

**Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Tomasza Odrzygóźdźa pt.:
"Skręcone ściany w grupach losowych"**

Przedstawiona rozprawa napisana jest w języku angielskim i składa się z pięciu rozdziałów, z których pierwszy stanowi wprowadzenie, zaś trzeci ustala terminologię i stosowane w rozprawie oznaczenia. Część wyników rozprawy (zasadniczo, zawartość rozdziałów 2 i 5) została już opisana w osobnych artykułach autora, z których jeden to niepublikowany preprint [Odr14], zaś drugi, zawierający także wyniki z tego pierwszego, to artykuł [Odr18] przyjęty do druku w czasopiśmie Israel Journal of Mathematics.

Problematyka rozprawy

Rozprawa dotyczy aktualnej problematyki grup losowych, i koncentruje się na pytaniu o spełnianie przez takie grupy własności (T) Kazhdana, a jeszcze bardziej o spełnianie rozmaitych silnych zaprzeczeń tego warunku, takich jak posiadanie podgrupy kowymiaru 1 lub dopuszczanie geometrycznego działania na niedodatnio zakrzywionym kompleksie kostkowym. Ten drugi warunek, znacznie silniejszy niż ten pierwszy, będę nazywać w tej recenzji *CAT(0)-kostkowością* grupy. Przypomnijmy w tym miejscu, że grupy losowe tworzy się przy pomocy pewnych modeli generujących, za pomocą losowo dobieranych relacji dla odpowiednich zbiorów generatorów, przy czym liczba wylosowanych relacji zależy od dodatkowego parametru zwanego *gęstością*, oznaczanego zwykle przez d , i przyjmującego wartości w przedziale $[0, 1]$. Spełnianie wybranej własności przez grupę losową o zadanej gęstości $d \in [0, 1]$ oznacza, że prawdopodobieństwo spełniania tej własności dąży do 1 w miarę jak inne ruchome parametry (w zależności od wybranego modelu) liczby generatorów lub długości losowanych relacji dążą do nieskończoności.

Już w chwili "narodzin" problematyki grup losowych, na początku lat 90-tych XX wieku, M. Gromov ustalił, że dla parametru gęstości $d < 1/12$ grupa losowa w opisanym przez niego modelu (zwanym *modelem Gromova*) spełnia warunek $C'(1/6)$ małych skreśleń, a więc jest CAT(0)-kostkowa. Około roku 2000 Andrzej Żuk opisał tzw. *model trójkątny* grup losowych i zaobserwował intrygujące zjawisko "przejścia fazowego" dla wartości $d = 1/3$: dla $d < 1/3$ grupa losowa w modelu trójkątnym jest wolna, zaś dla $d > 1/3$ jest grupą Kazhdana. Żuk zaanonsował także Kazhdanowskość grup losowych w modelu Gromova, dla gęstości $d > 1/3$, ale poprawny dowód tego faktu przeprowadzili dopiero kilka lat temu bracia Marcin i Michał Kotowscy. Zakres gęstości pomiędzy $1/12$ a $1/3$ w modelu Gromova stanowił przez kilka lat wyzwanie, aż około roku 2010 Ollivier i Wise poprawili wcześniejsze obserwacje Gromova dowodząc, że dla gęstości $d < 1/6$ losowa grupa jest CAT(0)-kostkowa, zaś dla szerszego zakresu gęstości $d < 1/5$ posiada ciągle jeszcze podgrupę kowymiaru 1. W roku 2014 John Mackay i Piotr Przytycki bardzo pomysłowo wzmocnili metody Olliviera i Wise'a (po raz pierwszy stosując pomysł, który należy uznać za prekursora metody skręconych ścian stosowanej przez autora w niniejszej rozprawie) pokazując, że grupa losowa

w modelu Gromova posiada podgrupę kowymiaru 1 aż do gęstości $d < 5/24$. W chwili obecnej nie wiadomo czy grupy losowe Gromova dla zakresu gęstości $5/24 < d < 1/3$ spełniają własność (T) Kazhdana.

Tomasz Odrzygóźdź zajął się analogicznym pytaniem dla grup losowych w tzw. modelach wielokątnych, a dokładniej w modelu kwadratowym i sześciokątnym, które są odpowiednimi analogonami modelu trójkątnego rozważanego przez Żuka.

Główne wyniki rozprawy

Najważniejsze osiągnięcia w przedstawionej rozprawie doktorskiej Tomasza Odrzygóźdźa to:

- (a) zaobserwowanie ostrego przejścia fazowego na spełnianie własności (T) Kazhdana dla parametru $d = 1/3$ w modelu sześciokątnym grup losowych,
- (b) dowód, że grupa losowa w modelu kwadratowym dla $d < 3/8$ nie jest Kazhdanowska (bo posiada podgrupę kowymiaru 1), natomiast dla $d < 3/10$ jest nawet $CAT(0)$ -kostkowa.

