æ

Warszawa 30.10.2015

Recenzja rozprawy doktorskiej magistra Wojciecha Lubawskiego
zatytułowanej
"Maps between classifying spaces of the unitary groups"
(W całej recenzji referencje podawane są zgodnie z bibliografią rozprawy.)

Rozprawa doktorska magistra Lubawskiego dotyczy ważnego, dziś już klasycznego problemu teorii homotopii. Dla dowolnych zwartych i spójnych grup Lie G i H chcielibyśmy znaleźć opis zbioru klas homotopii odwzorowań ich przestrzeni klasyfikujących $[BG, BH]$. Odpowiedź na to pytanie jest kluczowa z kilku powodów, z których wymienię tylko jeden. Klasy homotopii odwzorowań z dowolnej przestrzeni X do BG klasyfikują G-wiązki nad X. Dobre zrozumienie zbioru $[BG, BH]$ jest więc kluczowe we wszystkich rozważaniach z zastosowaniem teorii wiązek, czyli praktycznie zawsze w pracy z użyciem pojęcia rozmaitości.

Praca z przestrzeniami klasyfikującymi zwartych grup Lie wydaje się być bardzo obiecująca z punktu widzenia teorii homotopii ze względu na szersze możliwości stosowania narzędzi algebraicznych, niedostępnych dla innych przestrzeni. Niech T oznacza torus maksymalny w grupie G. Zanurzenie $i : T \hookrightarrow G$ indukuje odwzorowanie $Bi : BT \to BG$, które na poziomie teorii homotopii jest jedyne . Badając odwzorowanie $f : BG \to BH$ dostajemy jego obcięcie $f \circ Bi : BT \to BH$ o dużo prostszej dziedzinie. Co więcej ten przypadek odwzorowań przestrzeni klasyfikujących jest w pełni rozstrzygnięty. Najprostsza wersja twierdzenia Dwyera-Zabrodskiego ([11]) z lat osiemdziesiątych zeszłego stulecia mówi, że istnieje bijekcja zbiorów $Hom(T, H)/Inn(H)$ i $[BT, BH]$ zadana poprzez przyporządkowanie homomorfizmowi $\alpha : T \to H$ jego odwzorowania klasyfikującego $B\alpha : BT \to BH$. Mamy więc w pełni algebraiczny opis klas homotopii odwzorowań BT w BH. Dzielenie homomorfizmów przez automorfizmy wewnętrzne grupy H ma charakter ogólny - wiadomo, że sprzęganie przez element ze składowej jedności indukuje na BH przekształcenie homotopijne z identycznością. A więc rodzi się pytanie: czy opis $[BG, BH]$ jako $Hom(G, H)/Inn(H)$ ma charakter ogólny? Od dawna wiadomo, że odpowiedź na tak postawione pytanie jest negatywna. Już w latach siedemdziesiątych Sullivan skonstruował przykład tzw. odwzorowań Adamsa $\psi^k : BG \to BG$. Nie pochodzą one od homomorfizmów $G \to G$ a po obcięciu do torusa maksymalnego odpowiadają homomorfizmom $t \mapsto t^k$. W latach dziewięćdziesiątych Jackowski, McClure i Oliver ([15]) pokazali, że dla prostej zwartej grupy Lie G każde odwzorowanie $BG \to BG$ jest homotopijne z $B\alpha \circ \psi^k$ dla jednoznacznie wyznaczonych $\alpha \in Hom(G, G)/Innn(G)$ i naturalnej liczby k (względnie pierwszej z rzędem grupy Weyla W_G grupy G). Co więcej ci sami autorzy podali przykłady świadczące o tym, że tak prosty opis dla $[BG, BH]$ przy $G \neq H$ jest niemożliwy.

Praca Wojciecha Lubawskiego dotyczy badania odwzorowań $BG \to BH$, gdzie G i H są grupami unitarnymi. Pomysł zastosowany w omawianym opracowaniu wywodzi się z następującego rozumowania. Niech T_G oznacza torus maksymalny w grupie G. Każde odwzorowanie $f : BG \to BH$ (będziemy je nazywać homotopijną reprezentacją grupy G w grupie H) po obcięciu do BT_G jest wyznaczone przez homomorfizm $T_G \to H$ a wiec wyznacza element $\xi_f \in R(T_G)$, gdzie $R(T_G)$ oznacza pierścień charakterów torusa T_G. Co więcej homomorfizm ten jest niezmienniczy ze względu na działanie grupy W_G. Twierdzenie Weyla pozwala na utożsamienie $R(T_G)^{W_G}$ z $R(G)$. A więc problem opisania homotopijnych reprezentacji $[BG, BH]$ będzie rozstrzygnięty, jeśli będziemy potrafili stwierdzać, które wirtualne charaktery z pierścienia $R(G)$ odpowiadają odwzorowaniom przestrzeni klasyfikujących. Takie charaktery nazywane są w pracy charakterami homotopijnymi.

