Toruń, 19. 11. 2017 r.

prof. dr hab. Mariusz Lemańczyk
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika
ul. Chopina 12/18
87-100 Toruń

Z-ca Dyrektora IMPAN ds. Naukowych
prof. dr hab. Łukasz Stettner

Recenzja rozprawy doktorskiej Yixiao Qiao pt. „Growth parameters and chaos in discrete dynamics"

Rozprawa doktorska pani Y. Qiao koncentruje się na pewnych zagadnieniach dotyczących dynamiki toplogicznej. W głównej mierze poświęcona jest badaniu entropii (w tym ciągowej, wymiarem entropii), chaosu oraz zagadnieniu zanurzalności (znajdowania układów uniwersalnych z punktu widzenia dynamiki topologicznej). Zatem praca dotyczy ważnych i bardzo aktualnych problemów dynamicznych, tematyki żywej i obecnej w wielu pracach znakomitych matematyków na świecie. Rozprawa (chodzi o jej cztery główne rozdziały) została napisana w oparciu o 4 prace przyjęte do druku kolejno w Science China Math., Discrete Cont. Dynam. Systems, Monatshfete Math. oraz Nonlinearity. Rozprawa liczy ok. 70 stron.

Część pierwsza rozprawy (17 stron) to wprowadzenie do jej tematyki. Pojawiają się tu podstawowe pojęcia, cytowanych jest wiele (w tym nietrywialnych) faktów, które będą potrzebne w czterech głównych rozdziałach pracy. Część ta robi na mnie dość dobre wrażanie, napisana jest kompetentnie, a bogactwo pojęć i rezultatów, które w całości są wykorzystywane w dalszej części rozprawy, świadczy o zaawansowaniu i dobrym poziomie naukowym tematyki badawczej. (Z drobnych niedociągnięć tej części pracy: oznaczenia zbioru miar są podwójne, albo $M(X)$, albo $\mathcal{M}(X)$, w tw. 1.11 mamy brak czynnika $1/n$ średniującego w trzech wzorach, brak odesłania do literatury w tw. 1.1.16, ciąg Morse'a od dłuższego czasu jest już powszechnie nazywany ciągiem Thue-Morse'a, z oczywistych powodów σ-algebra produktowa nie powinna być oznaczana poprzez produkt kartezjański swoich czynników, połączenie rozbić jest używane zanim jest ono formalnie zdefiniowane (patrz str. 23), nie do końca zrozumiałe jest używanie zwrotów typu (str. 25) „Unfortunately, there is no such variational principle for the general sequence entropy, see [Goo74] for examples", gdy jednak podstawowa nierówność zachodzi (patrz również str. 29), brakuje czynników średniujących $1/n$ w definicji średniego chaosu Li-Yorke'a, brakuje podania literatury do podrozdziału 1.6.1, oprócz tego niewielka liczba literówek i potknięć językowych).

W rozdziale 2. rozprawy szacuje się złożoność topologiczną $s(n, \varepsilon)$ ciągłych produktów Anzaia, tzn. ciągłych przeształceń torusa (addytywnego) $\mathbf{T}^2$ zadanych wzorem:

$$T : (x, y) \mapsto (x + \alpha, f(x) + y).$$

Zakładamy, że $f : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ jest funkcją ciągłą o wahaniu ograniczonym i o stopniu topologicznym różnym od zera. Główny rezultat (tw. 2.2.1 i 2.2.2.) to oszacowanie:

$$\frac{n|\deg f|}{3(\varepsilon + \eta(\varepsilon))} \leqslant s(n, \varepsilon) \leqslant \frac{20(\mathrm{Var}(f) + 1)n}{\varepsilon^2}, \tag{1}$$

