

dr hab. Piotr Kalita, prof. UJ
Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego
ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków

Opinia o dorobku naukowym doktor Anety Wróblewskiej-Kamińskiej w związku z postępowaniem habilitacyjnym w IMPAN

Aneta Wróblewska-Kamińska otrzymała stopień doktora na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego w roku 2013. Praca doktorska, napisana pod kierunkiem prof. Piotra Gwiazdy nosiła tytuł *An application of Orlicz spaces in partial differential equations*. Habilitantka obecnie jest zatrudniona w Instytucie Matematycznym PAN.

Analiza bibliometryczna dorobku habilitantki. Rozpocznę swoją recenzję od krótkiej analizy bibliometrycznej dorobku habilitantki. Jest ona autorką 21 artykułów naukowych. Według bazy MatSciNet artykuły te były cytowane 137 razy, a h-indeks habilitantki to 7. Ten sam h-indeks wykazują bazy Web of Science (według tej bazy jej prace były cytowane, bez autocytowań, 115 razy) oraz Scopus (który wskazuje 105 cytowań bez autocytowań wszystkich autorów). Analiza danych z bazy MathSciNet wskazuje również na szeroką współpracę naukową habilitantki: ma ona artykuły wspólne aż z 15 matematykami. Są to bardzo dobre wyniki na tym poziomie kariery naukowej.

Ocena dorobku habilitacyjnego. Dorobek wskazany jako osiągnięcie habilitacyjne zatytułowany **Analiza matematyczna wybranych modeli hydrodynamicznych** składa się z następujących sześciu artykułów.

- [CWZ19] J. Carillo, A. Wróblewska-Kamińska, E. Zatorska, *On long-time asymptotics for viscous hydrodynamic models of collective behavior with damping and nonlocal interaction*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences (M3AS), 29(2019), 31–63.
- [KMNW2] O. Kreml, V. Mácha, S. Nečasová, A. Wróblewska-Kamińska, *Flow of heat conducting fluid in a time dependent domain*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, 69 (2018), Art. 119, 27pp.
- [MW18] B. Matejczyk, A. Wróblewska-Kamińska, *Unsteady flows of heat-conducting non-Newtonian fluids in generalised Orlicz spaces*, Nonlinearity, 31 (2018), 701–727.
- [KMNW1] O. Kreml, V. Mácha, S. Nečasová, A. Wróblewska-Kamińska, *Weak solutions to the full Navier–Stokes–Fourier system with slip boundary conditions in time dependent domain*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 109 (2018), 67–92.
- [W17] A. Wróblewska-Kamińska, *Asymptotic analysis of complete fluid system on varying domain: from compressible to incompressible flow*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 49 (2017), 3299–3334.
- [GW16] D. Gérard-Varet, A. Wróblewska-Kamińska, *Boundary layer for a non-Newtonian flow over a rough surface*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 48 (2016), 3123–3147.

Prace należące do dorobku habilitacyjnego zostały opublikowane w bardzo dobrych czasopismach. Do dorobku włączone są oświadczenia współautorów wskazujące na istotny wkład habilitantki. Krótco omówię prace z dorobku w kolejności według lat ich publikacji.

Artykuł [GW16] napisany wspólnie z Davidem Gérardem-Varetem jest poświęcony dwuwymiarowemu przepływowi cieczy nieściśliwej w kanale o chropowatej ścianie. Prawo konstytutywne opisujące związek

P. Kalita

między tensorem prędkości odkształcenia a tensorem naprężeń jest nieliniowym uogólnieniem prawa Newtona - dopuszczony jest wzrost z wykładnikiem $p - 1$ gdzie $p > 1$. Szczególny przypadek $p = 1$ odpowiadałby cieczy newtonowskiej. W pracy badane jest zagadnienie

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_x \mathbf{S}(\mathbf{D}\mathbf{u}) + \nabla_x p &= e_1 \text{ w } \Omega_\epsilon, \\ -\operatorname{div}_x \mathbf{u} &= 0 \text{ w } \Omega_\epsilon, \\ \mathbf{u} &= 0 \text{ dla } x \in \Gamma^\epsilon \cup ((0, 1) \times \{1\}), \\ \mathbf{u} &\text{ i } p \text{ 1-okresowe względm } x_1. \end{aligned}$$

Dziedzina zagadnienia jest dana jako $\Omega \cup \Sigma_0 \cup R^\epsilon$, gdzie

$$\Omega = (0, 1)^2, \quad \Sigma_0 = (0, 1) \times \{0\}, \quad R^\epsilon = \{(x_1, x_2) : x_1 \in (0, 1), x_2 \in (\epsilon\gamma(x_1, \epsilon), 0)\}.$$

Z kolei brzeg Γ_ϵ jest dany jako $\{(x_1, \epsilon\gamma(x_1/\epsilon)) : x_1 \in (0, 1)\}$. Funkcja γ jest tu odpowiednio gładka i 1-okresowa. Celem pracy jest sformułowanie zagadnienia aproksymacyjnego określonego jedynie na kwadracie $(0, 1)^2$ reprezentującego zhomogenizowany efekt szorstkości ściany. Autorzy osiągają ten cel, prezentując ponadto oszacowania błędu oraz warunek brzegowy na prędkość styczną pochodzący od równania warstwy przybrzeżnej. Artykuł uważam za wartościowy, uogólnienie do nieliniowego prawa konstytutywnego nie jest prostym przeniesieniem wyniku liniowego. Istotną trudnością było wyprowadzenie oszacowań Saint-Venanta na szybkość zanikania prędkości w kierunku pionowym dla równania warstwy przybrzeżnej danego na nieograniczonej dziedzinie. Podobał mi się również opisany w rozdziale 3.2 oryginalny i konieczny tylko w przypadku nieliniowym pomysł modyfikacji aproksymacji pozwalający na wzięcie pod uwagę ogona warstwy brzegowej i zastąpienie przepływu Poisseuille'a przepływem Couette'a.

Artykuł [W17], samodzielna praca habilitantki, jest poświęcona cieczenom newtonowskim. Autorka zajmuje się następującym układem Naviera–Stokesa–Fouriera, opisującym przepływ cieczy przewodzącej ciepło.

$$\begin{aligned} \varrho_t + \operatorname{div}_x(\varrho \mathbf{u}) &= 0, \\ (\varrho \mathbf{u})_t + \operatorname{div}_x(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \frac{1}{\operatorname{Ma}^2} \nabla_x p(\varrho, \vartheta) &= \operatorname{div}_x \mathbf{S}(\theta, \nabla_x \mathbf{u}) + \frac{1}{\operatorname{Fr}^2} \varrho \nabla_x F, \\ (\varrho s(\varrho, \theta))_t + \operatorname{div}_x(\varrho s(\varrho, \theta) \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x \left(\frac{\mathbf{q}(\theta, \nabla_x \theta)}{\theta} \right) &= \sigma, \\ \frac{d}{dt} \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \varrho |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\operatorname{Ma}^2} \varrho e(\varrho, \theta) - \frac{1}{\operatorname{Fr}^2} \varrho F \right) dx &= 0. \end{aligned}$$

Układ jest uzupełniony przez nierówność Clausiusa–Duhema na produkcję entropii, prawo konstytutywne Newtona, prawo Fouriera przewodnictwa cieplnego, równanie Gibbsa wiążące entropię s z temperaturą θ i gęstością ϱ , oraz prawo konstytutywne na ciśnienie. Ponadto założone są warunki brzegowe izolacji cieplnej, braku przepływu przez brzeg, oraz pełnego poślizgu. Dziedziną przestrzenną zagadnienia jest kula zawierająca dziury, również kuliste, będące "źródłem grawitacji". Główny wynik to twierdzenie, że gdy dwie stałe bezwymiarowe, liczby Macha i Froude zbiegają do zera, promień kuli będącej dziedziną przestrzenną zbiega do nieskończoności, a promienie "dziur" zbiegają do zera, przy czym szybkości wszystkich tych zbieżności muszą pozostawać ze sobą w odpowiedniej relacji, to rozwiązania: prędkość $\mathbf{u}$, temperatura θ i ciśnienie p zbiegają w odpowiednim sensie do rozwiązania układu Boussinesq'a danego na całym $\mathbb{R}^3$. Habilitantka uzyskuje więc układ dla cieczy nieściśliwej jako osobliwą granicę układów dla cieczy ściśliwych. Praca jest równocześnie precyzyjnym matematycznym uzasadnieniem dla aproksymacji Boussinesq'a. Najtrudniejszy krok dowodu - przejście graniczne w wyrażeniu konwekcyjnym w równaniu pędu - jest oparty o techniki analizy spektralnej dla operatora Laplace'a–Neumanna.

Praca [KMNW1] napisana wspólnie z Ondřejem Kremlem, Václavem Machą i Šárką Nečasovą jest, podobnie jak [W17], poświęcona ściśliwym cieczenom newtonowskim przewodzącym ciepło. Tym razem rozważany

układ Naviera–Stokesa–Fouriera ma postać

$$\begin{aligned}\varrho_t + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ (\varrho \mathbf{u})_t + \operatorname{div}_x(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_x(p_e(\varrho) + \theta p_\theta(\varrho)) &= \operatorname{div}_x \mathbf{S}(\nabla_x \mathbf{u}), \\ (\varrho Q(\theta))_t + \operatorname{div}_x(\varrho Q(\theta) \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x \mathbf{q} &= \mathbf{S}(\nabla_x \mathbf{u}) : \nabla_x \mathbf{u} - \theta p_\theta(\varrho) \operatorname{div}_x \mathbf{u}.\end{aligned}$$

Układ jest uzupełniony przez prawa konstytutywne: prawo Newtona wyrażające $\mathbf{S}$, prawo Fouriera na $\mathbf{q}$ oraz zależności energii cieplnej Q i składników p_e i p_θ w prawie na ciśnienie od temperatury θ . Ponadto zagadnienie jest rozważane w zmiennym obszarze, gdzie jego brzeg ewoluuje poprzez zadane pole prędkości. Na brzegu założony jest warunek nieprzepuszczalności i pełnego poślizgu. Główne twierdzenie pracy to wynik o istnieniu słabych rozwiązań zagadnienia brzegowo-początkowego. Słaba postać zagadnienia zakłada, że równanie ciągłości zachodzi w postaci zrenormalizowanej, a równanie bilansu energii jest zastąpione przez dwie nierówności: nierówność energii cieplnej i nierówność energii całkowitej. W tej ostatniej nierówności pojawiają się nowe, niestandardowe, człony wynikające ze zmiennej geometrii obszaru. Wynik jest uzyskany poprzez sformułowanie odpowiedniego zagadnienia aproksymacyjnego zawierającego dodatkowe wyrażenia penalizujące, a następnie sekwencji wykonanych w odpowiedniej kolejności przejść granicznych do zera z parametrami penalizacji, co pozwala uzyskać rozwiązanie problemu pierwotnego.

Zbliżone zagadnienie jest rozważane w pracy [KMNW2], powstałej przy współpracy z tymi samymi współautorami. Tu również mamy ciecz newtonowską przewodzącą ciepło w obszarach o zmiennej geometrii. Różnica polega na tym, że równanie bilansu energii cieplnej zostało zastąpione równoważnym równaniem entropii i zasadą zachowania energii całkowitej

$$\begin{aligned}(\varrho s)_t + \operatorname{div}_x(\varrho s \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) &= \sigma, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \varrho |\mathbf{u}|^2 + \varrho e \right) dx &= 0.\end{aligned}$$

Układ jest uzupełniony nierównością Clausiusa–Duhema i równaniem Gibbsa. Główny wynik to twierdzenie o istnieniu słabych rozwiązań. Choć wystarczająco gładkie rozwiązania badanego układu i układu z pracy [KMNW1] są równoważne, to z punktu widzenia słabych rozwiązań oba układy różnią się od siebie. W szczególności mającej istotne znaczenie nierówności entropii występującej w badanym zagadnieniu nie daje się w prosty sposób wyprowadzić z układu z pracy [KMNW1]. Choć technika dowodu polegająca na przejściu granicznym do zera z parametrami penalizacji w sekwencji problemów aproksymacyjnych jest zbliżona do tej z pracy [KMNW1] to same penalizacje w obu problemach są od siebie istotnie inne. Ponadto już na poziomie oszacowań a priori oba zagadnienia różnią się od siebie. Różnice te prowadzą do innych regularności słabych rozwiązań i wymagają innych założeń w prawach konstytutywnych.

