własność półciągłości.

Strona 58 dowód Lematu 3.5.24 - formalnie jest zapisany, jak się wydaje, w $\mathbb{R}^2$.

Strona 69, definicja własności strong locally Lipschitz: pojawia się tu wartość $\eta_n(p)$, która nie została w rozprawie zdefiniowana. Czytelnik musi sięgnąć do preprintu, i tam odnaleźć potrzebną definicję.

Strona 70, Remark 4.3.3. Chodzi tu zapewne o przecięcie nie z rzutem całej rozmaitości niestabilnej, ale z krótkim fragmentem rzutu rozmaitości niestabilnej (podobnie jak w definicji 4.3.2). Poza tym, p powinno być zapewne zastąpione przez q w pierwszej nierówności.

Strona 73, ostatni akapit tekstu: We replace $\log \lambda' \circ f^{-1}$ by a function(...) not depending on future. Jest to zapewne wskazanie pewnego dość standardowego zabiegu (pochodzącego od Bowena?). Zabrakło wyjaśnienia.

Strona 78 Lemma 4.5.1 Autor zmienił kolejność napisów w stosunku do preprintu, na skutek czego czytelnik nie wie czym jest zbiór H_i, o którym mówi ten lemat, i dowiaduje się dopiero po zakończeniu dowodu Lematu, na stronie 79 (Definition 4.5.3).

AZ

Podsumowanie

Jak wskazałam w recenzji, rozprawa składa się z dwóch części o różnym charakterze. Wartością pierwszej części jest wykazana w niej umiejętność Autora samodzielnego opanowania nowej aktualne tematyki, korzystanie z bogatego zasobu źródeł i umiejetność trafnego wskazania możliwych uzupełnień w obrębie badanej teorii. Słabością w tej części jest, według mnie, ograniczona innowacyjność rozumowań prowadzonych przez Autora- prezentowane dowody raczej modyfikują istniejące rozumowania i pomysły niż używają własnych oryginalnych metod.

Druga cześć pracy zawiera subtelne idee i ładne, zaawansowane dowody. Autor rozprawy jest co prawda jednym z trzech współautorów preprintu, ale uznaję żę jako współautor miał on istotny wkład w powstanie wspólnej publikacji (a przynajmniej tej jej części, która została włączona do rozprawy).

Biorąc pod uwagę powyższą ocenę, mimo sformułowanych powyżej licznych uwag krytycznych, ostatecznie oceniam rozprawę pozytywnie i uznaję że spełnia ona zwyczajowe i ustawowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę o dopuszczenie Doktoranta do dalszych etapów postępowania.

Ana Zolih