Wynik (a) jest bardzo interesujący ze względu na ostrość wykazanego zjawiska. Jednocześnie wiadomo, że powyżej gęstości $1/6$ losowe grupy sześciokątne nie są wolne, więc przejście fazowe do Kazhdanowskości ma tu inny charakter niż w modelu trójkątnym Żuka. Jeśli chodzi zaś o model kwadratowy, wynik (b) warto skonfrontować z anonsowanym wspólnym rezultatem autora z Orletem i Przytyckim, ustalającym Kazhdanowskość losowych grup kwadratowych dla gęstości $d > 5/12$.

Bardziej szczegółowe omówienie wyników rozprawy oraz charakterystyka użytych technik

Rozdział 2 rozprawy zawiera nowe ujęcie opracowanej przez autora jeszcze w preprincie [Odr14] z czasów studenckich techniki nieplanarnej nierówności izoperymetrycznej. Wersja lokalna tego wyniku jest bardzo eleganckim uogólnieniem, zwłaszcza na poziomie wprowadzonych przez autora pojęć, “tradycyjnej” nierówności wykazanej przez Olliviera. Wersja globalna, tak jak pojawia się w rozprawie, jest nieco inna niż wersje wcześniejsze, dostosowana do potrzeb w kolejnych rozdziałach rozprawy. Warto tu dodać, że technika nieplanarnej nierówności izoperymetrycznej będzie zapewne szerzej wykorzystywana w przyszłych badaniach grup losowych, co można przewidywać obserwując, że już była stosowana we wspomnianej powyżej pracy Mackaya i Przytyckiego [PM14].

Rozdział 4 dotyczy wykazania obecności podgrupy kowymiaru 1 w losowej grupie sześciokątnej dla gęstości $d < 1/3$ i w losowej grupie kwadratowej dla gęstości $d < 3/8$. Autor rzetelnie adaptuje tu metodę hipergrafów ze wspomnianej powyżej pracy Olliviera i Wise’a [OW11], z rozmaitymi subtelnymi nowszymi uzupełnieniami. Najważniejszym nowym pomysłem technicznym jest idea tzw. *skręconych ścian* (ang. bent walls), po raz pierwszy pomyślana i efektywnie zastosowana przez Mackaya i Przytyckiego w pracy [PM14], ale tu użyta przez autora we własny twórczy i odmienny sposób. Drugim, także bardzo istotnym uzupełnieniem, jest analiza tzw. *drzew okólnierzowanych diagramów* (ang. trees of quasi-collared diagrams), o ile mogę to ocenić, opracowana oryginalnie przez autora i zastosowana po raz pierwszy w tej rozprawie. Kolejne uzupełnienie, to odpowiednie

wykorzystanie innego pomysłu Mackaya i Przytyckiego, polegające na wykazaniu istnienia w grupie elementu zachowującego pewną hiperścianę, ale transponującego komponenty, na które ta hiperściana rozcina kompleks Cayley'a grupy. Wszystko to jest niebanalną matematyką, w dobrych proporcjach bazującą na oryginalnych własnych pomysłach jak i na zaawansowanych metodach opracowanych przez innych autorów, i prowadzącą do efektywnych rezultatów.

W ostatnim Rozdziale 5 autor dowodzi istnienia geometrycznego działania na niedodatnio zakrzywionym kompleksie kostkowym dla grup losowych kwadratowych przy gęstości $d < 3/10$. Dowód opiera się na konstrukcji struktury przestrzeni ze ścianami posiadającą odpowiednią własność metryczną (co jest typowo stosowanym i chyba najefektywniejszym ze znanych schematem dowodu tej własności w rozmaitych sytuacjach). Przedstawiony przez autora dowód wymagał użycia nowego typu skreślonych hiperścian (tzw. colored walls). I w tym rozdziale autor sprawnie wykorzystał wprowadzone przez siebie lub odpowiednio adaptowane wspomniane wcześniej techniki, uzyskując bardzo mocną konkluzję.

Ocena rozprawy

Przedstawiona rozprawa zawiera rezultaty nietrywialne, dotyczące aktualnej problematyki. Odpowiadają one na naturalne pytania pojawiające się w związku z badaniami innych autorów. Autor posługuje się szeroką gamą technik geometrycznych, oraz kombinatorycznych. Wykazuje też znakomitą orientację w aktualnym stanie wiedzy w badanej problematyce, i z dużą łatwością stosuje trudne rezultaty innych autorów.

Pewne zastrzeżenia mam co do staranności zredagowania rozprawy. Zdumiewająco często pojawiają się w niej np. niekonsekwencje i pomyłki w oznaczeniach. Obecna jest też pewna niestabilność polegająca na zbyt drobiazgowym dowodzeniu niektórych krótkich obserwacji, przy jednoczesnym niedostatku wyjaśnień w długich i zawikłanych rozumowaniach. Druga połowa Rozdziału 4 jest bardzo nonszalancka, i robi wrażenie pisanej niezwykle pośpiesznie. Przykładem przejawu takiej nonszalancji niech będzie np. brak jawnej dyskusji orientacji krawędzi w sformułowaniu z dowodu Lematu 4.2.18 mówiącym, że antypodyczne krawędzie są etykietowane tą samą literą x . Listę (niekompletną) drobniejszych mankamentów i omyłek przytaczam na samym końcu tej recenzji.

