Autoreferat

Podstawowe dane osobowe

Imię i nazwisko: **Aneta Wróblewska-Kamińska (Wróblewska)**

Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

- **Doktorat z nauk matematycznych w zakresie matematyki.** Specjalność: równania różniczkowe cząstkowe. Miejsce: **Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego**. Rok uzyskania: **24 stycznia 2013.** Tytuł rozprawy: *An application of Orlicz spaces in partial differential equations*. Promotor: prof. dr hab. Piotr Gwiazda. Doktorat z wyróżnieniem.
- **Magister matematyki.** Specjalność: matematyka stosowana. Miejsce: **Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego**. Rok uzyskania: **30 lipca 2008**. Tytuł pracy: *Statyczny przepływ cieczy nienewtonowskiej z warunkami wzrostu w przestrzeniach Orlicza*. Promotor: prof. dr hab. Piotr Gwiazda.

Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

- **od 10/2012** Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa, Polska, stanowisko: adiunkt (10/2012 – 2/2013 jako asystent)
- **3/2019 – 4/2019** Instytut Matematyczny Czeskiej Akademii Nauk, Praga, Czechy, pozycja postdoktorska (jeden miesiąc)
- **11/2016 – 10/2018** Department of Mathematics, Imperial College London, Londyn, Zjednoczone Królestwo, stanowisko: stypendysta International Newton Fellowship
- **10/2013 – 9/2014** Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris Diderot, Paryż, Francja, pozycja postdoktorska, stypendysta programu Research in Paris
- **10/2008 – 5/2009** Instytut Matematyczny Czeskiej Akademii Nauk, Praga, Czechy, stanowisko: asystent, młody badacz

1 Wskazane osiągnięcia habilitacyjne

Wskazanym osiągnięciem jest cykl sześciu prac zatytułowany

Analiza matematyczna wybranych modeli hydrodynamicznych

1.1 Lista prac zawierająca wskazane osiągnięcia

[CWZ19]J. Carrillo, A. Wróblwska-Kamińska, E. Zatorska. ON LONG-TIME ASYMPTOTICS FOR VISCOUS HYDRODYNAMIC MODELS OF COLLECTIVE BEHAVIOR WITH DAMPING AND NONLOCAL INTERACTION. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences (M3AS)*, 29 (2019) no. 1, 31–63.

[KMNW2]O. Kreml, V. Mácha, S. Nečasová, A. Wróblewska-Kamińska. FLOW OF HEAT CONDUCTING FLUID IN A TIME DEPENDENT DOMAIN. *Zeitschrift für Angewandte Mathematic und Physik*, 69 (2018), no. 5, Art. 119, 27 pp.

[MW18] B. Matejczyk, A. Wróblewska-Kamińska. UNSTEADY FLOWS OF HEAT-CONDUCTING NON-NEWTONIAN FLUIDS IN GENERALISED ORLICZ SPACES. *Nonlinearity*, 31 (2018), no. 3, 701–727.

[KMNW1]O. Kreml, V. Mácha, S. Nečasová, A. Wróblewska-Kamińska. WEAK SOLUTIONS TO THE FULL NAVIER-STOKES-FOURIER SYSTEM WITH SLIP BOUNDARY CONDITIONS IN TIME DEPENDENT DOMAIN. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, (9) 109 (2018), 67–92.

[W17] A. Wróblewska-Kamińska. ASYMPTOTIC ANALYSIS OF COMPLETE FLUID SYSTEM ON VARYING DOMAIN: FORM COMPRESSIBLE TO INCOMPRESSIBLE FLOW. *SIAM Journal on Mathematical Analysis SIAM J. Math. Anal.*, 49 (2017) no. 5, 3299–3334.

[GW16]D. Gérard-Varet, A. Wróblewska-Kamińska. BOUNDARY LAYER FOR A NON-NEWTONIAN FLOW OVER A ROUGH SURFACE. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 48 (2016), no. 5, 3123–3147.

1.2 Inne wyniki naukowe

1. E. Emmrich, D. Šiška, A. Wróblewska-Kamińska. EQUATIONS OF SECOND ORDER IN TIME WITH QUASILINEAR DAMPING: EXISTENCE IN ORLICZ SPACES VIA CONVERGENCE OF A FULL DISCRETISATION. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39 (2016), no. 10, 2449–2460.

2. P. Gwiazda, P. Wittbold, A. Zimmermann, A. Wróblewska-Kamińska. RENORMALIZED SOLUTIONS OF NONLINEAR PARABOLIC PROBLEMS IN GENERALIZED MUSIELAK-ORLICZ SPACES. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 129 (2015), 1–36.

3. A. Wróblewska-Kamińska. EXISTENCE RESULT FOR THE MOTION OF SEVERAL RIGID BODIES IN AN INCOMPRESSIBLE NON-NEWTONIAN FLUID WITH GROWTH CONDITIONS IN ORLICZ SPACES. *Nonlinearity*, 27 (2014) 685–716.

4. E. Emmrich, A. Wróblewska-Kamińska. Convergence of a full discretization of quasilinear parabolic equations in isotropic and anisotropic Orlicz spaces. *SIAM J. Numer. Anal.*, 51 (2013), no. 2, 1163–1184.

5. A. Wróblewska-Kamińska. Local pressure methods in Orlicz spaces for the motions of rigid bodies in a non-Newtonian fluid with general growth conditions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – S*, 6 (2013) no. 5, 1417–1425.

6. A. Wróblewska-Kamińska. Unsteady flows of non-Newtoniana fluids in generalized Orlicz spaces. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – A*, 33 (2013), no 6, 2565–2592.

7. P. Gwiazda, P. Minakowski, A. Wróblewska-Kamińska. Elliptic problem in generalized Musielak-Orlicz spaces. *Central European Journal of Mathematics*, 10 (2012) no 6, 2019-2032.

8. P. Gwiazda, P. Wittbold, A. Wróblewska, A. Zimmermann. Renormalized solutions of nonlinear elliptic problems in generalized Orlicz spaces. *Journal of Differential Equations*, 253 (2012), 635–666.

9. P. Gwiazda, A. Świerczewska-Gwiazda, A. Wróblewska. Generalized Stokes system in Orlicz spaces. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – A*, 32 (2012), no. 6, 2125–2146.

10. A. Wróblewska. Steady flow of non-Newtonian fluids - monotonicity methods in generalized Orlicz spaces. *Nonlinear Analysis*, 72 (2010), 4136–4147.

11. P. Gwiazda, A. Świerczewska-Gwiazda, A. Wróblewska. Monotonicity methods in generalized Orlicz spaces for non-Newtonian flows.*Mathematical Methods in the Applied Science*, 33 (2010), no. 2, 125–137.

12. P. Gwiazda, A. Świerczewska-Gwiazda, A. Wróblewska. Turbulent flow of rapidly thickening fluids. *Proceedings of Polish-Japonese Days, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl.*, 32 (2010), 307–325.

13. P. Gwiazda, A. Świerczewska-Gwiazda, A. Warzyński, A. Wróblewska. Well-posedness for non-Newtonian flows with general growth conditions. *Banach Center Publications*, 86 (2009), 115–128.

14. A. Wróblewska-Kamińska. Non-Newtonian Fluids with Nonstandard Rheology - Existence of Solutions. *Proceedings of Conference Topical Problems of Fluid Mechanics 2015*. Institute of Thermomechanics AS CR, Prague. (2015) 261–272.

Spis treści

2 Krótkie omówienie zagadnienia i celu naukowego prac

Celem podjętych badań jest matematyczna analiza nielinowych równań różniczkowych cząstkowych oraz ich rozwiązań. W szczególności skupiamy się na problemach wywodzących się z mechaniki cieczy, zjawisk obserwowanych w przyrodzie czy technice. Chcielibyśmy rozważyć i zrozumieć reologię - zachowanie - płynów, w tym newtonowskich i nienewtonowskich, przewodzących ciepło, uwzględnić obszary ustalonych i zmienne w czasie. Głównym celem przedstawionch prac jest zbadanie, czy rozważane problemy - układy równań - są dobrze postawione, czy posiadają słabe rozwiązania, czy są to rozwiązania globalne w czasie, jak przebiega ich asymptotyka w czasie, jak zachowują się, gdy pewne parametry w układzie się zmieniają.

Wiele zjawisk w przyrodzie opisuje się podstawowymi układami z mechaniki płynów. Pomimo, że układy równań typu Naviera-Stokesa są szeroko akceptowane do opisu przepływów wielu cieczy i gazów, jest również bardzo szeroka klasa zjawisk, dla opisu których układ ten nie jest wystarczający, by uwzględnić bardziej złożone procesy czy własności. Istnieje zatem potrzeba konstruowania i zbadania modeli uwzględniających ich złożoną naturę. W szczególności układ Naviera-Stokesa ze stałym współczynnikiem lepkości nie oddaje w dobry sposób zachowania się płynów nienewtonowskich, które są bardzo powszechne i obejmują płyny, których lepkość rośnie wraz ze wzrostem naprężenia lub przeciwnie - ich lepkość maleje. Modele związane z reologią tego typu cieczy są szeroko stosowane w geofizyce, inżynierii, medycynie, czy glacjologii. Własność zmiany lepkości odzwierciedla się w silnych nieliniowościach układu równań opisującego przepływ tychże cieczy, co już samo w sobie jest istotnym problemem matematycznym.

Z punktu widzenia wielu zastosowań, jaki i matematyki istotne jest również uwzględnienie efektów cieplnych w układach dynamiki płynów. W naszych rozważaniach staramy się zrozumieć ich wpływ zarówno w przypadku płynów newtonowskich jak i nienewtonowskich. Szczególnie interesujące wydają się rozważania tego typu na obszarach, które zmieniają się w czasie i same w sobie są w ruchu, co ma też ogromny wpływ na dynamikę zawartych w tych obszarach płynów.

Modele hydrodynamiczne opisują nie tylko zjawiska związane z mechaniką cieczy i gazów, ale również mają wiele zastosowań w opisie makroskopowym ruchu dużych ilości cząstek, komórek lub osobników. W makroskopowej skali zjawiska tworzenia się stad, roi czy ruch ludzi często widziane są jako dynamika ciągłego ośrodka.

W ramach dorobku habilitacyjnego rozważamy następujące zagadnienia:

- nieściśliwe płyny nienewtonowskie – wpływ szorstkiego brzegu na ich dynamikę,
- nieściśliwe płyny nienewtonowskie – uwzględnienie temperatury jako zmiennej w układzie,
- ściśliwe płyny (newtonowskie) przewodzące ciepło - obszary zmienne w czasie:
  - układ z równaniem energii cieplnej,
  - układ z bilansem entropii,
- przejście z modelu ściśliwego do nieściśliwego – mała liczba Macha,
- model hydrodynamiczny ruchu kolektywnego – nielokalne interakcje.

3 Szczegółowe omówienie wyników

3.1 Ciecze nienewtonowskie w obszarze o chropowatej powierzchni - warstwa graniczna, warunki brzegowe

Abstrakt

W pracy [GW16] analizujemy jak małe nieregularności brzegu obszaru wpływają na statyczny przepływ płynów nienewtonowskich. W szczególności rozważamy uogólniony układ Stokesa dla płynów o wykładniczej relacji konstytutywnej, z warunkiem braku poślizgu (zerowy warunek Dirichleta). Nieregularność (nierówności, szorstkość, chropowatość) brzegu modelowana jest przez małe periodyczne wariacje powierzchni brzegowej (odchylenia od prostej), opisane przez mały parametr. Naszym celem jest wyprowadzenie efektywnego warunku brzegowego – prawa ściany – postawionego na gładkim brzegu – takiego, który generuje możliwie najmniejszy błąd aproksymacji (wyrażony parametrem). Kluczowym punktem analizy matematycznej jest zrozumienie zachowania sę warstwy przybrzegowej generowanej przez nierówności. Podkreślmy, że rezultat ten dotyczy obu przypadków cieczy, których lepkość rośnie lub maleje przy wzroście tensora ścinania.

3.1.1 Opis problemu. Motywacje

Praca [GW16] wgłębia się w efekt jaki ma chropowaty brzeg (ściana) na płyn. Efekt ten jest istotny w różnych skalach. Na przykład w dziedzinie mikropłynów, ostatnie prace eksperymentalne podkreślają znaczenie hydrofobowej szorstkiej powierzchni, która w znacznym stopniu poprawia własność poślizgu w mikrotunelach. Także w geofizyce, gdy mamy do czynienia z dużymi skalami, topografia lub nierówność teren mogą być uznane jako powierzchnia chropowata w mniejszej skali. Dla przepływów o dużej liczbie Reynoldsa ważne jest by zrozumieć jak lokalizować nierówności, niestabilności i ich wpływ na turbulencje. Dla przepływów laminarnych natomiast kluczowe wydaje się być zrozumienie, jaki makroskopowy wpływ na dynamikę przepływu ma rozłożenie szorstkości na powierzchni brzegowej. W szczególności, naszą nadzieją jest tu rozkodowanie uśrednionego efektu poprzez efektywnie postawiony warunek brzegowy na wygładzonym brzegu. Taki warunek brzegowy, nazywany prawem ściany (a wall law), pozwala na uniknięcie symulowania małoskalowej dynamiki, która mam miejsce w warstwie przybrzegowej i jest konsekwencją nieregularności brzegu obszaru, w którym rozważamy przepływ. Ważne jest to szczególnie, gdy symulacje dotyczą problemu, gdy nieznana jest dokładnie geometria obszaru lub niereularności są zbyt małe, tym samym zbyt kosztowne numerycznie.

Wyprowadzenie prawa ściany dla laminarnego przepływu płynów newtonowskich była szeroko studiowana poczynając od prac Achdou, Pironneau i Valentin [1, 2] oraz Jägera i Mikelić [74, 75]. Patrz także [100, 5, 61, 15, 82]. Naturalnym matematycznym podejściem do tego problemu są techniki homogenizacji. Chropowatość jest modelowana jako oscylacje o małej amplitudzie i długości. Zwyczajowo rozważa się układ Naviera-Stokesa w tunelu (kanale) Ω^ε z szorstkim (chropowatym) dnem:

$$\Omega^\varepsilon = \Omega \cup \Sigma_0 \cup R^\varepsilon.$$

Bardziej szczegółowo:

- $\Omega = (0,1)^2$ jest płaską częścią tunelu.

- R^ε jest szorstką częścią tunelu taką, że

$$R^\varepsilon = \{x = (x_1, x_2), x_1 \in (0,1), 0 > x_2 > \varepsilon\gamma(x_1/\varepsilon)\}$$

  z dolną powierzchnią $\Gamma^\varepsilon := \{x_2 = \varepsilon\gamma(x_1/\varepsilon)\}$ o parametrze $\varepsilon \ll 1$. Funkcja $\gamma = \gamma(y_1)$ jest wzorem chropowatości.

- $\Sigma_0 := (0,1) \times \{0\}$ jest powierzchnią pomiędzy płaską a szorstką częścią. Jest to sztucznie ustalony brzeg, na którym postawione będzie prawo ściany.

W takim modelu celem jest zrozumienie zachowania się rozwiązań układu Naviera-Stokesa $\mathbf{u}^\varepsilon$, gdy $\varepsilon \to 0$ Dlatego też punktem startowym jest analiza $\mathbf{u}^\varepsilon$ w formie

$$\mathbf{u}^\varepsilon_{app}(x) = \mathbf{u}^0(x) + \varepsilon\mathbf{u}^1(x) + \cdots + \mathbf{u}^0_{bl}(x/\varepsilon) + \varepsilon\mathbf{u}^1_{bl}(x/\varepsilon) + \ldots . \tag{3.1}$$

W tym rozwinięciu $u^i = u^i(x)$ opisuje duże skale w przepływie, a $\mathbf{u}^i_{bl} = \mathbf{u}^i_{bl}(y)$ to związane z warstwą przybrzegową. W typowych zmiennych $y = x/\varepsilon$ porównuje małoskalowe wariacje indukowane przez szorstkość. W przypadku jednorodnego warunku Dirichleta na Γ^ε można sprawdzić, że

- $\mathbf{u}^0$ jest rozwiązaniem układu Naviera-Stokesa w Ω, z warunkiem Dirichletana na Σ_0.

- $\mathbf{u}^0_{bl} = 0$, a $\mathbf{u}^1_{bl}$ spełnia równanie Stokesa w zmiennej y w obszarze warstwy przybrzegowej

$$\Omega_{bl} := \{y = (y_1, y_2), y_1 \in \mathbb{R}, y_2 > \gamma(y_1)\}.$$

Następnym krokiem jest rozwiązanie równania warstwy przybrzegowej i wykazanie zbieżności $\mathbf{u}^1_{bl}$ gdy $y_2 \to +\infty$ do stałego pola prędkości $\mathbf{u}^\infty = (U^\infty, 0)$. To determinuje odpowiedni warunek brzegowy dla korekty w dużych skalach $\mathbf{u}^1$. Stąd rozważając część związaną z dużymi skalami $\mathbf{u}^0 + \varepsilon\mathbf{u}^1$, można wykazać, że:

- Granicznym prawem ściany jest jednorodny warunek Dirichleta. Zauważmy, że ta własność utrzymuje się nawet, gdy wyjściowo startujemy na poziomie mikorskopowym z warunkiem pełnego poślizgu, pod pewnymi warunkami braku degeneracji szorstkości: [17, 11, 12].

- Korekta rzędu $O(\varepsilon)$ dla tego prawa ściany to warunek poślizgu typu Navier o długości poślizgu $O(\varepsilon)$.

Wszystkie te kroki zostały przeanalizowane w wyżej wymienionych artykułach, w przypadku okresowego wzoru chropowatości $\gamma : \gamma(y_1 + 1) = \gamma(y_1)$. W ciągu ostatnich lat D. Gérard-Varet rozszerzył tą analizę na ogólne typy chropowatości, w tym z losowym rozkładem chropowatości. Patrz [8, 62, 63, 34].

Celem pracy [GW16] jest rozszerzenie tejże analizy na przypadek cieczy typu nienewtonowskiego, co może mieć wiele zastosować. Z jednej strony możemy myśleć o zastosowaniach w inżynierii (np. smary z dodatkiem polimerów o malejącej lepkości przy wzroście ścinania). Z drugiej strony możemy w ten sposób analizować problemy z glacjologii: interakcje lodowca z kamienistym podłożem o nieznanym rozkładzie. Z matematycznego punktu wiedzenia, przykłady takie mogą być opisywane przez modele, gdzie tensor naprężeń ma wzrost potęgowy. Rozważamy zatem układ o następującej formie:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_x \mathbf{S}(\mathbf{D}\boldsymbol{u}) + \nabla_x p = e_1 & \text{w } \Omega^\varepsilon, \\ \mathrm{div}_x \mathbf{u} = 0 & \text{w } \Omega^\varepsilon, \\ \mathbf{u}|_{\Gamma^\varepsilon} = 0, \quad \mathbf{u}|_{x_2=1} = 0, & \mathbf{u} \text{ 1-okresowe względem } x_1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Jak zwykle – $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x) \in \mathbb{R}^2$ jest polem prędkości , $p = p(x) \in \mathbb{R}$ oznacza ciśnienie. Człon siłowy e_1 po prawiej stronie pierwszego równania odpowiada stałemu gradientowi ciśnienia $e_1 = (1,0)^t$ w całym kanale. Po prawiej stronie mamy tensor naprężeń. Jak już wspomniano ma on formę potęgową: $\mathsf{S} : \mathbb{R}^{2\times 2}_{\text{sym}} \to \mathbb{R}^{2\times 2}_{\text{sym}}$ i dany jest przez

$$\mathsf{S} : \mathbb{R}^{2\times 2}_{\text{sym}} \to \mathbb{R}^{2\times 2}_{\text{sym}}, \quad \mathsf{S}(\mathsf{A}) = \nu|\mathsf{A}|^{p-2}\mathsf{A}, \quad \nu > 0, \quad 1 < p < +\infty, \tag{3.3}$$

gdzie $|\mathsf{A}| = (\sum_{i,j} a_{i,j}^2)^{1/2}$ jest zwyczajową euklidesową normą macierzy A. Dla uproszczenia bierzemy $\nu = 1$. Zatem $\mathsf{S}(\mathbf{D}\boldsymbol{u}) = |\mathbf{D}\boldsymbol{u}|^{p-2}\mathbf{D}\boldsymbol{u}$, gdzie $\mathbf{D}\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}(\nabla_x \mathbf{u} + (\nabla_x \mathbf{u})^t)$ jest symetryczną częścią jakobianu. Zgodnie z klasyczną terminologią przypadek, gdy $p < 2$ związany jest z płynami, których lepkość maleje, a gdy $p > 2$ - lepkość rośnie przy wzroście wartości ścinania. Graniczny przypadek $p = 2$ opisuje ciecze newtonowskie. W naszym przypadku uzupełniamy układ o (3.2) o standardowe warunki braku poślizgu na górnym i dolnym brzegu kanału. Dla uproszczenia zakładamy periodyczność w kierunku horyzontalnym, tj. względem zmiennej x_1. Przyjmujemy również okresowość na wzór chropowatości γ:

$$\gamma \text{ jest } C^{2,\alpha} \text{ dla pewnego } \alpha > 0, \text{ ma wartości w } (-1,0) \text{ oraz jest 1-okresowe w } y_1. \tag{3.4}$$

Dla każdego $\varepsilon > 0$ i dowolnego p, uogólniony układ Stokesa (3.2) ma jednoznaczne rozwiązanie

$$(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon) \in W^{1,p}(\Omega^\varepsilon) \times L^{p'}(\Omega^\varepsilon)/\mathbb{R}.$$

(Oznacza to, że $\mathbf{u}^\varepsilon \in W^{1,p}(\Omega^\varepsilon)$, a p^ε należy do $L^{p'}(\Omega^\varepsilon)/\mathbb{R}$, gdzie $\|p^\varepsilon\|_{L^{p'}(\Omega^\varepsilon)/\mathbb{R}} = \inf_{a\in\mathbb{R}} \|p^\varepsilon - a\|_{L^{p'}(\Omega^\varepsilon)}$.) Naszym głównym celem jest poznanie granicznego zachowania $\mathbf{u}^\varepsilon$ gdy $\varepsilon \to 0$, w tym wypadku oznacza to skonstruowanie pewnego dobrego rozwiązania aproksymacyjnego. Odwołując się do przypadku newtonowskiego, przewidujemy, że to przybliżenie przyjmie formę zbliżoną do (3.1). Nasz plan jest następujący:

- wyprowadzić równania spełniane przez pierwsze człony rozwinięcia (3.1),
- rozwiązać te równania oraz wykazać zbieżność warstwy przybrzegowej do stałego pola odpowiednio daleko od dolnego brzegu,
- uzyskać oszacowania błędu dla różnicy pomiędzy $\mathbf{u}^\varepsilon$ a $\mathbf{u}^\varepsilon_{app}$,
- wyprowadzić z tych kroków odpowiednie prawo ściany.

Program ten jest znacznie trudniejszy do osągnięcia w przypadku płynów nienewtonowskich, w szczególności w przypadku $p < 2$, zwłaszcza w odniesieniu do badania równań warstwy przybrzegowej dla $\mathbf{u}_{bl} := \mathbf{u}^1_{bl}$. W skrócie, równania te mają formę:

$$-\text{div}_x(\mathsf{S}(\mathsf{A} + \mathbf{D}\mathbf{u}_{bl})) + \nabla_x p = 0, \text{div}_x \mathbf{u} = 0, \quad y \in \Omega_{bl}$$

dla pewnej danej macierzy A, wraz z warunkiem periodyczności względem y_1 oraz z jednorodnym warunkiem Dirichleta na dolnym brzegu Ω_{bl}. Powodem dodatkowych trudności jest nieliniowość oraz fakt, że $\mathsf{A} \neq 0$, co wyraźnie odbija się w dowodzie tzw. oszacowań Saint-Venanta.

Podsumujmy to wprowadzenie poprzez podanie referencji do powiązanych problemów. W pracy [81]; E. Marušić-Paloka rozważa płyny typu potęgowego z członem konwekcyjnym w nieskończonym kanale lub rurze (nienewtonowski odpowiednik problemu Leraya).

Po odpowiednich zamianach zmiennych system studiowany w [81] wykazuje silne podobieństwo do naszego systemu warstwy przybrzegowej. Różni się jednak na dwóch poziomach: po pierwsze, analiza ogranicza się tam do przypadku $p > 2$. Po drugie, nasz boczny warunek okresowości w y_1 zostaje zastąpiony brakiem poślizgu. To pozwala na wykorzystanie nierówności Poincaré w zmiennej poprzecznej i kontrolować człony zerowego rzędu (w prędkości $\mathbf{u}$) przez $\nabla_x \mathbf{u}$ oraz przez $\mathsf{D}\boldsymbol{u}$ dzięki nierówności Korna. Upraszcza to udowodnienie eksponencjalnej zbieżności rozwiązań dla warstwy przybrzegowej (oszacowania Saint-Venanta). To samo uproszczenie zostało przyjęte w pracy [13], gdzie analizowane jest przepływ płynu typu Carreau przez cienki filtr. Korektor opisujący zachowanie się płynu w pobliżu filtra jest regulowany przez rodzaj systemu dla warstwy przybrzegowej w płycie, która jest nieskończona w pionie w obu kierunkach. Przy takich warunkach $\mathsf{A} = 0$, Autorzy powołują się na [81] by uzyskać istnienie i własności rozwiązań. Przywołajmy również artykuł [107] poświęcony cieczom typu potęgowego w cienkich obszarach z warunkiem Naviera i anizotropową chropowatością (o długości fali większej niż amplituda). W takiej sytuacji nie ma potrzeby analizowania warstwy przybrzegowej. W pracy [33] rozważono płyn Oldroyda w chropowatym kanale. W tym przypadku nie ma nieliniowości w układzie związanym z warstwą przybrzegową, która spełnia klasyczny układ Stokesa.

Przybliżenie zerowego rzędu

Mając na uwadze powyższą dyskusją zacznijmy od $(\mathbf{u}^0, p^0)$ będących rozwiązaniem układu:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_x \mathsf{S}(\mathsf{D}\boldsymbol{u}^0) + \nabla_x p^0 = e_1 \quad \text{w}\, \Omega, \\ \mathrm{div}_x \mathbf{u}^0 = 0 \quad \text{w}\, \Omega, \\ \mathbf{u}^0|_{\Sigma_0} = 0, \quad \mathbf{u}^0|_{x_2=1} = 0, \quad \mathbf{u}^0 \text{ 1-okresowe w } x_1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Rozwiązanie jest dane explicite i jest uogólnieniem przepływu Poiseuille. Proste rachunki dają nam: dla wszystkich $x \in \Omega$,

$$p^0(x) = 0, \quad \mathbf{u}^0(x) = (U(x_2), 0), \quad U(x_2) = \frac{p-1}{p} \left(\sqrt{2}^{-\frac{p}{(p-1)}} - \sqrt{2}^{\frac{p}{(p-1)}} \left| x_2 - \frac{1}{2} \right|^{\frac{p}{p-1}} \right). \tag{3.6}$$

Rozszerzamy to rozwiązanie na cały chropowaty kanał przyjmując, że: $\mathbf{u}^0 = 0, p^0 = 0$ w R^ε. Ta zerowego rzędu aproksymacja jest ciągła w powierzchni Σ_0, ale związany tensor naprężeń już nie. Oznaczając

$$\mathsf{A} := \mathsf{D}(\mathbf{u}^0)|_{y_2=0^+} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & U'(0) \\ U'(0) & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie } U'(0) = \sqrt{2}^{\frac{p-2}{p-1}} \tag{3.7}$$

otrzymujemy

$$[\mathsf{S}(\mathsf{D}\boldsymbol{u}^0)\boldsymbol{n} - p^0\boldsymbol{n}]|_{\Sigma_0} = |\mathsf{A}|^{p-2}\mathsf{A}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}^{-p} U'(0)^{p-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

gdzie $\boldsymbol{n} = -e_2 = -(0,1)^t$ oraz $[f] := f|_{x_2=0^+} - f|_{x_2=0^-}$.

Ta zerowego rzędu aproksymacja generuje istotnie duży skok. Oznaczając

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{u}^0 + \boldsymbol{w}^\varepsilon$$

otrzymujemy, że dla $1 < p \leq 2 \quad (M > \|\mathsf{D}\mathbf{u}^0\|_{L^\infty(\Omega)})$

$$\|\mathsf{D}\boldsymbol{w}^\varepsilon\|^p_{L^p(\Omega \cap \{|\mathsf{D}\boldsymbol{w}^\varepsilon| \geq M\})} + \|\mathsf{D}\boldsymbol{w}^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega \cap \{|\mathsf{D}\boldsymbol{w}^\varepsilon| \leq M\})} + \|\mathsf{D}\boldsymbol{w}^\varepsilon\|^p_{L^p(R^\varepsilon)} \leq C\varepsilon$$

oraz dla $2 \leq p < \infty$

$$\|\mathbf{D}\boldsymbol{w}^\varepsilon\|^p_{L^p(\Omega^\varepsilon)} \leq C\varepsilon.$$

Warstwa przybrzegowa.

Podkreślmy, że tak duży w aproksymacji zerowego rzędu błąd generowany jest przez skok w tensorze naprężeń. Dlatego też powinien on być skorygowany przez $\mathbf{u}_{bl}$ w taki sposób, że aproksymacja $\mathbf{u}^0(x)+\varepsilon\mathbf{u}_{bl}(x/\varepsilon)$ nie ma skoku. Wyjaśnia to amplitudę ε członu warstwy przybrzegowej, ponieważ jego gradient będzie wtedy rzędu $O(1)$. Dzięki rozwinięciu Taylora $U(x_2) = U(\varepsilon y_2) = U(0)+\varepsilon U'(0)y_2+\ldots$ otrzymujemy $\mathbf{D}(\mathbf{u}^0+\varepsilon\mathbf{u}_{bl}(\cdot/\varepsilon)) \approx \mathbf{A}+\mathbf{D}\mathbf{u}_{bl}$, gdzie ostatni gradient symetryczny jest względem zmiennej y. W ten sposób dochodzimy do układu warstwy przybrzegowej, który przyjmuje postać:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_x \mathbf{S}(\mathbf{A} + \mathbf{D}\mathbf{u}_{bl}) + \nabla_x p_{bl} = 0 & \text{w } \Omega^+_{bl}, \\ -\mathrm{div}_x \mathbf{S}(\mathbf{D}\mathbf{u}_{bl}) + \nabla_x p_{bl} = 0 & \text{w } \Omega^-_{bl}, \\ \mathrm{div}_x \mathbf{u}_{bl} = 0 & \text{in } \Omega^+_{bl} \cup \Omega^-_{bl}, \\ \mathbf{u}_{bl}|_{\Gamma_{bl}} = 0, & \\ \mathbf{u}_{bl}|_{y_2=0^+} - \mathbf{u}_{bl}|_{y_2=0^-} = 0, & \end{cases} \tag{BL1}$$

wraz z warunkiem skoku

$$(\mathbf{S}(\mathbf{A} + \mathbf{D}\mathbf{u}_{bl})\boldsymbol{n} - p_{bl}\boldsymbol{n})\,|_{y_2=0^+} - (\mathbf{S}(\mathbf{D}\mathbf{u}_{bl})\boldsymbol{n} - p_{bl}\boldsymbol{n})\,|_{y_2=0^-} = 0, \quad \boldsymbol{n} = (0,-1)^t. \tag{BL2}$$

Potrzebujemy zatem następującego rezultatu:

Twierdzenie 3.1 *[Istnienie rozwiązań dla układu BL, Theorem 2.1 [GW16]] Dla dowolnego $1 < p < 2$, układ (BL) ma jednoznaczne (słabe) rozwiązanie $(\mathbf{u}_{bl}, p_{bl}) \in W^{1,p}_{loc}(\Omega_{bl}) \times L^{p'}_{loc}(\Omega_{bl})/\mathbb{R}$ spełniające dla dowolnego $M > |\mathbf{A}|$:*

$$\mathbf{D}\mathbf{u}_{bl}\, \mathbb{1}_{\{|\mathbf{D}\mathbf{u}_{bl}| \leq M\}} \in L^2(\Omega_{bl}), \quad \mathbf{D}\mathbf{u}_{bl}\, \mathbb{1}_{\{|\mathbf{D}\mathbf{u}_{bl}| \geq M\}} \in L^p(\Omega_{bl}).$$

Dla dowolnego $p \geq 2$, układ (BL1) *ma jednoznaczne (słabe) rozwiązanie $(\mathbf{u}_{bl}, p_{bl}) \in W^{1,p}_{loc}(\Omega_{bl}) \times L^{p'}_{loc}(\Omega_{bl})/\mathbb{R}$ takie, że*

$$\mathbf{D}\mathbf{u}_{bl} \in L^p(\Omega_{bl}) \cap L^2(\Omega_{bl}).$$

W pracy [GW16] zaprezentowany jest szczegółowy dowód dla przypadku $1 < p < 2$, jednakże powyższy rezultat zachodzi również dla $p \geq 2$, co jest opatrzone odpowiednim komentarzem.

Kluczowym narzędziem dla dalszej analizy jest wykazanie eksponencjalnej zbieżności pola $\mathbf{u}_{bl}$ do pola stałego:

Twierdzenie 3.2 *[Eksponencjalna zbieżność, Theorem 2.2 [GW16]] Dla dowolnego $1 < p < +\infty$ rozwiązanie dane w poprzednim twierdzeniu zbiega eksponencjalne do stałego pola wektorowego. Oznacza to, że dla pewnych $C, \delta > 0$ zachodzi:*

$$|\mathbf{u}_{bl}(y) - \mathbf{u}^\infty| \leq Ce^{-\delta y_2} \quad \forall\, y \in \Omega^+_{bl},$$

gdzie $\mathbf{u}^\infty = (U^\infty, 0)$ jest stałym horyzontalnym polem wektorowym.

Dowód, który można znaleźć w [GW16], oparty jest na następujących własnościach:

- Regularność wewnątrz obszaru dla uogólnionego układu Stokesa w dwóch wymiarach oparta w szczególności na [112] dla $p < 2$ oraz na [88] dla $p \geq 2$.

- Sercem dowodu jest wykazanie oszacowań Saint-Venanta. Tu musimy wykazać, że energia rozwiązań zlokalizowana powyżej poziomu $y_2 = t$ wygasza się wykładniczo wraz z t, tj.
$$E(t) \;:=\; \int_{\{y_2>t\}} |\nabla \mathbf{u}_{bl}|^2 \leq C\exp(-\delta t).$$
Szczegóły można znaleść w [GW16, Section 2.2].

3.1.2 Konstrukcja dokładniejszej aproksymacji

Naszym kolejnym celem jest skonstruowanie bardziej precyzyjnego przybliżenia właściwego rozwiązania $\mathbf{u}^\varepsilon$ dla (3.2). Będzie ono uwzględniać profil warstwy przybrzegowej $\mathbf{u}_{bl}$.

Postępujemy w następujący sposób. Niech N będzie dużą stałą, która zostanie ustalona później. Wprowadzamy:

$$\Omega^\varepsilon_N := \Omega^\varepsilon \cap \{x_2 > N\varepsilon|\ln\varepsilon|\}, \quad \Omega^\varepsilon_{0,N} = \Omega^\varepsilon \cap \{0 < x_2 < N\varepsilon|\ln\varepsilon|\},$$
$$\text{oraz} \quad \Sigma_N = (0,1) \times \{x_2 = N\varepsilon|\ln\varepsilon|\}.$$

Niech $\mathbf{u}^{0,\varepsilon}$ będzie rozwiązaniem

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_x \mathbf{S}(\mathbf{D}\mathbf{u}^{0,\varepsilon}) + \nabla_x p^{0,\varepsilon} = e_1, \quad x \in \Omega^\varepsilon_N, \\ \mathrm{div}_x \mathbf{u}^{0,\varepsilon} = 0, \quad x \in \Omega^\varepsilon_N, \\ \mathbf{u}^{0,\varepsilon}|_{\Sigma_N} = \left(x \to \left(\begin{smallmatrix} U'(0)x_2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \varepsilon\mathbf{u}^\infty\right)|_{\Sigma_N}, \\ \mathbf{u}^{0,\varepsilon}|_{\{x_2=1\}} = 0, \\ u^{0,1} \text{ jest okresowa w } x_1 \text{ z okresem } 1. \end{cases} \tag{3.8}$$

Tak jak dla uogólnionego przepływu Poiseuille, ciśnienie $p^{0,\varepsilon}$ jest zerowe i mamy dane wprost wyrażenie na $\mathbf{u}^{0,\varepsilon} = (U^\varepsilon(x_2), 0)$.

Następnie rozważmy problem Bogovskiego

$$\begin{cases} \mathrm{div}_x \boldsymbol{r}^\varepsilon = 0 \quad \text{in } \Omega^\varepsilon_N, \\ \boldsymbol{r}^\varepsilon|_{\Sigma_N} = \varepsilon(\mathbf{u}_{bl}(\cdot/\varepsilon) - \mathbf{u}^\infty)|_{\Sigma_N}, \\ \boldsymbol{r}^\varepsilon|_{\{x_2=1\}} = 0, \\ \boldsymbol{r}^\varepsilon \text{ jest okresowe w } x_1 \text{ z okresem } 1. \end{cases} \tag{3.9}$$

Mamy wtedy, że
$$\|\boldsymbol{r}^\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega^\varepsilon_N)} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{p}} \exp(-\delta N|\ln\varepsilon|). \tag{3.10}$$

Jesteśmy teraz gotowi zdefiniować nową aproksymację $(\mathbf{u}^\varepsilon_{app}, p^\varepsilon_{app})$ w następujący sposób
$$\mathbf{u}^\varepsilon_{app}(x) = \begin{cases} \mathbf{u}^{0,\varepsilon}(x) + \boldsymbol{r}^\varepsilon(x) \quad x \in \Omega^\varepsilon_N, \\ \left(\begin{smallmatrix} U'(0)x_2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \varepsilon\mathbf{u}_{bl}(x/\varepsilon), \quad x \in \Omega^\varepsilon_{0,N}, \\ \varepsilon\mathbf{u}_{bl}(x/\varepsilon), \quad x \in R^\varepsilon, \end{cases} \tag{3.11}$$

natomiast
$$p^\varepsilon_{app}(x) = \begin{cases} 0 \quad x \in \Omega^\varepsilon_N, \\ p_{bl}(x/\varepsilon) \qquad x \in \Omega^\varepsilon_{0,N} \cup R^\varepsilon. \end{cases} \tag{3.12}$$

Przy takim wyborze

$$\mathbf{u}^\varepsilon_{app}|_{\partial\Omega^\varepsilon} = 0, \quad \mathrm{div}_x \mathbf{u}^\varepsilon_{app} = 0 \quad \text{na } \Omega^\varepsilon_N \cup \Omega^\varepsilon_{0,N} \cup R^\varepsilon.$$

Ponadto $\mathbf{u}^\varepsilon_{app}$ ma zerowy skok na powierzchni Σ_0 oraz Σ_N:

$$[\mathbf{u}^\varepsilon_{app}]|_{\Sigma_0} = 0, \quad [\mathbf{u}^\varepsilon_{app}]|_{\Sigma_N} = 0.$$

Jednak tensor naprężeń nadal pośiada skok, tj.

$$\begin{aligned}
\big[\mathsf{S}(\mathsf{D}\mathbf{u}^\varepsilon_{app})\boldsymbol{n} - p^\varepsilon_{app}\boldsymbol{n}\big]\,|_{\Sigma_0} &= 0,\\
\big[\mathsf{S}(\mathsf{D}\mathbf{u}^\varepsilon_{app})\boldsymbol{n} - p^\varepsilon_{app}\boldsymbol{n}\big]\,|_{\Sigma_N} &= \big(\mathsf{S}(\mathsf{D}\mathbf{u}^0_\varepsilon + \mathsf{D}\boldsymbol{r}^\varepsilon)|_{\{x_2=(N\varepsilon|\ln\varepsilon|)^+\}} - \mathsf{S}(\mathsf{A} + \mathsf{D}\mathbf{u}_{bl}(\cdot/\varepsilon))|_{\{x_2=(N\varepsilon|\ln\varepsilon|)^-\}}\big)\,\boldsymbol{e}_2\\
&\quad - p_{bl}(\cdot/\varepsilon)|_{\{x_2=(N\varepsilon|\ln\varepsilon|)^-\}}\boldsymbol{e}_2.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Następnym krokiem jest uzyskanie oszacowań błędu na $\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}^\varepsilon_{app}$.

3.1.3 Oszacowanie błędu

W pracy [GW16] znajdziemy następujący rezultat:

Twierdzenie 3.3 *[Oszcowanie błędu, Theorem 3.1 [GW16]]*

- *Dla* $1 < p \le 2$ *istnieje* C, *takie że*

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}^\varepsilon_{app}\|_{W^{1,p}(\Omega^\varepsilon)} \le C(\varepsilon|\ln\varepsilon|)^{1+\frac{1}{p'}}.$$

- *Dla* $p \ge 2$ *istnieje* C, *takie że*

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}^\varepsilon_{app}\|_{W^{1,p}(\Omega^\varepsilon)} \le C(\varepsilon|\ln\varepsilon|)^{\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p}}.$$

Jest to dużo lepszy wynik niż przy przybliżeniu zerowego rzędu $\mathbf{u}^0$ z zerowym warunkiem Dirichleta na powierzchni Σ_0. Zauważmy, że $\mathbf{u}^\varepsilon_{app}$ uwzględnia w kluczowy sposób rozwiązania $\mathbf{u}^{0,\varepsilon}$, a wpływ $\boldsymbol{r}^\varepsilon$ jest znikomy.

Sugeruje to, że zamiast rozważać $u^{0,\varepsilon}$, powinniśmy przyjrzeć się rozwiązaniom $\bar{\mathbf{u}}^0_\varepsilon$ dla

$$\begin{cases}
-\mathrm{div}_x\,\mathsf{S}(\bar{\mathbf{u}}^0_\varepsilon)) + \nabla p^0_\varepsilon = \boldsymbol{e}_1, \quad x \in \Omega,\\
\mathrm{div}_x\,\bar{\mathbf{u}}^0_\varepsilon = 0, \quad x \in \Omega,\\
\bar{\mathbf{u}}^0_\varepsilon|_{\Sigma_0} = \varepsilon\mathbf{u}^\infty,\\
\bar{\mathbf{u}}^0_\varepsilon|_{\{x_2=1\}} = 0.
\end{cases}$$

Jesteśmy wtedy w stanie wykazać, że

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon - \bar{\mathbf{u}}^0_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega^\varepsilon_N)} = O(\varepsilon|\ln\varepsilon|),$$

natomiast

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}^0\|_{W^{1,p}(\Omega^\varepsilon_N)} \ge c'\varepsilon.$$

Powyższy rezultat pozwala nam wywnioskować, że przybliżenie $\bar{\mathbf{u}}^0_\varepsilon$ z warunkiem $\varepsilon\mathbf{u}^\infty$ na Σ_0 daje mniejszy błąd niż $\mathbf{u}^0$ z warunikem 0 na Σ_0.

Podsumujmy: rozróżniamy dwa przybliżenia (poza warstwą przybrzegową):

- Brutalne oszacowanie oparte na uogólnionym przepływie Poiseuille $\mathbf{u}^0$.

- Wyrafinowane, dokładniejsze przybliżenie oparte na $\mathbf{u}^0_\varepsilon$.

Pierwszy wybór jest związany z warunkiem brzegowym Dirichleta $\mathbf{u}|_{\Sigma_0} = 0$ (brutalna wersja prawa ściany). Pomija ona wpływ i rolę chropowatości brzegu obszaru (dna kanału). Drugi wybór uwzględnia wpływ chropowatości poprzez niejednorodny warunek Dirichleta: $\mathbf{u}|_{\Sigma_0} = \varepsilon \mathbf{u}^\infty = \varepsilon(U^\infty, 0)$. Zauważmy, że ten ostatni warunek brzegowy może być wyrażony jako prawo ściany, choć nieco abstrakcyjnie. W rzeczy samej, U^∞ może być widziane jako funkcja stycznego ścinania $(\mathsf{D}(\mathbf{u}^0)\boldsymbol{n})_\tau|_{\Sigma_0} = \partial_2 u^0_1|_{\Sigma_0} = U'(0)$, poprzez odwzorowanie

$$U'(0) \;\to\; \mathsf{A} := \begin{pmatrix} 0 & U'(0) \\ U'(0) & 0 \end{pmatrix} \;\to\; \mathbf{u}_{bl} \;\text{ rozwiązanie dla (BL1)-(BL2)} \;\to\; U^\infty = \lim_{y_2 \to +\infty} u_{bl,1}.$$

Oznaczając przez $\mathcal{F}$ to przypisanie i przyjmując

$$(\mathbf{u}^0_\varepsilon)_\tau|_{\Sigma_0} = \varepsilon\mathcal{F}((\mathsf{D}(\mathbf{u}^0)\boldsymbol{n})_\tau|_{\Sigma_0}) \approx \varepsilon\mathcal{F}((\mathsf{D}(\mathbf{u}^0_\varepsilon)\boldsymbol{n})_\tau|_{\Sigma_0})$$

natomiast $(\mathbf{u}^0_\varepsilon)_n = 0$. Uzasadnia to następujące udoskonalone prawo ściany:

$$\mathbf{u}_n|_{\Sigma_0} = 0, \quad \mathbf{u}_\tau|_{\Sigma_0} = \varepsilon\mathcal{F}\big((\mathsf{D}(\mathbf{u})\boldsymbol{n})_\tau|_{\Sigma_0}\big).$$

Warunek ten uogólnia warunek Naviera dla płynów newtonowskich, gdzie $\mathcal{F}$ jest po prostu liniowe. Oczywiście wynik ten nie daje rozwiązania wprost i wymaga uwzględnienia nieliniowego układu (BL1)-(BL2). Dlatego też potrzebne są dalsze studia nad tym problemem i nad własnościami funkcji $\mathcal{F}$, co pozwoliłoby na uzyskanie jeszcze bardziej efektywnych warunków brzegowych.

3.2 Przewodzące ciepło płyny nienewtonowskie z niestandardowymi warunkami wzrostu - istnienie rozwiązań

Abstrakt

Naszym celem w pracy [MW18] jest wykazanie istnienia słabych rozwiązań dla niestacjonarnego przepływu nieściśliwego niejednorodnego i przewodzącego ciepło płynu nienewtonowskiego z uogólnionymi warunkami wzrostu dla tensora naprężeń bez górnego ograniczenia. Zmotywowani płynami o niestandardowej reologii skupiamy się na ogólnej formie warunków wzrostu dla tensora ścinania czego skutkiem jest typ przestrzeni funkcyjnej, w której pracujemy - w tym wypadku to anizotropowe przestrzenie Musielaka-Orlicza. W celu wykazania istnienia rozwiązań globalnych w czasie nie zakładamy, że dane początkowe są małe. W dowodzie korzystamy z metod monotoniczności i całkowania przez części dla przestrzeni nierefleksywnych oraz metod związanych z miarami Younga.

3.2.1 Sformułowanie problemu i motywacje

W pracy [MW18] rozpatrujemy matematyczny model przepływu nieściśliwego, niejednorodnego (nie zakładamy o gęstości, że jest stała) płynu nienewtonowskiego. W szczególności chcemy uwzględnić efekty cieplne i ich wpływ na cały układ. Skupiamy się na analizie następującego układu równań:

$$
\begin{aligned}
\partial_t\varrho + \mathrm{div}_x(\varrho\boldsymbol{u}) &= 0 \quad \mathrm{w} \quad Q,\\
\partial_t(\varrho\boldsymbol{u}) + \mathrm{div}_x(\varrho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}) - \mathrm{div}_x\mathbf{S}(x,\varrho,\theta,\mathbf{D}\boldsymbol{u}) + \nabla_x P &= \varrho\boldsymbol{f} \quad \mathrm{w} \quad Q,\\
\partial_t(\varrho\theta) + \mathrm{div}_x(\varrho\boldsymbol{u}\theta) - \mathrm{div}_x\boldsymbol{q}(\varrho,\theta,\nabla_x\theta) &= \mathbf{S}(x,\varrho,\theta,\mathbf{D}\boldsymbol{u}) : \mathbf{D}\boldsymbol{u} \quad \mathrm{w} \quad Q,\\
\mathrm{div}_x\boldsymbol{u} &= 0 \quad \mathrm{w} \quad Q,\\
\boldsymbol{u}(0,x) &= \boldsymbol{u}_0 \quad \mathrm{w} \quad \Omega,\\
\varrho(0,x) &= \varrho_0 \quad \mathrm{w} \quad \Omega,\\
\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} = 0, \quad \boldsymbol{u}(t,x) &= 0 \quad \mathrm{na} \quad [0,T]\times\partial\Omega,
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

gdzie $\varrho : Q \to \mathbb{R}$ oznacza gęstość, $\boldsymbol{u} : Q \to \mathbb{R}^3$ to pole prędkości, $\theta : Q \to \mathbb{R}$ – temperatura, $P : Q \to \mathbb{R}$ funkcja ciśnienia, $\mathbf{S}$ - tensor naprężeń, $\boldsymbol{q}$ - strumień , $\boldsymbol{f} : Q \to \mathbb{R}^3$ - dane siły zewnętrzne. Zbiór $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ jest ograniczonym obszarem z regularnym brzegiem $\partial\Omega$ klasy $C^{2+\nu}$, z $\nu > 0$. Przez $Q = (0,T)\times\Omega$ oznaczamy cylinder czasoprzestrzenny z czasem $T \in (0,+\infty)$. Tensor $\mathbf{D}\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}(\nabla_x\boldsymbol{u} + \nabla_x^T\boldsymbol{u})$ jest symetryczną częścią gradientu pola prędkości.

Dla powyższego układu zakładamy, że początkowa gęstość (w chwili $t = 0$) oraz temperatura θ spełniają:

$$
\varrho(0,\cdot) = \varrho_0 \in L^\infty(\Omega) \quad \text{oraz} \quad 0 < \varrho_* \le \varrho_0(x) \le \varrho^* < +\infty \quad \text{dla p.w. } x \in \Omega, \tag{3.15}
$$

$$
\theta_0 \in L^1(\Omega) \quad \text{oraz} \quad 0 < \theta_* \le \theta_0 \quad \text{dla p.w. } x \in \Omega. \tag{3.16}
$$

W celu sformułowania warunków wzrostu dla tensora naprężeń wykorzystujemy ogólną wypukłą N–funkcję M i sprzężoną do niej M^* podobnie jak w [68, 69, 113, 114]. Przywołajmy tu odpowiednie definicje:

Definicja 3.1 *Niech Ω będzie ograniczonym obszarem w $\mathbb{R}^3$, funkcja $M : \Omega\times\mathbb{R}^{3\times3}_{\mathrm{sym}} \to \mathbb{R}_+$ jest nazywana N–funkcją, jeśli spełnia następujące warunki*

1. *M jest funkcją Carathéodoriego (mierzalna względem pierwszego argumentu i ciągła względem drugiego) taka, że $M(x,\mathbf{K}) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{K} = 0$, $M(x,\mathbf{K}) = M(x,-\mathbf{K})$ p.w. w Ω,*

2. *$M(x,\mathbf{K})$ jest wypukłą funkcją względem $\mathbf{K}$,*

3.
$$\lim_{|\mathbf{K}|\to 0} \frac{M(x,\mathbf{K})}{|\mathbf{K}|} = 0 \quad \textit{oraz} \quad \lim_{|\mathbf{K}|\to \infty} \frac{M(x,\mathbf{K})}{|\mathbf{K}|} = \infty \quad \textit{dla p.w. } x \in \Omega. \tag{3.17}$$

($\mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}}$ jest przestrzenią symetrycznych macierzy wymiaru 3×3)

Definicja 3.2 F*unkcja komplementarna M^* do funkcji M jest zdefiniowana dla $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}}$, $x \in \Omega$ przez*
$$M^*(x,\mathbf{L}) = \sup_{\mathbf{K}\in\mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}}} \left(\mathbf{K} : \mathbf{L} - M(x,\mathbf{K})\right).$$

Zakładamy, że tensor naprężeń $\mathbf{S} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}} \to \mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}}$ spełnia:

S1. $\mathbf{S}(x,\varrho,\theta,\mathbf{K})$ jest funkcją Carathéodory'ego (tj. mierzalna względem x oraz ciągła względem $\varrho, \theta > 0$) oraz $\mathbf{S}(x,\varrho,\theta,\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ dla dowolnego $(x,\varrho,\theta) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

S2. Istnieje stała $c_c \in (0,1)$, N–funkcja M oraz M^*, takie że dla wszystkich $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}}$, $\theta, \varrho > 0$ i p.w. $x \in \Omega$ zachodzi
$$\mathbf{S}(x,\varrho,\theta,\mathbf{K}) : \mathbf{K} \geq c_c\{M(x,\mathbf{K}) + M^*(x,\mathbf{S}(x,\varrho,\theta,\mathbf{K}))\}. \tag{3.18}$$

S3. $\mathbf{S}$ jest monotoniczna, tj. dla wszystkich $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}}$, $\varrho > 0$, $\theta > 0$ i p.w. $x \in \Omega$
$$[\mathbf{S}(x,\varrho,\theta,\mathbf{K}_1) - \mathbf{S}(x,\varrho,\theta,\mathbf{K}_2)] : [\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2] \geq 0.$$

O strumieniu ciepła $\boldsymbol{q}$ zakładamy, że ma standardową, mniej ogólną, formę. Podobnie jak w [58] przyjmujemy, że
$$\boldsymbol{q}(\varrho,\theta,\nabla_x\theta) \approx \kappa(\varrho)\theta^\beta\nabla_x\theta = \kappa(\varrho)\frac{1}{\beta+1}\nabla\theta^{\beta+1} \quad \text{dla } \beta \in \mathbb{R},$$

gdzie $\kappa(\varrho)$ spełnia $0 < \kappa_* \leq \kappa(\varrho) \leq \kappa^* < \infty$, a κ_*, κ^* są stałymi. W szczególności, wymagamy by $\boldsymbol{q} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniało:
$$\boldsymbol{q}(\varrho,\theta,\nabla_x\theta) = \kappa_0(\varrho,\theta)\nabla_x\theta, \quad \text{gdzie } \kappa_0 \in C(\mathbb{R}^2_+) \tag{3.19}$$

oraz dla wszystkich $\theta, \varrho > 0$, $\nabla_x\theta \in \mathbb{R}^3$
$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}(\varrho,\theta,\nabla_x\theta)\cdot\nabla_x\theta &\geq \kappa_*\theta^\beta|\nabla_x\theta|^2, \quad \text{gdzie} \quad \beta \in \mathbb{R} \text{ oraz } \kappa_* > 0, \\ |\boldsymbol{q}(\varrho,\theta,\nabla_x\theta)| &\leq \kappa^*\theta^\beta|\nabla\theta|, \quad \text{gdzie} \quad \kappa^* > 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Główną motywacją aby rozważać tak ogólną formę tensora naprężeń, tj. spełniającą warunek (3.18), jest zjawisko bardzo istotnego wzrostu lepkości pod wpływem takich czynnkików jak: ścinanie, działanie pola elektrycznego lub magnetycznego. W szczególności nasze założenia pozwalają na uwzględnienie płynów o potęgowym wzroście dla tensora $\mathbf{S}$, typu Carreau, które są dość popularne w reologii, inżynierii chemicznej i w mechanice koloidalnej.

W większości publikacji dotyczących płynów nienewtonowskich zakładany jest warunek p-struktury (potęgowej) dla $\mathbf{S}$. Wtedy zazwyczaj tensor naprężeń przyjmuje formę $\mathbf{S} = \mu(\varrho,\theta)(\zeta + |\mathbf{D}\boldsymbol{u}|)^{p-2}\mathbf{D}\boldsymbol{u}$ lub $\mathbf{S} = \mu(\varrho,\theta)(\zeta + |\mathbf{D}\boldsymbol{u}|^2)^{(p-2)/2}\mathbf{D}\boldsymbol{u}$ (gdzie $\zeta > 0$ i μ są nieujemnymi, ograniczonymi funkcjami). W tym wypadku są spełnione standardowe warunki wzrostu, tj. typu wielomianowego. $|\mathbf{S}(x,\boldsymbol{\xi})| \leq c(1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{(p-2)/2}|\boldsymbol{\xi}|$ oraz $\mathbf{S}(x,\boldsymbol{\xi}) : \boldsymbol{\xi} \geq c(1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{(p-2)/2}|\boldsymbol{\xi}|^2$, patrz prace [58, 59, 80]. Niestety matematyczna teoria rozwinięta dla takich warunków nie jest wystarczająca by uwzględnić zjawisko bardzo istotnej zmiany lepkości płynu, tj. gdy wzrost tensora naprężeń może być szybszy niż wielomianowy, być niejednorodny przestrzennie – zależeć od punktu w rozważanym obszarze lub różnić się w różnych kierunkach tensora ścinania. Przykładami takich płynów są płyny: dylatacyjne (eng. dilatant fluids, shear thickening, STF), magnetoreologicze i elektroreologiczne. Ze względu na własność zmiany lepkości wykorzystywane są w wielu dziedzinach techniki, przemysłu, wojskowości i naukach przyrodniczych.

Odpowiednimi przestrzeniami umoliwiającymi sformułowanie matematyczne rozważanego przez nas problemu są anizotropowe przestrzenie Musielaka-Orlicza.

Definicja 3.3 *Anizotropową przestrzenią Musielaka-Orlicz $L_M(Q)^{3\times3}_{\mathrm{sym}}$ nazywamy zbiór funkcji mierzalnych takich, że*

$$\int_Q M(x, \lambda\mathbf{K}(t,x))dxdt \to 0, \quad \text{gdy } \lambda \to 0.$$

Podstawowe definicje związane z teorią przestrzeni Musielaka-Orlicza i ich własności można znaleźć w Rozdziale 2.2 w [MW18]. W przeciwieństwie do [83] rozważamy N–funkcje M, które zależą nie tylko od $|\boldsymbol{\xi}|$, ale od całego tensora $\boldsymbol{\xi}$. Jest to związane z faktem, ze lepkość może różnić się w różnych kierunkach $\mathbf{D}\boldsymbol{u}$ mogą być inne i warunki wzrostu tensora naprężeń zależą od pełnego gradientu symetrycznego pola prędkości. Ponieważ dopouszczamy również zależność $\mathbf{S}$ od zmiennej przestrzennej $x \in \Omega$, również N–funkcja M jest niejednorodna przestrzennie.

Tak ogólny wzrost $\mathbf{S}$ jest zapewniony przez dość ogólne własności N–funkcji M definiującej anizotropową przestrzeń Musielaka-Orlicza. Ponieważ nie chcemy ograniczać wzrostu $\mathbf{S}$ od góry, nie zakładamy, że M spełnia tzw. warunek Δ_2.

Definicja 3.4 *Mówimy, że N–funkcja spełnia warunek Δ_2, jeśli dla pewnej nieujemnej, całkowalnej na Ω funkcji g_M istnieje stała $C_M > 0$, taka że $M(x, 2\mathbf{K}) \leq C_M M(x,\mathbf{K}) + g_M(x)$ dla wszystkich $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{3\times3}_{\mathrm{sym}}$ oraz p.w. $x \in \Omega$.*

Chcielibyśmy podkreślić tu, że w takiej ogólności, jeśli M nie spełnia warunku Δ_2, to przestrzeń $L_M(Q)$ jest nieośrodkowa, nierefleksywna, funkcje gładkie nie są w niej gęste w $L_M(Q)$. Jest to zródłem dodatkowych trudności pochodzących z analizy funkcjonalnej. W takiej sytuacji tracimy wiele dogodnych własności tychże przestrzeni i musimy sobie z tym poradzić. Analiza matematyczna zawarta w rym rezultacie wymaga narzędzi, które uogólniają rezultaty dotyczące nie tylko przestrzeni Lebesgue'a czy Soboleva (związanch z płynami o wykładniczym wzroście tensora), ale także przestrzenie o zmiennym wykładniku, czy anizotropowe, jednorodne klasyczne przestrzenie Orlicza. Większość kluczowych i potrzebnych narzędzi analizy funkcjonalnej dla klasycznych przestrzeni Orlicza (izotropowych i jednorodnych) jest dobrze znana już od lat, np. gęstość funkcjii gładkich względem topologii modularnej [67] i formuła na całkowanie przez części [40]. Jednakże wiele struktur dla anizotropowych przestrzeni Musielaka-Orlicza jest zgłębianych dopiero w ostatnich latach.

3.2.2 Główny rezultat

Zacznijmy od definicji słabego rozwiązania dla układu (3.14). Poniżej wykorzystano następujące oznaczenia przestrzeni: $\mathcal{D}(\Omega)$ – zbiór funkcji gładkich C^∞ o zwartym nośniku na Ω, $\mathcal{V}$ - zbiór wszystkich funkcji należących do $\mathcal{D}(\Omega)$ o zerowej dywergencji, $L^p, W^{1,p}$ – standardowe przestrzenie Lebesgue i Sobolewa, H – domknięcie $\mathcal{V}$ względem normy $\|\cdot\|_{L^2}$, $W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}$ – domknięcie $\mathcal{V}$ w normie $\|\nabla(\cdot)\|_{L^p}$. Let $W^{-1,p'} = (W^{1,p}_0)^*$ oraz $W^{-1,p'}_{\mathrm{div}} = (W^{1,p}_{0,\mathrm{div}})^*$. Przez p' oznaczamy wykładnik sprzężony do p, tj. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Przywołajmy również przestrzeń Nikolskiego $N^{\alpha,p}(0,T;X)$ związaną z przestrzenią Banacha X i wykładnikami $\alpha \in (0,1)$ oraz $p \in [1,\infty]$ daną przez

$$N^{\alpha,p}(0,T;X) := \{f \in L^p(0,T;X) \ : \ \sup_{0<h<T} h^{-\alpha}\|\tau_h f - f\|_{L^p(0,T-h;X)} < \infty\},$$

gdzie $\tau_h f(t) = f(t+h)$ for a.a. $t \in [0,T-h]$. Przez (a,b) oznaczamy $\int_\Omega a(x)\cdot b(x)dx$ produkt dwóch funkcji wektorowych, a w przypadku $\int_\Omega a(x) : b(x)dx$ dwóch funkcji tensorowych oraz przez $\langle a,b\rangle$ rozumiemy parę dualną.

Definicja 3.5 *Niech* ϱ_0 *spełnia* (3.15), $\boldsymbol{u}_0 \in H(\Omega)^3$, θ_0 *spełnia* (3.16) *a* $\boldsymbol{f} \in L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega)^3)$. *Niech* $\mathbf{S}$ *spełnia warunki* **S1-S3** *z* N*–funkcją* M*, taką że*

$$M(x,\boldsymbol{\xi}) \geq \underline{c}|\boldsymbol{\xi}|^p - \widetilde{C} \qquad \text{gdzie } \underline{c} > 0, \widetilde{C} \geq 0 \text{ oraz } p \geq \frac{11}{5}$$

dla p.w. $x \in \Omega$ *i wszystkich* $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{3\times3}_{\mathrm{sym}}$. *Niech* $\boldsymbol{q}$ *spełnia* (3.19) *i* (3.20) *z* $\beta > -\min\left\{\frac{2}{3}, \frac{3p-5}{3p-3}\right\}$.