Praca [MW18], której współautorem jest Bartłomiej Matejczyk, poświęcona jest przepływowi przewodzącej ciepło cieczy nieściśliwej o zmiennej gęstości danej przez równanie transportu. Układ równań jest następujący

$$\begin{aligned}\varrho_t + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \operatorname{div}_x \mathbf{u} &= 0, \\ (\varrho \mathbf{u})_t + \operatorname{div}_x(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div}_x \mathbf{S}(x, \varrho, \theta, \nabla_x \mathbf{u}) + \nabla_x P &= \varrho \mathbf{f}, \\ (\varrho \theta)_t + \operatorname{div}_x(\varrho \theta \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x \mathbf{q}(\varrho, \theta, \nabla_x \theta) &= \mathbf{S}(x, \varrho, \theta, \nabla_x \mathbf{u}) : \nabla_x \mathbf{u}.\end{aligned}$$

Prawo konstytutywne Newtona jest zastąpione przez jego nieliniowe uogólnienie dane przez funkcję monotoniczną spełniającą niestandardowe (na przykład niewielomianowe, niejednorodne, lub anizotropowe) warunki wzrostu i koercytywności. Prowadzi to autorów pracy do poszukiwania rozwiązania dla którego prędkość należy do przestrzeni Musielaka–Orlicza względem zmiennej przestrzennej. Również prawo konstytutywne na przewodnictwo cieplne jest nieliniowym uogólnieniem prawa Fouriera. Główny wynik pracy dotyczy istnienia słabych rozwiązań. Podstawowa trudność wynika z tego, że rozważana przestrzeń Musielaka–Orlicza może być nierefleksywna i nieośrodkowa co wymaga użycia technik opartych o miary Younga i

P. M. Matejczyk

lemat Chacona o odgryzaniu, jak również niestandardowej (nierefleksywnej) wersji tricku Minty’ego. Podsumowując warto dodać, że artykuł został napisany wspólnie z doktorantem, dla którego habilitantka pełniła rolę przewodnią przy powstawaniu tej pracy.

W artykule [CWZ19] wspólnym z José Carillo i Ewelina Zatorską habilitantka bada przepływ newtonowskiej cieczy ściśliwej z dodatkowym wyrażeniem nielokalnym opisującym ruch kolektywny. Badany układ jest następujący

$$\begin{aligned}\varrho_t + \operatorname{div}_x(\varrho \mathbf{u}) &= 0, \\ (\varrho \mathbf{u})_t + \operatorname{div}_x(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + a \nabla_x \varrho^m &= \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla_x(\lambda + \mu) \operatorname{div}_x \mathbf{u} - (\nabla_x K * \varrho) \varrho - \varrho \nabla_x \Phi - \varrho \mathbf{u}.\end{aligned}$$

Wynik dotyczy istnienia słabych rozwiązań dla obszaru ograniczonego z warunkiem Dirichleta oraz dla pełnego $\mathbb{R}^3$. Istnienie jest wykazane przez przejście do zera z parametrami penalizacji w odpowiednich zagadnieniach aproksymacyjnych. Najważniejsze w dowodzie są odpowiednie oszacowania na człon nielokalny. Ponadto autorzy pokazują, że przy czasie zmierzającym do nieskończoności prędkości zbiegają w odpowiednim sensie do zera, a gęstości do pewnego rozkładu niezależnego od czasu danego przez rozwiązanie odpowiedniego zagadnienia stacjonarnego.