Najważniejszy wynik w omawianej pracy podaje pełną klasyfikację odwzorowań ze zbioru $[BU_n, BU_m]$ dla $n > 18$ i $m \leq t(n) = \frac{1}{2}n(n-1)(n+2)$. Główne argumenty homotopijne są w większości zawarte w pracach tylko cytowanych w omawianej rozprawie. Osiągnięciem rozprawy jest pełna klasyfikacja charakterów w określonym powyżej zakresie wymiarów, których kombinacje mogą prowadzić do uzyskania charakterów homotopijnych.

Niech p oznacza liczbę pierwszą a $\mathcal{P}$ (pod)zbiór liczb pierwszych. Niech $N_{G,p}$ (p-normalizator) oznacza przeciwobraz p-podgrupy Sylowa grupy Weyla W_G w normalizatorze torusa maksymalnego G. Kluczowym dla całej pracy pojęciem z teorii reprezentacji jest pojęcie p-charakteru grupy. Wirtualny charakter ξ grupy G nazywa się p-charakterem jeśli jest prawdziwym charakterem po obcięciu do $N_{G,p}$ (pochodzi od homomorfizmu $N_{G,p} \to U_m$) a $\mathcal{P}$-charakterem jeśli jest p-charakterem dla wszystkich $p \in \mathcal{P}$. Definicja p-charakteru pojawia się w rozdziale pierwszym pracy, obok niezbędnych dla zrozumienia rozprawy wyników z teorii reprezentacji, dobrze znanych z literatury. Warta odnotowania jest tu konstrukcja redukcji charakteru (reprezentacji) do podgrupy, zdefiniowana tylko w pewnych, ale dla prezentowanych dowodów kluczowych sytuacjach.

Rozdział drugi omawianej pracy zawiera podstawową charakteryzację p-charakterów grupy unitarnej, kluczową dla wszystkich dalszych obliczeń. Początkowa część tego rozdziału zawiera opis podgrup $N_{G,p}$ w grupach unitarnych i klasyfikację ich nieredukowalnych reprezentacji. Używane tu są standardowe metody, dobrze znane z literatury przedmiotu, pozwalające w miarę łatwo opisywać reprezentacje produktu półprostego w języku reprezentacji jego wyróżnionych podgrup. Dla pełniejszej charakteryzacji p-charakterów niezbędne są dwie nowe obserwacje. Pierwsza, zawarta w podrozdziale 2.4 pozwala na przeprowadzanie rozumowań indukcyjnych przy pewnych założeniach o wagach obcięcia charakteru do torusa maksymalnego. Twierdzenie 2.4.4 opisuje jak sprawdzać, że dany charakter grupy U_n jest p-charakterem używając jego redukcji do podgrupy U_{n-1}. Jak pokonywać wspomniane ograniczenia wagowe pokazane jest w twierdzeniu 2.5.2., bardzo interesującym jako wynik z teorii reprezentacji grup unitarnych. Podany jest w nim warunek konieczny i dostateczny na to aby charakter grupy U_p, którego suma wag jest podzielna przez p, był p-charakterem. Uzyskana odpowiedź jest łatwa do sprawdzania, bo w całości jest podana w języku wag rozważanego charakteru.

W rozdziale trzecim autor najpierw podaje i weryfikuje listę nieprzywiedlnych charakterów grupy U_n w wymiarach nie przekraczających $t(n)$. Lista ta pozwala następnie stworzyć listę charakterów, które są $\mathcal{P}$-charakterami w pewnym zakresie swoich parametrów. Lista obejmuje 11 typów charakterów i sprawdzanie ich przynależności do zbioru $\mathcal{P}$-charakterów odbywa się poprzez analizę wszystkich przypadków "case by case". W rozdziale czwartym podany jest dowód Twierdzenia B, będącego w mojej opinii głównym osiągnięciem pracy. Podany jest tu pełny zestaw $\mathcal{P}$-charakterów dla $n > 18$ w wymiarach nie przekraczających $t(n)$. Dowód opiera się na trzech filarach:

- Konstrukcje z rozdziału trzeciego dostarczają potencjalny zbiór generatorów dla $\mathcal{P}$-charakterów w wybranym zakresie wymiarów.