Mówimy, że $(\varrho, \boldsymbol{u}, \theta)$ *jest* słabym rozwiązaniem *dla (3.14) jeśli*

$$\begin{aligned}
&0 < \varrho_* \leq \varrho(t,x) \leq \varrho^* \qquad \text{dla p.w. } (t,x) \in Q,\\
&\varrho \in C([0,T];L^q(\Omega)) \qquad \text{dla dowolnego } q \in [1,\infty),\\
&\partial_t\varrho \in L^{5p/3}(0,T;(W^{1,5p/(5p-3)}(\Omega))^*),\\
&\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H(\Omega)^3) \cap L^p(0,T;W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)^3) \cap N^{1/2,2}(0,T;H(\Omega)^3),\\
&\mathbf{D}\boldsymbol{u} \in L_M(Q)^{3\times3}_{\mathrm{sym}} \qquad \text{oraz} \qquad (\varrho\boldsymbol{u},\boldsymbol{\psi}) \in C([0,T]) \text{ dla wszystkich } \boldsymbol{\psi} \in H(\Omega)^3,\\
&\theta \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega)) \qquad \text{oraz} \qquad \theta \geq \theta_* > 0 \text{ dla p.w. } (t,x) \in Q,\\
&\theta^{\frac{\beta-\lambda+1}{2}} \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega)) \text{ dla każdego } \lambda \in (0,1),\\
&\partial_t(\varrho\theta) \in L^1(0,T;(W^{1,q}(\Omega))^*) \text{ z odpowiednio dużym } q
\end{aligned}$$

oraz następujące równości są spełnione: dla równania ciągłości

$$\int_0^T \langle\partial_t\varrho, z\rangle - (\varrho\boldsymbol{u}, \nabla_x z)dt = 0 \tag{3.21}$$

dla każdego $z \in L^r(0,T;W^{1,r}(\Omega))$ *z* $r = 5p/(5p-3)$*, tj.*

$$\int_{s_1}^{s_2}\int_\Omega \varrho\partial_t z + (\varrho\boldsymbol{u})\cdot\nabla_x z dxdt = \int_\Omega \varrho z(s_2) - \varrho z(s_1)dx$$

dla każdego z *gładkiego i* s_1, $s_2 \in [0,T]$, $s_1 < s_2$*; dla równania momentu*

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_\Omega \varrho\boldsymbol{u}\cdot\partial_t\boldsymbol{\varphi} - \varrho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u} : \nabla_x\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{S}(x,\varrho,\theta,\mathbf{D}\boldsymbol{u}) : \mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}dxdt\\
&= \int_0^T\int_\Omega \varrho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}dxdt + \int_\Omega \varrho_0\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\varphi}(0)dx
\end{aligned}$$

dla wszystkich $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}((-\infty, T); \mathcal{V})$*; dla równania energii*

$$\int_0^T \langle \partial_t(\varrho\theta), h\rangle - (\varrho\theta \boldsymbol{u}, \nabla h) + (\boldsymbol{q}(\varrho, \theta, \nabla_x \theta), \nabla h) dt = \int_0^T (\mathbf{S}(x, \varrho, \theta, \mathbf{D}\boldsymbol{u}), \mathbf{D}\boldsymbol{u} h) dt$$

dla wszystkich $h \in L^\infty(0, T; W^{1,q}(\Omega))$ *z* q *odpowiednio dużym. Ponadto, warunek początkowy jest spełniony w następujący sposób*

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0^+} \|\varrho(t) - \varrho_0\|_{L^q(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u}_0\|^2_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \textit{dla dowolnego } q \in [1, \infty), \\ &\lim_{t\to 0^+} (\varrho\theta(t), h) = (\varrho_0\theta_0, h) \quad \textit{for all } h \in L^\infty(\Omega). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Twierdzenie 3.4 (Theorem 3.2 [MW18]) *Niech* M *będzie* N*–funkcją spełniającą dla pewnego* $\underline{c} > 0$, $\widetilde{C} \geq 0$ *oraz dla p.w.* $x \in \Omega$ *i każdego* $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}}$

$$M(x, \boldsymbol{\xi}) \geq \underline{c}|\boldsymbol{\xi}|^p - \widetilde{C} \quad \textit{gdzie } p \geq \frac{11}{5}. \tag{3.23}$$

Załóżmy, że funkcja komplementarna do M

$$M^* \textit{ spełnia warunek } \Delta_2 \quad \textit{oraz} \quad \lim_{|\boldsymbol{\xi}|\to\infty} \sup_{x\in\Omega} \frac{M^*(x, \boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{\xi}|} = \infty. \tag{3.24}$$

Ponadto niech $\mathbf{S}$ *spełnia warunki* **S1-S3** *a* $\boldsymbol{q}$ – (3.19), (3.20) *gdzie* $\beta > -\min\left\{\frac{2}{3}, \frac{3p-5}{3p-3}\right\}$. *Niech* $\boldsymbol{u}_0 \in H(\Omega)^3$, $\varrho_0 \in L^\infty(\Omega)$ *z* $0 < \varrho_* \leq \varrho_0(x) \leq \varrho^* < +\infty$ *dla p.w.* $x \in \Omega$, $\theta \in L^1(\Omega)$, $0 < \theta_* \leq \theta_0$ *dla p.w.* $x \in \Omega$ *i* $\boldsymbol{f} \in L^{p'}(0, T; L^{p'}(\Omega)^3)$*. Istnieje wtedy słabe rozwiązanie dla układu (3.14).*

W pracy [MW18] powyższy rezultat jest sformułowany dla przestrzennego wymiaru $d = 3$, dla przejrzystości przeprowadzanego rozumowania. Wynik ten jednak można rozszerzyć dla dowolnego wymiaru $d \geq 2$, wtedy $p \geq \frac{3d+2}{d+2}$.

3.2.3 Główne kroki w dowodzie. Metodologia.

Aby udowodnić powyższy rezultat konstruujemy n-aproksymację - ciąg problemów przybliżających rozwiązania układ z Definicji 3.5. Z kolei istnienie tejże n-aproksymacji wymaga konstrukcji dodatkowego, dwuetapowego, przybliżenia. Część kroków dowodowych została zaadaptowana z wcześniejszych rezultatów: istnienie rozwiązań dla problemu przybliżonego [58, Section 6] (gdzie rozważony był przypadek dla cieczy o wzroście potęgowym), [114, Section 4.1] (warunki wzrostu w przestrzeni Musielaka-Orlicza, lecz przypadek niezależny od temperatury).

Nastęnym krokiem w dowodzie będzie zatem zapewnienie odpowiednich oszacowań, które z pomocą technik związanych z metodami renormalizacji Lionsa dla równania ciągłości i metodami skompensowanej zwartości Tartara i Feireisla pozwalającymi przejść do granicy, gdy $n \to \infty$ i pokazać słabą ciągową stabilność ciągu - tym samym istnienie słabego rozwiązania zagadnienia.

Innym ważnym punktem w analizie powyższego problemu jest brak klasycznej formuły na całkowanie przez części, ($t_0, t_1 \in (0, T)$, $v \in L^p(0, T; X)$, $v_t \in L^{p'}(0, T; X^*)$, X refleksywna, ośrodkowa przestrzeń Banacha $X \subset H = H^* \subset X^*$, gdzie H to przestrzeń Hilberta, wtedy $\int_{t_0}^{t_1} \langle v_t, v\rangle_{X,X^*} dt = \frac{1}{2}\|u(t_1)\|^2_H - \frac{1}{2}\|u(t_0)\|^2_H$). Bezpośrednie rozszerzenie tej formuły na przypadek anizotropowych przestrzeni Musielaka-Orlicza wymagałoby, by funkcje C^∞ były gęste w $L_M(Q)$ oraz by przestrzeń na cylindrze czasoprzestrzennym sie faktoryzowały, czyli $L_M(Q) = L_M(0,T;L_M(\Omega))$. Pierwszy warunek jest spełniony tylko, gdy M spełnia warunek Δ_2. Drugi – nawet w przypadku klasycznych przestrzeni Orlicza (izotropowych i jednorodnych) zachodzi tylko gdy M jest równoważna z funkcją wielomianową o wykładniku p, $1 < p < \infty$, patrz [37] (z czego wynikałoby, że $L_M(Q)$ jest ośrodkowa i refleksywna). W rezultacie zawartym w pracy [MW18] wykorzystujemy częściowo argumenty otrzymane w pracach [114], [69], [58].

Ponadto klasyczne metody monotoniczności, które pozwalają na uzyskanie zbieżności w nieliniowym członie lepkościowym (tensorze naprężeń) nie działają w przypadku ogólnych przestrzeni Musielaka-Orlicza. Metody pozwalające przejść tą trudność w nierefleksywnych anizotropowych przestrzeniach Musielaka-Orlicza zostały rozwinięte w [113, 114, 69], też [84]. W prezentowanym rezultacie zostały przez nas zaadaptowane do przypadku, gdy $\mathbf{S}$ zależy również od temperatury.

Jedną z kluczowych trudności, jest wykazanie słabej ciągowa stabilność w równaniu energii. Oznacza to, że musimy wykazać, że $\mathbf{S}^n := \mathbf{S}(\cdot, \varrho^n, \theta^n, \mathbf{D}\boldsymbol{u}^n) : \mathbf{D}\boldsymbol{u}^n \rightharpoonup \mathbf{S}(\cdot, \varrho, \theta, \mathbf{D}\boldsymbol{u}) : \mathbf{D}\boldsymbol{u}$ słabo w $L^1(Q)$, gdzie $\{\varrho^n\}_{n=1}^\infty$, $\{\boldsymbol{u}^n\}_{n=1}^\infty$, $\{\theta^n\}_{n=1}^\infty$ jest ciągiem aproksymacyjnym ϱ, $\boldsymbol{u}$, θ oraz $\{\mathbf{S}^n\}_{n=1}^\infty \subset L_{M^*}(Q)$, $\{\mathbf{D}\boldsymbol{u}^n\}_{n=1}^\infty \subset L_M(Q)$. Zauważmy, że pracując z przestrzeniami refleksywnymi (takimi jak L^p) monotoniczność jest wystarczającym argumentem by stwierdzić, że $(\mathbf{S}^n - \mathbf{S}) : (\mathbf{D}\boldsymbol{u}^n - \mathbf{D}\boldsymbol{u}) \rightharpoonup 0$ w L^1 pociąga za sobą, że $\mathbf{S}^n : \mathbf{D}\boldsymbol{u}^n \rightharpoonup \mathbf{S} : \mathbf{D}\boldsymbol{u}$ słabo w L^1. Lecz gdy przestrzeń nie jest refleksywna, co mamy w przypadku naszej przestrzeni L_M, wtedy ten argument może nie zadziałać, jeśli nie jesteśmy w stanie wykazać modularnej zbieżności ciągów $\mathbf{S}^n$ i $\mathbf{D}\boldsymbol{u}^n$ w odpowiednich przestrzeniach. W rezultacie zawartym w pracy [MW18] wykorzystujemy lemat o gryzieniu (bitting lemma) [6, 7, 101] i metody związane z miarami Younga by wykazać, że produkt dwóch ciągów zbiega słabo w L^1, co pozwala zamknąć dowód ciągowej stabilności po prawej stronie równania energii. Podobne argumenty dla anizotropowych przestrzeni Musielaka-Orlicza były rozwinięte i wykorzystane w wcześniejszej pracy [71].

Główny argument opisany powyżej wygląda następująco: Niech $\|a^n\|_{L^1} < c$, $a \in L^1(Q)$ jest gryzioną granicą ciągu a_n ($a_n \to_b a$) jeśli istnieje nierosnący ciąg $\{E_k\} \subset Q$ spełniający $\lim_{k\to\infty} |E_k| = 0$, taki że $a^n \rightharpoonup a \quad$ słabo w $L^1(Q \setminus E_k)$

Lemat 3.5 (Lemat o gryzieniu) *Niech a^n ograniczonym ciągiem w $L^1(Q)$ i niech $0 \leq a_0 \in L^1(Q)$. Jeśli*

$$a^n \geq -a_0, \quad a^n \to_b a \quad \textit{oraz} \quad \limsup_{n\to n} \int_Q a^n \leq \int_Q a,$$

wtedy

$$a_n \rightharpoonup a \quad \textit{słabo w } L^1(Q).$$

Powyższy lemat stosujemy dla ciągu $a_n = \mathbf{S}(\cdot, \varrho^n, \theta^n, \mathbf{D}\boldsymbol{u}^n) : \mathbf{D}\boldsymbol{u}^n$, co daje $\mathbf{S}(\cdot, \varrho^n, \theta^n, \mathbf{D}\boldsymbol{u}^n) : \mathbf{D}\boldsymbol{u}^n \rightharpoonup \mathbf{S}(\cdot, \varrho, \theta, \mathbf{D}\boldsymbol{u}) : \mathbf{D}\boldsymbol{u}$ słabo w $L^1(Q)$. Wcześniej, by wykazać, że $a^n \to_b a$, stosujemy metody związane z miarami Younga.

3.3 Słabe rozwiązania dla pełnego układu Naviera-Stokesa-Fouriera z warunkiem pełnego poślizgu na brzegu na obszarze zależnym od czasu - sformułowanie z równaniem energii termicznej

Abstrakt

W pracy [KMNW1] rozważamy ściśliwy układ Naviera-Stokesa-Fouriera na obszarze, który zmienia się w czasie. Układ uzupełniony jest warunkami poślizgu dla pola prędkości płynu. Zakładając, że ciśnienie może być rozłożone na część elastyczną i termiczną wykazujemy istnienie globalnych w czasie słabych rozwiązań. Nasza metodologia oparta jest na penalizacji zachowania się płynu przy brzegu, penalizacji lepkości i ciśnienia w słabym sformułowaniu. Ponadto równanie energii cieplnej w słabym sformułowaniu zastąpione jest nierównością energii cieplnej i nierównością energii zupełnej.

3.3.1 Sformułowanie problemu i motywacje

Przepływ płynów przewodzących ciepło na obszarach, które zmieniają się w czasie jest ciekawym matematycznie problemem z wieloma zastosowaniami w praktyce. Jest wiele zjawisk, dla których obszar zajmowany przez płyn zmienia się w w czasie i istotne jest uwzględnienie temperatury jako jednej ze zmiennych. Przywołajmy tu chociażby przewodzący ciepło gaz znajdujący się cylindrze z poruszającym się tłokiem. Jest wiele prac na temat tego problemu w zakresie fizyki statystycznej. Możemy wspomnieć tu prace Lieb [97], Gruber i in. [65, 64, 66], Wright [109, 110, 111], etc. Problem ten był rozważany przez Shelukhin [104], Antman i Wilber [113] w przypadku barotropowym i jednorodnych warunków brzegowych. Rozszerzenie na niejednorodne warunki brzegowe może być znalezione w pracach Maity i in. [79]. Ruch tłoku w cylindrze wypełnionym lepkim przewodzącym ciepło gazem było analizowane przez Shelukhin [105]. Dość kompleksowa analiza zachowania się tłoka została przeprowadzona przez Feireisla i in. w [54].

Przepływ ściśliwego lepkiego przewodzącego ciepło płynu, przy założeniu braku działania sił zewnętrznych może być opisany przez następujący sytem równań różniczkowych cząstkowych:

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}_x(\varrho \mathbf{u}) = 0, \tag{3.25}$$

$$\partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \mathrm{div}_x(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_x p(\varrho, \vartheta) = \mathrm{div}_x \mathbb{S}(\nabla_x \mathbf{u}), \tag{3.26}$$

$$\partial_t(\varrho E) + \mathrm{div}_x((\varrho E + p)\mathbf{u}) + \mathrm{div}_x \mathbf{q} = \mathrm{div}_x(\mathbb{S}(\nabla_x \mathbf{u})\mathbf{u}). \tag{3.27}$$

Równania te są matematycznym sformułowaniem bilansu masy, momentu i energii. W układzie tym ϱ jest gęstością płynu, $\mathbf{u}$ opisuje pole prędkości, a $E = \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + e(\varrho, \vartheta)$ to energia zupełna dana jako suma energii kinetycznej i wewnętrznej, które są funkcjami gęstości i temperatury ϑ.

Tensor naprężeń $\mathbb{S}$ jest zdeterminowany przez standardowe prawo reologiczne Newtona

$$\mathbb{S}(\nabla_x \mathbf{u}) = \mu \left(\nabla_x \mathbf{u} + \nabla_x^t \mathbf{u} - \frac{2}{3} \mathrm{div}_x \mathbf{u} \mathbb{I} \right) + \eta \mathrm{div}_x \mathbf{u} \mathbb{I}, \ \mu > 0, \ \eta \geq 0. \tag{3.28}$$

Dla uproszczenia zakładamy, że współczynnik lepkości μ oraz η są stałe, jednakże przypadek μ, η zależnego od temperatury w odpowiedni sposób też może być rozważony (Section 5 w [KMNW1]).

Prawo Fouriera dla strumienia ciepła przyjmuje następującą formę:

$$\mathbf{q} = -\kappa(\vartheta) \nabla_x \vartheta, \ \kappa > 0. \tag{3.29}$$

Inspirowani przez [41] zakładamy, że funkcja ciśnienia spełnia poniższe równanie stanu:

$$p(\varrho, \vartheta) = p_e(\varrho) + \vartheta p_\vartheta(\varrho), \tag{3.30}$$

gdzie p_e to elastyczna część ciśnienia a p_ϑ – termiczna oraz dodatkowo p_ϑ jest niemalejącą funkcją gęstości zerującą się, gdy $\varrho = 0$. W związku z tym relacja Maxwella daje nam, że energia wewnętrzna ma formę

$$e(\varrho, \vartheta) = P_e(\varrho) + Q(\vartheta), \tag{3.31}$$

gdzie potencjał elastyczny

$$P_e(\varrho) = \int_1^\varrho \frac{p_e(z)}{z^2} \mathrm{d}z \tag{3.32}$$

oraz energia cieplna o współczynniku ciepła właściwego przy stałej objętości c_v spełnia

$$Q(\vartheta) = \int_0^\vartheta c_v(z) \mathrm{d}z, \ c_v(z) \geq \underline{c_v} > 0 \text{ dla wszystkich } z \geq 0. \tag{3.33}$$

Zakładając gładkość funkcji układ (3.25)-(3.27) może być przepisany przy wykorzystaniu równania energii cieplnej zamiast bilansu energii zupełnej, mianowicie przyjąć równoważną postać:

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}_x(\varrho \mathbf{u}) = 0, \tag{3.34}$$

$$\partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \mathrm{div}_x(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_x p(\varrho, \vartheta) = \mathrm{div}_x \mathbf{S}(\nabla_x \mathbf{u}), \tag{3.35}$$

$$\partial_t(\varrho Q(\vartheta)) + \mathrm{div}_x(\varrho Q(\vartheta)\mathbf{u}) + \mathrm{div}_x \mathbf{q} = \mathbf{S}(\nabla_x \mathbf{u}) : \nabla_x \mathbf{u} - \vartheta p_\vartheta(\varrho) \mathrm{div}_x \mathbf{u}. \tag{3.36}$$

W pracy [KMNW1] analizujemy układ (3.34)-(3.36) na obszarze, który zmienia swój kształt w czasie

$$\Omega = \Omega_t \tag{3.37}$$

oraz dla którego to jak się zmienia (porusza) brzeg, jest zadane (opisane) z góry na skończonym odcinku czasu $[0, T]$, $T < \infty$. W szczególności brzeg obszaru Ω_t obejmowanego przez płyn opisany jest poprzez dane pole prędkości $\mathbf{V}(t, x)$, gdzie $t \geq 0$ oraz $x \in \mathbb{R}^3$. Zakładając, że $\mathbf{V}$ jest odpowiednio regularna rozważamy stowarzyszony układ równań różniczkowych

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}(t, x) = \mathbf{V}\Big(t, \mathbf{X}(t, x)\Big), \ t > 0, \ \mathbf{X}(0, x) = x \tag{3.38}$$

i ustalamy, że

$$\Omega_\tau = \mathbf{X}(\tau, \Omega_0), \ \text{gdzie } \Omega_0 \subset \mathbb{R}^3 \text{ jest danym obszarem}, \ \Gamma_\tau = \partial\Omega_\tau,$$

$$\text{oraz } \ Q_\tau = \cup_{t \in (0,\tau)} \{t\} \times \Omega_t. \tag{3.39}$$

Nieprzenikliwość brzegu fizycznego obszaru jest zadana warunkiem

$$(\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_\tau} = 0 \text{ for any } \tau \geq 0, \tag{3.40}$$

gdzie $\mathbf{n}(t, x)$ oznacza zewnętrzny do brzegu Γ_t jednostkowy wektor normalny. Ponadto, zakładamy, że na brzegu obszaru spełniony jest warunek typu Naviera w postaci

$$[\mathbf{S}\mathbf{n}]_{\tan} + \zeta\, [\mathbf{u} - \mathbf{V}]_{\tan}\, |_{\Gamma_\tau} = 0, \ \zeta \geq 0, \tag{3.41}$$

gdzie ζ jest współczynnikiem tarcia. W pracy [KMNW1] dla przejrzystości przeprowadzanego rozumowania przyjmujemy, że spełniony jest warunek pełnego poślizgu, tj. ustalamy, że $\zeta = 0$. Warto jest zauważyć, że gdy $\zeta \to \infty$, w granicy otrzymujemy warunek zupełnego braku poślizgu.

Dla strumienia ciepła rozważamy zachowawcze warunki brzegowe (brzeg nie przepuszcza ciepła)

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ dla wszystkich } t \in [0, T],\ x \in \Gamma_t. \tag{3.42}$$

Fizyczne motywacje dla warunków brzegowych dla ruchu płynów można znaleźć w pracy Bulíček, Málek i Rajagopal [21], Priezjev i Troian [103].

Powyższy problem (3.34)-(3.42) jest uzupełniony o warunki początkowe

$$\begin{aligned} &\varrho(0,\cdot) = \varrho_0, \quad (\varrho\mathbf{u})(0,\cdot) = (\varrho\mathbf{u})_0, \quad \vartheta(0,\cdot) = \vartheta_0, \\ &(\varrho Q(\vartheta))(0,\cdot) = (\varrho Q)_0 = \varrho_0 Q(\vartheta_0) \quad \text{in } \Omega_0. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Głównym celem pracy [KMNW1] jest pokazanie, że istnieją globalne w czasie słabe rozwiązania dla problemu (3.34)-(3.43) dla dowolnych danych początkowych o skończonej energii.

Teoria istnienia rozwiązań dla barotropowego (izotropowego, niezależnego od temperatury) układu Naviera-Stokesa na niezmiennych (stałych w czasie) obszarach została rozwinięta w przełomowej pracy Lionsa [98] i rozszerzona w [53] na klasę fizycznie istotnych stanów ciśnienia i gęstości. Następnie zostało to rozwinięte przez Feireisla na pełen układ Naviera-Stokesa-Fouriera w [41, 42].

Feireisl i Novotný [51] udowodnili również istnienie słabych rozwiązań dla układu Naviera-Stokesa-Fouriera sformułowanego za pomocą nierówności dla entropii zamiast równania energii cieplnej (3.36). Takie sformułowanie pozwala na udowodnienie istnienie rozwiązań przy bardziej ogólnych założeniach o ciśnieniu, wymaga jednak obecności członu $a\vartheta^4$ w funkcji ciśnienia, z którym na etapie pracy nad publikacją [KMNW1] nie było dla nas jasne, jak skonstruować odpowiednią penalizację.

Badania nad *nieściśliwymi płynami* w obszarach zależnych od czasu rozpoczęły się od przełomowej pracy Ładyżeńskej [95]. Nowsze wyniki w tym kierunku to Fujita i in.[60], [85, 86, 87].

Ściśliwe płyny w obszarach zmiennych w czasie w przypadku barotropowym rozważane były w [50] dla warunku braku poślizgu na brzegu, a w [55] z warunkiem poślizgu. Celem pracy [KMNW1] jest rozszerzenie tego rezultatu na pełen układ z uwzględnieniem temperatury jako zmiennej w systemie.

Przepływy ściśliwe w obszarach zależnych od czasu w przypadku barotropowym z warunkami braku poślizgu rozważane były w pracy [50]. W tym przypadku dowód oparty jest on penalizację Brinkmana, która wykorzystywana jest w obu przypadkach przepływu ściśliwego oraz nieściśliwego i opiera się na dodaniu do równania momentu dodatkowego członu modelującego stały obiekt o charakterze porowatym i o współczynniku porowatości oraz przepuszczalności zbiegającym do zera, patrz [3, 99].

3.3.2 Główny rezultat

Hipotezy

Hipotezy postawione przez nas na relacje konstytutywne i funkcje termodynamiczne motywowane są założeniami przyjętymi dla ogólnej teorii istnienia rozwiązań dla układu Naviera-Stokesa-Fouriera rozwinięetymi w pracach [41, 42].

Hipotezy o ciśnieniu:

$$\left.\begin{aligned}
&p_e \in C[0,\infty) \cap C^1(0,\infty),\ \ p_e(0) = 0,\\
&p_e'(\varrho) \geq a_1\varrho^{\gamma-1} - b \text{ dla wszystkich } \varrho > 0,\\
&p_e(\varrho) \leq a_2\varrho^{\gamma} + b \text{ dla wszystkich } \varrho \geq 0,
\end{aligned}\right\} \tag{3.44}$$

dla pewnego stałego $\gamma > \frac{3}{2}$, $a_1, a_2, b > 0$,

$$\left.\begin{aligned}
&p_\vartheta \in C[0,\infty) \cap C^1(0,\infty),\ \ p_\vartheta(0) = 0,\\
&p_\vartheta \text{ jest niemalejącą funkcją } \varrho \in [0,\infty),\\
&p_\vartheta(\varrho) \leq c\varrho^{\frac{\gamma}{3}} \text{ dla wszystkich } \varrho \geq 0.
\end{aligned}\right\} \tag{3.45}$$

Hipotezy o wsółczynniku ciepła:

$$\left.\begin{aligned}
&\kappa = \kappa(\vartheta) \text{ należy do klasy } C^2[0,\infty),\\
&k_1(\vartheta^\alpha + 1) \leq \kappa(\vartheta) \leq k_2(\vartheta^\alpha + 1) \text{ dla wszystkich } \vartheta \geq 0,\\
&\text{ze stałymi } k_1,\ k_2 > 0 \text{ oraz } \alpha \geq \tfrac{12(\gamma-1)}{\gamma}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.46}$$

Hipotezy o energii cieplnej:

$$\left.\begin{aligned}
&Q = Q(\vartheta) = \textstyle\int_0^\vartheta c_v(z)\,\mathrm{d}z,\\
&\text{gdzie } c_v \in C^1[0,\infty),\ \text{ taka że istnieje } 0 < \underline{c} < \overline{c} < \infty,\\
&\underline{c}(1 + \vartheta^{\frac{\alpha}{2}-1}) \leq c_v(\vartheta) \leq \overline{c}(1 + \vartheta^{\frac{\alpha}{2}-1}).
\end{aligned}\right\} \tag{3.47}$$

Zauważmy, że dolne ograniczenie na c_v jest tu dość restrykcyjne (w porównaniu do [41, Section 3]). Jednakże założenie to jest kluczowe, by uzyskać oszacowania na pole prędkości (patrz (92) w [KMNW1]).

Słabe sformułowanie

W słabym sformułowaniu równanie ciągłości (3.34) definiujemy na całej rzeczywistej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ zakładając, że gęstość ϱ jest równa zero poza obszarem zajmowanym przez płyn:

$$\int_{\Omega_\tau} \varrho\varphi(\tau,\cdot)\ \mathrm{d}x - \int_{\Omega_0} \varrho_0\varphi(0,\cdot)\ \mathrm{d}x = \int_0^\tau \int_{\Omega_t} \left(\varrho\partial_t\varphi + \varrho\mathbf{u}\cdot\nabla_x\varphi\right)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{3.48}$$

dla wszystkich $\tau \in [0,T]$ i wszystkich funkcji testujących $\varphi \in C_c^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^3)$. Ponadto, równanie (3.34) jest również spełnione w zrenormalizowanym sensie (wprowadzonym przez DiPernę i Lionsa [38]):

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\tau} b(\varrho)\varphi(\tau,\cdot)\ \mathrm{d}x - \int_{\Omega_0} b(\varrho_0)\varphi(0,\cdot)\ \mathrm{d}x\\
&= \int_0^\tau \int_{\Omega_t} \left(b(\varrho)\partial_t\varphi + b(\varrho)\mathbf{u}\cdot\nabla_x\varphi + (b(\varrho) - b'(\varrho)\varrho)\,\mathrm{div}_x\mathbf{u}\varphi\right)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{3.49}$$

dla $\tau \in [0,T]$ oraz wszystkich $\varphi \in C_c^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^3)$ i każdego $b \in C^1[0,\infty)$, takich że $b(0) = 0$, $b'(r) = 0$ dla dużych r. (Oczywiście zakładamy, że $\varrho \geq 0$ p.w. w $(0,T) \times \mathbb{R}^3$).

Podobnie równanie momentu (3.35), jest zastąpione przez rodzinę równości całkowych

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_\tau} \varrho\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi}(\tau,\cdot)\,\mathrm{d}x - \int_{\Omega_0} (\varrho\mathbf{u})_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}(0,\cdot)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\tau \int_{\Omega_t} \left(\varrho\mathbf{u} \cdot \partial_t\boldsymbol{\varphi} + \varrho[\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}] : \nabla_x\boldsymbol{\varphi} + p(\varrho,\vartheta)\mathrm{div}_x\boldsymbol{\varphi} - \mathbb{S}(\nabla_x\mathbf{u}) : \nabla_x\boldsymbol{\varphi}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{3.50}$$

dla dowolnego $\tau \in [0,T]$ i wszystkich $\boldsymbol{\varphi} \in C_c^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ spełniających

$$\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_\tau} = 0 \text{ for any } \tau \in [0,T]. \tag{3.51}$$

Warunek nieprzepuszczalności (3.40) jest spełniony w sensie śladu, tj.

$$\mathbf{u}, \nabla_x\mathbf{u} \in L^2(Q_T; \mathbb{R}^3) \text{ and } (\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}(\tau,\cdot)|_{\Gamma_\tau} = 0 \text{ dla p.w. } \tau \in [0,T]. \tag{3.52}$$

Tak jak w [41, 42] równanie (3.36) jest zastąpione przez dwie nierówności: *nierówność dla energii cieplnej*

$$\partial_t(\varrho Q(\vartheta)) + \mathrm{div}_x(\varrho Q(\vartheta)\mathbf{u}) - \Delta\mathcal{K}(\vartheta) \geq \mathbb{S} : \nabla_x\mathbf{u} - \vartheta p_\vartheta \mathrm{div}_x\mathbf{u}, \tag{3.53}$$

gdzie

$$\mathcal{K}(\vartheta) = \int_0^\vartheta \kappa(z)\,\mathrm{d}z$$

oraz *nierówność dla energii zupełnej*. W przypadku gdy obszar zajmowany przez płyn jest ustalony (nie zależy od czasu) Ω, ta nierówność przyjmuje zwyczajowo formę

$$\int_\Omega \varrho(\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + P_e(\varrho) + Q(\vartheta))(\tau,\cdot)\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega \left(\frac{|(\varrho\mathbf{u})_0|^2}{2\varrho_0} + \varrho_0 P_e(\varrho_0) + \varrho_0 Q(\vartheta_0)\right)(\cdot)\,\mathrm{d}x \tag{3.54}$$

dla dowolnego $\tau \geq 0$, gdzie potencjał elastyczny P_e zdefiniowany jest przez (3.32).

Jednakże na nierówność energetyczna na obszarze zmiennym w czasie nie przyjmuje prostej formy jak (3.54) i pewne dodatkowe człony muszą się tu pojawić. W celu wyprowadzenia odpowiedniej wersji musimy przetestować (3.26) przez $\mathbf{u} - \mathbf{V}$ (w przypadku odpowiednio gładkich rozwiązań, w przeciwnym przypadku powinno być to zrobione na poziomie aproksymacji Galerkina) i wykorzystać (3.27). Uzyskujemy wtedy poprawną wersję nierówności dla energii dla obszaru zmiennego w czasie. Ma ona następującą formę

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_\tau} \varrho \left(\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + P_e(\varrho) + Q(\vartheta)\right)(\tau,\cdot)\,\mathrm{d}x \\ &\quad \leq \int_{\Omega_0} \left(\frac{|(\varrho\mathbf{u})_0|^2}{2\varrho_0} + \varrho_0 P_e(\varrho_0) + \varrho_0 Q(\vartheta_0)\right)(\cdot)\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_\tau} (\varrho\mathbf{u} \cdot \mathbf{V})(\tau,\cdot)\,\mathrm{d}x \\ &\quad - \int_{\Omega_0} (\varrho\mathbf{u})_0 \cdot \mathbf{V}(0,\cdot)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_0^\tau \int_{\Omega_t} \left(\mathbb{S}(\nabla_x\mathbf{u}) : \nabla_x\mathbf{V} - \varrho\mathbf{u} \cdot \partial_t\mathbf{V} - \varrho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} : \nabla_x\mathbf{V} - p(\varrho)\mathrm{div}_x\mathbf{V}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{3.55}$$

dla p.w. $\tau \geq 0$. Podkreślmy tutaj, że warunek brzegowy (3.42) zamieniony jest tu przez nierówność

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\mathbf{n}} \geq 0 \text{ on } \Gamma_t \text{ dla wszystkich } t \in [0,T]. \tag{3.56}$$

Powyższe rozważania pozwalają nam stwierdzić, że w słabym sformułowaniu temperatura ϑ spełnia

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\Omega_t} & \varrho Q(\vartheta)\partial_t\varphi + \varrho Q(\vartheta)\mathbf{u}\cdot\nabla_x\varphi + \mathcal{K}(\vartheta)\Delta\varphi \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ & \le \int_0^T \int_{\Omega_t} (\vartheta p_\vartheta \mathrm{div}_x\mathbf{u} - \mathbf{S} : \nabla_x\mathbf{u})\varphi \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{\Omega_0} \varrho_0 Q(\vartheta_0)\varphi(0)\, \mathrm{d}x\end{aligned} \tag{3.57}$$

dla wszystkich $\varphi \in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^3)$, $\varphi \ge 0$, $\varphi(T) = 0$, $\nabla_x\varphi\cdot\mathbf{n}|_{\Gamma_\tau} = 0$ i dowolnego $\tau\in[0,T]$.