Wspólnym mianownikiem prac wchodzących w skład dorobku habilitacyjnego jest to, że dotyczą mechaniki płynów. Jednak już w ramach mechaniki płynów różnorodność tematyki badawczej, a za czym idzie użytych technik jest bardzo szeroka. Habilitantka bada zarówno ciecze ściśliwe, jak i nieściśliwe. Prace dotyczą cieczy newtonowskich i nienewtonowskich. Badane są równania opisujące przepływ cieczy niezależny od temperatury, oraz przepływ cieczy przewodzącej ciepło. Habilitantka rozważa istnienie rozwiązań, ich asymptotykę w czasie, oraz przejścia graniczne pomiędzy zagadnieniami. Widać dużą swobodę w posługiwaniu się wieloma narzędziami analizy nieliniowej. Za najwartościowsze uważam prace [GW16] ze względu na nową konstrukcję aproksymacji konieczną w przypadku nieliniowym oraz [W17] ze względu na użyte techniki z równań dyspersyjnych. Niemniej jednak wszystkie prace wchodzące w skład dorobku wymagały dużej pomysłowości i biegłości. Znaczenie wyników oceniam wysoko, jest to dorobek znaczny i uznany na poziomie międzynarodowym. Analizując uzyskane wyniki, nie mam wątpliwości, że habilitantka jest bardzo dobrą specjalistką w dziedzinie równań różniczkowych cząstkowych.

Ocena pozostałego dorobku. Pozostałe prace z dorobku habilitantki poświęcone są zagadnieniom w przestrzeniach Orlicza i Musielaka–Orlicza. Badane są zagadnienia stacjonarne i niestacjonarne. W dorobku znajdują się artykuły poświęcone cieczom nienewtonowskim z niestandardowymi warunkami wzrostu, rozwiązaniom zrenormalizowanym dla zagadnień z równaniami eliptycznymi i parabolicznymi, oraz rozwiązaniom zagadnień ewolucyjnych dla równań pierwszego i drugiego stopnia względem czasu uzyskanym przy pomocy metody aproksymacji czasowo-przestrzennej. Wyniki przeważnie dotyczą istnienia rozwiązań rozumianych w odpowiednim słabym lub zrenormalizowanym sensie. Trudności dotyczą faktu, że warunki wzrostu i koercytywności są niestandardowe czyli mogą być niepotęgowe, niejednorodne i anizotropowe co prowadzi do rozwiązań w przestrzeniach Musielaka–Orlicza, które nie muszą być ani ośrodkowe ani refleksywne. W serii prac wchodzącej w skład pozostałego dorobku habilitantki wypracowano techniki opierające się o metody monotoniczności, metody miar Younga, zbieżność w sensie odgryzania i metody obcięć pozwalające na dowodzenie istnienia rozwiązań w takich przestrzeniach.

Pozostała aktywność habilitantki. Habilitantka odbyła trzy dłuższe staże zagraniczne: pracowała jako asystent w Instytucie Matematycznym Czeskiej Akademii Nauk, była stypendystką International Newton Fellowship w Imperial College w Londynie, oraz odbyła staż podoktorski w Paryżu na Uniwersytecie Paris Diderot. Warto podkreślić, że odbyła także liczne staże krótkoterminowe. Ten punkt w jej aktywności naukowej oceniam bardzo wysoko. Ponadto uczestniczyła aż w 11 krajowych i zagranicznych projektach badawczych, z czego w dwóch (Sonata i Iuventus Plus) była kierownikiem. Ten punkt jej aktywności również oceniam bardzo wysoko. W 2015 roku była laureatką nagrody Centrum Zastosowań Matematyki na najlepszą pracę naukową dotyczącą matematyki i jej zastosowań. Począwszy od 2008 roku wygłosiła aż 42 odczyty na krajowych i międzynarodowych konferencjach, a 7 konferencji/warsztatów krajowych lub

międzynarodowych współorganizowała. Wreszcie w ciągu ostatnich sześciu lat habilitantka recenzowała artykuły dla 15 czasopism naukowych. Podsumowując, stwierdzam że jej aktywność naukowa spełnia z naddatkiem wymogi niezbędne do uzyskania stopnia doktora habilitowanego.

Konkluzja. W mojej ocenie dorobek przedstawiony jako osiągnięcie habilitacyjne oraz pozostały dorobek naukowy dr Anety Wróblewskiej-Kamińskiej spełniają warunki ustawy z dnia 14 marca 2003r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki. Popieram wniosek o nadanie stopnia naukowego doktora habilitowanego i wnoszę o dopuszczenie dr Anety Wróblewskiej-Kamińskiej do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.

Piotr Kalita

