Skręcone ściany w grupach losowych - streszczenie

Tomasz Odrzygóźdź

Początki teorii grup losowych sięgają pracy Gromova [Gro93], w której wprowadził on konstrukcję skończenie generowanej grupy poprzez losowanie jej prezentacji (nazywaną modelem Gromova grupy losowej). Pierwotnymi motywacjami do wprowadzenia tego pojęcia były pytania: „jakie właściwości są typowe dla grup?” oraz „jak wygląda typowy element grupy?”. Wyniki badań pokazały, że „typowe” (w sensie wspomnianego modelu) grupy mogą być dość egzotyczne, tzn. posiadać stosunkowo rzadkie własności, jak np. własność (T) Kazhdana (definicję i szerokie omówienie pojęcia można znaleźć w [BdlHV08]).

Pytanie o posiadanie własności (T) przez grupy losowe jest jednym z najważniejszych pytań w dziedzinie, co wynika stąd, że w ogólności ciężko buduje się nieoczywiste przykłady grup z własnością (T). Szczególnym przypadkiem tego pytania jest znalezienie precyzyjnych parametrów losowania, dla których grupy losowe mają własność (T). Drugim równie ważnym zagadnieniem jest pytanie o to, czy grupa losowa dopuszcza metrycznie właściwe i kozwarte działanie na kompleksie kostkowym CAT(0), co można intuicyjnie rozumieć jako działanie na kompleksie, który jest niedodatnio zakrzywiony.

Prezentacje grup losowych w modelu Gromova zawierają dużo bardzo długich słów (długość i liczba słów dążą do nieskończoności), wobec czego kompleks Cayleya takiej grupy składa sie z dwuwymiarowych komórek będących l-kątami, gdzie wartości l są bardzo duże. Analiza geometrii takiego kompleksu jest skomplikowana, dlatego jedną z możliwości jest analiza moodeli k-kątnych, w których długość słów w prezentacji jest stała, a jedynie ich liczba dąży do nieskończoności razem z liczbą generatorów grupy.

W rozprawie przedstawiono analizę modelu czworokątnego i szcześciokątnego. Wyniki zawarte w tej rozprawie, razem ze znanymi faktami w dziedzinie, dostarczają pewnego obrazu dotyczącego występowania własności (T) w różnych modelach k-kątnych.

1 k-kątny model grupy losowej

W tej sekcji wprowadzimy formalnie model k-kątny, który z jednej strony jest uogólnieniem znanych modeli: trójkątnego (wprowadzonego w pracy [Żuk03]) i czworokątnego (wprowadzonego w pracy [Odr16]), zaś z drugiej może być postrzegany jako aproksymacja modelu Gromova rodziną prostszych modeli.

Definicja 1.1 (model k-kątny)**.** Niech $n > 2$ będzie liczbą naturalną i niech S_n będzie zbiorem n liter. Ustalmy parametr $d \in (0, 1)$ nazywany *gęstością*.

Niech W_n będzie zbiorem wszystkich cyklicznie zredukowanych słów długości k nad S_n (dopuszczamy odwrotności elementów z S_n jako litery). Niech R_n będzie podzbiorem W_n zawierającym $(2n-1)^{kd}$ elementów, wybranym losowo z rozkładu jednostajnego spośród wszystkich podzbiorów W_n o tej liczebności. *Grupą losową w modelu* $\mathcal{G}(n,k,d)$ nazywamy grupę zadaną poprzez prezentację $\langle S_n | R_n \rangle$. Model $\mathcal{G}(n,k,d)$ nazywamy też *modelem k-kątnym o n generatorach i gęstości d*).

