Smooth $\mathbb{Q}$-homology planes satisfying the Negativity Conjecture

Doctoral thesis at the Institute of Mathemtics, Polish Academy of Sciences

Author: Tomasz Pełka
Supervisor: dr. hab. Karol Palka

Abstract

A complex normal algebraic surface S is a $\mathbb{Q}$-*homology plane* if $H_i(S,\mathbb{Q}) = 0$ for $i > 0$. For example, if $\bar{E} \subseteq \mathbb{P}^2$ is a curve homeomorphic to $\mathbb{P}^1$ then $S = \mathbb{P}^2 \setminus \bar{E}$ is a $\mathbb{Q}$-homology plane. Assume that S is smooth, and let (X, D) be its smooth completion. The *Negativity Conjecture* of K. Palka asserts that $\kappa(K_X + \frac{1}{2}D) = -\infty$, so the minimal model of $(X, \frac{1}{2}D)$ is a log Mori fiber space.

The first part of the thesis gives a global description of smooth $\mathbb{Q}$-homology planes satisfying the Negativity Conjecture. We restrict our attention to those of log general type, otherwise their geometry is well understood. We show that, as expected by tom Dieck and Petrie, they can be arranged in finitely many discrete families, each obtainable in a uniform way from certain arrangements of lines and conics on $\mathbb{P}^2$. From this description we infer that these surfaces satisfy the Strong Rigidity Conjecture of Flenner and Zaidenberg; and that their automorphisms groups are subgroups of S_3.

The second part is a joint work with K. Palka. Its main result is the classification, up to a projective equivalence, of curves $\bar{E} \subseteq \mathbb{P}^2$ homeomorphic to $\mathbb{P}^1$, such that their complements are of log general type and satisfy the Negativity Conjecture. These curves share some unexpected properties: for example, in most cases they are closures of embeddings of $\mathbb{C}^*$ into $\mathbb{C}^2$.

Gładkie płaszczyzny $\mathbb{Q}$-homologiczne spełniające hipotezę o ujemności

Rozprawa doktorska w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk

Autor: Tomasz Pełka
Promotor: dr hab. Karol Palka

Streszczenie

Normalna, zespolona powierzchnia algebraiczna S jest *płaszczyzną* $\mathbb{Q}$-*homologiczną* jeśli $H_i(S,\mathbb{Q}) = 0$ dla $i > 0$. Przykładem takiej powierzchni jest dopełnienie płaskiej krzywej ostrzowej, tzn. krzywej $\bar{E} \subseteq \mathbb{P}^2$ homoemorficznej z $\mathbb{P}^1$ w topologii euklidesowej. Załóżmy, że S jest gładka, i niech (X, D) będzie jej gładkim uzupełnieniem. *Hipoteza o ujemności* K. Palki przewiduje, że w takiej sytuacji $\kappa(K_X + \frac{1}{2}D) = -\infty$, a zatem model minimalny dla $(X, \frac{1}{2}D)$ jest przestrzenią rozwłóknioną Mori.

Pierwsza część rozprawy zawiera globalny opis gładkich płaszczyzn $\mathbb{Q}$-homologicznych spełniających hipotezę o ujemności. Rozważamy jedynie te log ogólnego typu, opis pozostałych jest znany. Pokazujemy wówczas, że zgodnie z hipotezą tom Diecka i Petriego tworzą one skończoną liczbę dyskretnych rodzin, otrzymanych w jednolity sposób z układów linii i stożkowych na $\mathbb{P}^2$. Jako wniosek otrzymujemy, że rozważane powierzchnie spełniają silną hipotezę o sztywności Flennera i Zaidenberga, a ich grupy automorfizmów są podgrupami grupy symetrycznej S_3.

Druga część stanowi wspólną pracę z K. Palką. Jej główny wynik to klasyfikacja, z dokładnością do rzutowej równoważności, płaskich krzywych ostrzowych, których dopełnienia są log ogólnego typu i spełniają hipotezę o ujemności. Okazuje się, że te krzywe mają wiele wspólnych, dość zaskakujących własności, np. większość z nich to domknięcia obrazów zanurzeń $\mathbb{C}^*$ w $\mathbb{C}^2$.