gdzie $\eta(\cdot)$ oznacza moduł ciągłości funkcji f. Dowód jest nawet elegancki, ale jego redakcja nie jest najlepsza. W zasadzie technika polega na dzieleniu przeciwdziedziny na odpowiednio krótkie przedziały, braniu przeciwobrazów, co daje rozbicie dziedziny i badaniu rozchodzenia się orbit na rozbiciu produktowym (duża część rachunków jest wykonywana na podniesieniu funkcji ciągłej na okręgu do funkcji rzeczywistej określonej na $\mathbf{R}$ - tego typu rozgraniczenia nie są nawet widoczne w definicjach!). Konsekwencją powyższego rezultatu jest udzielenie negatywnej odpowiedzi na pytanie Hosta, Kra i Maassa z 2014 r. (pytanie 2.1.1), dotyczącego charakteryzacji dystalnych układów minimalnych o niskiej złożonosci jako 2-krokowych nilukładów. Niemniej uzyskanie tego kontrprzykładu jest teraz konsekwencją twierdzenia Glasnera wskazującego, że wśród ciągłych produktów Anzaia jedynymi 2-krokowymi nilukładami są produkty zadane przez kocykle afiniczne (z dokładnością do kohomologii). Dalsza część tego rozdziału skupia się na badaniu podstawowych zagadnień topologicznych ciągłych produktów Anzaia i jako część badawcza, w mojej opinii, jest najsłabszą częścią rozprawy. Z niezrozumiałego dla mnie powodu za motywację przywołuje się książkę Auslandera, gdy tymczasem literatura dotycząca dynamiki topologicznej grupowych rozszerzeń jest ogromna (i pewno zaczyna się od prac Parry'ego). Fakt (tw. 2.3.2), że dla stopnia różnego od zera mamy minimalność wynika z oczywistego powodu - kobrzegi mają stopień topologiczny zero. Wyznaczenie faktora równociągłego, to albo napisanie wzorów na funkcje własne (r-ania funkcyjne), albo zauważenie, że $\mathbf{T}$ działa na $\mathbf{T}^2$ poprzez translacje na drugiej współrzędnej, komutując z T, konstrukcja w tw. 2.4.1 poprzez tzw. „małe mianowniki" jest klasyczna i dobrze znana. Redakcja tej części pracy (np. tw. 2.3.2, tw. 2.4.1) sugeruje, że rezultaty te są nowe, gdy tymczasem jest to klasyka. Chciałbym jednak dodać, że dowody (elementarne) napisane przez autorkę rozprawy wydają mi się nowe (w drugiej linijce dowodu lematu 2.3.3 powinno być $((x_1, y_1), (x_2, y_2)))$.

Rozdział 3. rozprawy jest uogólnieniem znanego rezultatu Glasnera i Weissa (z 1995 roku) o entropijnych zależnościach układu (X, T) i indukowanego układu $(M(X), T)$ (działanie T na miarach na przestrzeni X) na przypadek ciągowej entropii. Główny rezultat (tw. 3.1.1) orzeka, że, dla rosnącego ciągu S liczb naturalnych, entropia ciągowa $h^S_{top}(X, T) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciągowa entropia (wzdłuż S) jest zerem dla układu indukowanego. Bardzo ładny dowód tego twierdzenia, którego jednym z głównych elementów jest uzyskiwanie zbiorów separujących jako kombinacji odpowiednich miar Diraca, bazuje na całkiem głębokim lemacie kombinatorycznym z ww. pracy Glasnera i Weissa. (Lemat ten wskazuje na różnice w (skończenie wymiarowych!) przestrzeniach Banacha ℓ^1_n i ℓ^∞_n i stąd otrzymujemy dość niespodziewane związki pomiędzy układami dynamicznymi i lokalną teorią przestrzeni Banacha.) Szkoda, że autorka nie przeprowadziła porównania swojego dowodu z oryginalnym dowodem Glasnera i Weissa. Wydaje się, że (z wyjątkiem wskazanego lematu) dowód w rozprawie jest jednak inny (i prostszy), wykorzystujący bezpośrednio własności metryki na $M(X)$. Tw. 3.1.1 ma interesujące konsekwencje dotyczące równości wymiaru entropijnego układów (X, T) i $(M(X), T)$ (jak również miarowego wymiaru entropijnego). Jeśli chodzi o stronę redakcyjną, to w tej części rozprawy najmniej podoba mi się tw. 3.3.1 i jego dowód. Po prostu rozważania dotyczące zanurzania (X, T) w $(M(X), T)$ powinny być już w części wstępnej (podrozdział 1.1.7) i ta sama uwaga dotyczy zerowania się ciągowej entropii połączenia (układów o zerowej ciągowej entropi). Ponieważ, jak to już zauważono we wstępie, quasi-faktory są faktorami (w zwykłym sensie) samopołączeń, tw. 3.3.1 jest oczywiste.