Dla $k=3$ nazywamy ten model *modelem trójkątnym* lub *modelem Żuka*, dla $k=4$ *modelem czworokątnym*, a dla $k=6$ *modelem sześciokątnym.*

Niech $\mathcal{P}$ oznacza pewną własość grup (np. własność (T) lub własność Haagerupa). Powiemy, że własność $\mathcal{P}$ zachodzi *z przytłaczającym prawdopodobieństwem (z p.p.)* w modelu k-kątnym o gęstości d jeśli prawdopodobieństwo tego, że grupa losowa w modelu $\mathcal{G}(n,k,d)$ ma Własność $\mathcal{P}$ dąży do 1 gdy n dąży do nieskończoności.

Powiemy, że liczba $d_{\mathcal{P}}$ jest *ostrym progiem prawdopodobieństwa* dla własności $\mathcal{P}$, jeśli zachodzą następujące warunki:

- dla gęstości $< d_{\mathcal{P}}$ grupa losowa w k-kątnym modelu z p.p. nie ma własności $\mathcal{P}$,
- dla gęstości $> d_{\mathcal{P}}$ grupa losowa w k-kątnym modelu z p.p. ma własność $\mathcal{P}$.

2 Główne wyniki i ich kontekst

W tej sekcji przedstawimy główne wyniki oraz podamy uzasadnienie ich znaczenia.

Twierdzenie A. *Ostry próg prawdopodobieństwa występowania własności* (T) *w modelu sześciokątnym wynosi* $\frac{1}{3}$.

Dowód twierdzenia A składa się z dwóch cześci: pokazania, że w modelu sześciokątnym dla gęstości $> \frac{1}{3}$ grupy losowe z p.p. mają własność (T), oraz udowodnienia, że dla gęstości $< \frac{1}{3}$ z p.p. nie mają własności (T). Pierwsza część dowodu jest powtórzeniem znanego argumentu przedstawionego w pracach [Żuk03] i [KK13].

Dowód braku własności (T) dla gęstości $< \frac{1}{3}$ jest jednym z głównych celów rozprawy.

Główna idea dowodu braku własności (T) polega na skonstruowaniu nietrywialnego działania grupy losowej na kompleksie kostkowym CAT(0). W tym celu znajdujemy najpierw działanie grupy losowej na przestrzeni ze ścianami. Ogólna idea konstruowania działania grupy losowej na przestrzeni ze ścianami pochodzi z prac [OW11] oraz [PM14]. Główną trudnością jest znalezienie systemu ścian dobrze dopasowanego do geometrii kompleksu Cayleya grupy.

Znalezienie ostrego progu na występowanie własności (T) w modelu sześciokątnym było możliwe, z uwagi na fakt, że metody geometryczne, które pozwalają znajdować nietrywialne działania na kompleksach kostkowych CAT(0) przestają działać przy dokładnie tej samej gęstości, przy której zaczyna działać kryterium spektralne pozwalające dowodzić występowania własności (T).

Ostry próg prawdopodobieństwa dla występowania własności (T) Kazhdana znany jest jeszcze w modelu trójkątnym Żuka i również wynosi on $\frac{1}{3}$. W modelu Żuka grupy losowe dla gęstości mniejszych od $\frac{1}{3}$ są z p.p. wolne, więc brak własności (T) jest tego oczywistą konsekwencją. Ciekawym punktem badań jest przyjrzenie się przejściu przez gęstość $\frac{1}{3}$ w „powiększeniu", tj. zbadanie tego, co dzieje się w otoczeniu tej gęstości. Wyniki dotyczące tego tematu można znaleźć w pracach [AŁŚ14] i [AŁŚ15]. W modelu sześciokątnym dla gęstości $> \frac{1}{6}$ grupa losowa nie jest wolna, gdyż ma dodatnią charakterystykę Eulera, wobec tego przejście przez próg $\frac{1}{3}$ ma w tym modelu inny charakter niż w modelu trójkątnym.

Twierdzenie A jest krokiem w kierunku zrozumienia istotnego problemu dotyczącego znalezienia ostrego progu prawdopodobieństwa na występowanie własności (T) w modelu Gromova. Modele k-kątne można traktować jak aproksymację modelu Gromova, a tym samym jako pole testowe dla metod mogących posłużyć badaniom modelu Gromova.

