Streszczenie pracy doktorskiej
"O pewnych zastosowaniach twierdzenia Liona"
napisanej przez Zofię Ambroży pod kierunkiem
prof. Wiesława Pawłuckiego

Geometria o-minimalna może być postrzegana jako naturalne uogólnienie zbiorów semialgebraicznych. Dla przypomnienia odnotujmy, że zbiory semialgebraiczne w $\mathbb{R}^n$ to najmniejsza rodzina $\mathcal{SA}_n \subset \mathbb{R}^n$ taka, że

(1) jeżeli $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, to

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) = 0\} \in \mathcal{SA}_n, \ \{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) > 0\} \in \mathcal{SA}_n,$$

(2) jeżeli $A, B \in \mathcal{SA}_n$, to $A \cup B, A \cap B$ oraz $\mathbb{R}^n \backslash A \in \mathcal{SA}_n$.

Na mocy słynnego twierdzenia Tarskiego-Seidenberga, rodzina $\{SA_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zamknięta ze względu na operację rzutowania:

Niech $A \in \mathcal{SA}_{n+1}$. Wtedy $\Pi(A) \in \mathcal{SA}_n$, gdzie Π jest naturalnym rzutwaniem na n pierwszych współrzędnych.

Drugim źródłem inspiracji do wprowadzenia pojęcia struktury o-minimalnej były badania nad zbiorami *semianalitycznymi* i *subanalitycznymi*, prowadzonymi m. in. przez Łojasiewicza, Gabriełowa oraz Hironakę:

niech M będzie rzeczywistą rozmaitością analityczną. Mówimy, że $X \subset M$ jest *semianalityczny*, jeżeli dla wszystkich $a \in M$ istnieje otwarte otoczenie U_a punktu a takie, że $X \backslash U$ jest skończoną sumą zbiorów postaci

$$\{x \in U \mid f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0, \ g_1(x) > 0 \dots g_l(x) > 0\},$$

gdzie $f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_l$ są funkcjami analitycznymi na U. Mówimy, że $X \subset M$ jest *subanalityczny*, jeżeli dla każdego $a \in M$ istnieje otwarte otoczenie U_a punktu a oraz relatywnie zwarty zbiór $Y \in M \times \mathbb{R}^m$ taki, że $U \backslash X$ jest rzutem Y na M.

Zbiory semialgebraiczne jak i subanalityczne posiadają cały szereg dobrych własności topologicznych, takich jak: istnienie rozkładów komórkowych, stratyfikacji, triangulacji.

W latach 80. van den Dries ([vdD]) zauważył, że wiele własności zbiorów semialgebraicznych wynikaja z zaledwie kilu prostych aksjomatów. Wkrótce potem, pojęcia *struktury o-minimalnej* po raz pierwszy użyli Pillay ze Steinhornem ([PS]). Dzisiaj przyjmuje się następującą definicję:

Mówimy, że $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest *strukturą*, jeżeli każdy $\mathcal{S}_n$ jest rodziną podzbiorów $\mathbb{R}^n$, oraz spełnione są następujące warunki:

(1) $\mathcal{S}_n$ zawiera wszystkie podzbiory algebraiczne w $\mathbb{R}^n$,

(2) dla każdego n, $\mathcal{S}_n$ jest podalgebrą Boole'a zbioru potęgowego $\mathbb{R}^n$,

(3) jeżeli $A \in \mathcal{S}_m$ oraz $B \in \mathcal{S}_n$, to $A \times B \in \mathcal{S}_{m+n}$,

(4) jeżeli $\Pi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jet naturalnym rzutowaniem na pierwszych n współrzędnych oraz $A \in \mathcal{S}_{n+1}$, to $\Pi(A) \in \mathcal{S}_n$.

Struktura $\mathcal{S}$ jest *o-minimalna* jeżeli spełnia jeden dodatkowy warunek: elementy $\mathcal{S}_1$ to skończone sumy punktów i przedziałów.

