14.06.2019

Prof. dr hab. Wojciech Kucharz
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Jagiellońskiego

Recenzja rozprawy doktorskiej Pana mgr. Tomasza Pełki pod tytułem „Smooth Q-homology planes satisfying the Negativity Conjecture"

Rozprawa Pana mgr. Tomasza Pełki składa się ze streszczenia, pięciu rozdziałów oraz kilku tablic zawierających podsumowanie własności badanych obiektów. Wszystkie rozważane rozmaitości algebraiczne są zespolone. Niech R będzie dziedziną ideałów głównych. Normalną powierzchnię algebraiczną S nazywamy płaszczyzną R-homologiczną, jeśli H_i(S, R) = 0 dla i > 0. Oczywistym przykładem takiej powierzchni jest **C**^2, ale jest również mnóstwo innych interesujących przykładów. Pierwszy przykład płaszczyzny **Z**-homologicznej, różnej od **C**^2, podał Ramanujam [Ram71]. W ten sposób okazało się, że badanie płaszczyzn **Z**-homologicznych jest interesującym problemem. Ogólniejszym problemem jest badanie płaszczyzn **Q**-homologicznych. Zgodnie z [Fuj82] i [Pal13], wszystkie płaszczyzny **Q**-homologiczne są afiniczne. W swojej rozprawie, Pełka bada wyłącznie gładkie płaszczyzny **Q**-homologiczne. Bogatym źródłem gładkich płaszczyzn **Q**-homologicznych są dopełnienia wymiernych krzywych ostrzowych w płaszczyźnie rzutowej. W [Pal19] znajdujemy *hipotezę o ujemności* dotyczącą płaszczyzn **Q**-homologicznych: jeśli (X, D) jest uzupełnieniem płaszczyzny **Q**-homologicznej, to κ(K_X+½D) = −∞.

Pierwszy główny wynik rozprawy zawarty jest w twierdzeniu 1.2. Uproszczoną wersje tego twierdzenia można sformułować w następujący sposób:

Twierdzenie 1.2. Niech S będzie gładką powierzchnią **Q**-homologiczną log ogólnego typu i niech (X, D) będzie minimalnym uzupełnieniem S. Jeśli S spełnia hipotezę o ujemności, tzn.

κ(K_X+ ½ D) = −∞,

to (X, D) można otrzymać przy pomocy algorytmu tom Diecka i Petriego zastosowanego do precyzyjnie określonej konfiguracji. W szczególności, otrzymany opis ma charakter kombinatoryczny.

Założenie, że S jest log ogólnego typu nie jest tutaj restrykcyjne, ponieważ w przeciwnym przypadku klasyfikacja powierzchni **Q**-homologicznych jest znana.

Twierdzenie 1.2 ma bardzo interesujące konsekwencje opisane we wnioskach 1.3, 1.4 oraz 1.5. Pominiemy w tym miejscu wyjaśnienia dotyczące natury tych wniosków.

Drugi główny wynik rozprawy jest zawarty w twierdzeniu 1.6, które jest podsumowaniem rezultatów otrzymanych w dwóch długich pracach Tomasza Pełki z opiekunem naukowym, dr. hab. Karolem Palką [PP17, PP18].

Twierdzenie 1.6. Niech Ē będzie wymierną krzywą ostrzową w płaszczyźnie rzutowej **P**^2, której dopełnienie jest log ogólnego typu i spełnia hipotezę o ujemności. Wtedy spełniony jest jeden z warunków:

(a) dopełnienie krzywej w **P**^2 jest **C****-rozwłóknieniem (**C**** oznacza **C** bez dwóch punktów), lub

(b) rozważana krzywa jest typu opisanego w definicji 5.1.

Precyzyjne sformułowanie twierdzenia 1.6 zajmuje wiele miejsca i nie jest konieczne, aby w recenzji podawać tego typu szczegóły.

Podjęta w recenzowanej rozprawie doktorskiej tematyka była i jest przedmiotem badań wielu ekspertów (dla przykładu wymienię jedynie M. Zaidenberga). Otrzymane wyniki dotyczą problemów centralnych dla tej teorii. Techniki dowodowe wykorzystują klasyczne narzędzia geometrii algebraicznej (Program Modeli Minimalnych, pojęcie modelu niemal minimalnego,...) wzbogacone o nowo rozwinięte i bardzo skuteczne metody Karola Palki związane z badaniem par (X, ½D). Pan Tomasz Pełka wykazuje bardzo dobrą znajomość literatury, swobodnie posługuje się aparatem geometrii algebraicznej i umiejętnie prezentuje swoje wyniki. Być może prezentacja rezultatów jest zbyt zwięzła jak na standardy rozprawy doktorskiej, ale ta uwaga nie może być traktowana jako zarzut, biorąc pod uwagę fakt, że prace [PP17,PP18] maja w sumie około 110 stron. Należy wspomnieć, że praca [PP17] ukazała się w znakomitym czasopiśmie Proc. London Math. Soc. Jak zauważył sam doktorant, rozprawa wymagała pewnej korekty dotyczącej dowodu lematu 3.1 oraz sformułowania definicji 2.11(c); stosowna korekta została recenzentowi przekazana w odpowiednim czasie. Recenzowana rozprawa jest bardzo dobrze napisana po angielsku.

Konkluzja. Rozprawa doktorska Pana mgr. Tomasza Pełki jest na bardzo wysokim poziomie i zawiera wyniki stanowiące istotny wkład do literatury matematycznej związanej z teorią afinicznych powierzchni algebraicznych. Wymagała ona doskonałego opanowania różnych technik geometrii algebraicznej, które bez wątpienia otwierają nowe perspektywy do dalszych badań. Uważam, że oceniana rozprawa zasługuje nie tylko na przyjęcie, lecz wnioskuję również o jej **wyróżnienie.**

Wojciech Kucharz