Kolejnym ważnym wynikiem w rozprawie jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie B. *W modelu czworokątnym dla gestości $< \frac{3}{8}$ grupa losowa z p.p. nie ma własności* (T).

Dowód Twierdzenia B znajduje polega na zastosowaniu tych samych technik, co w dowodzie Twierdzenia A.

Twierdzenie C. *Dla gęstości $d < \frac{3}{10}$ grupa losowa w modelu czworokątnym z p.p. działa właściwie i kozwarcie na kompleksie kostkowym* CAT(0).

Dowód Twierdzenia C został opublikowany przez autora w pracy [Odr18]. Główną ideą dowodu jest znalezienie metrycznie właściwego działania grupy losowej na przestrzeni ze ścianami, a następnie użycie konstrukcji Sageeva (opisanej w [CN05]) do zbudowania żądanego działania na kompleksie kostkowym CAT(0). Wymaga to skonstruowania odpowieniego systemu ścian spełniającego znacznie silniejsze warunki niż system ścian użyty w dowodzie Twierdzenia B. Metody, które proponujemy prawdopodobnie mogą być skuteczne aż do gęstości $\frac{1}{3}$, jednak z powodu dużych trudności technicznych przedstawiamy dowód z silniejszym ograniczeniem na gęstość modelu.

Z Twierdzenia C płynie ważny wniosek:

Wniosek D. *Grupa losowa w modelu czworokątnym o gęstości $< \frac{3}{10}$ z p.p. jest rezydualnie skończona oraz ma własność Haagerupa.*

Na potrzeby uzyskania wyników zawartych w rozprawie stworzono też szereg narzędzi geometrycznych oraz wzmocniono znane metody: opisano uogólnienie nierówności izoperymetrycznej (dotyczącej diagramów van Kampena grup losowych) na pewną klasę diagramów nieplanarnych, wprowadzono nowe pojęcia geometryczne: diagramy kołnierzowane przez wiele segmentów hipergrafu oraz pokazano metodę redukcji takich diagramów. Dodatkowo, wprowadzono drzewo pętli oraz drzewo diagramów. Pojęcia te mogą znaleźć w przyszłości zastosowanie w analizie innych modeli grup losowych.

3 Literatura

[AŁŚ14] S. Antoniuk, T. Łuczak, i J. Świątkowski, *Collapse of random triangular groups: a closer look*, Bull. Lond. Math. Soc. **46** (2014), no. 4, 761–764.

[AŁŚ15] S. Antoniuk, T. Łuczak, i J. Świątkowski, *Random triangular groups at density 1/3*, Compos. Math. **151** (2015), no. 1, 167–178.

[BdlHV08] B. Bekka, P. de la Harpe, i A. Valette, *Kazhdan's property (T)*, New Mathematical Monographs, vol. 11, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[CN05] I. Chatterji i G. A. Niblo, *From wall spaces to* CAT(0) *cube complexes*, Internat. J. Algebra Comput. **15** (2005), no. 5-6, 875–885.

[Gro93] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, pp. 1–295.

[KK13] M. Kotowski i M. Kotowski, *Random groups and property* (T)*: Żuk's theorem revisited*, J. Lond. Math. Soc. (2) **88** (2013), no. 2, 396–416.

[Odr16] T. Odrzygóźdź, *The square model for random groups*, Colloq. Math. **142** (2016).

[Odr18] ———, *Cubulating random groups in the square model*, Isr. J. Math. (2018).

[OW11] Y. Ollivier i D. T. Wise, *Cubulating random groups at density less than* $1/6$, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), no. 9, 4701–4733.

[PM14] P. Przytycki i J. Mackay, *Balanced walls for random groups*, arXiv:1407.0332 (2014).

[Żuk03] A. Żuk, *Property (T) and Kazhdan constants for discrete groups*, Geom. Funct. Anal. **13** (2003), no. 3, 643–670.