Jednym z najbardziej interesujących kierunków badań struktur o-minimalnych jest odkrywanie nowych takich struktur. Ważnym i przełomowym wynikiem w tej dziedzinie jest twierdzenie Wilkiego ([W2]), które jest dalekim uogólnieniem słynnego twierdzenia

Gabriełowa o dopełnieniu. Lion w [L], posługując się tym twierdzeniem podaje warunki wystarczające (i konieczne) na to, aby pewne rodziny funkcyjne były definiowalne w strukturze o-minimalnej. Wynik Liona do tej pory nie był używany. Dysertacja poświęcona jest pewnym jego zastosowaniom.

Praca składa się z czterech rozdziałów. Pierwsza, wprowadzająca część poświęcona jest krótkiemu przedstawieniu twierdzeniu Liona. Przypomniane zostaje pojęcie regularnej geometrycznej rodziny funkcji oraz własność 0-regularności:

> Rodzina geometryczna $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{G}_n\}_{n\in\ \mathbb{N}}$ jest *0-regularna*, jeżeli dla każdego $n \in\ \mathbb{N}$ oraz każdego odwzorowania $g = (g_1, \dots, g_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, gdzie $g_i \in \mathfrak{G}_n$ $(i = 1, \dots, n)$, zbiór regularnych rozwiązań $g^{-1}(t)$ jest skończony dla każdego $t \in \mathbb{R}^n$.

Samo twierdzenie Liona może być formułowane następująco

> *Niech $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie regularną geometryczną rodziną funkcji. Jeżeli jest ona 0-regularna, to ma własność jednostajnej skończoności włókien, tzn. dla dowolnych $n, p \in \mathbb{N}$ oraz $g = (g_1, \dots, g_p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, gdzie $g_i \in \mathfrak{G}_n$ $(i = 1, \dots, p)$, istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że liczba składowych spójnych zbioru $g^{-1}(t)$ jest nie większa niż N dla dowolnego $t \in \mathbb{R}^p$.*

Powyższy rezultat w połączeniu z twierdzeniem Wilkiego-Karpińskiego-Mcintyre'a ([KM]) pozwala na stwierdzenie, że 0-regularne geometryczne rodziny funkcji są definiowalne w pewnej strukturze o-minimalnej.

W rozdziale drugim zostaje ustalona wielomianowo ograniczona struktura o-minimalna $\mathcal{S}$. Dołączany jest do niej wykres funkcji $\phi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^1$, która spełnia następujące warunki:

(1) dla każdego $K > 0$ funkcja $\phi|_{[0,K]}$ jest definiowalna oraz rosnąca na $(A, \infty]$, gdzie $A > 0$,
(2) $\phi(t)/t^k \longrightarrow \infty$, dla $t \longrightarrow \infty$ oraz każdego $k \in \mathbb{N}$,
(3) niech $M > 0$ oraz $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Q}$. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zdefiniowanym przez nierówności
$$M^{-1} < \phi(x_1)^{\alpha_1} \cdots \phi(x_n)^{\alpha_n} < M;$$
wtedy funkcja $\phi(x_1)^{\alpha_1} \cdots \phi(x_n)^{\alpha_n} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ jest definiowalna w $\mathcal{S}$,
(4) niech $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Q}$; wtedy funkcja
$$\phi^{-1}\left(\phi(x_1)^{\alpha_1} \cdots \phi(x_n)^{\alpha_n}\right) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
jest definiowalna w $\mathcal{S}$ na zbiorze
$$\mathcal{A} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \phi(x_1)^{\alpha_1} \cdots \phi(x_n)^{\alpha_n} > \phi(A)\}.$$