Powyższe zastrzeżenia co do jakości redakcji nie wpływają jednak na moje przekonanie, że argumentacja przedstawiona w rozprawie jest kompletna.

Podsumowanie

W moim przekonaniu przedstawiona rozprawa zawiera oryginalne i wartościowe rezultaty, a tym samym spełnia wymagania ustawowe. Wnioskuje o dopuszczenie mgr Tomasza Odrzygóźdź do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Lista usterek

- str.6, l.10: powinno być "Theorem A" zamiast "Theorem B";
- str. 8, Definition 2.0.3: trzeba się domyślać co znaczy sformułowanie "locally injective around edges"; druga uwaga: przed sformulowaniem tej definicji można było odesłać

czytelnika do później przytoczonych w pracy Definicji 3.2.1 i 3.2.2 (kompleksu prezentacyjnego i kompleksu Cayleya) i związanych z nimi oznaczeń;

- str.8, Definition 2.0.4: sformułowanie "an edge path" jest niejasne; czy chodzi o drogę WŁOŻONĄ? A wogóle w tej definicji D mogłoby być z założenia diagramem dyskowym, i wtedy wątpliwości byłoby mniej.

- str.8, Definition 2.0.5: rola prezentacji $\langle S|R \rangle$ w tej definicji jest zerowa; ta definicja dotyczy czystych kompleksów kombinatorycznych;

- str.8, Definition 2.0.5 i uwaga w akapicie zaraz po tej definicji: aby nierówność (2.2) reprezentowała to co autor formułuje w uwadze (o liczbie ekstra cięć), po jej prawej stronie powinno się jeszcze dopisać składnik $-2|\gamma|$; taki dopisek skutkowałby np. tym, że jeśli $Y = Z$ to taki Y jest diagramem with 0-small hull (bez tego dopisku $Y = Z$ jest diagramem with 2-small hull);

- str.8, nierówność (2.4): stała ε w nierówności (2.4) to 2-krotność stałej ε z nierówności (2.3), co jest odrobinę niefortunne i mylące;

- str.14, Corollary 2.2.5: w tezie powinno być dodane (zapewne omyłkowo zostało pominięte), że taka losowa grupa jest w.o.p. hiperboliczna;

- str.17, 3. linia Definicji 3.2.4: warto dodać " V " po "the set", gdyż inaczej natacja V nie jest formalnie wprowadzona, i trzeba się domyslać intencji autora;

- str.17, l.13: termin "the edge" użyty w tym miejscu jest niefortunny, bo żadna naturalna krawędź nie łączy tych środków antypodycznych krawędzi;

- str.17, linia 20 od dołu: powinno być c'_{e_1} i c'_{e_2} ;

- str.17, 2 ostatnie akapity: kilka razy w oznaczeniach intra-segmentów pojawia się duża litera Λ zamiast małej λ ;

- str.17, linia 3 od dołu: powinno być $\varphi(v_1)$ zamiast $\varphi(e_1)$, i tp samo dla indeksu 2;

- str.17, Definicja 3.2.5: brakuje jawnego sformułowania warunku, że kolejne punkty x_i, x_{i+1} są środkami przeciwległych (antypodycznych) krawędzi ww wspólnej komórce;

- str.18. Definition 3.2.6: mówienie o "istnieniu" wierzchołków x i y jest tu niefortunne; takie wierzchołki są jednoznacznie zdeterminowane, zaś pojęcie "przedłużalności" (prolong) po prostu wymaga od tych wierzchołków x i y spełniania pewnej zależności (dokładniej, bycia antypodycznymi);

- str.19, Definition 3.3.2: wydaje się że A może być niekiedy raczej diagramem planarnym niż dyskowym, jako że droga P może mieć samoprzecięcia w $\tilde{X}$, nawet jeśli nie ma ich w L ; analogiczna uwaga dotyczy być może diagramu Z w Definicji 2.0.5.

- str.20, linia 2. od dołu: c_L powinno być zastąpione przez c ;

- str.23, 6 linia dowodu Proposition 3.4.1: zamiast W_n powinno być W_n^6 ;

- str.24, l.3: brakuje znaku "=" po symbolu G^+ ;

- str.25, linia 5. od dołu: symbol P nie był zdefiniowany ani nie jest nigdzie później używany;

- str.35, linia 6 od dołu: zabrakło "modułu" wokół symbolu $\tilde{\partial}D$;

- str. 43, l.5: powinno być " $\mathcal{D}_1$ and $\mathcal{D}_2$ ";

- str.44, 2. linia sformułowania Lematu 4.2.18: brakuje "there" przed "exists" oraz "a" przed "group";

- str. 45, druga linia dowodu Twierdzenia A: powinno być "acts" zamiast "act".