Definicja 3.6 *Mówimy, że trójka* $(\varrho,\mathbf{u},\vartheta)$ *jest* wariacyjnym rozwiązaniem *dla problemu* (3.34)-(3.36) *z warunkami brzegowymi* (3.40)-(3.42) *i początkowymi* (3.43)*, jeśli*

- $\varrho \in L^\infty(0,T;L^\gamma(\mathbb{R}^3))$,
- $\mathbf{u},\nabla_x\mathbf{u} \in L^2(Q_T;\mathbb{R}^3)$, $\varrho\mathbf{u}\in L^\infty(0,T;L^m(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3))$ *dla pewnego dowolnego* $m > \frac{6}{5}$,
- $\varrho Q(\vartheta) \in L^\infty(0,T;L^1(\mathbb{R}^3))\cap L^2(0,T;L^q(\mathbb{R}^3))$ *dla pewnego dowolnego* $q > \frac{6}{5}$, $\log\vartheta$, $\vartheta p_\vartheta(\varrho)\in L^2(Q_T)$, $\mathcal{K}(\vartheta)\in L^1(Q_T)$,
- *relacje* (3.48)-(3.95)*,* (3.55) *oraz* (3.96) *są spełnione.*

Istnienie rozwiązań

Jesteśmy teraz gotowi sformułować główny rezultat pracy [KMNW1]:

Twierdzenie 3.6 (Theorem 2.1 [KMNW1]) *Niech* $\Omega_0\subset\mathbb{R}^3$ *ograniczonym obszarem klasy* $C^{2+\nu}$ $(\nu>0)$*, niech t* $\mathbf{V}\in C^1([0,T];C^3_c(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3))$ *będzie dane. Załóżmy, że ciśnienie* $p(\varrho,\vartheta)$ *przyjmuje postać* (3.30)*, gdzie* $p_e, p_\vartheta \in C[0,\infty)\cap C^1(0,\infty)$ *oraz spełnia hipotezy* (3.44)*,* (3.45) *dla pewnego dowolnego* $\gamma > 3/2$*. Ponadto niech* $\mathbf{q}$ *będzie dane przez* (3.29)*, gdzie* $\kappa(\vartheta)$ *spełnia hipotezy* (3.46) *oraz niech* (3.47) *będzie spełnione z* $\alpha \ge \frac{12(\gamma-1)}{\gamma}$*. Niech dane początkowe spełniają:*

$$\varrho_0\in L^\gamma(\mathbb{R}^3),\quad \varrho_0\ge 0,\quad \varrho_0\not\equiv 0,\quad \varrho_0|_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega_0} = 0,\ (\varrho\mathbf{u})_0 = 0 \ \textit{p.w. na zbiorze}\ \{\varrho_0 = 0\},$$

$$\int_{\Omega_0}\frac{1}{\varrho_0}|(\varrho\mathbf{u})_0|^2\,\mathrm{d}x < \infty$$

oraz

$$\vartheta_0\in L^\infty(\Omega_0),\quad \vartheta_0\ge\underline{\vartheta}>0 \quad \textit{na } \Omega_0.$$

Wtedy problem (3.34)-(3.36) *z warunkami brzegowymi* (3.40)-(3.42) *oraz danymi początkowymi* (3.43) *posiada rozwiązanie wariacyjne (słabe) dla dowolnego skończonego odcinka czasu* $(0,T)$ *w sensie określonym przez Definicję 3.6.*

3.3.3 Główne kroki w dowodzie. Metodologia

Aby udowodnić Twierdzenie 3.6 postępujemy w następujący sposób

1. Dowód Twierdzenie 3.6 oparty jest na konstrukcji kilkuetapowej penalizacji (aproksymacji). Sprowadzamy zatem problem do takiego, dla którego wiemy, że istnieją rozwiązania. Uzyskujemy kilkuparometrowy ciąg rozwiązań. Następnie przechodzimy do granicy z parametrami aproksymacji.

2. Na początek ustalmy, że dzięki regularności $\mathbf{V}$ możemy wybrać obszar w $\mathbb{R}^3$ dostatecznie duży, taki że
$$\overline{\Omega}_\tau \subset B \ \text{ dla wszystkich } \ \tau \in [0, T].$$
Oznacza to, że możemy nasz płynny "cylinder" czasoprzestrzenny włożyć w większy ustalony obszar, tj. $Q_T \subset ((0,T) \times B)$.

3. Aby poradzić sobie z warunkami zupełnego poślizgu na brzegu, wprowadzamy w słabym sformułowaniu równania momentu człon:
$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \int_{\Gamma_t} (\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} \, \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{dS}_x \mathrm{d}t, \ \varepsilon > 0, \tag{3.58}$$
który oryginalnie został zaproponowany przez Stokesa i Carey w [106]. Pozwala on rozważać cały układ na ustalonym w czasie obszarze (oznaczonym powyżej przez B) oraz ograniczać (kontrolować) przepływ przez powierzchnię Γ_t – brzeg obszaru docelowo zajmowanego przez płyn. W granicy $\varepsilon \to 0$ dzięki temu członowi uzyskujemy warunek brzegowy $(\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} = 0$ na Γ_t. Zatem duży obszar $(0,T) \times B$ zostaje podzielony nieprzepuszczalną powierzchnią $\cup_{t \in (0,T)} \{t\} \times \Gamma_t$ na „obszar płynny" (zajmowany przez płyn) Q_T i „obszar stały" Q_T^c. Po rozszerzeniu układu na duży obszar, w momencie, gdy chcemy wrócić do naszego pierwotnego problemu na Q_T musimy zapwnić, że człony, które pojawią się na Q_T^c mogą być pominięte. Aby kontrolować zachowanie rozwiązań na obszarze stałym Q_T^c wykorzystamy schemat penalizacji oparty na parametrach: $\omega, \ \nu, \ \xi, \ \delta > 0$.

4. Dodatkowo w (3.98) wprowadzamy *zmienny* współczynnik lepkości $\mu(t,x) = \mu_\omega$, gdzie μ_ω pozostaje równa pierwotnemu współczynnikowi lepkości w obszarze płynnym Q_T, ale znika poza tym obszarem (na Q_T^c), gdy $\omega \to 0$.

5. Wprowadzamy nowy współczynnik przewodnictwa ciepła $\kappa_\nu(t,x,\vartheta)$, który pozostaje ściśle dodatni na Q_T, lecz znika poza obszarem zajmowanym przez płyn Q_T, gdy $\nu \to 0$. Z powodów technicznych potrzebujemy by ta procedura została podzielona na dwa etapy. Rozważamy funkcję schodkową: $\kappa_\nu = \kappa$ w części płynnej i $\kappa_\nu = \nu\kappa$ w części stałej. Następnie regularyzujem ją, by otrzymać funkcję gładką $\kappa_{\nu,\xi}$, $\xi > 0$, gdzie $\kappa_{\nu,\xi} \to \kappa_\nu$, gdy $\xi \to 0$.

6. Podobnie jak w teorii istnienia rozwiniętej w [53] wprowadzamy dodatkowe *sztuczne ciśnienie*
$$p_\delta(\varrho, \vartheta) = p(\varrho, \vartheta) + \delta \varrho^\beta, \ \beta \geq 4, \ \delta > 0,$$
w równaniu momenty (3.35). To pozwala nam na podwyższenie na poziomie aproksymacji całkowalności gęstości (niezbędnej w punkcie 8).

7. Gdy $\varepsilon, \delta, \nu, \xi$ oraz $\omega > 0$ są ustalone, rozwiązujemy zmodyfikowany problem na ograniczonym niezależnym od czasu obszarze $B \subset \mathbb{R}^3$. W tym celu adaptujemy do naszego przypadku teorię istnienia słabych rozwiązań dla ściśliwego Naviera-Stokesa-Fouriera ze zmiennymi współczynnikami rozwinięte m.in. w [42].

8. Następnie okazuje się, że, gdy weźmiemy gęstość początkową ϱ_0 równą zero poza obszarem Ω_0 i przejdziemy z $\varepsilon \to 0$ dla ustalonych δ, $\omega > 0$, otrzymujemy, w pewnym sensie, układ dla dwóch płynów, dla kórego gęstość ośrodka na zbiorze $((0,T) \times B) \setminus Q_T$ jest zerowa (początkowa zerowa gęstoć poza Ω_0 pozostaje zerowa na zewnątrz Ω_t dla $t > 0$). W ten sposób wiele członów w układzie, w tym termiczna część ciśnienia p_ϑ, znika. W tej części fundamentalny okazuje się wybór ciśnienia – jego znikanie, gdy znika gęstość.

9. Przechodząc z $\xi \to 0$ odzyskujemy układ ze skokiem we współczynniku przewodnictwa ciepła.

10. Pozwalając następnie by lepkość znikała na obszarze Q_T^c, gdy $\omega \to 0$, pozbywamy się pozostającej na obszarze Q_T^c części lepkościowego tensora naprężeń. Ostateczny wynik uzyskujemy ustalając $\nu = \nu(\delta)$ i przechodząc z $\delta \to 0$.

Ponieważ źródłem odpowiednich oszacowań na poszczególne ciągi w powyższym schemacie są oszacowania wydedukowane ze zmodyfikowanej nierówności energetycznej dla pełnej aproksymacji, kluczowe jest przechodzenie z parametrami w odpowiedniej kolejności, tak by nie stracić oszacowań, które są niezbędne w kolejnych krokach. Ważne jest również podkreślić, że niemożliwe jest uzyskanie niezależnego od ε oszacowania na funkcję ciśnienia na Γ_t dla $t \in (0,T)$ (opartego na operatorze Bogovskiego). W konsekfencji początkowo wymusza to ograniczenie doboru funkcji testujących dla równania momentu (bezdywergencyjne na brzegu bocznym Q_T) i użycie narzędzi pozwalających rozszerzyć wynik do odpowiednio dużej klasy.

3.4 Słabe rozwiązania dla pełnego układu Naviera-Stokesa-Fouriera z warunkiem pełnego poślizgu na brzegu na obszarze zależnym od czasu - sformułowanie z równaniem entropii

Abstrakt

W ramach pracy [KMNW2] rozważamy przepływ ściśliwej cieczy z uwzględnieniem temperatury jako jednej ze zmiennych na obszarze, który zmienia się w czasie a jego kształt jest znany. Przepływ ten jest opisany układem Naviera-Stokesa-Fouriera składającym się z równania ciągłości, momentu, bilansu entropii i energii. Zakładamy, że pole prędkości spełnia warunek zupełnego poślizgu a obszar jest termicznie izolowany. Celem pracy jest wykazanie istnienia wariacyjnych (słabych) rozwiązań.

3.4.1 Sformułowanie problemu

Mimo że pełen układ Naviera-Stokesa-Fouriera (NSF) na poruszającym się obszarze został wcześniej matematycznie zanalizowany w pracy [KMNW1] (patrz Rozdział 3.3) to okazuje się w wielu wypadkach bardziej przydatne okazuje się poniżesz sformułowanie problemu, przynajmniej z punktu widzenia rozwoju dalszej analizy matematycznej: granice singularne (mała liczba Macha), redukcja wymiaru, relatywna nierówność entropijna. W ramach pracy [KMNW2] rozważamy następujący układ:

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}_x(\varrho \mathbf{u}) = 0, \tag{3.59}$$

$$\partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \mathrm{div}_x(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_x p = \mathrm{div}_x \mathbb{S}, \tag{3.60}$$

$$\partial_t(\varrho s) + \mathrm{div}_x(\varrho s \mathbf{u}) + \mathrm{div}_x \left(\frac{\mathbf{q}}{\vartheta}\right) = \sigma, \tag{3.61}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2 + \varrho e\right) \mathrm{d}x = 0. \tag{3.62}$$

Równania te, jak poprzednio, rozważane są na obszarze czasoprzestrzennym $Q_T \subset (0,\infty) \times \mathbb{R}^3$ z $T > 0$ skończonym. Definicja Q_T i Ω_t jest taka, jak w poprzednim wyniku (patrz (3.37), (3.39)). Powyższy układ składa się odpowiednio z równania: ciągłości, momentu, entropii i energii. Niewiadome to: gęstość $\varrho : (0,T) \times \Omega_t \mapsto [0,\infty)$, prędkość $\mathbf{u} : (0,T) \times \Omega_t \mapsto \mathbb{R}^3$ oraz temperatura $\vartheta : (0,T) \times \Omega_t \mapsto [0,\infty)$. Pozostałe wielkości w równaniach to funkcje tych niewiadomych: $\mathbb{S}$ – tensor naprężeń, e – energia wewnętrzna, p – ciśnienie, s – entropia, σ – produkcja entropii. Potrzebne własności tych funkcji przedstawimy dalej. Dla uproszczenia rozważań pomijamy tu pracę sił zewnętrznych.

Tak jak poprzednio obszar zależny od czasu i zadany jest przez ruch swojego brzegu na odcinku czasowym $[0,T]$. W szczególności w chwili t obszar zajmowany przez płyn opisany jest przez pole wektorowe $\mathbf{V}(t,x)$, gdzie $t \geq 0$ oraz $x \in \mathbb{R}^3$. Przyjmując, że $\mathbf{V}$ jest regularne mamy stowarzyszony układ równań:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{X}(t,x) = \mathbf{V}\Big(t, \mathbf{X}(t,x)\Big),\ t > 0,\ \mathbf{X}(0,x) = x.$$

Wtedy

$\Omega_\tau = \mathbf{X}(\tau, \Omega_0)$, gdzie $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ jest danym obszarem, $\Gamma_\tau = \partial\Omega_\tau$ oraz $Q_\tau = \cup_{t\in(0,\tau)}\{t\}\times\Omega_t$.

Zakładamy dodatkowo, że objętość rozpatrywanego obszaru nie degeneruje się do zera, tj.

$$\text{istnieje } V_0 > 0, \text{ takie że } |\Omega_\tau| \geq V_0 \text{ dla wszystkich } \tau \in [0,T]. \tag{3.63}$$

Ponadto zakładamy, że

$$\mathrm{div}_x \mathbf{V} = 0 \quad \text{w otoczeniu } \Gamma_\tau, \tag{3.64}$$

(patrz [KMNW2, Remark 5.3] po wyjaśnienie, że nie jest to restrykcyjne założenie).

Tak jak poprzednio zakładamy, że brzeg obszaru jest nieprzepuszczalny, co zapisujemy jako

$$(\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_\tau} = 0 \text{ dla wszystkich } \tau \geq 0, \tag{3.65}$$

gdzie $\mathbf{n}(t,x)$ oznacza zewnętrzny jednostkowy wektor normalny do Γ_t. Powyższy problem analizujemy z warunkiem zupełnego poślizgu w formie:

$$[\mathbb{S}\mathbf{n}] \times \mathbf{n} = 0. \tag{3.66}$$

Strumień ciepła spełnia zachowawczy warunek na brzegu, tj.

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ dla wszystkich } t \in [0,T],\ x \in \Gamma_t. \tag{3.67}$$

Cały system uzupełniony jest warunkiem początkowym

$$\varrho_0,\ (\varrho\mathbf{u})_0,\ \vartheta_0.$$

Zwięzły opis literatury związanej z problemem znajduje się w opisie poprzedniego rezultatu (patrz Rozdział 3.3).

W porównaniu do pracy [KMNW1], rozważamy tu bilans entropii (3.61) i energii (3.62) zamiast równania energii cieplnej – patrz (3.27). Jednak warto podkreślić, że chociaż silne (wystarczająco regularne) rozwiązania obu układów są równoważne, gdy tylko temperatura jest odseparowana od zera, to wiele własności, w tym istnienie słabych rozwiązań nie jest bezpośrednio przenoszonych pomiędzy systemami. W szczególności nierówność entropijna nie wynika łatwo z systemu prezentowanego w pracy [KMNW1]. A ma ona wiele dalszych zastosowań – słabo-mocna jednoznaczność, róże typy granic singularnych – patrz [16, 49, 51, 52]. Celem pracy [KMNW2] jest uzupełnienie istniejącej teorii przez wykazanie istnienia wariacyjnych rozwiązań dla systemu (3.59)–(3.62) przy Ω_t zależnym od czasu. Bardziej szczegółowe porównanie obu prac: [KMNW1] oraz [KMNW2] znajduje się w dalszej części.

Hipotezy

Podążając za [51] wprowadzamy następujący zbiór założeń:

Tensor naprężeń $\mathbb{S}$ zdeterminowany jest przez standardowe prawo reologiczne Newtona

$$\mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) = \mu(\vartheta) \left(\nabla_x \mathbf{u} + \nabla_x^t \mathbf{u} - \frac{2}{3} \mathrm{div}_x \mathbf{u} \mathbb{I} \right) + \zeta(\vartheta) \mathrm{div}_x \mathbf{u} \mathbb{I},\ \mu > 0,\ \eta \geq 0. \tag{3.68}$$

Zakładamy tu, że wsółczynniki μ oraz ζ są różniczkowalne w sposób ciągły jako funkcje temperatury absolutnej, tj. $\mu,\ \zeta \in C^1[0,\infty)$ i spełniają:

$$0 < \underline{\mu}(1+\vartheta) \leq \mu(\vartheta) \leq \overline{\mu}(1+\vartheta), \qquad \sup_{\vartheta \in [0,\infty)} |\mu'(\vartheta)| \leq \overline{m}, \tag{3.69}$$

$$0 \leq \zeta(\vartheta) \leq \overline{\zeta}(1+\vartheta). \tag{3.70}$$

Prawo Fouriera dla strumienia ciepła ma formę:

$$\mathbf{q} = -\kappa(\vartheta) \nabla_x \vartheta, \tag{3.71}$$

gdzie współczynnik przewodnictwa ciepła κ może być rozłożony na dwie części

$$\kappa(\vartheta) = \kappa_M(\vartheta) + \kappa_R(\vartheta) \tag{3.72}$$

gdzie $\kappa_M,\ \kappa_R \in C^1[0,\infty)$ oraz

$$0 < \underline{\kappa_R}(1+\vartheta^3) \leq \kappa_R(\vartheta) \leq \overline{\kappa_R}(1+\vartheta^3), \tag{3.73}$$

$$0 < \underline{\kappa_M}(1+\vartheta) \leq \kappa_M(\vartheta) \leq \overline{\kappa_M}(1+\vartheta). \tag{3.74}$$

W powyższych formułach $\underline{\mu}$, $\overline{\mu}$, $\overline{m}$, $\overline{\eta}$, $\underline{\kappa_R}$, $\overline{\kappa_R}$, $\underline{\kappa_M}$, $\overline{\kappa_M}$ są dodatnimi stałymi.

Zauważmy, że istnienie rozwiązań na ustalonym obszarze może być uzyskane dla bardziej ogólnych postaci μ oraz κ_M (patrz [51]), tj. dla dla dolnego i górnego ograniczenia opisanego przez $(1+\vartheta^\alpha)$, gdzie $\alpha \in (\frac{2}{5}, 1]$ zamiast $(1+\vartheta)$. Wierzymy, że również nasz rezultat może być rozszerzony na bardziej ogólny, aczkolwiek w pracy [KMNW2] zakładamy, że $\alpha = 1$.

Produkcja entropii σ spełnia

$$\sigma \geq \frac{1}{\vartheta}\left(\mathbb{S} : \nabla_x \mathbf{u} - \frac{\mathbf{q}}{\vartheta}\cdot\nabla_x\vartheta\right). \tag{3.75}$$

Wielkości p, e, oraz s są różniczkowalnymi w sposób ciągły funkcjami dla dodatnich wartości ϱ, ϑ oraz spełniają równanie Gibbsa

$$\vartheta Ds(\varrho,\vartheta) = De(\varrho,\vartheta) + p(\varrho,\vartheta)D\left(\frac{1}{\varrho}\right) \text{ dla wszystkich } \varrho,\ \vartheta > 0. \tag{3.76}$$

Ponadto zakładamy, że ciśnienie i energia wewnętrzna posiadają następującą formę

$$p(\varrho,\vartheta) = p_M(\varrho,\vartheta) + p_R(\vartheta), \quad p_R(\vartheta) = \frac{a}{3}\vartheta^4,\ a>0, \tag{3.77}$$

$$e(\varrho,\vartheta) = e_M(\varrho,\vartheta) + e_R(\varrho,\vartheta), \quad \varrho e_R(\varrho,\vartheta) = a\vartheta^4, \tag{3.78}$$

oraz

$$s(\varrho,\vartheta) = s_M(\varrho,\vartheta) + s_R(\varrho,\vartheta), \quad \varrho s_R(\varrho,\vartheta) = \frac{4}{3}a\vartheta^3. \tag{3.79}$$

Zgodnie z hipotezami termodynamicznej stabilności molekularne części powyższych rozbić spełniają:

$$\frac{\partial p_M}{\partial \varrho} > 0 \text{ dla wszystkich } \varrho,\ \vartheta > 0 \tag{3.80}$$

oraz

$$0 < \frac{\partial e_M}{\partial \vartheta} \leq c \text{ dla wszystkich} \varrho,\ \vartheta > 0. \tag{3.81}$$

Ponadto

$$\lim_{\vartheta\to 0^+} e_M(\varrho,\vartheta) = \underline{e}_M(\varrho) > 0 \text{ dla każdego ustalonego } \varrho > 0 \tag{3.82}$$

oraz

$$\left|\varrho\frac{\partial e_M(\varrho,\vartheta)}{\partial\varrho}\right| \leq c e_M(\varrho,\vartheta) \text{ dla wszystkich } \varrho,\ \vartheta > 0. \tag{3.83}$$

Zakładamy, że istniej funkcja P spełniająca

$$P \in C^1[0,\infty),\ P(0) = 0,\ P'(0) > 0, \tag{3.84}$$

oraz dwie dodatnie stałe $0 < \underline{Z} < \overline{Z}$, takie że

$$p_M(\varrho, \vartheta) = \vartheta^{\frac{5}{2}} P\left(\frac{\varrho}{\vartheta^{\frac{3}{2}}}\right), \text{ gdy } 0 < \varrho \leq \underline{Z}\vartheta^{\frac{3}{2}} \text{ lub } \varrho > \overline{Z}\vartheta^{\frac{3}{2}} \tag{3.85}$$

oraz

$$p_M(\varrho, \vartheta) = \frac{2}{3}\varrho e_M(\varrho, \vartheta) \text{ dla } \varrho > \overline{Z}\vartheta^{\frac{3}{2}}. \tag{3.86}$$

Problem (3.59)–(3.62) jest uzupełniony następującymi danymi początkowymi:

$$\varrho(0, \cdot) = \varrho_0 \in L^{\frac{5}{3}}(\Omega_0), \quad \varrho_0 \geq 0, \quad \varrho_0 \not\equiv 0, \quad \varrho_0|_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_0} = 0, \tag{3.87}$$

$$(\varrho\mathbf{u})(0, \cdot) = (\varrho\mathbf{u})_0, \ (\varrho\mathbf{u})_0 = 0 \text{ p.w. na zbiorze } \{\Omega_0 \mid \varrho_0(x) = 0\}, \quad \int_{\Omega_0} \frac{|(\varrho\mathbf{u})_0|^2}{\varrho_0} \mathrm{d}x < \infty, \tag{3.88}$$

$$\vartheta_0 > 0 \text{ p.w. w } \Omega_0, \qquad (\varrho s)_0 = \varrho_0 s(\varrho_0, \vartheta_0) \in L^1(\Omega_0), \tag{3.89}$$

$$E_0 = \int_{\Omega_0} \left(\frac{1}{2\varrho_0}|(\varrho\mathbf{u})_0|^2 + \varrho_0 e(\varrho_0, \vartheta_0)\right) \mathrm{d}x < \infty. \tag{3.90}$$

3.4.2 Słabe sformułowanie, główny rezultat

Równanie (3.59) spełnione jest w sensie zrenormalizowanym (DiPerna, Lions [38]):

$$\int_0^T \int_{\Omega_t} \varrho B(\varrho)(\partial_t \varphi + \mathbf{u} \cdot \nabla_x \varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T \int_{\Omega_t} b(\varrho)\mathrm{div}_x \mathbf{u}\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{\Omega_0} \varrho_0 B(\varrho_0)\varphi(0)\mathrm{d}x \tag{3.91}$$

dla wszystkich $\varphi \in C^1_c([0, T) \times \mathbb{R}^3)$ i wszystkich $b \in L^\infty \cap C[0, \infty)$, takich że $b(0) = 0$ oraz $B(\varrho) = B(1) + \int_1^\varrho \frac{b(z)}{z^2}\mathrm{d}z$. Przyjmujemy tu, że $\varrho \geq 0$ p.w. w $(0, T) \times \mathbb{R}^3$.

Równanie momentu (3.60) spełnione jest jako rodzina równości całkowych:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega_t} (\varrho\mathbf{u} \cdot \partial_t \boldsymbol{\varphi} + \varrho[\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}] : \nabla_x \boldsymbol{\varphi} + p(\varrho, \vartheta)\mathrm{div}_x \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) : \nabla_x \boldsymbol{\varphi})\, \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ = -\int_{\Omega_0} (\varrho\mathbf{u})_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}(0, \cdot)\, \mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{3.92}$$

dla wszystkich $\boldsymbol{\varphi} \in C^1_c(\overline{Q_T}; \mathbb{R}^3)$, takich że $\varphi(T, \cdot) = 0$ oraz

$$\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_\tau} = 0 \ \text{ dla wszystkich } \ \tau \in [0, T]. \tag{3.93}$$

Warunek nieprzepuszczalności (3.65) spełniony jest w sensie śladu, tj.

$$\mathbf{u}, \nabla_x \mathbf{u} \in L^2(Q_T; \mathbb{R}^3) \text{ oraz } (\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}(\tau, \cdot)|_{\Gamma_\tau} = 0 \text{ dla p.w. } \tau \in [0, T]. \tag{3.94}$$

Nierówność entropii

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega_t} \varrho s(\partial_t \varphi + \mathbf{u} \cdot \nabla_x \varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^T \int_{\Omega_t} \frac{\kappa(\vartheta)\nabla_x \vartheta \cdot \nabla_x \varphi}{\vartheta}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ + \int_0^T \int_{\Omega_t} \frac{\varphi}{\vartheta}\left(\mathbf{S} : \nabla_x \mathbf{u} + \frac{\kappa(\vartheta)|\nabla_x \vartheta|^2}{\vartheta}\right) \leq -\int_{\Omega_0} (\varrho s)_0 \varphi(0)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{3.95}$$

zachodzi dla wszystkich $\varphi \in C^1_c(\overline{Q_T})$, takich że $\varphi(T, \cdot) = 0$ i $\varphi \geq 0$.

Na koniec przyjmijmy, że zachodzi następująca nierówność dla energii

$$\int_{\Omega_\tau}\left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2+\varrho e\right)(\tau,\cdot)\mathrm{d}x \leq \int_{\Omega_0}\left(\frac{1}{2}\frac{(\varrho\mathbf{u})_0^2}{\varrho_0}+\varrho_0 e_0-(\varrho\mathbf{u})_0\cdot\mathbf{V}(0)\right)\mathrm{d}x$$
$$-\int_0^\tau\int_{\Omega_t}\left(\varrho(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}):\nabla_x\mathbf{V}+p\,\mathrm{div}_x\mathbf{V}-\mathbb{S}:\nabla_x\mathbf{V}+\varrho\mathbf{u}\cdot\partial_t\mathbf{V}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{\Omega_\tau}\varrho\mathbf{u}\cdot\mathbf{V}(\tau,\cdot)\mathrm{d}x \tag{3.96}$$

dla p.w. $\tau\in(0,T)$.

Definicja 3.7 *Mówimy, że trójka* $(\varrho,\mathbf{u},\vartheta)$ *jest* wariacyjnym rozwiązaniem *problemu* (3.59)–(3.62) *z warunkami brzegowymi* (3.65)–(3.67) *oraz początkowymi* (3.87)–(3.90)*, jeśli*

- $\varrho\in L^\infty(0,T;L^{\frac{5}{3}}(\mathbb{R}^3))$, $\varrho\geq 0$, $\varrho\in L^q(Q_T)$ *dla pewnego* $q>\frac{5}{3}$,
- $\mathbf{u}$, $\nabla_x\mathbf{u}\in L^2(Q_T)$, $\varrho\mathbf{u}\in L^\infty(0,T;L^1(\mathbb{R}^3))$,
- $\vartheta>0$ *p.w. na* Q_T, $\vartheta\in L^\infty((0,T);L^4(\mathbb{R}^3))$, ϑ, $\nabla_x\vartheta\in L^2(Q_T)$ *oraz* $\log\vartheta$, $\nabla_x\log\vartheta\in L^2(Q_T)$,
- ϱs, $\varrho s\mathbf{u}$, $\frac{\mathbf{q}}{\vartheta}\in L^1(Q_T)$,
- *relacje* (3.91)–(3.96) *są spełnione.*

Uwaga: W przeciwieństwie do [51] rozważamy dla energii nierówność zamiast równości. Może wydawać się, że w ten sposób tracimy wiele informacji, jednak taka definicja słabego rozwiązania jest nadal wystarczająca. Oznacza to, że jeśli rozwiązanie zgodne z definicją jest odpowiednio regularne, to jest też silnym rozwiązaniem (spełniającym układ punktowo). Uzasadnienie tego podejścia można znaleźć w [102, Section 1.2].

Główny rezultat pracy [KMNW2] brzmi:

Twierdzenie 3.7 *[Theorem 3.1 [KMNW2]] Niech* $\Omega_0\subset\mathbb{R}^3$ *będzie ograniczonym obszarem klasy* $C^{2+\nu}$ *dla pewnego dowolnego* $\nu>0$*, niech* $\mathbf{V}\in C^1([0,T];C_c^3(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3))$ *będzie dane i spełnia* (3.63), (3.64)*. Załóżmy, że hipotezy* (3.68)–(3.86) *są spełnione.*

Wtedy problem (3.59)–(3.62) *z warunkami brzegowymi* (3.66), (3.67) *i danymi początkowymi* (3.87)–(3.90) *posiada wariacyjne rozwiązanie zgodne z Definicją 3.7 dla dowolnego ograniczonego przedziału czasowego* $(0,T)$.

3.4.3 Kroki dowodowe. Metodologia

Szczegółowy dowód Twierdzenia 3.7 można oczywiście znaleźć w [KMNW2]. Poniżej przywołajmy ogólną konstrukcję. W swojej idei jest ona podobna do tej z opisu poprzedniego wyniku. Różnice pomiędzy obiema pracami podkreślimy później. Przywołuję tu jednak nawet te części rozumowania, które się pokrywają, aby zachować pewną ciągłość i niezależność od poprzedniego opisu.

1. Aby rozpocząć nasze rozważania i skonstruować problem aproksymacyjny na ustalonym obszarze niezależnym od czasu znajdujemy dostatecznie duży obszar $B\subset\mathbb{R}^3$, taki że
$$\overline{\Omega_t}\subset B \text{ dla wszystkich } t\in[0,T] \tag{3.97}$$

i dodajemy do równania momentu człon

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \int_{\Gamma_t} (\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}\, \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{dS}_x \mathrm{d}t,\ \varepsilon > 0 \text{ small}, \tag{3.98}$$

(Stokes, Carey [106]).

Człon ten daje ograniczenie na przepływ przez powierzchnię Γ_t i pozwala odzyskać warunek zupełnego poślizgu. Gdy $\varepsilon \to 0$, zapewnia on warunek $(\mathbf{u}-\mathbf{V})\cdot\mathbf{n} = 0$ na Γ_t. W konsekwencji duży obszar $(0,T) \times B$ zostaje podzielony przez nieprzepuszczalną powierzchnię $\cup_{t\in(0,T)}\{t\} \times \Gamma_t$ na *obszar płynny* Q_T i *obszar stały* Q_T^c. By poradzić sobie z zachowaniem (przedłużonych) rozwiązań na obszarze Q_T^c konstruujemy kilkuparametrową penalizację (aproksymację) reprezentowaną parametrami ω, ν, δ, λ oraz η.