Badane są regularne rozwiązania układów równań

$$(\star) \qquad \begin{cases} P_1\Big(\phi(x_1), \dots, \phi(x_m), x\Big) = 0 \\ \vdots \\ P_n\Big(\phi(x_1), \dots, \phi(x_m), x\Big) = 0, \end{cases},$$

gdzie
$$P = (P_1, \dots, P_n) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$
jest odwzorowaniem definiowalnym klasy $\mathcal{C}^1$ oraz $m \leqslant n$. Głównymi narzędziami w tej części pracy jest twierdzenie przygotowawcze Liona-Rolina-Parusińskiego oraz lokalno-globalna wersja twierdzenia o funkcji uwikłanych w strukturach o-minimalnych. Otrzymane jest następujące twierdzenie

Układy równań $(\star)$ *mają skończoną liczbę pierwiastków regularnych.*

W przypadku, gdy $\mathcal{S}$ zawiera rodzinę $\mathcal{E} = \{\exp|_{[0,k]}\}_{k\in\mathbb{N}}$, funkcję ϕ można łatwo scharakteryzować:

> *Niech* $\mathcal{S}$ *będzie wielomianowo ograniczoną stukturą o-minimalną zawierającą* $\mathcal{E}$. *Niech* ϕ *będzie kiełkiem funkcji w nieskończoności spełniającej warunki* $(1)-(4)$. *Wtedy jest on postaci* $e^{P(t)}$, *gdzie* P *jest definiowalne oraz* $\lim_{t\to\infty} P(t) = \infty$.

Jako wniosek z twierdzenia o skończoności pierwiastków regularnych oraz twierdzenia Liona otrzymujemy dwa ważne, dobrze znane fakty

> *Niech* $\mathcal{S}$ *będzie wielomianowo ograniczoną stukturą o-minimalną zawierającą* $\mathcal{E}$. *Wtedy struktura* $\mathcal{S}_{\exp}$ *generowana przez* $\mathcal{S}$ *oraz funkcję wykładniczą jest o-minimalna.*
>
> *Niech* $\mathcal{S}$ *będzie strukturą semialgebraiczną. Wtedy* $\mathcal{S}_{\exp}$ *jest o-minimalna* (patrz [W1]).

W rozdziale trzecim rozważane są algebry $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^m, 0)$ kiełków klasy prawie $\mathcal{C}^\infty$, czyli dopuszczających reprezentantów dowolnie wysokiej klasy $\mathcal{C}^k$. Algebry $\mathcal{R}$ są rozszerzane do algebr $\mathcal{S}$ poprzez dołączenie do niej wielomianów, funkcji uwikłanych oraz dopuszczenie operacji brania pochodnych czątkowych i złożeń (pod pewnymi warunkami). Dla quasianalitycznych algebr $\mathcal{R}$ (tzn. takich, których elementy są niezerowe wtedy i tylko wtedy, gdy ich wielomian Taylora jest niezerowy) przeprowadzona zostaje lokalna wersja sprowadzania jej elementów do postaci normal crossings:

> *Niech* $P \in \mathcal{S}$ *oraz* $\{x_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ *będzie ciągiem takim, że* $x_\nu \longrightarrow 0$. *Wtedy istnieją:*
> (1) $\{t_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$, $t_\nu \longrightarrow 0$,
> (2) $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m) \in \mathcal{S}^m$, $\phi(0) = 0$,
> *takie, że* $P \circ \phi$ *jest w postaci normal crossings oraz* $\phi(t_\nu) = x_\nu$ *(po ewentualnym przejściu do podciągu).*

Podane zostaje kryterium na to, aby rodziny $\mathcal{A}$ funkcji przyciętych gładkich były definiowalne w pewnej strukturze o-minimalnej (jest to warunek podobny do tego z pracy [RSW]). Podane są przykłady zastosowania tego warunku do struktury $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$ oraz klas Denjoy-Carlemana silnie log-wypukłych.