Rozdział 4. rozprawy dotyczy chaosu Li-Yorka. Głównym rezultatem jest tu tw. 4.3.3., które (nieco upraszczając) stanowi, że układ topologiczny (X, T) o dodatniej entropii jest średnio N-chaotyczny (dla dow. $N \geqslant 2$) w sensie

Li-Yorke'a wzdłuż dowolnego podciągu rosnącego (a_n) liczb naturalnych, uniwersalnego dla zbieżności punktowej (w grę wchodzi więc zbiór liczb pierwszych, czy ciąg części całkowitych wielomianów, itd.). Twierdzenie to uogólnia m.in. znane twierdzenia Blancharda, Glasnera, Kolyady i Maassa o chaosie Li-Yorke'a i Downarowicza o średnim chaosie Li-Yorke'a układów o dodatniej entropii. Dowód tw. 4.3.3 wymaga kilku kroków. Zaczyna się od wygladajacego dość zaskakująco tw. 4.1.3 (lepiej byłoby to twierdzenie nazwać jednak lematem) o tym, że faktor Pinskera jest faktorem charakterystycznym dla zbieżności w L^2 dla ciągów rosnących. Tutaj w dowodzie kluczową rolę odgrywa klasyczne twierdzenia Rochlina-Sinaja o istnieniu rozbicia doskonałego. Podrozdział 4.2 jest poświęcony rozważaniom dotyczącym ciągów uniwersalnych dla zbieżności punktowej, gdzie chcemy powiedziec coś o granicy (m.in. wyglądający dość zaskakująco wn. 4.2.4, że granica jest „właściwa" dla układów Kołmogorowa). Teraz kluczowe dla dowodu tw. 4.3.3 robi się tw. 4.3.1, które dzięki istnieniu miary ergodycznej o dodatniej entropii pozwala zastosować aparat relatywnych produktów (nad faktorem Pinskera,) do wykazania istnienia zbiorów Cantora w zbiorach punktów asymptotycznych (w przód lub w tył) dla p.w. $x \in X$ poprzez użycie tw. Mycielskiego o istnieniu zbiorów Cantora w podzbiorach G_δ i gęstych przestrzeni produktowych. W dowodzie tw. 4.3.1 istotnie wykorzystuje się rezultat Huanga, Li i Ye o gęstości punktów asymptotycznych w nośniku miary warunkowej. Do rozdziału tego miałbym dwie uwagi. Po pierwsze tw. 4.1.3 wydaje się być dobrze znane – jest to po prostu oczywisty wniosek z klasycznego twierdzenia Bluma-Hansona (a dowód tw. 4.1.3 używający rozbicia doskonałego, to zwykłe narzędzie do wykazywania, że na dopełnieniu przestrzeni L^2 faktora Pinskera widmo jest lebesgue'owskie). Po drugie, dlaczego wn. 4.2.4 nie wynika bezpośrednio z definicji ciągu dobrego dla zbieżności punktowej (co implikuje przecież zbieżność w L^2) i tego, że w L^2 granica średnich jest zerem (tw. 4.1.3)? Czy we wniosku tym nie wystarczy założenie mieszania? Chciałbym jednak dodać, że nie wydaje się, aby te uwagi wpływały na tw. 4.3.1, które używa wspomnianego wyżej rezultatu Huanga, Li i Ye, gdzie dodatniość entropii jest kluczowa.

Rozdział piąty rozprawy dotyczy zagadnień zanurzalności w dynamice topologicznej, tzn. poszukiwanie uniwersalnego układu dynamicznego dla zadanej klasy $\mathcal{K}$ układów (chcemy, aby układy z $\mathcal{K}$ można było „zobaczyć" jako podukłady układu uniwersalnego). Przez długie lata jedynym znanym ograniczeniem był wymiar zbioru punktów okresowych (o zadanym okresie), a pytanie Auslandera, czy układ shiftowy $([0,1]^{\mathbf{Z}}, S)$ jest uniwersalny dla klasy $\mathcal{M}$ wszystkich układów minimalnych pozostawało otwarte przez wiele lat (pewne pozytywne rezultaty dla przestrzeni o skończonym wymiarze topologicznym skończonym zostały uzyskane przez Jaworskiego i Nerurkara). Przełom nastapił w roku 2000, gdy Lindenstrauus i Weiss użyli teorii średniego wymiaru (Gromowa). Przypomnijmy, że średnim wymiarem $\mathrm{mdim}(X,T)$ układu dynamicznego (X,T) nazywamy liczbę

$$\mathrm{mdim}(X,T) := \sup_{\varepsilon>0} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathrm{widim}_{\varepsilon}(X, d_n),$$