- Stwierdzenie 4.1.1 klasyfikuje potencjalne składniki proste $\mathcal{P}$-charakteru. Wynika z niego, że $\mathcal{P}$-charakter grupy U_n w podanym zakresie wymiarów może mieć tylko cztery różne wagi. Tutaj górne ograniczenie na wymiar reprezentacji ma kluczowe znaczenie.

- Lemat 4.2.3 podaje nierówność pozwalającą dobrze szacować dla grupy U_p po pierwsze krotności charakterów wchodzących w rozkład danego charakteru a po drugie wzajemne relacje między nimi. Tutaj kluczową rolę odgrywa znikoma liczba różnych wag, które autor musi wziąć pod uwagę, jak również ograniczenie wymiarowe.

Krótki rozdział piąty poświęcony jest homotopijnym zastosowaniom uzyskanych wcześniej wyników. W pierwszej istotnej obserwacji pokazane jest, że każdy charakter homotopijny jest $\mathcal{P}$-charakterem. Następnie zdefiniowane są charaktery p-homotopijne. Sa to takie wirtualne charaktery μ grupy G, że $\mu = \xi_\rho$ dla pewnej reprezentacji $\rho : T_G \to U_m$ i istnieje odwzorowanie $f : BG \to (BU_m)^\wedge_p$ takie, że poniższy diagram jest przemienny.

$$\begin{array}{ccc} BT_G & \xrightarrow{B\rho} & BU_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ BG & \xrightarrow{f} & (BU_m)^\wedge_p \end{array}$$

Tutaj $(.)^\wedge_p$ oznacza topologiczne p-uzupełnienie przestrzeni a pionowe strzałki są kanoniczne, indukowane przez zanurzenie $T_G \to G$ i konstrukcję uzupełniania. Każdy p-homotopijny charakter jest też p-charakterem co udowodnione jest w Stwierdzeniu 5.1.5.

Stwierdzenie 5.1.7 mówi, że homotopijne charaktery grupy G są tym samym co część wspólna zbiorów p-charakterów homotopijnych po wszystkich $p \in \mathcal{P}$. Krótki dowód tego wyniku w całości polega na użyciu jednego z rezultatów pracy Jackowskiego, McClura i Olivera ([16]), gdzie podano przepis jak z rodziny p-charakterów homotopijnych skonstruować jeden charakter homotopijny. A wiec aby opisać charaktery homotopijne wystarczy sklasyfikować $\mathcal{P}$ charaktery i pokazać, które z nich podnoszą się do prawdziwych odwzorowań. Podany w końcówce rozdziału piątego dowód Twierdzenia A opisującego wszystkie homotopijne charaktery $BU_n \to BU_m$ polega więc na użyciu Twierdzenia B i dodatkowych obserwacji zawartych w podrozdziale 5.2, które pozawalają rozstrzygać problem podnoszenia a pochodzą z prac cytowanych w rozprawie. Jedna z tych obserwacji jest szczególnie ciekawa i bardzo ważna dla konstrukcji egzotycznych przykładów charakterów homotopijnych. Mówi się, że $\mathcal{P}$-charakter ν ma własność odszczepiania jeśli dla dowolnego $\mathcal{P}$-charakteru μ , z faktu że $\nu + \mu$ jest charakterem homotopijnym wynika, że μ też ma tę własność. Z pracy Jackowskiego i Olivera ([19]) wynika, że reprezentacja trywialna ma własność odszczepiania. W jeszcze nie opublikowanej pracy Lubawskiego i Ziemiańskiego ([21]) pokazano, że reprezentacja identycznościowa i odwzorowanie Adamsa ψ^k_n mają własność odszczepiania, przy czym trzeba tu zakładać, że k i $n!$ sa względnie pierwsze. Ponieważ wiele charakterów homotopijnych przedstawia się jako suma ze składnikami będącymi wielokrotnościami opisanych powyżej odszczepialnych reprezentacji pozwala to, po odjęciu odpowiedniego składnika, na otrzymanie nowych, nie przewidzianych innymi wynikami przykładów reprezentacji homotopijnych. Jednocześnie jest to klucz do dowodu pełności listy w Twierdzeniu A. Ostatnią potrzebną do dowodu twierdzenia A obserwacją jest stwierdzenie 5.2.6, które mówi, że p-homotopijny charakter po skręceniu operacją Adamsa ψ_n^k ma tę samą własność o ile k i p są względnie pierwsze.