2. Zależność wielkości $\mathbb{S}$, $\mathbf{q}$ oraz p, e, s od niewiadomych $\varrho, \mathbf{u}, \vartheta$ jest dana przez zbiór przyjętych hipotez i relacji konstytutywnych, które powiązane są z parametrami μ, ζ, κ oraz a. Dodatkowo do (3.98) wprowadzamy *zmienne* współczynniki: lepkość ścinania $\mu_\omega(t, x, \vartheta)$, lepkość objętościowa $\zeta_\omega(t, x, \vartheta)$, współczynnik przewodnictwa ciepła $\kappa_\nu(t, x, \vartheta)$, oraz współczynnik w radiacyjnej części ciśnienia, entropii i energii wewnętrznej $a = a_\eta(t, x)$. Wszystkie one pozostają dodatnie (poza lepkośćią objętościową, która jest nieujemna) w części płynnej – obszarze Q_T, ale docelowo znikają na obszarze stałym Q_T^c, gdy ω, ν oraz η zbiegają do zera (w wymienionej kolejności).

3. Dodajemy człon $\lambda\vartheta^5$ do bilansu energii oraz $\lambda\vartheta^4$ do bilansu entropii. Te człony zapewniają nam kontrolę nad temperaturą w obszarze Q_T^c. Wybór konkretnego wykładnika ϑ^5 nie jest tu kluczowy, ważne jest jednak, by wykładnik ten był większy niż ϑ^4.

4. Tak jak dla teorii istnienia z [51], wprowadzamy *sztuczne ciśnienie* związane z parametrem δ:
$$p_\delta(\varrho, \vartheta) = p(\varrho, \vartheta) + \delta\varrho^\beta,\ \beta \geq 4,\ \delta > 0.$$
Daje to dodatkową informacją o gęstości.

5. Dla ε, η, ω, ν, λ oraz $\delta > 0$ ustalonych, rozwiązujemy problem istnienia słabych rozwiązań na ustalonym, niezmiennym w czasie obszarze $B \subset \mathbb{R}^3$ dla naszej aproksymacji. W tym celu, adoptujemy teorię rozwiniętą dla ściśliwego układu Naviera-Stokesa-Fouriera ze zmiennymi współczynnikami rozwiniętą w [51].

6. Następnie przyjmujemy, że początkowa gęstość ϱ_0 znika poza obszarem Ω_0 i zbiegamy z $\varepsilon \to 0$ przy ustalonych η, ω, ν, λ, $\delta > 0$. Otrzymujemy system dwóch płynów, dla którego gęstość na obszarze Q_T^c jest zerowa.

7. By pozbyć się pozostałych członów z obszaru Q_T^c, zbiegamy z pozostałymi parametrami aproksymacji do zera. Ważna jest tu kolejność: η, ω, ν, λ, na końcu δ. Zapewnia ona utrzymanie odpowiednich oszacowań potrzebnych przy kolejnych przejściach granicznych.

Podkreślmy teraz główne różnice pomiędzy tym wynikiem, tym prezentowanym wcześniej z pracy [KMNW1].

Po pierwsze, sformuowanie problemu (sytemu) jest inne. W [KMNW1] definicja słabego rozwiązania składa się z zrenormalizowanego równania ciągłości, równania momentu, nierówności dla energii cieplnej i nierówności dla energii zupełnej.

W konstrukcji penalizacji, częścią wspólną prac [KMNW1] i [KMNW2] jest ε-ograniczenie na warunek brzegowy pełnego poślizgu. W obu przypadkach schematu aproksymacji pojawia się penalizacja dla współczynników lepkości i przewodnictwa ciepła. Jednak, gdy porównamy oba wyniki, to w pracy [KMNW1] było konieczna dodatkowa regularyzacja penalizacji współczynnika przewodnictwa ciepł, nie potrzebna w [KMNW2]. Bardzo istotne jest, że w tym wyniku wspólczynniki lepkości zależą od temperatury. Ważne jest również, że tu jedną ze składowych ciśnienia jest jego część radiacyjna p_R. Jej obecność wymaga konstrukcji penalizacji dla współczynnika a. W konsekwencji pojawia się ona również w energii wewnętrznej i entropii.

Obecność sztucznego ciśnienia w aproksymacji jest wspólna i standardowa jako narzędzie w dowodzie ciągowej stabilności dla płynów ściśliwych.

W pracy [KMNW1] równanie energii cieplnej w aproksymacji jest rozważane w zrenormalizowanym sensie i, tak jak dla ustalonych obszarów, nierówność energetyczna uwzględnia zrenormalizowaną energię.

Jednym z kluczowych punktów w obecnie omawianym wyniku jest dodanie w aproksymacji sztucznego członu, który daje odpowiednio wysoką całkowalność temperatury – $\lambda\vartheta^4$ – w nierówności entropijnej. W konsekwencji w nierówności energetycznej mamy również człon $\lambda\vartheta^5$.

Powyższe różnice sprawiają, że przejście ze wszystkimi parametrami do zera technicznie jest zupełnie inne i wymaga poradzenia sobie z innymi problemami na różnych etapach aproksymacji, gdyż również oszacowania zależą od różnych parametrów na poszczególnych krokach. Nawet przechodząc z $\varepsilon \to 0$ zachodzą inne niż w [KMNW1] oszacowania a priori. W szczególności oszacowania są zależne od parametru λ, co nie było dodatkową trudnością w [KMNW1].

Podsumowują to porównanie – cała procedura przechodzenia w aproksymacji do finalnego problemu wymaga dużej uwagi i nie może być w bezpośredni i prosty sposób przeniesiona z pracy [KMNW1].

3.5 Od przepływu ściśliwego do nieściśliwego. Analiza asymptotyczna pełnego układu na The asymptotic analysis of the complete fluid system on zmieniających się obszarach.

Abstrakt

W pracy [W17] prezentujemy analizę asymptotyki rozwiązań dla ściśliwego układu Naviera-Stokesa-Fouriera, gdy liczba Macha jest mała i proporcjonalna do ε, liczba Froude'a jest proporcjonalna do $\sqrt{\varepsilon}$ a $\varepsilon \to 0$ oraz obszar, w którym znajduje się płyn zmienia się wraz z parametrem ε. W szczególności płyn porusza się przy udziale grawitacji generowanej przez obiekt(y) otoczone płynem, których średnica zbiega do zera. Gdy $\varepsilon \to 0$, pokazujemy, że pole prędkości płynu zbiega w granicy do bezdywergencyjnego pola spełniającego układ aproksymacji Oberbacka-Bosussinesqa w $\mathbb{R}^3$ z dopuszczeniem osobliwości w formie siły grawitacji. Nasza metodologia oparta jest na słabych rozwiązaniach. W celu przejścia do granicy w członie konwekcyjnym stosujemy narzędzia analizy spektralnej stowarzyszonej z propagatorem fali (operatorem Neumanna-Laplacea) regulującego ruch fali akustycznej w systemie.

3.5.1 Wprowadzenie. Motywacje

Modele dynamiki płynów są szeroko stosowane, w tym w przewidywaniu pogody w meteorologii, w licznych zagadnieniach inżynieryjnych związanych z płynami w ruchu, w zrozumieniu skomplikowanej dynamiki gazowych gwiazd i przestrzeni międzygwiezdnej w astrofizyce, a nawet problemach związanych z ruchem w mieście. Większość z tych zastosowań dotycz płynów ściśliwych lub co najmniej lekko ściśliwych, ale przeważająca część badań teoretycznych poświęcona jest matematycznym modelom wyidealizowanych płynów nieściśliwych.

Aproksymacja Oberbecka-Boussinesqa jest matematycznym modelem przepływu warstwowego. Model ten jest szeroko stosowany, gdy gęstość płynu jest prawie stała, ale nadal istnieją różnice w ciśnieniu spowodowane zmianami temperatury, co powoduje fluktuacje od hydrodynamicznego stanu równowagi. Taki efekt można zaobserwować w przypadku wielu problemów konwekcyjnych, w których różnice temperatur są niezależne od dynamiki przepływu. Jeśli wymagamy, aby liczba Macha dążyła do zera, pozwalamy by gęstość ϱ zbiegała do stałej $\overline{\varrho}$, podczas gdy siła grawitacji jest przeskalowana przez liczbę Froude'a. Wtedy fluktuacje temperatury nie są spowodowane przepływem, ale są od niego niezależne (Zeytounian [116]).

Otrzymujemy zatem następujący system równań:

$$\operatorname{div}_x \boldsymbol{U} = 0, \tag{OB1}$$

$$\overline{\varrho}\left(\partial_t \boldsymbol{U} + \operatorname{div}_x(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{U})\right) + \nabla_x \Pi = \mu\Delta\boldsymbol{U} + \tilde{r}\nabla_x F, \tag{OB2}$$

$$\overline{\varrho}c_p\left(\partial_t\Theta + \operatorname{div}_x(\boldsymbol{U}\Theta)\right) - \kappa(\overline{\vartheta})\Delta\Theta - \overline{\varrho}\overline{\vartheta}\alpha\operatorname{div}_x(F\boldsymbol{U}) = 0, \tag{OB3}$$

$$\tilde{r} + \overline{\varrho}\alpha\Theta = 0, \tag{OB4}$$

gdzie $\boldsymbol{U}$ oznacza pole prędkości płynu, Θ oznacza odchylenie temperatury, Π jest funkcją ciśnienia, μ – współczynnikiem lepkości, $\kappa > 0$ współczynnikiem przewodnictwa ciepła, przez $\overline{\varrho}$ oznaczamy stałą gęstość płynu, a przez $\overline{\vartheta} > 0$ stałą referencyjną temperaturę. Przez c_p mamy na myśli ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu, a przez $\alpha > 0$ – współczynnik termicznej rozszerzalności płynu. F oznacza potencjał siły napędowej (potencjał grawitacyjny) działający na płyn. Zauważmy, że gęstość w aporksymacji Oberbecka-Boussinesqa jest stała poza w siłą wyporu, gdzie jest oznaczona jako $\tilde{r}$ i jest powiązana z odchyleniami temperatury poprzez relacją Boussinesqa (OB4), (patrz Zeytounian [116]). Ponadto Θ jest tu odchyleniem temperatur od stanu równowagi a nie samą temperaturą, niezależnym od przepływu.

Aproksymacja Oberbecka-Boussinesqa (OB) była w ostatnich latach studiowana na całej przestrzeni $\Omega = \mathbb{R}^3$, z $\nabla_x F = g[0,0,-1]$, m.in. przez Brandolese, Schonbek [14], Danchin, Paicu [22]. Taka postać grawitacji jest rozsądna i dogodna z punktu widzenia analizy matematycznej i związana jest z problemami na obszarach ograniczonych lub gdzie można rozważać stałe pole grawitacyjne. Ale uzasadnione jest również rozważanie modeli, w których grawitacja generowana jest przez obiekty umieszczone w płynie (patrz [56]). Możemy wtedy przyjąć, że to opisać następująco:

$$-\Delta F = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \delta(x_i), \quad \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1 \tag{3.99}$$

jeśli wielkość obiektów jest pomijalna.

W naszych badaniach chcemy wykazać, że OB aproksymacja (OB1 - OB4) na $\mathbb{R}^3$ może być wyprowadzona jako granica singularna pełnego układu Naviera-Stokesa-Fouriera (NSF, patrz Rozdział 3.5.2) z odpowiednimi warunkami brzegowymi oraz liczbami Macha i Froude'a zbiegającymi do zera oraz gdy rodzina obszarów, na których postawiony jest pierwotny system (NSF) zależy od parametru i zbiega w pewnym sensie do pełnej przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Tym co jest oryginalne w pracy [W17], jest pozwolenie, by człon siłowy przyjął formę (3.99) w granicy, gdy $\varepsilon \to 0$. Taka forma nie jest dopuszczalna dla pierwotnego układu NSF z powodu zbyt niskiej całkowalności. By być bardziej dokładnym: Jesteśmy w stanie powiedzieć, że $\tilde{r} \in L^2(0,T; L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3))$, wtedy by zapewnić całkowalnosc członu $\tilde{r}\nabla_x F$ w słabym sformułowaniu potrzebujemy $\nabla_x F \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, gdzie $q \geq 2$ (nie zachodzi to np. dla $F \approx \frac{1}{|x|}$).

W serii nowatorskich prac Klainerman and Majda (np. [90]) autorzy przedstawili rygorystyczną matematycznie podstawę teorii dla singularnych granic, w szczególności w reżimie małych liczb Macha (charakterystyczna prędkość płynu jest zdominowana przez prędkość dźwięku w ośrodku ściśliwym, a zatem model jest redukowany do nieściśliwego). Klein i in. [91, 92, 93, 94] wykorzystując ten sam pomysł zaproponował kilka metod numerycznych do rozwiązywania złożonych problemów w dynamice płynów w reżimie granic singularnych (gdy niektóre parametry w układzie zbiegają do zera lub nieskończoności).

W naszych rozważaniach, w przeciwieństwie do metodologi opartej na silnych rozwiązaniach (Klainerman, Majda [89, 90]), bazujemy na słabym sformułowaniu, jak w monografii [60]. Podejście to pozwala uniknąć istotnych restrykcji na rozmiar danych i długość przedziału czasowego. Z drugiej strony możemy powiedzieć, że główną wadą tej metody jest jej zależność od oszacowania energii dla systemu NSF, który opiera się na kontroli szybkości produkcji entropii w całym procesie przechodzenia do nieściśliwej granicy. W szczególności musimy założyć, że początkowy rozkład gęstości i temperatury powinien być zbliżony do stanu równowagi.

Zakres wyników dotyczących teorii istnienia słabych rozwiązań systemu Naviera-Stokesa, Naviera-Stokesa-Fouriera jest bardzo szeroki. Również wiele zagadnień związanych z analizą tych układów w reżimie małych liczb Macha z zainteresowaniem środowiska matematycznego. Musimy tu wspomnieć o monografii E. Feireisla i A. Novotnego [60], w której autorzy podsumowują serię swoich prac.

Gdy liczba Macha zbiega do zera, równanie ciągłości redukuje się do warunku nieściśliwości. W procesie przechodzenia do granicy najbardziej delikatnym pytaniem jest człon konwekcyjny w równaniu momentu. A priori oszacowania energetyczne nie zapewniają żadnego ograniczenia na gradientową część pochodnej czasowej momentu (pochodzącej z rozkładu Helmholtza dla momentu) co wynika z faktu, że obecny jest człon osobliwy w tymże równaniu. Z tego powodu najbardziej wymagającym i skomplikowanym krokiem jest wykazanie silnej zbieżności pola prędkości, tak by kontrolować człon konwekcyjny. Potwierdzenie jego słabej zwartości musi być oparte na subtelnej wiedzy o możliwych oscylacjach w czasie oraz ich wzajemnym tłumieniu w fali akustycznej opisanej gradientową częścią rozkładu Helmholtza momentu regulowanego równaniem akustycznym.

Jeśli układ Naviera-Stokesa jest postawiony na całej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oczekiwany lokalny zanik energii akustyczne jest konsekwencją oszacowań dyspersyjnych. Desjardins i Grenier [36] wykorzystali tą ideę łącząc ją z nietrywialnymi oszacowaniami Strichartza dla równania akustycznego by wykazać silną (punktową) zbieżność pola prędkości w granicy z małą liczbą Macha dla przypadku barotropowego w całej $\mathbb{R}^3$. Jednak oszacowania Strichartza są dużo delikatniejsze, gdy chcemy rozważyć wpływ brzegu obszaru i pewne ograniczenia na geometrię obszaru muszą zostać postawione. Jeśli mamy obszar zewnętrzny, wtedy obiekt (przeszkoda) musi być np. gwiaździsta, np. [20], [73].

W pracy [W17] wykazujemy, że ap. OB na $\mathbb{R}^3$ z siłą grawitacyjną generowaną przez obiekty o nieistotnej średnicy otoczone płynem może być widziana jako granica singularna pełnego ściśliwego układu Naviera-Stokesa-Fouriera rozważanego na rodzine wystarczająco dużych obszarów ze skurczającymi się dziurami i gdy liczba Macha i Froude'a zbiega do zera.

Zagadnienie granicy małej liczby Macha na zmiennych obszarach z szorstkim (chropowatym) brzegiem na przeszkodzie obszaru zewnętrznego w przypadku barotropowym rozważano w [48]. W [W17] delikatna analiza słabej zwartości członu konwekcyjnego oparta została na analizie spektralnej operatora Neumana-Laplacea i wygaszeniu się fali akustycznej, opracowanych na podstawie [43]. W tym podejściu istotny jest wpływ zaburzeń obszaru. Ponadto analizę kompletnego (przewodzącego ciepło) układu doprowadzającą do aproksymacji Oberbecka-Boussinesqa na dużych, nieograniczonych obszarach można znaleźć też w [56, 43].

3.5.2 Szczegółowe sformułowanie problemu

Przez $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznaczamy parę dualną. Przez $L^p(B)$ oznaczamy przestrzeń Lebesgue'a funkcji mierzalnych g takich, że $|g|^p$ jest całkowalne na B. Przestrzeń Sobolewa funkcji o pochodnych do rzędu k w L^p oznaczamy przez $W^{k,p}$. Przez $\mathcal{D}^{k,p}(B)$ oznaczamy homogeniczną przestrzeń Sobolewa, tj. $\mathcal{D}^{k,p}(B) = \{g \in L^1_{\mathrm{loc}}(B) \, : \, D^\alpha g \in L^p(B), \ |\alpha| = k\}$, gdzie $k \geq 0$ oraz $p \geq 1$.

Układ pierwotny

Wprowadźmy rozważany przez nas układ pierwotny – ściśliwy układ Naviera-Stokesa-Fouriera z małymi liczbami Macha oraz Froude'a, który składa się z równania ciągłości (prawo zachowania masy), równania momentu, bilansu entropii i energii zupełnej

$$\partial_t \varrho_\varepsilon + \operatorname{div}_x (\varrho_\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon) = 0, \tag{NSF1}$$

$$\partial_t (\varrho_\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon) + \operatorname{div}_x (\varrho_\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon \otimes \boldsymbol{u}_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla_x p(\varrho_\varepsilon, \vartheta_\varepsilon) = \operatorname{div}_x \mathbf{S}(\vartheta_\varepsilon, \nabla_x \boldsymbol{u}_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \varrho_\varepsilon \nabla_x F_\varepsilon, \tag{NSF2}$$

$$\partial_t (\varrho_\varepsilon s(\varrho_\varepsilon, \vartheta_\varepsilon)) + \operatorname{div}_x (\varrho_\varepsilon s(\varrho_\varepsilon, \vartheta_\varepsilon) \boldsymbol{u}_\varepsilon) + \operatorname{div}_x \left(\frac{\boldsymbol{q}(\vartheta_\varepsilon, \nabla_x \vartheta_\varepsilon)}{\vartheta_\varepsilon} \right) = \sigma_\varepsilon, \tag{NSF3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_\varepsilon}\left(\frac{1}{2}\varrho_\varepsilon|\boldsymbol{u}_\varepsilon|^2+\frac{1}{\varepsilon^2}\varrho_\varepsilon e(\varrho_\varepsilon,\vartheta_\varepsilon)-\frac{1}{\varepsilon}\varrho_\varepsilon F_\varepsilon\right)\mathrm{d}x=0. \tag{NSF4}$$

Lepkościowy tensor naprężeń w (NSF2) dany jest przez reologiczne prawo Newtona

$$\mathbf{S}(\vartheta_\varepsilon,\nabla_x\boldsymbol{u}_\varepsilon)=\mu(\vartheta_\varepsilon)\left(\nabla_x\boldsymbol{u}_\varepsilon+\nabla_x^T\boldsymbol{u}_\varepsilon-\frac{2}{3}\mathrm{div}_x\,\boldsymbol{u}_\varepsilon\mathbf{Id}\right)+\eta(\vartheta_\varepsilon)\mathrm{div}_x\,\boldsymbol{u}_\varepsilon\mathbf{Id}, \tag{3.100}$$

a prędkość produkcji entropii σ_ε spełnia

$$\sigma_\varepsilon\geq\frac{1}{\vartheta_\varepsilon}\left(\varepsilon^2\mathbf{S}_\varepsilon(\vartheta_\varepsilon,\nabla_x\boldsymbol{u}_\varepsilon):\nabla_x\boldsymbol{u}_\varepsilon-\frac{\boldsymbol{q}_\varepsilon(\vartheta_\varepsilon,\nabla_x\vartheta_\varepsilon)\cdot\nabla_x\vartheta_\varepsilon}{\vartheta_\varepsilon}\right). \tag{3.101}$$

Strumień ciepła $\boldsymbol{q}$ w (NSF3) zdeterminowany jest przez prawo Fouriera

$$\boldsymbol{q}(\vartheta_\varepsilon,\nabla_x\vartheta_\varepsilon)=-\kappa(\vartheta_\varepsilon)\nabla_x\vartheta_\varepsilon, \tag{3.102}$$

gdzie κ jest dodatnim współczynnikiem przewodnictwa ciepła. Niewiadomymi w układzie są gęstość płynu $\varrho_\varepsilon=\varrho_\varepsilon(x,t)$, pole prędkości $\boldsymbol{u}_\varepsilon=\boldsymbol{u}_\varepsilon(t,x):(0,T)\times\Omega_\varepsilon\to\mathbb{R}^3$ oraz temperatura absolutna $\vartheta_\varepsilon=\vartheta_\varepsilon(x,t):(0,T)\times\Omega_\varepsilon\to\mathbb{R}$. Ciśnienie p, energia wewnętrzna, e oraz entropia właściwa s są danymi funkcjami zależnymi od ϱ i ϑ, które spełniają równanie Gibbsa

$$\vartheta Ds=De+pD\left(\frac{1}{\varrho}\right). \tag{3.103}$$

Nasz układ pierwotny rozważamy na rodzinie (ograniczonych) obszarów, których rozmiar zależy od ε i są wystarczająco duże, gdy $\varepsilon\to0$. Ponadto obszary te mają w sobie dziury, których średnice zbiegają odpowiednio wolno do zera, gdy $\varepsilon\to0$. Przyjmujemy, że ta rodzina obszarów ma następującą formę: niech $N\in\mathbb{N}$ będzie liczbą dziur (obiektów) i niech $R_0>0$ oraz $r_i>0$ dla $i=1,\ldots,N$ będą, takie że

$$\Omega_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon^\delta}B_{R_0}(0)\setminus\left(\cup_{i=1,\ldots,N}\,\varepsilon^\beta B_{r_i}(x_i)\right),\quad \text{gdzie } \delta>1 \text{ i } \beta<\frac{1}{4} \tag{3.104}$$

oraz $B_{r_i}(x_i)\cap B_{r_j}(x_j)=\emptyset$ dla $i,j=1,\ldots,N$, $i\neq j$, i istnieje otwarty zbiór B_R, taki że $\overline{B_R}\subset R_{R_0}(0)$ oraz $\left(\cup_{i=1,\ldots,N}\varepsilon^\beta\overline{B_{r_i}(x_i)}\right)\subset B_R$ dla wszystkich $\varepsilon\in(0,1]$.

Zauważmy, że tak specyficzny wybór geometrii obszarów Ω_ε w rzeczywistości wybrany jest dla przejrzystości rozumowania w pracy [W17]. Rezultat zawarty w [W17] zachodzi również dla bardziej ogólnych obszarów o wystarczająco regularnym brzegu, w których rozmiar dziur dąży odpowiednio wolno do zera, a zewnętrzny brzeg ucieka odpowiednio szybko do nieskończoności.

Układ jest uzupełniony o następujące warunki zupełnego poślizgu

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega_\varepsilon}=0,\qquad [\mathbf{S}(\vartheta_\varepsilon,\nabla_x\boldsymbol{u}_\varepsilon)\boldsymbol{n}]\times\boldsymbol{n}=0 \tag{3.105}$$

oraz brzeg jest termicznie izolowany:

$$\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega_\varepsilon}=0. \tag{3.106}$$

Ponieważ $\delta>0$, a prędkość dziwięku jest proporcjonalna do $\frac{1}{\varepsilon}$, to zewnętrzny brzeg Ω_ε staje się nieistotny dla analizy równania akustycznego, którego własnościami w rzeczywistości jesteśmy zainteresowani jednie lokalnie w przestrzeni. By dostarczyć oszacowania dyspersyjne dla fali akustycznej musimy być pewni, że zaburzenia wewnętrznego brzegu obszaru nie są zbyt szybkie w stosunku do ε. Podobne założenia można znaleść w [43, 48], a w naszym przypadku wiąże się to z założeniem, że $\beta < \frac{1}{4}$.

Jeśli założymy, że samoprzyciąganie płynu jest pomijalne, to źródłem grawitacji są obiekty otoczone obszarem Ω_ε i siła grawitacji może przyjąć następującą formę

$$F_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sum_{i=1}^N m_{i,\varepsilon}(y)}{|x-y|}\,\mathrm{d}y, \quad \text{gdzie } m_{i,\varepsilon} \geq 0, \operatorname{supp} m_{i,\varepsilon} \subset \varepsilon^\beta B_{r_i}(x_i),\ i = 1, \dots, N, \tag{3.107}$$

tu $m_{i,\varepsilon}$ oznacza gęstość sztywnych obiektów oddziałujących na płyn przez grawitację. Wtedy siła grawitacji może być zapisana jako funkcja harmoniczna w Ω_ε

$$\begin{aligned} &-\Delta F_\varepsilon = \sum_{i=1}^N m_{i,\varepsilon} \text{ w } \mathbb{R}^3, \quad m_{i,\varepsilon} \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^N m_{i,\varepsilon}\,\mathrm{d}y = 1 \\ &\text{oraz } \nabla F_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \text{ dla każdego } \varepsilon \in (0,1]. \end{aligned} \tag{3.108}$$

Zatem $F \approx \frac{1}{|x|}$ z dala od obiektów ją generujących ($|x| \to \infty$), w konsekwencji mamy, że $\nabla_x F \approx -\frac{x}{|x|^3}$, $-\Delta F = \delta(0)$ (lub w przypadku wielu obiektów: $-\Delta F = \sum_{i=1}^N \lambda_i \delta(x_i)$ w granicy, gdzie $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$ oraz δ oznacza deltę Diraca). Dla naszych rozważań zakładamy, bez straty ogólności, że dla każdego $\varepsilon \in (0,1]$

$$\|F_\varepsilon|_{B_R}\|_{L^2(B_R)} \leq c, \qquad \|F_\varepsilon|_{B_R^c}\|_{L^\infty(B_R^c)} \leq c, \qquad \|F_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq c\frac{1}{\varepsilon^\beta} \tag{3.109}$$

oraz

$$\|\nabla_x F_\varepsilon|_{B_R}\|_{L^{6/5}(B_R)} \leq c \qquad \|\nabla_x F_\varepsilon|_{B_R^c}\|_{L^2(B_R^c)} \leq c, \qquad \|\nabla_x F_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq c\frac{1}{\varepsilon^{2\beta}}, \tag{3.110}$$

gdzie B_R zawiera (pokrywa) wszystkie dziury w Ω_ε i ich otoczenie (patrz (3.104)). Ponadto zakładamy , że F_ε oraz F spełniają

$$\begin{aligned} &\nabla_x F_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_x F \text{ słabo w } L^{5/2}(K), \quad \nabla_x F_\varepsilon \to \nabla_x F \text{ silnie w } L^2(K), \\ &\nabla_x F \in L^p(K) \text{ dla pewnego } p > 2, \qquad F \in L^{6/5}_{loc}(\mathbb{R}^3) \end{aligned} \tag{3.111}$$

dla każdego zwartego $K \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$ i wystarczająco małych ε. Zauważmy, że wybierając odpowiednio $m_{i,\varepsilon}$ w (3.107) dla $i = 1, \dots, N$ oraz $\varepsilon \in (0,1]$ jesteśmy w stanie zapewnić, że F_ε w formie (3.107) spełnia założenia (3.109), (3.110), (3.111) oraz w konsekwencji otrzymamy F w formie (3.99).

W ogólności bezwymiarowa wersja układu Naivera-Stokesa-Fouriera jest rezultatem skalowania wielkości przez ich wartości referencyjne (charakterystyczne) $X = \frac{X}{X_{char}}$ i przyjmuje postać:

$$\begin{gathered} \mathrm{Sr}\,\partial_t \varrho + \operatorname{div}_x(\varrho \mathbf{u}) = 0, \\ \mathrm{Sr}\,\partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \frac{1}{\mathrm{Ma}^2}\nabla_x p = \frac{1}{\mathrm{Re}}\operatorname{div}_x \mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) + \frac{1}{\mathrm{Fr}^2}\varrho \nabla_x F, \\ \mathrm{Sr}\,\partial_t(\varrho s) + \operatorname{div}_x(\varrho s \mathbf{u}) + \frac{1}{\mathrm{Pe}}\operatorname{div}_x\left(\frac{\boldsymbol{q}}{\vartheta}\right) = \sigma, \\ \sigma \geq \frac{1}{\vartheta}\left(\frac{\mathrm{Ma}^2}{\mathrm{Re}}\mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) : \nabla_x \mathbf{u} - \frac{1}{\mathrm{Pe}}\frac{\boldsymbol{q} \cdot \nabla_x \vartheta}{\vartheta}\right), \end{gathered}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}\left(\frac{\mathrm{Ma}^2}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2+\varrho e-\frac{\mathrm{Ma}^2}{\mathrm{Fr}^2}\varrho F\right)\mathrm{d}x=0.$$

W powyższym systemie liczba Macha $\mathrm{Ma} = U_{char}/\sqrt{p_{char}/\varrho_{char}}$, liczba Froude'a $\mathrm{Fr} = U_{char}/\sqrt{L_{char}\nabla F_{char}}$, gdzie U_{char} jest charakterystyczną dla modelu prędkością, p_{char} – charakterystycznym ciśnieniem, ϱ_{char} – charakterystyczną gęstością, L_{char} – charakterystyczną długością, F_{char} – charakterystyczną siłą zewnętrzną. Wtedy efekt nieściśliwości związany jest z $\mathrm{Ma} \approx \varepsilon \to 0$, co oznacza, że prędkość dźwięku w medium dominuje jego prędkość charakterystyczną. Efekt słabej stratyfikacji związany jest z tym, że $\mathrm{Fr} \gg \mathrm{Ma}$, $\mathrm{Fr} = \sqrt{\varepsilon} \to 0$. Dla systemu rozważanego w pracy [W17] przyjmujemy, że liczby Strouhala, Pécleta oraz Reynoldsa są proporcjonalne do 1, tj. $\mathrm{Sr} = \mathrm{Re} = \mathrm{Pe} = 1$.

Ograniczenia strukturalne

Aby móc skorzystać z teorii istnienia rozwiązań dla układu pierwotnego [60], a następnie skonstruować jednostajne oszacowania, potrzebujemy postawić dodatkowo następujące ograniczenia strukturalne na funkcje termodynamiczne p, e, s, jak również na współczynniki transportu μ, η, κ. Ustalamy, że

$$p(\varrho_\varepsilon,\vartheta_\varepsilon)=\vartheta_\varepsilon^{5/2}P\left(\frac{\varrho_\varepsilon}{\vartheta_\varepsilon^{3/2}}\right)+\frac{a}{3}\vartheta_\varepsilon^4,\ a>0, \tag{3.112}$$

(pierwszy komponent w (3.112) związany jest z standardowym ciśnieniem molekularnym dla jednoatomowego gazu, drugi – reprezentuje promieniowanie cieplne), gdzie

$$P\in C^1[0,\infty)\cap C^2(0,\infty),\quad P(0)=0,\quad P'(Z)>0 \text{ dla wszystkich } Z\geq 0 \tag{3.113}$$

dzięki dodatniej ściśliwości

$$\partial_\varrho p(\varrho,\vartheta)>0. \tag{3.114}$$

Dodatkowo do (3.113) zakładamy, że

$$0<\frac{\frac{5}{3}P(Z)-P'(Z)Z}{Z}<c \text{ dla wszystkich } Z>0. \tag{3.115}$$

Warunek (3.115) oznacza, że ciepło właściwe przy stałej objętości jest dodatnie, tj. $\partial_\vartheta e(\varrho,\vartheta)$ jest dodatnie i ograniczone. Ponieważ (3.115) jest spełnione, to $Z \to P(Z)/Z^{5/3}$ jest funkcją malejącą. Dodatkowo zakładamy, że

$$\lim_{Z\to\infty}\frac{P(Z)}{Z^{5/3}}=P_\infty>0. \tag{3.116}$$

Dzięki relacji Gibbsa (3.103) właściwa energia wewnętrzna i właściwa entropia mogą być zapisane w następujących formach

$$e(\varrho,\vartheta)=\frac{3}{2}\frac{\vartheta^{5/2}}{\varrho}P\left(\frac{\varrho}{\vartheta^{3/2}}\right)+a\frac{\vartheta^4}{\varrho},\qquad s(\varrho,\vartheta)=S\left(\frac{\varrho}{\vartheta^{3/2}}\right)+\frac{4}{3}a\frac{\vartheta^3}{\varrho}, \tag{3.117}$$

gdzie

$$S'(Z)=-\frac{3}{2}\frac{\frac{5}{3}P(Z)-ZP'(Z)}{Z^2} \text{ dla wszystkich } Z>0. \tag{3.118}$$

Współczynniki transportu: Zakładamy, że μ - lepkość ścinania, η - lepkość objętościowa oraz κ - przewodnictwo ciepła są różniczkowalnymi w sposób ciągły funkcjami temperatury $\vartheta \in [0,\infty)$ oraz spełniają następujące waruni wzrostu dla wszystkich $\vartheta \geq 0$

$$\begin{aligned} &0 < \underline{\mu}(1+\vartheta) \leq \mu(\vartheta) \leq \overline{\mu}(1+\vartheta), \\ &0 \leq \eta(\vartheta) \leq \overline{\eta}(1+\vartheta), \\ &0 < \underline{\kappa}(1+\vartheta^3) \leq \kappa(\vartheta) \leq \overline{\kappa}(1+\vartheta^3), \end{aligned} \tag{3.119}$$

gdzie $\underline{\mu}$, $\overline{\mu}$, $\overline{\eta}$, $\underline{\kappa}$ oraz $\overline{\kappa}$ są dodatnimi stałymi. Zauważmy, że powyższe warunki nie koniecznie są najbardziej optymalne z punktu widzenia aktualnej teorii istnienia rozwiązań.

Stan równowagi

Tak zwany układ równowagi (stan statyczny) dla każdego skalowanego układu NSF_ε zbudowany jest ze spoczynkowej gęstości $\tilde{\varrho}_\varepsilon$ oraz stałej temperatury spełniających

$$\nabla_x p(\tilde{\varrho}_\varepsilon, \overline{\vartheta}) = \varepsilon \tilde{\varrho}_\varepsilon \nabla_x F_\varepsilon \quad \text{ w } \Omega_\varepsilon.$$

Dla wygody przyjmujemy, że spoczynkowa gęstość $\tilde{\varrho}_\varepsilon$ jest zdefiniowana na całej przestrzeni $\mathbb{R}^3$, tj.

$$\nabla_x p(\tilde{\varrho}_\varepsilon, \overline{\vartheta}) = \varepsilon \tilde{\varrho}_\varepsilon \nabla_x F_\varepsilon \text{ in } \mathbb{R}^3, \qquad \text{gdzie} \lim_{|x|\to\infty} \tilde{\varrho}_\varepsilon(x) = \overline{\varrho}. \tag{3.120}$$

(Źle przygotowane) dane początkowe

Ponieważ pracujemy ze słabymi rozwiązaniami opartymi o oszacowania energii, to by kontrolować prędkość produkcji entropii potrzebujemy założyć, że dane początkowe są bliskie stanowi równowagi. Oznacza to, że początkowa prędkość i temperatura mają następującą formę:

$$\varrho_{0,\varepsilon} = \tilde{\varrho}_\varepsilon + \varepsilon \varrho^{(1)}_{0,\varepsilon}, \qquad \vartheta_{0,\varepsilon} = \overline{\vartheta} + \varepsilon \vartheta^{(1)}_{0,\varepsilon}, \tag{3.121}$$

gdzie $\overline{\vartheta} > 0$ jest dodatnią stałą i opisującą spoczynkową dystrybucję temperatury oraz $\varrho^{(1)}_{0,\varepsilon}$ i $\vartheta^{(1)}_{0,\varepsilon}$ są ograniczonymi mierzalnymi funkcjami, które spełniają

$$\begin{aligned} &\|\varrho^{(1)}_{0,\varepsilon}\|_{L^\infty\cap L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c, \quad \int \varrho^{(1)}_{0,\varepsilon} \mathrm{d}x = 0, \quad \|\vartheta^{(1)}_{0,\varepsilon}\|_{L^\infty\cap L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c, \quad \int \vartheta^{(1)}_{0,\varepsilon} \mathrm{d}x = 0, \\ &\|\sqrt{\varrho_{0,\varepsilon}}\boldsymbol{u}_{0,\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c, \quad \|\boldsymbol{u}_{0,\varepsilon}\|_{L^\infty\cap L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c \end{aligned} \tag{3.122}$$

dla wszystkich $\varepsilon \in (0,1]$. Powyższe ograniczenia pozwalają kontrolować bilans zupełnej dyssypacji, która jest źródłem oszacowań niezbędnych by przygotować przejście graniczne. Niemniej jednak taki wybór pozwala nadal rozważać nietrywialną dynamiką. Powoduje on również oscylacje w równaniu akustycznym, które zostaną one wyeliminowane przez oszacowania dyspersyjne. ("Dobrze przygotowane" nie generują takich oscylacji.)

3.5.3 Główny rezultat

Słabe rozwiązania dla układu pierwotnego

Przywołajmy następujący rezultat z pracy [60]:

Twierdzenie 3.8 *Niech Ω_ε będzie ograniczonym obszarem klasy $C^{2+\nu}$ z $\nu > 0$. Załóżmy, że p, e, s spełniają relację Gibbsa* (3.103) *oraz strukturalne hipotezy (3.112 - 3.118), a współczynniki transportu μ, η, κ przyjmują warunki wzrostu (3.119). Niech dane początkowe będą dane przez (3.121) oraz $\varrho^{(1)}_{0,\varepsilon}$, $\boldsymbol{u}_\varepsilon(0)$, $\vartheta^{(1)}_{0,\varepsilon}$ będą ograniczonymi funkcjami mierzalnymi, niech $F_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\Omega_\varepsilon)$.*

Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ na tyle małego, że $\varrho_{0,\varepsilon}$, $\vartheta_{0,\varepsilon} > 0$ istnieje słabe rozwiązanie $\{\varrho_\varepsilon, \boldsymbol{u}_\varepsilon, \vartheta_\varepsilon\}_\varepsilon$ dla układu Naviera-Stokesa-Fouriera (NSF1 - NSF4), (3.100 - 3.102) z warunkami wzrostu (3.105 - 3.106) i warunkami początkowymi (3.121) w następującym sensie

$$\int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} (\varrho_\varepsilon \partial_t \varphi + \varrho_\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon \cdot \nabla_x \varphi) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = -\int_{\Omega_\varepsilon} \varrho_{0,\varepsilon} \varphi(0,\cdot)\mathrm{d}x \tag{3.123}$$

dla wszystkich $\varphi \in C^\infty_c([0,T) \times \overline{\Omega}_\varepsilon)$;

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\varrho_\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon \cdot \partial_t \varphi + \varrho_\varepsilon [\boldsymbol{u}_\varepsilon \otimes \boldsymbol{u}_\varepsilon] : \nabla_x \varphi + \frac{1}{\varepsilon^2} p(\varrho_\varepsilon, \vartheta_\varepsilon) \mathrm{div}_x\, \varphi \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ = \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\mathbf{S}_\varepsilon : \nabla_x \varphi - \frac{1}{\varepsilon} \varrho_\varepsilon \nabla_x F_\varepsilon \cdot \varphi \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{\Omega_\varepsilon} (\varrho_{0,\varepsilon} \boldsymbol{u}_{0,\varepsilon}) \cdot \varphi(0,\cdot)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{3.124}$$

dla dowolnej funkcji $\varphi \in C^\infty_c([0,T) \times \overline{\Omega}_\varepsilon; \mathbb{R}^3)$, $\varphi \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega_\varepsilon} = 0$;

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{1}{2} \varrho_\varepsilon |\boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \varrho_\varepsilon e(\varrho_\varepsilon, \vartheta_\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \varrho_\varepsilon F_\varepsilon \right)(t)\mathrm{d}x \\ = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{1}{2} \varrho_{0,\varepsilon} |\boldsymbol{u}_{0,\varepsilon}|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \varrho_{0,\varepsilon} e(\varrho_{0,\varepsilon}, \vartheta_{0,\varepsilon}) - \frac{1}{\varepsilon} \varrho_{0,\varepsilon} F_\varepsilon \right) \mathrm{d}x\end{aligned} \tag{3.125}$$

dla p.w. $t \in (0,T)$;

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} (\varrho_\varepsilon s(\varrho_\varepsilon, \vartheta_\varepsilon) \partial_t \varphi + \varrho_\varepsilon s(\varrho_\varepsilon, \vartheta_\varepsilon) \boldsymbol{u}_\varepsilon \cdot \nabla_x \varphi) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\boldsymbol{q}_\varepsilon}{\vartheta_\varepsilon} \cdot \nabla_x \varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ + \langle \sigma_\varepsilon ; \varphi \rangle_{[\mathcal{M};C]([0,T]\times\overline{\Omega}_\varepsilon)} = -\int_{\Omega_\varepsilon} \varrho_{0,\varepsilon} s(\varrho_{0,\varepsilon}, \vartheta_{0,\varepsilon}) \varphi(0,\cdot)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{3.126}$$

dla wszystkich $\varphi \in C^\infty_c([0,T) \times \overline{\Omega}_\varepsilon)$, gdzie $\sigma_\varepsilon \in \mathcal{M}^+([0,T] \times \overline{\Omega}_\varepsilon)$.

Układ graniczny. OB aproksymacja

Niech $F \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, gdzie $p \geq 6/5$. Mówimy, że funkcje $\boldsymbol{U}$ oraz Θ są słabym rozwiązaniem dla aproksymacji Oberbecka-Boussinesqa (OB1 – OB4) z danymi początkowymi $\boldsymbol{U}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $\Theta_0 \in L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$, jeśli

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{U} \in L^\infty(0,T; L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0,T; W^{1,2}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)),\\ &\Theta \in L^\infty(0,T; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0,T; W^{1,2}(\mathbb{R}^3)),\end{aligned}$$

$$\mathrm{div}_x\, \boldsymbol{U} = 0 \text{ p.w. w } (0,T) \times \mathbb{R}^3, \tag{3.127}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (\overline{\varrho}(\boldsymbol{U} \cdot \partial_t \boldsymbol{\varphi} + (\boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{U}) : \nabla_x \boldsymbol{\varphi}))\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ = -\int_{\mathbb{R}^3} \overline{\varrho} \boldsymbol{U}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}\mathrm{d}x + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(\mathbf{S} : \nabla_x \boldsymbol{\varphi} - \overline{\varrho}\alpha(\overline{\varrho}, \overline{\vartheta})\Theta \nabla_x F \cdot \boldsymbol{\varphi} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{3.128}$$

dla wszystkich $\boldsymbol{\varphi} \in C_c^\infty([0,T); C_c^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3))$, gdzie $\mathrm{div}_x\, \boldsymbol{\varphi} = 0$ oraz $\mathbf{S} = \mu(\overline{\vartheta})(\nabla_x \boldsymbol{U} + \nabla_x \boldsymbol{U}^T)$.

Ponadto

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\varrho} c_p(\overline{\varrho},\overline{\vartheta})\Theta\left(\partial_t \varphi + \boldsymbol{U}\cdot\nabla_x\varphi\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(\overline{\varrho}\overline{\vartheta}\alpha(\overline{\varrho},\overline{\vartheta})F\boldsymbol{U} + \kappa(\overline{\vartheta})\nabla_x\Theta\right)\cdot\nabla_x\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t = -\int_{\mathbb{R}^3} \overline{\varrho}c_p\Theta_0\varphi(0,\cdot)\mathrm{d}x \tag{3.129}$$

dla wszystkich $\varphi \in C_c^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^3)$. Dodatkowo relacja Boussinesqa spełniona jest w następującym sensie

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{r}\,\mathrm{div}_x\, \boldsymbol{\varphi}\mathrm{d}x\mathrm{d}t = -\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\varrho}\alpha(\overline{\varrho},\overline{\vartheta})\Theta\mathrm{div}_x\,\boldsymbol{\varphi}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{3.130}$$

dla wszystkich $\boldsymbol{\varphi} \in C_c^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^3)$. Przez c_p oznaczamy ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu i $c_p(\overline{\varrho},\overline{\vartheta}) = \partial_\vartheta e(\overline{\varrho},\overline{\vartheta}) + \alpha(\overline{\varrho},\overline{\vartheta})\frac{\overline{\vartheta}}{\overline{\varrho}}\partial_\vartheta p(\overline{\varrho},\overline{\vartheta})$, $\alpha > 0$ jest wsółczynnikiem rozszerzalności cieplnej i $\alpha(\overline{\varrho},\overline{\vartheta}) = \frac{1}{\overline{\varrho}}\frac{\partial_\vartheta p(\overline{\varrho},\overline{\vartheta})}{\partial_\varrho p(\overline{\varrho},\overline{\vartheta})}$ (oba są obliczone przy referencyjnej gęstości i temperaturze $\overline{\varrho}$, $\overline{\vartheta}$).

Główny rezultat pracy [W17] brzmi następująco:

Twierdzenie 3.9 (Theorem 2.2 [W17]) *Niech $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$ będzie rodziną obszarów zdefiniowanych przez (3.104), gdzie $\beta < \frac{1}{4}$ oraz $\delta > 1$. Załóżmy, że p, e oraz s spełnią (3.103), (3.112 - 3.118), niech współczynniki transportu μ, η oraz κ spełniają warunki wzrostu (3.119) oraz niech siła zewnętrzna będzie dana przez potencjał F_ε spełniający (3.109 - 3.111). Niech $\{\varrho_\varepsilon, \boldsymbol{u}_\varepsilon, \vartheta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ będzie rodziną słabych rozwiązań dla układu Naviera-Stokesa-Fouriera (NSF1 - NSF4), (3.100 - 3.102) na zbiorze $(0,T)\times\Omega_\varepsilon$, z warunkami brzegowymi (3.105), (3.106) oraz danymi początkowymi (3.121), gdzie $\tilde{\varrho}_\varepsilon > 0$, $\overline{\varrho} > 0$ oraz $\overline{\vartheta} > 0$ spełniającymi (3.122) dla $\varepsilon \in (0,1)$. Ponadto załóżmy, że*

$$\begin{aligned} &\varrho_{0,\varepsilon}^{(1)} \rightharpoonup \varrho_0^{(1)} \text{ słabo w } L^2(\mathbb{R}^3), \quad \boldsymbol{u}_{0,\varepsilon} \rightharpoonup \boldsymbol{U}_0 \text{ słabo w } L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3), \\ &\vartheta_{0,\varepsilon}^{(1)} \rightharpoonup \vartheta_0^{(1)} \text{ słabo w } L^2(\mathbb{R}^3). \end{aligned} \tag{3.131}$$

Wtedy dla odpowiedniego podciągu otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\varrho_\varepsilon \to \overline{\varrho} \text{ silnie w } L^\infty(0,T;L^{5/3}(K)), \quad \frac{\varrho_\varepsilon - \overline{\varrho}}{\varepsilon} \rightharpoonup r \text{ słabo w } L^2(0,T;L^2(K)), \\ &\frac{\vartheta_\varepsilon - \overline{\vartheta}}{\varepsilon} \rightharpoonup \Theta \text{ słabo w } L^2(0,T;W^{1,2}(K)), \\ &\boldsymbol{u}_\varepsilon \rightharpoonup \boldsymbol{U} \text{ słabo w } L^2(0,T;W^{1,2}(K;\mathbb{R}^3)), \quad \boldsymbol{u}_\varepsilon \to \boldsymbol{U} \text{ silnie } L^2((0,T)\times K;\mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

dla dowolnego zwartego zbioru $K \subset \mathbb{R}^3$, gdzie para $\boldsymbol{U}$, Θ jest słabym rozwiązaniem aproksymacji Oberbecka-Boussinesqa (OB1 – OB4) na $(0,T)\times\mathbb{R}^3$ w sensie określonym przez (3.127 - 3.130), gdzie $\boldsymbol{U}(0,\cdot) = \boldsymbol{H}[\boldsymbol{U}_0]$ oraz $\Theta_0 = \vartheta_0^{(1)}$, a F spełnia (3.111).

Przez $\boldsymbol{H}[\cdot]$ oznaczamy projekcję na przestrzeń funkcji bezdywergencyjnych (z rozkładu Helmholtza).

Zwróćmy uwagę, że funkcje $\tilde{r}$ ze słabego sformułowania aproks. OB oraz r z powyższego twierdzenia są w następującej relacji: $\tilde{r} = r + \frac{\overline{\varrho}}{\partial_\varrho p(\overline{\varrho},\overline{\vartheta})}F$ (patrz Section 3.6 w [W17]).

3.5.4 Główne kroki w dowodzie. Metodologia

Bardzo skrótowy opis dowodu Twierdzenia 3.9 składa się z następujących punktów:

- Wykorzystujemy teorię istnienia dla pierwotnego układu NSF – słabe rozwiązania $\{\varrho_\varepsilon, \boldsymbol{u}_\varepsilon, \vartheta_\varepsilon\}_\varepsilon$ z Twierdzenia 3.8.
- Konstruujemy jednostajne oszacowania niezależne od parametru ε wykorzystując bilans zupełnej dyssypacji w terminach funkcji Helmholtza $(H_{\overline{\vartheta}}(\varrho, \vartheta) = \varrho \left(e(\varrho, \vartheta) - \overline{\vartheta} s(\varrho, \vartheta)\right))$.
- Zapewniamy istnienie przedłużeń niewiadomych na $\mathbb{R}^3$ zachowujących oszacowania.
- Przechodzimy do granicy $\varepsilon \to 0$ wykorzystując metody skompensowanej zwartości i techniki rozwinięte dla teorii istnienia rozwiązań w większości członów.
- Aby przejść do granicy w członie konwekcyjnym wykorzystujemy metody oparte na analizie równania akustycznego stowarzyszonego z NSF.
- Ustalamy postać granicznego systemu.

Jak już zostało podkreślone wcześniej w reżimie małej liczby Macha równanie ciągłości redukuje się do warunku nieściśliwości. Pozwala to na ograniczenie się do bezdywergencyjnych funkcji testujących dla równania momentu. Najbardziej delikatną kwestią (pytaniem) jest człon konwekcyjny w równaniu momentu. A priori nasze oszacowania nie zapewniają żadnych ograniczeń dla gradientowej części pochodnej czasowej pola prędkości (momentu), a główną trudnością jest pokazanie, że

$$\mathbf{u}_\varepsilon \to \boldsymbol{U} \quad \text{silnie w } L^2$$

by móc następnie pokazać, że

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon \otimes \boldsymbol{u}_\varepsilon \to \boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{U} \text{ w pewnym sensie.}$$

W rzeczywistości, to czego potrzebujemy to wykazanie, że

$$\left\{ t \to \int \varrho_\varepsilon \boldsymbol{u}_\varepsilon(t, \cdot) \varphi \mathrm{d}x \right\}_{\varepsilon > 0} \qquad \text{jest prezwarty w } L^2(0, T)$$

dla wszystkich $\varphi \in C_c^\infty(K)$, gdzie K jak w (3.111)

Dlatego weryfikacja słabej zwartości członu konwekcyjnego musi być oparta na subtelnej wiedzy o możliwych oscylacjach w czasie i wzajemnym tłumienie lub dyspersji w fali akustycznej opisującej zachowanie gradientowej części momentu z dekompozycji Helmholtza. Dlatego następnym krokiem jest analiza generatora fali akustycznej na zmiennych (zaburzanych) obszarach Ω_ε.

W tym celu przepisujemy układ NSF w formę równania falowego - akustyczny analog Lighthilla:

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_t S_\varepsilon + \omega \mathrm{div}_x \boldsymbol{V}_\varepsilon &= \varepsilon f_\varepsilon^1, \\ \varepsilon \partial_t \boldsymbol{V}_\varepsilon + \nabla_x S_\varepsilon &= \varepsilon f_\varepsilon^2 \end{aligned} \tag{3.132}$$

$$\boldsymbol{V}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{n}|_{\Omega_\varepsilon} = 0, \quad \boldsymbol{V}_\varepsilon = \varrho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon,$$

gdzie S_ε, f^1_ε, f^1_ε są kombinacjam różnych członów z układu pierwotnego, ω jest funkcją p i s (szczegóły w pracy [W17]). Wykorzystując rozkład Helmholtza

$$\boldsymbol{V}_\varepsilon = \boldsymbol{H}_\varepsilon[\boldsymbol{V}_\varepsilon] + \nabla_x \Phi_\varepsilon, \qquad \Delta_{\varepsilon,\mathrm{N}}\Phi = \mathrm{div}_x\, \boldsymbol{V}_\varepsilon$$

możemy ponownie przepisać (3.132) w postać

$$\varepsilon\partial_t S_\varepsilon + \omega\Delta_N\Phi_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^{2\beta}}\mathbb{F}^1_\varepsilon(-\Delta_{\varepsilon,\mathrm{N}})[h^1_\varepsilon], \quad \varepsilon\partial_t\Phi_\varepsilon + S_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^{4\beta}}\mathbb{F}^2_\varepsilon(-\Delta_{\varepsilon,\mathrm{N}})[h^2_\varepsilon] \tag{3.133}$$

$$\nabla_x\Phi\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega_\varepsilon} = 0$$

uzupełniając odpowiednimi warunkami początkowymi, gdzie h^i_ε są ograniczone w $L^2(L^2)$. Chcielibyśmy tu podkreślić, że $\mathbb{F}(A)$ może stać się osobliwe, gdy $A\to 0$ lub $A\to\infty$ W powyższym sformułowaniu operator Neumana-Laplacea $-\Delta_{\varepsilon,\mathrm{N}}$ może być widziany jako nieujemny, samosprzężony operator na $L^2(\Omega_\varepsilon)$, gdzie

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(-\Delta_{\varepsilon,\mathrm{N}}) =&\Big\{w\in W^{1,2}(\Omega_\varepsilon)\mid \int_{\Omega_\varepsilon}\nabla_x w\cdot\nabla_x\varphi dx = \int_{\Omega_\varepsilon} g\varphi dx\\ &\text{dla wszystkich } \varphi\in C^\infty_c(\overline{\Omega}_\varepsilon) \text{ i pewnego } g\in L^2(\Omega_\varepsilon)\Big\}, \quad -\Delta_{\varepsilon,\mathrm{N}}w = g.\end{aligned}$$

Obecność osobliwego wsółczynnika $\frac{1}{\varepsilon^{2\beta}}$ w (3.133) jest konsekwencją rozważanej przez nas formy na człon siłowy F oraz następującego typu oszacowania: ponieważ brzeg $\partial\Omega_\varepsilon$ jest regularny, to standardowe teoria eliptyczna daje nam

$$\mathcal{D}(-\Delta_{\varepsilon,\mathrm{N}}) = \Big\{w\in W^{2,2}(\Omega_\varepsilon)\mid \nabla_x w\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega_\varepsilon} = 0\Big\}.$$

Jeśli rozważymy przeskalowaną rodzinę obszarów

$$\widehat{\Omega}_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^\beta}\Omega_\varepsilon$$

możemy zastosować standardowe oszacowania eliptyczne i wywnioskować, że

$$\|\nabla^2_x\varphi\|_{L^p(\widehat{\Omega}_\varepsilon)} \le c(p)\left(\|\Delta_x\varphi\|_{L^p(\widehat{\Omega}_\varepsilon)} + \|\varphi\|_{L^p(\widehat{\Omega}_\varepsilon)}\right).$$

Jednakże po ponownym przeskalowaniu do oryginalnego obszaru Ω_ε otrzymujemy

$$\|\nabla^2_x\varphi\|_{L^p(\Omega_\varepsilon} \le c(p)\left(\|\Delta_x\varphi\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} + \frac{1}{\varepsilon^{2\beta}}\|\varphi\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}\right).$$

Okazuje się, że gradientowa część z rozkładu Helmholtza jest wyrażalna explicite dzięki formule Duhamela

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon(t,\cdot) =& \frac{1}{2}\exp\left(i\sqrt{-\omega\Delta_{\varepsilon,\mathrm{N}}}\frac{t}{\varepsilon}\right)\left[\Phi_0 + \frac{i}{\sqrt{-\omega\Delta_{\varepsilon,\mathrm{N}}}}S_0\right]\\ &+\frac{1}{2}\exp\left(-i\sqrt{-\omega\Delta_{\varepsilon,\mathrm{N}}}\frac{t}{\varepsilon}\right)\left[\Phi_0 - \frac{i}{\sqrt{-\omega\Delta_{\varepsilon,\mathrm{N}}}}S_0\right]\\ &+\varepsilon^{-4\beta}\frac{1}{2}\int_0^T\exp\left(i\sqrt{-\omega\Delta_{\varepsilon,\mathrm{N}}}\frac{t-s}{\varepsilon}\right)\left[\tilde{F}_{2,\varepsilon}(s) + \frac{i}{\sqrt{-\omega\Delta_{\varepsilon,\mathrm{N}}}}\tilde{F}_{1,\varepsilon}(s)\right]\mathrm{d}s\\ &+\varepsilon^{-4\beta}\frac{1}{2}\int_0^T\exp\left(-i\sqrt{-\omega\Delta_{\varepsilon,\mathrm{N}}}\frac{t-s}{\varepsilon}\right)\left[\tilde{F}_{2,\varepsilon}(s) - \frac{i}{\sqrt{-\omega\Delta_{\varepsilon,\mathrm{N}}}}\tilde{F}_{1,\varepsilon}(s)\right]\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{3.134}$$

Mając dostępne powyższe informacje dowód zbieżności w członie konwekcyjnym sprowadza się do pokazania, że

$$\left\{t \to \int_{\Omega_\varepsilon} \Phi_\varepsilon(t,\cdot)\varphi \mathrm{d}x\right\} \to 0 \quad \mathrm{w} L^2(0,T) \quad \text{dla wszystkich } \varphi \in C_c^\infty(K), \text{ gdy } \varepsilon \to 0. \tag{3.135}$$

Prędkość fali akustycznej jest proporcjonalna do $\frac{1}{\varepsilon}$. Ponieważ Ω_ε jest odpowiednio duże, tj. $\operatorname{diam}\Omega_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^\delta} \to \infty$, gdy $\varepsilon \to 0$ oraz $\delta > 0$, to zewnętzny brzeg Ω_ε staje się nieistotny (gdy interesuje nas zachowanie fali akustycznej tylko lokalnie i w skończonym przedziale czasowym). Własność ta pozwala oprzeć się teraz na narzędziach charakterystycznych dla obszarów zewnętrznych. Wykorzystamy mianowicie ogólne podejście oparte na analizie miar spektralnych stowarzyszonych z generatorem fali. Argumenty te są podobne do twierdzenia RAGE (pod warunkiem, że punktowe spektrum $-\Delta_{\varepsilon,\mathrm{N}}$ na rozważanym obszarze jest puste).

Problem (3.135) formułujemy przy pomocy miar spektralnych stowarzyszonych z funkcją i określonych na dodatniej prostej rzeczywistej – spektrum $-\Delta_{\varepsilon,\mathrm{N}}$, która może być dana za pomocą formy Stone'a:

$$\mu_{\varepsilon,\varphi}(a,b) = \lim_{\delta\to 0^+}\lim_{\eta\to 0^+}\int_{a+\delta}^{b-\delta}\left\langle\left(\frac{1}{-\Delta_\varepsilon - \lambda - i\eta} - \frac{1}{-\Delta_\varepsilon - \lambda + i\eta}\right)\varphi,\varphi\right\rangle d\lambda.$$

Wtedy by skompensować "wybuchowy" wpływ współczynnika $\varepsilon^{-4\beta}$ pojawiającego się w (3.134) potrzebujemy wykazać, że

$$\begin{aligned}\Big(\int_0^T \left|\left\langle \exp\left(i\sqrt{-\Delta_{\varepsilon,\mathrm{N}}}\frac{t}{\varepsilon}\right)[\Psi], G(-\Delta_{\varepsilon,\mathrm{N}})[\varphi]\right\rangle\right|^2 dt\Big)^{1/2}&\\ \leq \omega(\varepsilon,\varphi,G)\|\Psi\|_{L^2}&\end{aligned}$$

z odpowiednim ω dla wszystkich $\varphi \in C_c^\infty(K)$ oraz $G \in C_c^\infty(0,\infty)$ i dowolnego $\Psi \in L^2(\Omega)$. W szczególności skorzystamy z tego, że

$$\omega(\varepsilon,G,\varphi) = \sqrt{\varepsilon}c(\varphi,G) \to 0, \text{ gdy } \varepsilon \to 0 \text{ dla każdego ustalonego } \varphi,\ G. \tag{3.136}$$

Dana wprost zależność ω od ε jest konsekwencją opisanych poniżej kroków. Wykorzystując miarę spektralną możemy napisać, że

$$\left\langle \exp\left(i\sqrt{-\Delta_{\varepsilon,N}}\frac{t}{\varepsilon}\right)[\Psi],\varphi\right\rangle = \int_0^\alpha \exp\left(i\sqrt{\lambda}\frac{t}{\varepsilon}\right)\tilde{\Psi}(\lambda)d\mu_{\varepsilon,\varphi}$$

$\tilde{\Psi} \in L^2(\Omega_\varepsilon, d\mu_\varphi)$, $\|\tilde{\Psi}\|_{L^2\mu_\varphi} \leq \|\Psi\|_{L^2}$ (szczegóły te można znaleźć również w [43]). Prędkość zaniku względem ε w formule (3.136) jest wydedukowana dzięki temu, że $\Delta_{\varepsilon,\mathrm{N}}$ spełnia tzw. warunek "Limiting Absorption Principle (LAP)", tj. operatory

$$(1+|x|^2)^{-s/2}\circ(-\Delta_{\varepsilon,\mathrm{N}} - \lambda \pm i\eta)^{-1}\circ(1+|x|^2)^{-s/2} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega),$$

są ograniczone dla dowolnych $s > 1$ jednostajnie dla $\lambda \in [a,b]$, $0 < a < b$, $\eta > 0$. Dzięki naszym założeniom postawionym na rodzinę obszarów Ω_ε miary spektralne związane z φ są ciągłe względem miary Lebesgue'a (metody rozwinięte przez Last, Strichartz, Feireisl). W konsekwencji uzasadnia to (3.136), a co za tym idzie – również (3.135) i zbieżność w członie konwekcyjnym.

To co powinno zostać jeszcze podkreślone to przejście do granicy $\varepsilon \to 0$ w członie siłowym (grawitacyjnym) w równaniu momentu. Zauważmy, że

$$\frac{1}{\varepsilon}\varrho_\varepsilon \nabla_x F_\varepsilon = \frac{\varrho_\varepsilon - \overline{\varrho}}{\varepsilon}\nabla_x F_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\overline{\varrho}\nabla_x F_\varepsilon.$$

Drugi człon po prawej stornie może być w granicy przesunięty do nowej funkcji ciśnienia, jednak ten pierwszy wymaga więcej uwagi. Gdy $\varepsilon \to 0$, w rzeczywistości funkcje testujące dla równania momentu są następujące: $\boldsymbol{\varphi} \in C_c^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^3)$ dodatkowo $\operatorname{supp} \varphi \subset K$ dla dowolnego zwartego $K \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{x_1, \ldots, x_N\}$. Wtedy zauważamy, że $\frac{\varrho_\varepsilon - \overline{\varrho}}{\varepsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} r$, a dzięki relacji Bussinesqa $r \approx \quad \Theta \in L^2(0,T;W^{1,2}(\mathbb{R}^3)) \approx \quad \Theta \in L^2(0,T;W^{1,2}(\mathbb{R}^3))$. Te własności łączymy z faktem, że dla $s \in (1,3)$ $s-$pojemność skończonej liczby punktów jest zerowa, tj. $\mathrm{Cap}_s(\{x_1, \ldots, x_N\}) = 0$, a zatem $W^{1,s}(\mathbb{R}^3 \setminus \{x_1, \ldots, x_N\})$ jest równoważne z $W^{1,s}(\mathbb{R}^3)$. To wszystko razem z argumentami gęstościowymi pozwala użyć w słabym sformułowaniu aproks. OB funkcji testujących określonych na całej $\mathbb{R}^3$ (bez ograniczenia się do zbiorów K). Pozwala to również scharakteryzować granicę będącą członem siłowym w aproksymacji OB. Szczegóły można znaleźć w [W17, Section 3.6].

3.6 Lepkościowe modele hydrodynamiczne dla ruchu kolektywnego z tłumieniem i nielokalną interakcją

Abstrakt

Hydrodynamiczne układy w modelowaniu tworzenia się roi uwzględniają nielokalne siły w formie potencjałów atrakcji-repulsji jak również ciśnienia opisującego silną lokalną repulsję. W pracy [CWZ19] skupiamy się na przypadku, w którym zachodzi równowaga pomiędzy nielokalnym przyciąganiem oraz lokalnym ciśnieniem, a w przypadku całej przestrzeni, gdy obecne jest także ograniczenie (confinement). Przy odpowiednich założeniach na potencjał i funkcję ciśnienia wykazujemy istnienie słabych rozwiązań dla modelu hydrodynamicznego z lepkością i liniowym tłumieniem. Dzięki wprowadzeniu linowego tłumienia do systemu zapewniamy istnienie i jednoznaczność stacjonarnych rozwiązań o zwartym nośniku dla funkcji gęstości, ustalonej masie i środku ciężkości. Powiązane pole prędkości jest zerowe na nośniku gęstości. Ponadto pokazujemy, że globalne w czasie słabe rozwiązania zbiegają dla dużych czasów to zbioru tych rozwiązań w odpowiednim sensie. W pewnych przypadkach jesteśmy w stanie zidentyfikować graniczną gęstość jednoznacznie jako globalne minimalizatory funkcjonału wolnej energii z odpowiednią masą i środkiem ciężkości.

3.6.1 Wprowadzenie. Motywacje

Ciągłe opisy hydrodynamiczne dla zachowań kolektywnych (zbiorowych) cząstek czy osobników są bardzo pomocnym narzędziem biologii matematycznej do efektywnego modeowania zachowań dużych populacji komórek przemieszczających się z powodu interakcji wytwarzanych przez adhezję lub sygnały chemiczne, oraz w dużych grup zwierząt będących w interakcji wzrokowej lub sensorycznej. Modele takie zostały wyprowadzone fenomenologicznie, jak w pracach [108, 46] lub metodami teorii kinetycznej, patrz [23, 28, 35, 4, 77] i referencje tamże. Przyjmujemy, że cząstki oddziaływują na siebie nielokalnie przez siły przyciągania i odpychania modelujące zakres takich efektów jak adhezja komórek, oddziaływanie chemotaksji lub ograniczenia związane z objętością. Nieliniowe ciśnienie zostało tu użyte jako model efektów związanych z wielkością/objętością w populacji komórek lub zwierząt, patrz [108, 72, 24], jakoże można patrzeć na ten efekt jak na bardzo zlokalizowane odziaływanie odpychania.

W pracy [CWZ19] skupiamy się na jakościowych własnościach następującego układu hydrodynamicznego:

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}_x(\varrho \mathbf{u}) &= 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + a\nabla_x \varrho^m &= \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla_x(\lambda + \mu)\operatorname{div}_x \mathbf{u} \\ &\quad - (\nabla_x K * \varrho)\varrho - \varrho \nabla_x \Phi - \varrho \mathbf{u} \end{aligned} \tag{3.137}$$

rozważanego na $(0,T) \times \Omega$, gdzie niewiadomymi są: $\varrho(t) : \Omega \to \mathbb{R}$ dla $t \geq 0$ oznaczające gęstość oraz $\mathbf{u}(t) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ dla $t \geq 0$ oznaczające pole prędkości. Ponadto potencjał interakcji $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ koduje nielokalne interakcje (odpychanie i przyciąganie), $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ to potencjał ograniczenia (uwięzienia), który może być obecny lub nie, a stałe fizyczne związane z członem lepkościowym i nieliniowe ciśnie spełniają następujące założenia

$$\mu > 0, \quad \lambda + \frac{2}{3}\mu \geq 0, \quad a > 0, \quad m > \frac{3}{2}. \tag{3.138}$$

Ograniczenie na wykładnik nielinowego ciśnienia m pozwala na wykorzystanie własności zwartości dla rozwiązań i rowiązań aproksymacyjnych.

Układ (3.137) jest rozważany zarówno na całej przestrzeni $\Omega = \mathbb{R}^3$ z potencjałem ograniczenia Φ lub na ograniczonym obszarze o regularnym brzegu z zerowym warunkiem Dirichleta na brzegu:

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.139}$$

z lub bez potencjału ograniczenia. W tym przypadku splot w członie nielokalnym $\nabla_x K * \varrho$ jest zdefiniowany przez przedłużenie gęstości na całą przestrzeń zerem poza Ω.

Nasz poroblem uzupełniony jest danymi początkowymi $(\varrho_0, \mathbf{m}_0)$ takimi, że

$$\varrho(0,x) = \varrho_0 \in L^1_+(\Omega) \cap L^m(\Omega), \quad \varrho\mathbf{u}(0,x) = \mathbf{m}_0 \in L^1(\Omega) \cap L^{\frac{6}{5}}(\Omega) \tag{3.140}$$

oraz ma zachodzić następujący warunek zgodności

$$\mathbf{m}_0 = 0 \text{ kiedy tylko } \varrho_0 = 0, \frac{|\mathbf{m}_0|^2}{\varrho_0} \in L^1(\Omega). \tag{3.141}$$

Stacjonarne rozwiązania (3.137) z $\mathbf{u} = 0$ na nośniku ϱ są związane z równaniami agregacji-dyfuzji typu

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}_x(\varrho \bar{\mathbf{u}}) = 0, \qquad \text{gdzie } \bar{\mathbf{u}} = -a\nabla_x \varrho^m - (\nabla_x K * \varrho)\varrho - \varrho \nabla_x \Phi\,. \tag{3.142}$$

Zauważmy, że (3.142) może być uzyskane jako granica relaksacji z (3.137) jak w [96] dla zerowego współczynnika lepkości. Z drugiej strony, jeśli istnieje rozwiązanie ϱ_s dla problemu

$$a\nabla_x \varrho_s^m + (\nabla_x K * \varrho_s)\varrho_s + \varrho_s \nabla_x \Phi = 0\,, \tag{3.143}$$

w Ω, wtedy para $(\varrho_s, \mathbf{u}_s = 0)$ jest stacjonarnym rozwiązaniem hydrodynamicznego układu (3.137). Powiązanie pomiędzy tymi dwoma makroskopowymi modelami (3.137) i (3.142) ma głębokie korzenie w ich wariacyjnej strukturze. Oba systemy dyssypują energię zdefiniowaną jako

$$E(t) = \int_\Omega \frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2 \mathrm{d}x + \mathcal{F}[\rho], \quad \text{gdzie} \quad \mathcal{F}[\rho] = \int_\Omega \left[\frac{a}{m-1}\varrho^m + \frac{1}{2}(K * \varrho)\varrho + \varrho\Phi\right] \mathrm{d}x\,. \tag{3.144}$$

Ponadto rozproszenie wolnej energii dla układu hydrodynamicznego (3.137) dane przez

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_\Omega \left[\mu|\nabla\mathbf{u}|^2 + (\lambda+\mu)|\mathrm{div}\mathbf{u}|^2 + \varrho|\mathbf{u}|^2\right] \mathrm{d}x\,, \tag{3.145}$$

zbija pole prędkości do zera z powodu warunków brzegowych i tłumienia. Dlatego dla stacjonarnch rozwiązań układu hydrodynamicznego (3.137) funkcja gęstości spełnia równanie równowagi (3.143). W rzeczywistości znalezienie warunków doprowadzających do równowagi pomiędzy odpychaniem, modelowanym przez nieliniową dyfuzją, i przyciąganiem, modelowanym przez nielokalne interakcje, było bardzo popularne w ostatnich latach ze względy na ważność tego problemu w biologii matematycznej i mechanice (potencjały grawitacyjne). Znalezienie stacjonarnych gęstości, które spełniają równanie równowagi sił (3.143) jest wyzwaniem samym w sobie. Jest ono związane ze znajdowaniem minimalizatorów dla wolnej energii $\mathcal{F}[\rho]$ w zbiorze gęstości całkowalnych w sensie $L^1 \cap L^m(\Omega)$. Dość ogólne warunki wypukłości dla gładkich potencjałów ograniczających oraz interakcji pozwalających uzyskać jednoznaczność minimalizatorów wolnej energii $\mathcal{F}[\rho]$ zostały przedstawione w [30].

Najbardziej klasyczny przykład związany jest z wyborem newtonowskiego potencjału interakcji K na całej przestrzeni lecz z $\Phi = 0$. Sytuacja ta pojawia się zarówno w przypadku literatury związanej z grawitacją jak i biologią matematyczną jako hiperboliczny odpowiednik modelu Kellera-Segela i jest znany jako system Eulera-Poissona.

Innym powiązanym przypadkiem jest kwadratowa nieliniowa dyfuzja i z $m = 2$ z całkowalnym jądrem atrakcji $K(x)$. Sytuacja ta jest bezpośrednio związana z aproksymacją skoncentrowanej repulsji przez jądro Diraca w potencjale interakcji prowadzącego do $\varrho(\nabla K * \varrho) \simeq \frac{1}{2}\nabla\varrho^2$. W tym przypadku, minimalizatory energii interakcji $\mathcal{F}[\rho]$ były rozważane w [9, 18, 19, 76].

Dyssypacja energii (3.145) (3.145) sugeruje, że jeśli jesteśmy w stanie wykazać istnienie rozwiązań w pewnych analitycznych ramach dla hydrodynamicznego układu (3.137), to asymptotyka dla dużych czasów powinna być realizowana przez stacjonarne rozwiązania, których gęstości zadane są przez (3.143). Jest to główny cel pracy [CWZ19], który osiągamy przez znalezienie odpowiedniej aproksymacji układu i przez wykorzystanie narzędzi skompensowanej zwartości opartej na teorii rozwiniętej przez Lionsa [98], Feireisla i współpracowników [44, 41, 53, 45, 47]. Zauważmy, że jednoznaczność stacjonarnych gęstości spełniających (3.143) omówiona powyżej pozwala na jednoznaczne zidentyfikowanie granicy asymptotycznej w czasie układu (3.137) dzięki metodom zwartościowym.

Potencjał ograniczający Φ jest wprowadzony w celu związania masy w całej przestrzeni, dzięki temu członowi masa nie ucieka do nieskończoności, patrz też [29]. Zupełne usunięcie z systemu Φ jest dużym wyzwaniem, przynajmniej dla pewnych potencjałów interakcji, znanym w literaturze o problemach agregacji-dyfuzji, patrz np. [25, 27, 31]. W pewnych przypadkach kwadratowa forma potencjału ograniczenia związana jest hydrodynamicznymi układami z rozszerzającymi się samopodobnymi rozwiązaniami, patrz [32].

Układ typu Naviera-Stokesa-Poissona (NSP) był rozważany pod wieloma względami (istnienie rozwiązań, asymptotyka w czasie, stabilnośc) w ostatnich 20 latach, patrz Ducomet i in. [39] oraz [10]. W pracy [CWZ19] rozważamy problem asymptotyki w czasie dla hydrodynamicznego modelu, w którym nielokalny potencjał interakcji może być nawet bardziej osobliwy w zerze.

3.6.2 Postawienie problemu. Główny rezultat: istnienie i asymptotyka dla dużych czasów

Zacznijmy od bardziej precyzyjnych założeń na potencjał interakcji i ograniczenia. W przypadku $\Omega = \mathbb{R}^3$ zakładamy, że $\Phi \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^3)$ jest funkcją ograniczającą. Oznacza to, że spełnia on

$$|\nabla_x \Phi(x)| \leq C\,\Phi(x) \quad \text{dla } |x| > R_o, \tag{3.146}$$

gdzie $R_o > 0$ jest odpowiednio duże, $C, \nu > 0$ oraz

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\Phi(x)}{|x|^{1+\nu}} = \infty\,. \tag{3.147}$$

Zespół hipotez $\Phi \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^3)$, (3.146) oraz (3.147) będzie określany jako **(HC)**. Dla przypadku obszaru ograniczonego Ω możemy przyjąć, że , potencjał ograniczający jest zerowy jeśli jest to porządane. O potencjale interakcji $K(x)$ zakładamy, że jest symetryczny i spełnia

$$K \in L^q(\mathbb{R}^3), \qquad \text{gdzie } \max\left\{\frac{1}{m-1}, 1\right\} < q < \infty \tag{3.148}$$

oraz

$$\nabla K \in L^q(\mathbb{R}^3), \quad \text{gdzie } \max\left\{\frac{m}{2(m-1)+\theta}, 1\right\} < q, \quad \theta = \min\left\{\frac{2}{3}m - 1, \frac{1}{4}\right\}. \tag{3.149}$$

Ten zbiór założeń będzie określany jako **(HI)**.

Uwaga:

- Hipotezy **(HC)** o potencjale ograniczającym są raczej naturalne w celu uzyskania kontroli nad momentami gęstości, patrz też [30, 29].
- Jeśli potencjał interakcji jest gładki $K \in C^2(\mathbb{R}^3)$ z $K, \nabla K, D^2K \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$, założenia **(HI)** są spełnione.
- Założenie (3.148) jest wykorzystane do kontroli członu interakcji w energii (3.144).
- Jeśli potencjał interakcji zachowuje się w zerze jak funkcja potęgowa, tj. $K(x) \simeq r^b$ oraz $|\nabla K(x)| \simeq r^{b-1}$ dla małych r, to hipoteza całkowalności **(HI)** jest spełniona lokalnie blisko zera przez $q \to 1^+$ o ile $b > -2$ i $m > \frac{9}{5}$ (biorąc $\frac{m}{2(m-1)+\theta} = 1$ w (3.149)). Oczywiście potencjał ten musi być wtedy zmodyfikowany w nieskończoności by spełnić warunki **(HI)** globalnie. Jednakże ta klasa pozwala rozważać potencjały lokalnie nawet bardziej osobliwe niż newtonowskie. Nasz aktualny rezultat nie obejmuje czysto przyciągającej/odpychającej interakcji newtonowskiej, dla której jednoznaczność rozwiązań dla (3.143) jest znana [25, 27, 10]

Tutaj przez $\mathcal{D}$ oznaczamy przestrzeń gładkich funkcji o zwartym nośniku. Przez $D^{1,2}(\Omega)$ – przestrzeń lokalnie L^1-całkowalnych funkcji o gradientach w $L^2(\Omega)$. Przez symbol $C_{weak}([0,T]; L^q(\Omega))$ oznacza przestrzeń funkcji o wartościach wektorowych w $L^q(\Omega)$ określonych na $[0,T]$, ciągłych względem słabej topologii. Wprowadźmy definicję słabego rozwiązania dla naszego problemu.

Definicja 3.8 *Niech $\Omega = \mathbb{R}^3$ lub niech będzie ograniczonym obszarem o gładkim brzegu $\mathbb{R}^3$. Biorąc gęstość $\varrho \in L^\infty(0,T; L^1_+ \cap L^m(\Omega))$, gdzie $\varrho \in C_{weak}([0,T]; L^m(\Omega))$ oraz moment $\varrho\mathbf{u} \in C_{weak}([0,T]; L^{\frac{2m}{m+1}}(\Omega))$ z polem prędkości $\mathbf{u} \in L^2(0,T; W_0^{1,2}(\Omega))$ w przypadku ograniczonego obszaru lub $\mathbf{u} \in L^2(0,T; D^{1,2}(\Omega))$ w przypadku $\Omega = \mathbb{R}^3$ mówimy, że para $(\varrho, \mathbf{u})$ jest slabym rozwiązaniem o ograniczonej energii dla hydrodynamicznego układu (3.137), jeśli*

i) $\varrho \geq 0$ jest rozwiązaniem zrenormalizowanym dla równania ciągłości $(3.137)_1$ na $(0,T) \times \Omega$: dla wszystkich funkcji testujących $\varphi \in \mathcal{D}([0,T) \times \Omega)$, dowolnego $T > 0$ i dowolnego $b \in C^1(\mathbb{R})$ takiego, że $b'(z) = 0$ dla wszystkich z odpowiednio dużych, tj. $z > M_b$, zachodzi

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega (b(\varrho)\partial_t\varphi + (b(\varrho)\mathbf{u}) \cdot \nabla_x\varphi - (b'(\varrho)\varrho - b(\varrho))\mathrm{div}_x\mathbf{u}\varphi)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\qquad = -\int_\Omega b(\varrho_0)\varphi(0,\cdot)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.150}$$

Ponadto, (3.150) zachodzi na $\mathbb{R}^3$, gdy tylko ϱ, $\mathbf{u}$ jest przedłużone zerem na $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ w przypadku Ω ograniczonego.

ii) Równanie $(3.137)_2$ *jest spełnione w sensie dystrybucyjnym, tj.*

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega (\varrho\mathbf{u}\cdot\partial_t\varphi + \varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} : \nabla_x\varphi + a\varrho^m \mathrm{div}_x\varphi)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ = \int_0^T \int_\Omega \big(\mu\nabla_x\mathbf{u} : \nabla_x\varphi + (\lambda+\mu)\mathrm{div}_x\mathbf{u}\mathrm{div}_x\varphi\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ + \int_0^T \int_\Omega ((\nabla_x K * \varrho + \nabla_x\Phi)\varrho + \varrho\mathbf{u})\cdot\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_\Omega \mathbf{m}_0\cdot\varphi(0)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

dla wszystkich funkcji testujących $\varphi \in \mathcal{D}([0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^3)$ *i dowolnego* $T>0$.

iii) Następująca nierówność energetyczna jest spełniona

$$E(t) + \int_0^t \int_\Omega \left[\mu|\nabla\mathbf{u}|^2 + (\lambda+\mu)|\mathrm{div}_x\mathbf{u}|^2 + \varrho|\mathbf{u}|^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le E(0)$$

zachodzi dla p.w $t\in(0,T)$*, gdzie*

$$E(t) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho(t)|\mathbf{u}(t)|^2 + \frac{a}{m-1}\varrho^m(t) + \frac{1}{2}(K*\varrho)\varrho + \varrho\Phi\right)\mathrm{d}x.$$

Główny rezultat pracy [CWZ19] dotyczący istnienia słabych rozwiązań na calej przestrzeni brzmi:

Twierdzenie 3.10 (Thoerem 2.1 [CWZ19]) *Niech* $m > \frac{3}{2}$ *oraz* $\Omega = \mathbb{R}^3$*. Załóżmy, że potencjał interakcji* K *i potencjał ograniczenia Phi spełniają odpowiednio* **(HI)** *i* **(HC)**, *dane początkowe spełniają* (3.140)-(3.141) *wraz z* $\varrho_0\Phi \in L^1(\mathbb{R}^3)$.

Wtedy istnieje globalne w czasie słabe rozwiązanie o ograniczonej energii dla układu (3.137), (3.140) *w sensie Definicji* 3.8. *Ponadto dla* $\theta = \min\{\frac{2}{3}m-1, \frac{1}{4}\}$, ϱ *spełnia dodatkowo*

$$\varrho \in L^{m+\theta}_{loc}((0,T)\times\mathbb{R}^3). \tag{3.151}$$

Uwaga: Założenie (3.149) jest wykorzystane do kontroli członu nielokalnej interakcji w procesie uzyskiwania wyższej lokalnej w przestrzeni całkowalności gęstości (3.151), co jest kluczowe w dowodzie słabej ciągowej stabilności.

W przypadku obszaru ograniczonego nie ma potrzeby wprowadzania do układu potencjału ograniczającego. Wtedy założenia (3.146), (3.147) nie muszą być spełnione, w szczególności możemy przyjąć, że $\Phi \equiv 0$. Ponadto dla obszaru ograniczonego hipotezy **(HI)** na nielokalny człon $\nabla K * \varrho$ wystarczy, że są spełnione lokalnie w $\mathbb{R}^3$. Oznaczmy to przez $\mathbf{(HI)}_{loc}$.

Twierdzenie 3.11 (Theorem 2.2 [CWZ19]) *Niech* $m > \frac{3}{2}$ *oraz niech* Ω *będzie obszarem ograniczonym w* $\mathbb{R}^3$ *z gładkim brzegiem. Załóżmy, że potencjał interakcji* K *spełnia* $\mathbf{(HI)}_{loc}$, $\Phi \in W^{1,\infty}(\Omega)$, *a dane początkowe spełniają* (3.140)-(3.141).

Istnieje wtedy globalne w czasie słabe rozwiązanie dla układu (3.137), (3.139), (3.140) *zgodne z Definicją* 3.8. *Ponadto dla* $\theta = \min\{\frac{2}{3}m-1, \frac{1}{4}\}$, ϱ *spełnia dodatkowo:*

$$\varrho \in L^{m+\theta}((0,T)\times\Omega).$$

Teraz możemy sformułować główny rezultat dotyczący asymptotyki dla dużych czasów dla hydrodynamicznego układu (3.137).

Mając daną krzywą słabego rozwiązania w $\varrho \in C_{weak}([0,\infty); L^m(\Omega)) \cap L^\infty((0,\infty); L^1 \cap L^m(\Omega))$ zdefiniujmy jej zbiór ω-graniczny $\omega(\varrho)$ w $L^m(\Omega)$ jako zbiór wszystkich możliwych punktów akumulacji krzywej gdy $t \to \infty$, tj.

$$\omega(\varrho) = \{\bar{\varrho} \in L^m(\Omega), \text{ takie że} \exists \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \nearrow \infty : \\ \{\varrho(t_n, x)\}_{n\in\mathbb{N}} \to \bar{\varrho}(x) \text{ silnie w } L^m(\Omega)\} .$$

Twierdzenie 3.12 *Zbiór ω-graniczny $\omega(\varrho)$ związany z globalnymi słabymi rozwiązaniami $(\varrho(t), \mathbf{u}(t))$ dla hydrodynamicznego układu* (3.137) *otrzymanego w Twierdzeniu* 3.10 *i* 3.11 *składa się ze stacjonarnych rozwiązań z zerowym momentem oraz gęstości o tej samej masie $M_0 = \|\varrho_0\|_{L^1(\Omega)}$, spełniających równanie równowagi sił* (3.143) *w $\mathcal{D}'(\Omega)$. Ponadto mamy*

$$\lim_{t\to\infty} \|\nabla_x \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

oraz

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^6(\Omega)} = 0 \quad \textit{w przypadku ograniczonego obszaru } \Omega, \tag{3.152}$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_\Omega \varrho(t)|\mathbf{u}(t)|^2 \mathrm{d}x = 0 \qquad \textit{for } \Omega = \mathbb{R}^3 \textit{ oraz } \Omega \textit{ ograniczonego.} \tag{3.153}$$

Dodatkowo, jeśli rozwiązanie (3.143) *o masie M_0 zerowym środku ciężkości jest jednoznaczne dane przez ϱ_s i istnieje $c_0 \in \mathbb{R}^3$ takie, że*

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} x\varrho(t)\mathrm{d}x = c_0 ,$$

wtedy

$$\lim_{t\to\infty} \|\varrho(t,x) - \varrho_s(x - c_0)\|_{L^m(\mathbb{R}^3)} = 0 .$$

Uwaga: Dla pewnych przypadków Ω i potencjałów Φ jesteśmy wstanie policzyć wprost c_0, patrz Corollary 4.1, 4.2 w [CWZ19]

Uwaga: Zgodnie z [76], jeśli $m > 2$ oraz $K(x) = 1 - \exp(-\frac{|x|^2}{2})$ rozwiązanie (3.143) jest jednoznaczne (z dokładnością do przesunięć) oraz dane prze hölderowsko ciągły, radialnie symetryczny profil ϱ_s o zwartym nośniku. Dlatego zachodzi zbieżność wprost do tego jednoznacznego stanu stacjonarnego dla powiązanego systemu (3.137). Bardziej ogólne założenia na K oraz m, przy których mamy jednoznaczność rozwiązań (z dokładnością do przesunięć) rozwiązań dla (3.143) można znaleść w pracy [76].

3.6.3 Główne kroki dowodowe. Metodologia

Nasz dowód istnienia rozwiązań dla układu (3.137) oparty jest na teorii istnienia rozwiniętej w [53]. Tamtejszy rezultat zachodzi dla układu Naviera-Stokesa na obszarze ograniczonym bez tłumienia, bez członu nielokalnej interakcji i bez potencjału ograniczenia. Skupmy się na przypadku, gdy $\Omega = \mathbb{R}^3$. Wprowadzamy wtedy trójpoziomową aproksymację:

- Wprowadzamy przybliżenie przez ograniczone obszary – kule o promieniu r. Gdy $r \to \infty$ zbiegamy do pełnej przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

- Tak jak w [53], wprowadzamy sztuczny czlon lepkościowy do równania ciągłości związany z parametrem ε, który potem zbiega do zera.
- Tak jak w [53], wprowadzamy funkcję sztucznego ciśnienia związanego z parametrem δ zbiegającym do zera.

W całym procesie kluczowe okazuje się kontrolowanie wpływu nowego członu związanego z nielokalną interakcją.

Rozważając asymptotykę w czasie rozwiązań (3.137), postępujemy następująco: Niech $\{t_n\}_{n\geq 1}$ będzie ciągiem takim, że $t_n \to \infty$, gdy $n \to \infty$ oraz zdefiniujmy ciąg:

$$\varrho_n(t,x) = \varrho(t+t_n,x), \qquad \mathbf{u}_n(t,x) = \mathbf{u}(t+t_n,x) \quad \text{dla } t \in (-1,2),\ x \in \Omega\,. \tag{3.154}$$

Zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ para $(\varrho_n, \mathbf{u}_n)$ jest slabym rozwiązaniem dla układu (3.137) w sensie Definicji 3.8 i otrzymanych w Twierdzeniu 3.10, Theorem 3.11 odpowiednio dla $\Omega = \mathbb{R}^3$ lub Ω ograniczonego.

Wykorzystując oszacowania otrzymane w dowodzie istnienia rozwiązań otrzymujemy następujący zbiór ograniczeń dla naszego ciągu (jest to podstawa dla rezultatu dotyczącego asymptotyki w czasie):

Lemat 3.13 *Niech $\Omega = \mathbb{R}^3$ lub niech będzie obszarem ograniczonym z gładkim brzegiem w $\mathbb{R}^3$. Niech $(\varrho_n, \mathbf{u}_n)$ będzie dany przez* (3.154)*, gdzie $(\varrho, \mathbf{u})$ jest rozwiązaniem dla* (3.137) *danym przez Twierdzenie* 3.10 *lub Twierdzenie* 3.11*. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{2} \|\nabla_x \mathbf{u}_n\|_{L^2(\Omega)} + \|\varrho_n|\mathbf{u}_n|^2\|_{L^1(\Omega)} \mathrm{d}t = 0, \tag{3.155}$$

$$\sup_{n\in N,\ t\in(-1,2)} \left(\|\varrho_n\|_{L^m(\Omega))} + \|\varrho_n(K * \varrho_n)\|_{L^1(\Omega)} + \|\varrho_n \Phi\|_{L^1(\Omega)} + \|\varrho_n|\mathbf{u}_n|^2\|_{L^1(\Omega)} \right) < c, \tag{3.156}$$

$$\int_\Omega \varrho_n(t)\mathrm{d}x = \int_\Omega \varrho_0 \mathrm{d}x \tag{3.157}$$

oraz

$$\int_1^2 \int_{\mathbb{R}^3} \varrho_n^{m+\theta} \phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq c(B) \ \mathit{dla}\ \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3),\ 0 \leq \phi \leq 1,\ \operatorname{supp}\phi \subset B, \tag{3.158}$$

gdzie $\theta = \min\{\frac{2}{3}m - 1, \frac{1}{4}\}$, tutaj ϱ_n jest przedłużone zerem na $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ jeśli zachodzi taka potrzeba.

Proces przechodzenia do granicy z $n \to \infty$ jest w dużej mierze podobny do dowodu słabej ciągowej stabilności dowodzącej istnienia rozwiązań. Podkreślmy tu, że człon tłumiący jest kluczowy by wykazać, że pole prędkości zbiega w granicy do zera na nośniku funkcji gęstości (patrz (3.155)).

3.6.4 Rozszerzenie – Model hydrodynamiczny z uzgodnieniem

W tym miejscu krótko skomentujmy jak rozszerza się powyższy rezultat na przypadek, gdy model hydrodynamiczny z efektem osiowania się, uzgadniania (ang. aligment), tak jak w pracy [26]. Biorąc symetryczne jądro $\psi \geq 0$, gdzie $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, możemy rozważyć następujący nielinowy człon tłumiący po prawej stronie (3.137)

$$\varrho(t,x)\int_\Omega \psi(x-y)\Big(\mathbf{u}(t,y)-\mathbf{u}(t,x)\Big)\varrho(t,y)\,\mathrm{d}y \tag{3.159}$$

zamiast linowego członu tłumiącego $-\varrho\mathbf{u}$. W tym przypadku w równości energetyczna (3.145) człon $\varrho|\mathbf{u}|^2$ zastępujemy przez

$$\int_\Omega\int_\Omega \psi(x-y)\varrho(t,x)\varrho(t,y)\left|\mathbf{u}(t,y)-\mathbf{u}(t,x)\right|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,. \tag{3.160}$$

Okazuje się, że dla takiego układu po pierwsze – istnieją słabe rozwązania, po drugie – rozwiązania stacjonarne są w postaci poruszających się fal (stado, gromada, rój) związanych ze stałym w przestrzeni polem prędkości $\mathbf{u}=\mathbf{u}_0\in\mathbb{R}^d$ oraz z $\varrho(t,x)=\varrho_s\,(x-t\mathbf{u}_0)$, gdzie ϱ_s spełnia równanie równowagi (3.143). Co do asymptotyki rozwiązań dla dużych czasów okazuje się, że rozwiązania zbiegają generycznie w kierunku fal przemieszczających się – wspólnie poruszających się stad – dla szczególnego przypadku, gdy $\Phi=0$ oraz $\Omega=\mathbb{R}^3$. Zauważmy jednak, że w tym przypadku nasz rezultat o istnieniu rozwiązań nie może być zastosowany, gdyż na całej przestrzeni wymagamy obecności potencjału ograniczającego.

4 Opis pozostałych wyników naukowych

4.1 Wynik zawarty w pracy magisterskiej

- A. Wróblewska. Steady flow of non-Newtonian fluids - monotonicity methods in generalized Orlicz spaces. *Nonlinear Analysis*, 72 (2010), 4136–4147.

Celem tej pracy jest wykazanie istnienia rowiązań dla statycznego układu dla nieściśliwych nienewtonowskich cieczy o niestanadardowej reologii, bardziej ogólnej niż typu potęgowego. Jest to praca motywowana niejednorodnymi przestrzennie własnościami cieczy, których lepkość istotnie rośnie przy rosnącej prędkości ścinania. Warunki wzrostu dla tensora Cauchy'ego są ogólniejsze niż typu wielomianowego i postawione są za pomocą ogólnej x-zależnej funkcji wypukłej definiującej, potencjalnie nierefleksywne, przestrzenie Orlicza i anizotropowe przestrzenie Musielaka-Orlicza. W pracy tej zaprezentowana jest metoda monotonicznoći dla nierefleksywnych anizotropowych przestrzeni Musielaka-Orlicza.

4.2 Artykuły składające się na pracę doktorską

- A. Wróblewska-Kamińska. Unsteady flows of non-Newtoniana fluids in generalized Orlicz spaces. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – A*, 33 (2013), no 6, 2565–2592.

Celem tej pracy jest wykazanie istnienia słabych rozwiązań dla niestatycznego przepływu nieściśliwego niejednorodnego (nie wymagamy, by gęstość była stała, jest ona jedną z niewiadomych) płynu nienewtonowskiego o niestandardowych warunkach wzrostu dla tensora naprężeń. Tak jak w powyższym przypadku, mamy do czynienia z potencjalnie anizotropowym istotnym wzrostem lepkości w tensorze naprężeń, bardziej ogólnym niż typu wielomianowego. Zagadnienie postawione jest w anizotropowych przestrzeniach Musielaka-Orlicza, tak jak w pracy [MW18].

- P. Gwiazda, A. Świerczewska-Gwiazda, A. Wróblewska. Generalized Stokes system in Orlicz spaces. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – A*, 32 (2012), no. 6, 2125–2146.

Rezultat tej pracy dotyczy analizy uogólnionego układu Stokesa z członem nieliniowym, którego wzrost ponownie opisany jest za pomocą N-funkcji (jednorodnej względem x). Naszym celem było tu rozluźnienie założeń na dolne ograniczenie wzrostu N-funkcji, co umożliwia rozważanie cieczy, których lepkość maleje przy wzroście prędkości ścinania i o reologii bliskiej liniowej. Problem istnienia słabych rozwiązań postawiony jest w anizotropowych przestrzeniach Orlicza. W celu udowodnienia istnienia rozwiązań wykazujemy również, że zachodzi nierówność typu Korna-Sobolewa w rozważanych przestrzeniach Orlicza.

- A. Wróblewska-Kamińska. Existence result for the motion of several rigid bodies in an incompressible non-Newtonian fluid with growth conditions in Orlicz spaces. *Nonlinearity*, 27 (2014) 685–716.

- A. Wróblewska-Kamińska. Local pressure methods in Orlicz spaces for the motions of rigid bodies in a non-Newtonian fluid with general growth conditions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – S*, 6 (2013) no. 5, 1417–1425.