gdzie d_n jest metryką „dynamiczną", natomiast $\mathrm{widim}_{\varepsilon}(X,d)$ oznacza najmniejszą liczbe naturalną $\ell \geqslant 1$ taką, że możemy znaleźć pokrycie ℓ-elementowe przestrzeni X o średnicy $< \varepsilon$. Powyższa definicja przepisuje się naturalnie dla działań grupy $\mathbf{Z}^k$ (dzielimy przez n^k, a metryki dynamiczne liczymy dla „kwadratów" $\{0,\ldots,n-1\}^k$). Otóż naturalny shift $(([0,1]^d)^{\mathbf{Z}^k}, S^{\otimes k})$ jako $\mathbf{Z}^k$-działanie ma wymiar d i stąd mamy naturalne ograniczenie na jego uniwersalność. Lindenstrauss i Weiss skonstruowali układ minimalny o średnim wymiarze > 1, odpowiadając (negatywnie) na pytanie Auslandera. Fascynującym zagadnieniem jest teraz odwrócenie problemu, tzn. założenie odpowiedniego małego średniego wymiaru (i ograniczenia na punkty okresowe) i próba dowodu zanurzalnosci w przestrzeń shiftową. Głębokie wyniki w tej tematyce uzyskali Lindentrauss, Tsukamoto i Gutman (chociaż główna hipoteza Lindenstraussa i Tsukamoto – $\mathrm{mdim}(X,T) < d/2$, $\dim(\{x \in X : T^n x = x\}) < dn/2$ *dla wszystkich* $n \geqslant 1$, *to* (X,T) *zanurza się w* $(([0,1]^d)^{\mathbf{Z}}, S)$ – pozostaje otwarta). Zagadnieniom tym poświęcony jest rozdział 5.2 rozprawy, którego głównym wynikiem jest tw. 5.2.4 o zanurzalności rozszerzeń $\mathbf{Z}^k$-działań (przy założeniach na wymiar Rochlina podstawy rozszerzenia). Ilustracją tego twierdzenia są rozszerzenia (X,T), $\mathrm{mdim}(X,T) < L/2$, tzw. $\mathbf{Z}^k$-obrotów niewymiernych (działających na $\mathbf{T}^k$), które okazują się być zanurzalne w $(([0,1]^{2^k L+1})^{\mathbf{Z}^k}, S^{\otimes k})$. (Patrząc jednak na dowód wn. 5.2.7, wydaje się, że jest to ogólny rezultat dotyczący tzw. $\mathbf{Z}^k$-działań produktowych homeomorfizmów mających wymiar Rochlina 1.) Twierdzenia o zanurzalności są ściśle związane z problemem rekonstrukcji układu dynamicznego z „obserwabli" i to zagadnienie te wydaje się najważniejsze w rozdziale 5. Dotyczy to w szczególności twierdzenia Takensa z 1981 r. o zanurzalności (Takens udowodnił twierdzenie dla gładkich „obserwabli" na rozmaitościach). Tw. 5.3.1, którego dowód zajmuje niemal 10 stron i które uogólnia wcześniejszy rezultat Gutmana, orzeka, że przy założeniach: $\dim(X) = d$, $\dim(\{x : T^n x = x\}) < mn/2$ dla $1 \leqslant n \leqslant 2d$, odwzorowanie

$$X \ni x \mapsto (h(x), h(Tx), \ldots, h(T^{2d}x)) \in ([0,1]^m)^{2d+1}$$

jest zanurzenim dla typowej (topologicznie) funkcji ciagłej h (w przestrzeni Banacha $C(X, [0,1])^m$) jest, moim zdaniem, centralnym rezultatem rozprawy doktorskiej.

Oceniając rozprawę, należy przede wszystkim podkreślić różnorodność zagadnień w niej rozpatrywanych i, związanym z tym, bogactwem stosowanych metod dynamiki topologicznej. Za najwartościowszy rezultat rozprawy uznałbym twierdzenie Takensa z rozdziału 5., którego dowód wymagał i sporo wysiłku, i pomysłowości. Pozostałe wyniki rozprawy są w większości dobre, choć trudno byłoby mówić, że wnoszą one dużo nowego w nasze rozumienie entropii ciągowej, złożoności w teorii układów dynamicznych, czy też zbieżności prawie wszędzie wzdłuż podciągów w twierdzeniu ergodycznym. Podoba mi się również rezultat o średnim chaosie Li-Yorke'a dla układów z dodatnią entropią wzdłuż podciągów uniwersalnych dla zbieżności punktowej. Wcześniej wskazałem kilka słabszych fragmentów rozprawy, ale, w mojej ocenie, nie wpływają one na ogólną dobrą wartość naukową rozprawy.

Konkluzja: Uważam, że przedkładana rozprawa doktorska spełnia wymogi ustawowe i zwyczajowe potrzebne do uzyskania stopnia naukowego doktora nauk matematycznych. Wnoszę zatem o dopuszczenie mgr Yixiao Qiao do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Mariusz L