Czwarty, ostatni rozdział pracy rozpoczyna się od podania przykładów funkcji postaci $f = g + h : [-1/2, 1/2] \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie g jest funkcją analityczną różniczkowo przestępną (tzn. nie spełnia żadnej relacji wielomianowo-różniczkowej nad $\mathbb{Q}$), a h jest funkcją płaską w zerze oraz semialgebraiczną poza każdym otoczeniem zera. Grelowski w [Gr] zauważa, że kiełek tej funkcji w zerze generuje ciało Hardy'ego. Pojawia się naturalne pytanie:

Czy f *jest definiowalne w pewnej strukturze o-minimalnej?*

Okazuje się że w ogólności tak nie jest. Podany zostaje przykład związany z funkcją gamma Eulera. Warunkiem wystarczającym na to, aby f była funkcją definiowalną w pewnej strukturze o-minimalnej jest warunek silnej przestępności narzucony na funkcję g:

> Niech $p \in \mathcal{C}^\infty(I)$, gdzie I jest przedziałem otwartym w $\mathbb{R}$. Niech
>
> $$\Delta_n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \exists_{i\neq j}\ x_i = x_j\}.$$
>
> Powiemy, że p jest *silnie przestępna*, jeżeli
>
> $$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \forall_{(x_1,\dots,x_n)\in I^n\setminus\Delta_n} \exists_{B\in\mathbb{N}}\ \forall_{m\in\mathbb{N}}$$
> $$\operatorname{tr.deg}_{\mathbb{Q}}\Big(x_1, \dots, x_n, j_m p(x_1), \dots, j_m p(x_n)\Big) \geqslant n(m+2) - B.$$

Metodami podobnymi do tych z pracy Rolina oraz Le Galla [LeGR] zostaje pokazana quasianalityczność pewnych algebr kiełków funkcji. O-minimalność struktury $\mathbb{R}_f$ jest prostym wnioskiem z twierdzenia Liona oraz procedury sprowadzania kiełków do postaci normal crossings.

Praca zakończona jest podaniem bogatej rodziny przykładów ciał Hardy'ego, które nie mogą być ciałami Hardy'ego żadnej struktury o-minimalnej. Szczególnie ciekawy wydaje się być następujący przykład:

Istnieją funkcje f_1, f_2 takie, że struktury $\mathbb{R}_{f_1}$ oraz $\mathbb{R}_{f_2}$ są o-minimalne, $\mathbb{R}(x)(f_1, f_2)$ jest ciałem Hardy'ego (f_1, f_2 traktujemy jako kiełki w zerze), ale $\mathbb{R}_{f_1,f_2}$ nie jest strukturą o-minimalną.

Literatura

[Gr] K. Grelowski. Extending Hardy fields by non-C-infinity germs. *Ann. Polon. Math.* **93** no. 3 (2008), 281-297.

[KM] M. Karpinski, A. Macintyre. A generalization of Wilkie's theorem of the complement, and an application to Pfaffian closure. *Selecta Math.* (*N.S.*), **5** (1999), 507-516.

[L] J.-M. Lion. Finitude simple et structures o-minimales. *J. Symbolic Logic* **67** no. 4 (2002), 1616-1622.

[PS] A. Pillay, C. Steinhorn. Definable sets in ordered structures. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **11** no. 1 (1984), 159-162.

[LeGR] O. Le Gal, J.-P. Rolin. An o-minimal structure which does not admit $\mathcal{C}^\infty$ cellular decomposition. *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble) **59** no. 2 (2009), 543-562.

[RSW] J.-P. Rolin, P. Speissegger, A. J. Wilkie. Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality. *J. Amer. Math. Soc.* **16** no. 4 (2003), 751-77.

[vdD] L. van den Dries. Remarks on Tarski's problem concerning $(\mathbf{R}, +, \cdot, \exp)$, Logic colloquium'82 (Florence, 1982), North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 97-121.

[W1] A. J. Wilkie. Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function. *J. Amer. Math. Soc.* **9** no. 4 (1996), 1051-1094.

[W2] A. J. Wilkie. A theorem of the complement and some new o-minimal structures. *Selecta Math.* (*N.S.*) **5** (1999), 397-421.