W powyższych dwóch pracach koncentruję się na istnieniu słabych rozwiązań dla problemu ruchu jednego lub kilku ciał sztywnych zanurzonych w nieściśliwej cieczy nienewtonowskiej o reologii bardziej ogólnej niż typu potęgowego. Warunki wzrostu dla nielinowego członu lekościowego opisane są jednorodną, izotropową N-funkcją i problem opracowany jest w klasycznych przestrzeniach Orlicza (jednorodnych i izotropowych). Głównym punktem w dowodzie jest wykazanie ciągowej stabilności w członie nielinowym osiągniętej dzięki metodzie monotoniczności oraz rekonstrukcji lokalnego ciśnienia w przypadku nierefleksywnych przestrzeni Orlicza.

- P. Gwiazda, P. Wittbold, A. Wróblewska, A. Zimmermann. Renormalized solutions of nonlinear elliptic problems in generalized Orlicz spaces. *Journal of Differential Equations*, 253 (2012), 635–666. Wraz z: Corrigendum do "Renormalized solutions of nonlinear elliptic problems in generalized Orlicz spaces" [J. Differential Equations 253 (2) (2012) 635–666]. *J. Differential Equations*, 253 (2012), no. 9, 2734–2738.

W powyższej pracy studiujemy ogólną klasę nielinowych eliptycznych problemów stowarzyszonych z inkluzją różniczkową $\beta(x,u) - \mathrm{div}\ (a(x,\nabla u)+F(u)) \ni f$, gdzie $f \in L^1(\Omega)$. Pole wektorowe $a(\cdot,\cdot)$ jest monotoniczne względem drugiej zmiennej i spełnia niestandardowe warunki wzrostu opisane x-zależną N-funkcją stowarzyszoną z anizotropowymi przestrzeniami Musielaka-Orlicza. Badania te generalizują przypadek przestrzeni $L^{p(x)}$ i klasycznych przestrzeni Orlicza. Wykorzystując techniki związane z obcięciami i uogólnionym trikiem Minty'ego dla nerefleksywnych przestrzeni udowodniamy istnienie rozwiązań zrenormalizowanych dla danych z L^1. Przy dodatkowym założeniu ścisłej monotoniczności otrzymujemy również jednoznaczność tych rozwiązań. Przedstawiamy również warunki, jakie mają być spełnione, by rozwiązania zrenormalizowane były słabymi rozwiązaniami.

4.3 Pozostałe prace

- E. Emmrich, D. Šiška, A. Wróblewska-Kamińska. Equations of second order in time with quasilinear damping: existence in Orlicz spaces via convergence of a full discretisation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39 (2016), no. 10, 2449–2460.

W powyższej pracy rozważamy nielinowe ewolucyjne równanie drugiego rzędu z tłumieniem. Quasi-liniowy człon tłumiący jest monotoniczny i koercytywny, ale może posiadać anizotropowy i niewielomianowy wzrost. Problem sformułowany jest za pomocą monotonicznych operatorów w przestrzeni Orlicza. Wykazujemy istnienie rozwiązań w sensie dystrybucyjnym przez zbieżność schematu wstecznego Eulera połączonego z wewnętrzną aproskymacją przestrzenną.

- P. Gwiazda, P. Wittbold, A. Zimmermann, A. Wróblewska-Kamińska. Renormalized solutions of nonlinear parabolic problems in generalized Musielak-Orlicz spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 129 (2015), 1–36.

Prezentujemy tu dowód istnienia rozwiązań zrenormalizowanych dla nielinowego prabolicznego problemu $\partial_t u - \mathrm{div}_x\, a(\cdot, Du) = f$, gdzie f i dane początkowe u_0 są w L^1. Warunki wzrostu i wymuszenia dla pola wektorowego a zadane są przez x-zależą N-funkcję M, która nie musi spełniać warunku Δ_2. Problem postawiony jest w anizotropowych przestrzeniach Musielaka-Orlicza, które nie muszą być refleksywne. Pokazujemy również dowód słabej ciągowej stabilności dla bardziej ogólnego problemu: $\partial_t\beta(\cdot, u) - \mathrm{div}_x\,(a(\cdot, Du) + F(u)) = f$, gdzie β jest monotoniczną funkcją względem drugiej zmienne, a F jest lokalnie lipschitzowska. W dowodzie wykorzystujemy metody obcięć, miar Younga, formułę na całkowanie przez części i metody monotoniczności zaadaptowane do przestrzeni Musielaka-Orlicza.

- E. Emmrich, A. Wróblewska-Kamińska. Convergence of a full discretization of quasilinear parabolic equations in isotropic and anisotropic Orlicz spaces. *SIAM J. Numer. Anal.*, 51 (2013), no. 2, 1163–1184.

Celem naszych badań w powyższej pracy jest ogólna klasa quasi-linowych problemów parabolicznych i wykazanie zbieżności podciągu aproksymacji rozwiązań pochodzącej z dyskretyzacji zagadnienia. Wykorzystana tu metoda numeryczna to kombinacja wstecznej metody Eulera dla dyskretyzacji w czasie i schemat wewnętrznej aproksymacji dla dyskretyzacji przestrzennej. Problem postawiony jest w anizotropowych przestrzeniach Orlicza. Wykazujemy również jednoznaczność rozwiązań, gdy operator nielinowy jest ściśle monotoniczny, wtedy cały cąg dyskretyzacyjny zbiega do rozwiązania.

- P. Gwiazda, P. Minakowski, A. Wróblewska-Kamińska. Elliptic problem in generalized Musielak-Orlicz spaces. *Central European Journal of Mathematics*, 10 (2012) no 6, 2019-2032.

Rozważamy tu silnie nielinowy monotoniczny problem eliptyczny w anizotropowej przestrzeni Musielaka-Orlicza. Nie zakładamy żadnego z warunków: ani Δ_2, ani ∇_2 dla N-funkcji opisującej wzrost operatora eliptycznego i definującej anizotropowe przestrzenie Musielaka-Orlicza. Przyjmujemy jedynie log-hölder ciągłość względem x. Jest to istotna relaksacja warunków wzrostu na operator. Wykazujemy istnienie słabych rozwiązań. W dowodzie wykorzystujemy m.in metody obcięć w L^∞ i uogólnione metody monotoniczności dla nierefleksywnych przestrzeni Banacha.

- P. Gwiazda, A. Świerczewska-Gwiazda, A. Wróblewska. Monotonicity methods in generalized Orlicz spaces for non-Newtonian flows.*Mathematical Methods in the Applied Science*, 33 (2010), no. 2, 125–137.

W artykule tym rozważamy nieściśliwy niestatyczny przepływ cieczy nienewtonowskiej z niestandardowymi warunkami wzrostu dla tensora naprężeń przy założeniu, że gęstość cieczy jest stała. Problem postawiony jest w anizotropowych przestrzeniach Musielaka-Orlicza. Rozwijamu tu argumenty związane z metodami monotonicznoći i całkowania przez części dla nierefleksywnych przestrzeni Musielaka-Orlicza..

- P. Gwiazda, A. Świerczewska-Gwiazda, A. Wróblewska. Turbulent flow of rapidly thickening fluids. *Proceedings of Polish-Japonese Days, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl.*, 32 (2010), 307–325.

Rozpatrujemy tu przepływ turbulentny opisany techniką symulacji dużych wirów (a large eddy simulations technique). Opieramy się o uogólniony model Smagorinsky'ego. Podobnie jak w powyższych wynikach dopuszczamy by płyn miał własność zmiany lepkoći przy zmianie prędkości ścinania. Wyprowadzony model jest analogiczny do modelu Germano. Wykazujemy istnienie rozwiązań.

- P. Gwiazda, A. Świerczewska-Gwiazda, A. Warzyński, A. Wróblewska. WELL-POSEDNESS FOR NON-NEWTONIAN FLOWS WITH GENERAL GROWTH CONDITIONS. *Banach Center Publications*, 86 (2009), 115–128.

W artykule tym wykazujemy jednoznaczność słabych rozwiązań (przy pewnych warunkach) dla układu opisującego nieściśliwy przepływ cieczy nienewtonowskiej z niestandardowymi warunkami wzrostu dla tensora naprężeń. Pokazujemy również przy jakich warunkach istnieją słabe i miarowe rozwiązania.

- A. Wróblewska-Kamińska. NON-NEWTONIAN FLUIDS WITH NONSTANDARD RHEOLOGY - EXISTENCE OF SOLUTIONS. *Proceedings of Conference Topical Problems of Fluid Mechanics 2015.* Institute of Thermomechanics AS CR, Prague. (2015) 261–272.

Celem tej pracy jest zaprezentowanie i podsumowanie kilku rezultatów autorki dotyczących istnienia rozwiązań dla nieściśliwych przepływów ciecz nienewtonowskich z niestandardowymi warunkami wzrostu. Reologie rozważane w tej pracy są bardziej ogólne niż typu potęgowego. Problemy postawione są w przestrzeniach Orlicza i Musielaka-Orlicza.

Literatura

[1] Y. Achdou, B. Mohammadi, O. Pironneau, F. Valentin. Domain decomposition & wall laws. In *Recent developments in domain decomposition methods and flow problems (Kyoto, 1996; Anacapri, 1996)*, vol. 11 of *GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl.* Gakkotosho, Tokyo, (1998) 1–14.

[2] Y. Achdou, O. Pironneau, F. Valentin. Effective boundary conditions for laminar flows over periodic rough boundaries. *J. Comput. Phys. 147*, 1 (1998) 187–218.

[3] P. Angot, Ch.-H. Bruneau, P. Fabrie, A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows, Numer. Math. **81**(4), (1999) 497–520.

[4] G. Albi, L. Pareschi, Modelling self-organized systems interacting with few individuals: from microscopic to macroscopic dynamics, *Applied Math. Letters* **26** (2013) 397–401.

[5] Y. Amirat, D. Bresch, J. Lemoine, J. Simon. Effect of rugosity on a flow governed by stationary Navier-Stokes equations. *Quart. Appl. Math. 59*, 4 (2001) 769–785.

[6] J.J. Alibert, G. Bouchitté, Non-Uniform Integrability and Generalized Young Measures, *Journal of Convex Analysis.* Volume 4 (1997), no. 1, 129–147.

[7] J.M. Ball and F. Murat, *Remarks on Chacon's biting lemma.* Proceedings of the American Mathematical Society, (1989) 107(3), 655–663.

[8] A. Basson, D. Gérard-Varet. Wall Laws for Fluid Flows at a Boundary with Random Roughness. *Comm. Pure Appl. Math.* 61 (2008), no. 7, 941–987.

[9] J. Bedrossian, Global minimizers for free energies of subcritical aggregation equations with degenerate diffusion, *Appl. Math. Lett.* **24** (2011) 1927–1932.

[10] P. Bella, Long Time Behavior of Weak Solutions to Navier-Stokes-Poisson System, *J. Math. Fluid Mech.* **14** (2012) 279–294.

[11] M. Bonnivard, D. Bucur. The uniform rugosity effect. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, Vol. 14, (2012) 201–215.

[12] M. Bonnnivard, A-L. Dalibard, D. Gérard-Varet. Computation of the Effective Slip of Rough Hydrophobic Surfaces via Homogenization *Math. Models Methods Appl. Sci.* 24, (2014) 2259–2285.

[13] A. Bourgeat, O. Gipouloux, E. Marušić-Paloka. Mathematical modelling and numerical simulations of a non-Newtonian viscous flows through a thin filter *SIAM J. Appl. Math.* Vol. 62, No. 2, (2001) 597–626.

[14] L. Brandolese and M. Schonbek, *Large time decay and growth for solutions of a viscous Boussinesq system*, Trans. Amer. Math. Soc. 364, 10, (2012) 5057–5090.

[15] D. Bresch, V. Milisic. High order multi-scale wall-laws, part I: the periodic case *Q. Appl. Math.*, 68 (2), (2010), 229–253.

[16] J. Březina, O. Kreml, and V. Mácha Dimension reduction for the full Navier-Stokes-Fourier system *J. Math. Fluid Mech.*, **19**, (2017) 659–683.

[17] D. Bucur, E. Feireisl, Š. Nečasová, J. Wolf. On the asymptotic limit of the Navier-Stokes system with rough boundaries. *J. Diff. Equations*, 244 (2008) 2890–2908.

[18] M. Burger, M. Di Francesco and M. Franek, Stationary states of quadratic diffusion equations with long-range attraction, *Commun. Math. Sci.* **11** (2013) 709–738.

[19] M. Burger, R. Fetecau and Y. Huang, Stationary states and asymptotic behavior of aggregation models with nonlinear local repulsion, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **13** (2014) 397–424.

[20] N. N. Burk, *Global Strichartz estimates for non-trapping geometries: about an article by H.F. Smiith, C.D. Sogge: "Global Strichartz estimates for nontrapping perturbations of the Laplacian"*, Comm. Partial Differential Equations. 28 (9-10), (2003) 1675–1683.

[21] M. Bulíček, J. Málek, and K.R. Rajagopal. Navier's slip and evolutionary Navier-Stokes-like systems with pressure and shear-rate dependent viscosity. *Indiana Univ. Math. J.* 56 (2007) 51–86.

[22] R. Danchin and M. Paicu, *Existence and uniqueness result for the Boussinesq system with data in Lorenz spaces*, Physica D, 237, (2008) 1444–1460.

[23] J. A. Cañizo, J. A. Carrillo, and J. Rosado, A well-posedness theory in measures for some kinetic models of collective motion, *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* **21** (2011) 515–539.

[24] V. Calvez and J.A. Carrillo, Volume effects in the Keller-Segel model: energy estimates preventing blow-up, *J. Math. Pures Appl.* **86** (2006) 155–175.

[25] J.A. Carrillo, D. Castorina and B. Volzone, Ground states for diffusion dominated free energies with logarithmic interaction, *SIAM J. Math. Anal.* **47** (2015) 1–25.

[26] J. A. Carrillo, E. Feireisl, P. Gwiazda, A. Świerczewska-Gwiazda, Weak solutions for Euler systems with non-local interactions, *J. London Math. Soc.* **(2) 95** (2017) 705–724.

[27] J.A. Carrillo, S. Hittmeir, B. Volzone and Y. Yao, Nonlinear aggregation-diffusion equations: Radial symmetry and long time asymptotics. Preprint arXiv:1603.07767.

[28] J. A. Carrillo, M. Fornasier, G. Toscani, and F. Vecil, Particle, Kinetic, and Hydrodynamic Models of Swarming, In: Naldi G., Pareschi L., Toscani G. (eds) *Mathematical Modeling of Collective Behavior in Socio-Economic and Life Sciences. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology* (Birkhäuser Boston, 2010) 297–336.

[29] J.A. Carrillo, T. Karper and K. Trivisa, On the dynamics of fluid-particle interaction model: The bubbling regime, *Nonlinear Analysis* $\underline{7}4$ (2011) 2778–2801.

[30] J.A. Carrillo, R.J. McCann and C. Villani, Kinetic equilibration rates for granular media and related equations: entropy dissipation and mass transportation estimates, *Rev. Mat. Iberoamericana* **19** (2003) 1–48.

[31] J.A. Carrillo, Y. Sugiyama, Compactly supported stationary states of the degenerate Keller-Segel system in the diffusion-dominated regime, Preprint arXiv:1612.05375, accepted in Indiana University Mathematics Journal.

[32] J.A. Carrillo, Y.-P. Choi and E. Zatorska, On the pressureless damped Euler-Poisson equations with non-local forces: Critical thresholds and large-time behavior, *Mathematical Models and Methods in the Applied Sciences* **26** (2016) 2311–2340.

[CWZ19] J. Carrillo, A. Wróblwska-Kamińska, E. Zatorska. On long-time asymptotics for viscous hydrodynamic models of collective behavior with damping and nonlocal interaction. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences (M3AS)*, 29 (2019) no. 1, 31–63.

[33] L. Chupin, S. Martin. Viscoelastic flows in a rough channel: a multiscale analysis Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 34 (2017), no. 2, 483–508.

[34] A-L. Dalibard, D. Gérard-Varet. Effective boundary condition at a rough surface starting from a slip condition. *J. Differential Equations.* 251 (2011) 3450–3487.

[35] P. Degond, A. Frouvelle and J.-G. Liu, Phase transitions, hysteresis, and hyperbolicity for self-organized alignment dynamics, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **216** (2015) 63–115.

[36] B. Desjardins, E. Granier, *Low Mach number limit of viscous compressible flows in the whole space*, R. Soc. London. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 455 (1986), (1999) 2271–2279.

[37] T. Donaldson, *Inhomogeneous Orlicz-Sobolev spaces and nonlinear parabolic initial value problems*, J. Differential Equations, **16** (1974) 201–256.

[38] R.J. DiPerna and P.-L. Lions. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. *Invent. Math.* 98 (1989) 511–547.

[39] B. Ducomet, E. Feireisl, H.Petzeltová, I. Straskraba, Global in time weak solutions for compressible barotropic self-gravitating fluids, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **11** (2004) 113–130.

[40] A. Elmahi and D. Meskine, *Parabolic equations in Orlicz spaces*, J. London Math. Soc., **72** (2005), no. 2, 410–428.

[41] E. Feireisl. *Dynamics of viscous compressible fluids.* Oxford University Press, Oxford, 2004.

[42] E. Feireisl. On the motion of a viscous, compressible, and heat conducting fluid. *Indiana Univ. Math. J.* 53 (2004) 1707–1740.

[43] E. Feireisl *Local decay of acoustic waves in the low mach number limits on general unbounded domains under slip boundary conditions*, Commun. Partial Differential Equations 36,(2011) 1778–1796.

[44] E. Feireisl, On compactness of solutions to the compressible isentropic Navier-Stokes equations when the density is not square integrable, *Comment. Math. Univ. Carolin.* **42** (2001) 83–98.

[45] E. Feireisl, A. Novotny and H. Petzeltova, On the domain dependence of solutions to the compressible Navier-Stokes equations of a barotropic fluid, *Math. Meth. Appl. Sci.* **25** (2002) 1045–1073.

[46] A. Gamba, D. Ambrosi, A. Coniglio, A. de Candia, S. Di Talia, E. Giraudo, G. Serini, L. Preziosi and F. Bussolino, Percolation, morphogenesis, and burgers dynamics in blood vessels formation, *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003) 118101/1–4.

[47] E. Feireisl and H. Petzeltová, Large-time behaviour of solutions to the Navier-Stokes equations of compressible flow, *Arch. Rational Mech. Anal.* **150** (1999) 77–96.

[48] E. Feireisl, T. Karper, O. Kreml, J. Stebel, *Stability with respect to domain of the low Mach number limit of compressible viscous fluids*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 23 (13), (2013) 2465–2493.

[49] E. Feireisl, B. J. Jin, and A. Novotný. Relative entropies, suitable weak solutions, and weak-strong uniqueness for the compressible Navier-Stokes system. *J. Math. Fluid Mech. 14*, no. 4, (2012) 717–730.

[50] E. Feireisl, J. Neustupa, and J. Stebel. Convergence of a Brinkman-type penalization for compressible fluid flows. *J. Differential Equations* 250(1) (2011) 596–606.

[51] E. Feireisl and A. Novotný. *Singular limits in thermodynamics of viscous fluids.* Birkhäuser-Verlag, Basel, 2009.

[52] E. Feireisl and A. Novotný. Weak-strong uniqueness property for the full Navier-Stokes-Fourier System *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **204**, (2012) 683–706.

[53] E. Feireisl, A. Novotný, and H. Petzeltová. On the existence of globally defined weak solutions to the Navier-Stokes equations of compressible isentropic fluids. *J. Math. Fluid Mech.* 3 (2001) 358–392.

[54] E. Feireisl, V. Mácha, Š. Nečasová, M. Tucsnak. Analysis of the adiabatic piston problem via methods of continuum mechanics. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire.* **35**(5), (2018) 1377–1408.

[55] E. Feireisl, O. Kreml, Š. Nečasová, J. Neustupa, J. Stebel. *Weak solutions to the barotropic Navier-Stokes system with slip boundary conditions in time dependent domains.* J. Differential Equations 254 (1) (2013) 125-Ű-140.

[56] E. Feireisl and M. Schonbek, *On the Oberbeck-Boussinesq approximation on unbounded domains*, Nonlinear partial differential equations, edited by: H.Holden, K.H.Karlsen, Abel Symposial, vol. 7, Springer, Berlin, 2012.

[57] J. Frehse, J. Málek, M. Steinhauer, On Analysis of Steady Flows of Fluids with Shear-Dependent Viscosity Based on the Lipschitz Truncation Method. *SIAM J. Math. Anal.* 34, no. 5, (2003) 1064–1083.

[58] J. Frehse, J. Málek and M. Ružička, *Large data existence results for unsteady flows of inhomogeneous heat-conducting incompressible fluids*, Communication in Partial Differential Equations, **35** (2010), no. 10, 1891–1919.

[59] J. Frehse and M. Ružička, *Non-homogenous generalized Newtonian fluids*, Mathematische Zeitschrift, **260** (2008), 355–375.

[60] H. Fujita, N. Sauer. On existence of weak solutions of the Navier-Stokes equations in regions with moving boundaries. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect. I **17**, (1970) 403–420.

[61] D. Gérard-Varet. Highly rotating fluids in rough domains. *J. Math. Pures Appl.* 82 (2003) 1453–1498.

[62] D. Gérard-Varet. The Navier wall law at a boundary with random roughness *Comm. Math. Phys.*, 286, (2009) 81–110.

[63] D. Gérard-Varet, N. Masmoudi. Relevance of the Slip Condition for Fluid Flow Near an Irregular Boundary. *Communications in Mathematical Physics.* 295, (2010) 99–137.

[GW16] D. Gérard-Varet, A. Wróblewska-Kamińska. Boundary Layer for a Non-Newtonian Flow over a Rough Surface. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 48 (2016), no. 5, 3123–3147.

[64] C. Gruber and G. P. Morriss. A Boltzmann equation approach to the dynamics of the simple piston. *J. Statist. Phys.*, **113**(1-2), (2003) 297–333.

[65] C. Gruber, S. Pache, and A. Lesne. Two-time-scale relaxation towards thermal equilibrium of the enigmatic piston. *J. Statist. Phys.*, **112**(5-6), (2003) 1177–1206.

[66] C. Gruber, S. Pache, and A. Lesne. On the second law of thermodynamics and the piston problem. *J. Statist. Phys.*, **117**(3-4), (2004) 739–772.

[67] J.-P. Gossez, *Some approximation properties in Orlicz-Sobolev spaces*, Studia Math., 74(1), (1982) 17–24.

[68] P. Gwiazda and A. Świerczewska–Gwiazda, *On non-Newtonian fluids with the property of rapid thickening under different stimulus*, Math. Models Methods Appl. Sci., **18** (2008), no. 7, 1073–1092.

[69] P. Gwiazda, A. Świerczewska–Gwiazda and A. Wróblewska, *Monotonicity methods in generalized Orlicz spaces for a class of non-Newtonian fluids*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, **33** (2010), no. 2, 125–137.

[70] P. Gwiazda, A. Świerczewska–Gwiazda and A. Wróblewska, *Generalized Stokes system in Orlicz spaces,* Discrete and Continuous Dynamical Systems A, 32 (2012), Issue 6, 2

[71] P. Gwiazda, P. Wittbold, A. Wróblewska-Kamińska and A. Zimmermann, *Renormalized solutions to nonlinear parabolic problems in generalized Musielak-Orlicz spaces*, Nonlinear Analysis TMA, **129** (2015), 1–36.

[72] K. J. Painter and T. Hillen, Volume-filling and quorum-sensing in models for chemosensitive movement, *Can. Appl. Math. Q.* **10** (2002) 501–543.

[73] J.L. Metcalfe, *Global Strichartz estimates for solutions to the wave equation exterior to a convex obstacle*, Trans. Amer. Math. Soc., 356 (12), (2004) 4839-4855.

[74] W. Jäger, A. Mikelić. On the Roughness-Induced Effective Boundary Condition for an Incompressible Viscous Flow. *Journal of Differential Equations.* 170, (2001) 96–122.

[75] W. Jäger, A. Mikelić. Couette flows over a rough boundary and drag reduction. *Comm. Math. Phys. 232*, 3 (2003) 429–455.

[76] G. Kaib, Stationary states of an aggregation equation with degenerate diffusion and bounded attractive potential, *SIAM J. Math. Anal.* **49** (2017) 272–296.

[77] A. Klar and S. Tiwari, A multiscale meshfree method for macroscopic approximations of interacting particle systems, *Multiscale Model. Simul.* **12** (2014) 1167–1192.

[78] F.Klawe, *Thermo-visco-elaticity for models with growth conditions in Orlicz spaces*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **47** (2016), no. 2, 457–497.

[KMNW1] O. Kreml, V. Mácha, S. Nečasová, A. Wróblewska-Kamińska. Weak solutions to the full Navier-Stokes-Fourier system with slip boundary conditions in time dependent domain. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, (9) 109 (2018) 67–92.

[KMNW2] O. Kreml, V. Mácha, S. Nečasová, A. Wróblewska-Kamińska. Flow of heat conducting fluid in a time dependent domain *Zeitschrift für Angewandte Mathematic und Physik*, 69 (2018), no. 5, Art. 119, 27 pp.

[79] D. Maity, T. Takahashi, and M. Tucsnak. Analysis of a system modelling the motion of a piston in a viscous gas. *J. Math. Fluid Mech.* **19** 3, (2017) 551–579.

[80] J. Málek, J. Nečas and M. Ružička, *On the non-Newtonian incompressible fluids*, Math. Models Methods Appl. Sci., **3** (1993), no. 1, 35–63.

[MW18] B. Matejczyk, A. Wróblewska-Kamińska. Unsteady flows of heat-conducting non-Newtonian fluids in generalised Orlicz spaces. *Nonlinearity*, 31 (2018), no. 3, 701–727.

[81] E. Marušsić-Paloka. Steady flow of non-Newtonian fluid in unbounded channels and pipes. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 10 (2000) 1425–1445.

[82] A. Mikelić, Š. Nečasová, M. Neuss-Radu. Effective slip law for general viscous flows over an oscillating surface. *Math. Meth. Appl. Sci.* 36, (2013) 2086–2100.

[83] J. Musielak, *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Volume 1034 of *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[84] V. Mustonen and M. Tienari, *On monotone-like mappings in Orlicz-Sobolev spaces*, Math. Bohem., **124** (1999), no. 2-3, 255–271.

[85] J. Neustupa. Existence of a weak solution to the Navier-Stokes equation in a general time-varying domain by the Rothe method. *Math. Methods Appl. Sci.* 32(6) (2009) 653–683.

[86] J. Neustupa and P. Penel. A weak solvability of the Navier-Stokes equation with Navier's boundary condition around a ball striking the wall. In *Advances in mathematical fluid mechanics*, pages 385–407. Springer, Berlin, 2010.

[87] J. Neustupa and P. Penel. A weak solvability of the Navier-Stokes system with Navier's boundary condition around moving and striking bodies. *Recent Developments of Mathematical Fluid Mechanics*, Editors: Amann, H., Giga, Y., Kozono, H., Okamoto, H., Yamazaki, M. pp. 375–400. Birkhauser, series: Advances in Mathematical Fluid Mechanics. 2016.

[88] P. Kaplický, J. Málek, J. Stará. $C^{1,\alpha}$-solutions to a class of nonlinear fluids in the 2D stationary Dirichlet problem. *Journal of Mathematical Sciences.* Vol. 109, No. 5, (2002) 1867–1893.

[89] S. Klainerman, A. Majda *Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids*, Comm. Pure Appl. Math. 34, (1981) 481–524.

[90] S. Klainerman, A. Majda, *Compressible and incompressible fluids*, Comm. Pure Appl. Math. 35, (1982) 629-651.

[91] R. Klein, *Asymptotic analyses for atmospheric flows and the construction of asymptotically adaptive numerical methods*, Z. Angw. Math. Mech., 80, (2000) 765–777.

[92] R. Klein, *Multiple spatial scales in engineering and atmospheric low Mach number flows*, ESAIM: Math. Mod. Numer. Anal., 39, 2005.

[93] R. Klein *Scale-dependent models for atmospheric flows*, Annual Rev. Fluid Mechanics. 42, (2010) 249–274.

[94] R. Klein, N. Botta, T. Schneider, C.D. Munz, S. Roller, A. Meister, L. Hoffmann, T. Sonar, *Asymptotic adaptive methods for multi-scale problems in fluid mechanics* J. Engrg. Math., 39, (2001) 261–343.

[95] O. A. Ladyzhenskaja. An initial-boundary value problem for the Navier-Stokes equations in domains with boundary changing in time. *Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)* 11 (1968) 97–128.

[96] C. Lattanzio, A. E. Tzavaras, Relative entropy in diffusive relaxation, *SIAM J. Math. Anal.* **45** (2013) 1563–1584.

[97] E. H. Lieb. Some problems in statistical mechanics that I would like to see solved. *Phys. A*, **263**(1-4):491–499, 1999. STATPHYS 20 (Paris, 1998).

[98] P.-L. Lions. *Mathematical topics in fluid dynamics, Vol.2, Compressible models.* Oxford Science Publication, Oxford, 1998.

[99] Q. Liu, O.V. Vasilyev, A Brinkman penalization method for compressible flows in complex geometries, *J. Comput. Phys.* **227**(2), (2007) 946–966.

[100] P. Luchini. Asymptotic analysis of laminar boundary-layer flow over finely grooved surfaces. *European J. Mech. B Fluids 14*, 2 (1995) 169–195.

[101] P. Pedregal, *Parametrized measures and variational principles*, Birkhäuser, 2012.

[102] L. Poul. On dynamics of fluids in astrophysics. *J. Evol. Equ.* 9, (2009) 37–66.

[103] N. V. Priezjev and S.M. Troian. Influence of periodic wall roughness on the slip behaviour at liquid/solid interfaces: molecular versus continuum predictions. *J. Fluid Mech.*, 554 (2006) 25–46.

[104] V. V. Shelukhin. The unique solvability of the problem of motion of a piston in a viscous gas. *Dinamika Sploshn. Sredy*, **31**, (1977)132–150.

[105] V. V. Shelukhin. Motion with a contact discontinuity in a viscous heat conducting gas. *Dinamika Sploshn. Sredy*, **57**, (1982) 131–152.

[106] Y. Stokes and G. Carrey. On generalised penalty approaches for slip, free surface and related boundary conditions in viscous flow simulation. *Inter. J. Numer. Meth. Heat Fluid Flow*, **21**, (2011) 668–702.

[107] F.J. Suárez-Grau Asymptotic behavior of a non-Newtonian flow in a thin domain with Navier law on a rough boundary *Nonlinear Analysis.* 117 (2015) 99–123.

[108] J. Toner and Y. Tu, Hydrodynamics and Phases of Flocks, *Annals of Physics* **318** (2005) 170–244.

[109] P. Wright. A simple piston problem in one dimension. *Nonlinearity*, **19**(10), (2006) 2365–2389.

[110] P. Wright. The periodic oscillation of an adiabatic piston in two or three dimensions. *Comm. Math. Phys.*, **275**(2), (2007) 553–580.

[111] P. Wright. *Rigorous results for the periodic oscillation of an adiabatic piston.* ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2007. Thesis (Ph.D.)–New York University.

[112] J. Wolf. Interior $C^{1,\alpha}$ regularity of weak solutions to the equations of stationary motion to certain non-Newtonian fluids in two dimensions. *Boll. U.M.I.* (8) (2007) 317–340.

[113] A. Wróblewska, *Steady flow of non-Newtonian fluids - monotonicity methods in generalized Orlicz spaces*, Nonlinear Analysis TMA, **72** (2010) 4136–4147.

[114] A. Wróblewska-Kamińska, *Unsteady flows of non-Newtoniana fluids in generalized Orlicz spaces*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 33 (2013), no 6, 2565–2592.

[115] A. Wróblewska-Kamińska. Existence result to the motion of several rigid bodies in an incompressible non-Newtonian fluid with growth conditions in Orlicz spaces, *Nonlinearity* 27, (2014) 685-716.

[W17] A. Wróblewska-Kamińska. Asymptotic analysis of complete fluid system on varying domain: form compressible to incompressible flow. *SIAM Journal on Mathematical Analysis SIAM J. Math. Anal.*, 49 (2017) no. 5, 3299–3334.

[116] R. K. Zeytounian, *Joseph Boussinesq and his approximation: a contemporary view*, C.R. Mecanique. 331, (2003) 575–586.

Aneta Wróblewska - Kamińska
29.04.2019 Warszawa