KONKLUZJA: Rozprawa magistra Lubawskiego dotyczy ważnych zagadnień teorii homotopii. Od czasu homotopijnej klasyfikacji odwzorowań $BG \to BG$ dla zwartej i prostej grupy Lie (publikacja w Annals of Math.) wszelkie próby rozszerzenia wyników na opis zbioru $[BG, BH]$ albo opis homotopijnych reprezentacji grupy G spełzały na niczym. Praca magistra Lubawskiego jest pierwszym przykładem opracowania, gdzie w ograniczonym zakresie wymiarów, udało się uzyskać pełną odpowiedź. Doktorant wykazał się doskonałą znajomością teorii zwartych grup Lie i ich reprezentacji, a jego skomplikowane kombinatorycznie obliczenia muszą budzić respekt. Pojawiające się jako wynik pracy "egzotyczne " odwzorowania $BU_n \to BU_m$ doskonale pokazują jak skomplikowana jest teoria reprezentacji homotopijnych i jak daleko jesteśmy od jej pełnego zrozumienia. Wytyczają też wyraźny kierunek, w którym należy podążać chcąc zrozumieć zbiór $[BG, BH]$. Uważam, że rozprawa w pełni spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie magistra Lubawskiego do dalszych etapów przewodu.

Po pozytywnym podsumowaniu rozprawy chciałbym na koniec trochę ponarzekać. Rozprawa w swej większej części jest bardzo techniczna. Trudne i żmudne sprawdzanie wielu przypadków różnych układów wag jest dokonywane "case by case". W takiej sytuacji dobra redakcja techniczna rozprawy ma podstawowe znaczenie. Niestety strona techniczna pracy nie jest najlepsza i bardzo utrudnia czytanie. Nie wnoszę o formalne dokonanie poprawek przez doktoranta ale chciałbym zwrócić uwagę na usterki z następującego powodu: praca jest napisana po angielsku więc może być źródłem tekstu dla publikacji naukowej. Nie zamierzam spisywać wszystkich błędów literowych, podaje tylko kilka uwag o charakterze bardziej ogólnym.

I. Gdy dowód jakiegoś twierdzenia polega na sprawdzaniu kilkunastu różnych przypadków przy użyciu podobnego zestawu argumentów właściwym jest napisanie przynajmniej jednego przypadku ze wszystkimi szczegółami. Czytelnik widzi wtedy, jakie metody są użyte i gdzie leży użyteczność wcześniejszych lematów/stwierdzeń. Tego bardzo brakuje w rozprawie.

II. Dla czytelnika kolosalne znaczenie ma dobre sprawdzenie oznaczeń i ich pełna zgodność. Niestety nie zawsze ta zasada jest w rozprawie stosowana. Przykładowo:

- str. 34, wiersze 10-14 od góry. W formułach występujących w tych pięciu wierszach pojawiają się odwzorowania oznaczane ψ, ϕ i φ. Wszystkie one powinny być oznaczone φ.

III. Do rozdziałów:

Rozdział 1. W tym rozdziale autor uporczywie dla dwóch reprezentacji zespolonych V i W grupy G pisze $Hom_G(W, V) \otimes_G W$ jako dziedzinę odwzorowania ewaluacji. To nie ma sensu, tensorujemy nad C. Ponadto w części 1.5 w oznaczeniach mylona jest redukcja reprezentacji (red) i obcięcie reprezenatacji do podgrupy (res). Nie jest to stwierdzenie merytoryczne tylko wyłącznie dotyczące redakcji technicznej. Na stronie 5 warto by dokończyć zdanie w czwartej linii od dołu.

Rozdział 2. Twierdzenie 2.4.2 - startujemy od charakteru U_n i obcinamy go do $U_{n-1} \times U_1$ a nie odwrót. Warto ujednolicić pisownię i oznaczać iloczyn dwóch funkcji zawsze fg lub $f \cdot g$. W pewnych miejscach stwierdzenie czy $f(...)$ oznacza ewaluację w punkcie czy iloczyn wymaga głębszego namysłu.

Rozdziały 3 i 4. Przede wszystkim to tych rozdziałów dotyczą uwagi I i II.

S Betley

Stanisław Betley
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski