Autoreferat pracy habilitacyjnej

Artem Dudko

Dane personalne

Nazwisko: Artem Dudko

Adres: Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
Śniadeckich 8
00-656 Warszawa

Email: adudko@impan.pl

Strona internetowa: www.impan.pl/pl/sites/adudko/home

Wykształcenie

Studia doktoranckie 09/2008 – 07/2012
Mathematics Department, University of Toronto
Promotor: Michael Yampolsky
Tytuł rozprawy: Dynamics of holomorphic maps: Resurgence of Fatou coordinates, and poly-time computability of Julia sets

Studia magisterskie 09/2006 – 05/2007
Dyplom z wyróżnieniem
Mathematics Department, Karazin Kharkiv National University, Ukraina
Promotor: Nikolai Nessonov

Studia licencjackie 09/2002 – 05/2006
Dyplom z wyróżnieniem
Mathematics Department, Karazin Kharkiv National University, Ukraina
Promotor: Nikolai Nessonov

Zajmowane stanowiska

Profesor wizytujący w IMPAN, 08/2017 – dziś

Postdoctoral Fellow at University of Toronto, Department of Mathematics, 08/2016 – 07/2017

Milnor Lecturer at the Institute for Mathematical Sciences at the State University of New York, Stony Brook, 09/2012 – 08/2016

1 Podstawa habilitacji

Podstawę habilitacji stanowi seria 7 artykułów pod wspólnym tytułem

Characters of discrete infinite groups and related questions

Lista artykułów obejmujących osiągnięcie habilitacyjne

[H1] A. Dudko. On irreducibility of Koopman representations corresponding to measure contracting actions. Groups Geom. Dynam. 12.4 (2018), pp. 1417-1427.

[H2] A. Dudko and R. Grigorchuk. On irreducibility and disjointness of Koopman and quasi-regular representations of weakly branch groups. In: Modern Theory and Dynamical Systems: A Tribute to Dmitry Victorovich Anosov. Contemp. Math. 692, AMS, 2017, pp. 51-66.

[H3] A. Dudko and R. Grigorchuk. On spectra of Koopman, groupoid and quasi-regular representations. J. Mod. Dynam. 11 (2017), pp. 99-123.

[H4] A. Dudko and R. Grigorchuk. On diagonal actions of branch groups and the corresponding characters. J. Funct. Anal. 274.11 (2018), pp. 3033-3055.

[H5] A. Dudko and K. Medynets. Finite factor representations of Higman-Thompson groups. Groups Geom. Dynam. 8.2 (2014), pp. 375-389.

[H6] A. Dudko and K. Medynets. On characters of inductive limits of symmetric groups. J. Funct. Anal. 264.7 (2013), pp. 1565-1598.

[H7] A. Dudko and K. Medynets. On invariant random subgroups of block-diagonal limits of symmetric groups. Proc. AMS 147.6 (2019), pp. 2481-2494.

2 Wstęp

Teoria charakterów została stworzona przez Georga Frobeniusa i Williama Burnside'a w związku z problemem klasyfikacji grup skończonych. Charakter grupy skończonej to macierzowy ślad reprezentacji grupy. Charaktery pełnią centralną rolę w klasyfikacji grup skończonych i w dowodach wielu ważnych rezultatów teorii grup, jak twierdzenie Feita-Thompsona i twiedzenie Burnside'a. Charaktery grup symetrycznych mają zastosowania w kombinatoryce diagramów Younga i innych obiektów.

Dla grup nieskończonych charaktery znajdują zastosowania przede wszystkim do badania reprezentacji grup. Struktura zbioru wszystkich reprezentacji może być skomplikowana. Charaktery nieskończonych grup dyskretnych odpowiadają ważnej klasie reprezentacji *typu skończonego* i w wielu wypadkach są istotne przy klasyfikacji takich reprezentacji.

Inne pole zastosowań to własności asymptotyczne grup skończonych i ich charakterów. Jak zauważyli Sergei Kerov i Anatoly Vershik, charaktery grup lokalnie skończonych można rozpatrywać jako granice charakterów grup skończonych i rozwijać asymptotyczną teorię charakterów, bazując na grupach symetrycznych. Doprowadziło to do odkrycia wielu fenomenów kombinatorycznych związanych z asymptotycznym zachowaniem diagramów Younga i „tableaux”.

Charakterów można też użyć do skonstruowania grupy dualnej Pontriagina dla grup nieprzemiennych i rozwijania analizy harmonicznej na takich grupach. Charaktery i reprezentacje typu skończonego są w naturalny sposób generowane przez ergodyczne działania grup i wiele własności takich działań można wyrazić w języku charakterów i reprezentacji. Prezentowana rozprawa habilitacyjna jest poświęcona badaniu charakterów różnych klas nieskończonych grup dyskretnych oraz relacji między własnościami charakterów i własnościami działań grup, a także innym zagadnieniom pokrewnym.

2.1 Charaktery i reprezentacje

Definicja 1. *Charakter* grupy G to funkcja $\chi : G \to \mathbb{C}$ spełniająca następujące warunki:

1) $\chi(g_1 g_2) = \chi(g_2 g_1)$ dla dowolnych $g_1, g_2 \in G$;

2) macierz $\left\{\chi\left(g_i g_j^{-1}\right)\right\}_{i,j=1}^{n}$ jest dodatnio półokreślona dla dowolnych n i $g_1, \dots, g_n \in G$;

3) $\chi(e) = 1$, gdzie e jest jedynką grupy.

Najprostsze przykłady to: charakter trywialny χ_u dany wzorem $\chi_u(g) = 1$ dla $g \in G$ i charakter regularny $\chi_{\mathrm{reg}}(g) = \delta_{g,e}$ (równy 1 w jedynce grupy i zero na pozostałych elementach). Dla nich własności 1) $-$ 3) łatwo sprawdzić bezpośrednio.

Charaktery pojawiają się w naturalny sposób w teorii reprezentacji. Rozpatrujemy tu jedynie *reprezentacje unitarne*, czyli homomorfizmy π grupy G w grupę operatorów unitarnych na pewnej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Jeśli przestrzeń ta jest skończenie wymiarowa, możemy określić charakter reprezentacji π wzorem

$$\chi_\pi(g) = \frac{1}{\dim(\mathcal{H})} \mathrm{Tr}(\pi(g)),$$

gdzie Tr jest śladem macierzy. Jeśli przestrzeń $\mathcal{H}$ jest nieskończenie wymiarowa, możemy stowarzyszyć z π pewną algebrę von Neumanna $\mathcal{M}_\pi$ (najmniejszą algebrę operatorów, domkniętą w $*$-słabej topologii i zawierającą $\pi(G)$). Jeśli algebra $\mathcal{M}_\pi$ jest *typu skończonego* (zob. np. [40], roz. 5), to ma *ślad* tr (naturalne uogólnienie śladu macierzowego) i funkcja $\chi(g) = \mathrm{tr}(\pi(g))$ jest charakterem na G. W ten sposób charaktery odgrywają istotną rolę w klasyfikacji reprezentacji grup.

Zauważmy, że charaktery grupy G tworzą sympleks, tj. dla dowolnych charakterów χ_1, χ_2 na G oraz liczby $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ funkcja $\chi = \alpha\chi_1 + (1-\alpha)\chi_2$ jest też charakterem. Punkty ekstremalne tego sympleksu noszą nazwę *charakterów nieprzywiedlnych*. Wiadomo, że dla grupy abelowej Γ charaktery nieprzywiedlne to dokładnie homomorfizmy grupowe $\varphi : \Gamma \to \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. W szczególności na lokalnie zwartej grupie abelowej Γ ciągłe charaktery nieprzywiedlne tworzą grupę dualną Pontriagina dla Γ, ważną w analizie harmonicznej na Γ. Zbiór charakterów nieprzywiedlnych grupy nieabelowej jest naturalnym uogólnieniem grupy dualnej Pontriagina, pozwalającym w wielu wypadkach na rozwijanie analizy harmonicznej na takich grupach.

Jednym z głównych problemów teorii charakterów jest opisanie wszystkich charakterów nieprzywiedlnych. Problem ten został rozwiązany tylko dla niektórych klas grup:

- nieskończona grupa symetryczna $S(\infty)$ [41] (zob. też [30], [36]);
- nieskończona ogólna grupa liniowa nad ciałem skończonym $GL(\infty, \mathbb{F}_q)$ [39];
- nieskończenie wymiarowa grupa unitarna $U(\infty)$ [46];
- ogólna grupa liniowa $GL_n(\mathbb{K})$ i specjalna grupa liniowa $SL_n(\mathbb{K})$ nad ciałem nieskończonym $\mathbb{K}$ [31];
- specjalna grupa liniowa o współczynnikach całkowitych $SL_n(\mathbb{Z})$, $n \geqslant 3$ [3];
- grupa przetasowań (rearrangements) wymiernych przedziału [23];
- granice skończonych grup alternujących względem zanurzeń diagonalnych [33].

Naturalnym źródłem przykładów charakterów są działania grup. Jeśli grupa przeliczalna G działa z zachowaniem miary na przestrzeni Lebesgue'a (X, μ), to funkcja $\chi_\mu(g) = \mu(\mathrm{Fix}(g))$, gdzie $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X : gx = x\}$, jest charakterem. Vershik spopularyzował hipotezę, że jeśli grupa G jest dostatecznie „bogata", to wszystkie charaktery są tej postaci (być może z dokładnością do czynnika multyplikatywnego) [45]). Hipoteza ta jest słuszna dla powyższych klas grup.

Jednym z głównych rezultatów przedkładanej pracy habilitacyjnej jest opis charakterów nieprzywiedlnych i potwierdzenie tej hipotezy dla dwóch innych klas grup:

1) Obszerna klasa grup aproksymatywnie skończonych (zwanych również pełnymi grupami diagramów Brattelego lub krótko AF-grupami). Grupy te są granicami prostymi skończonych grup symetrycznych względem zanurzeń blokowo-diagonalnych. Grupy te pojawiły się w pracach Herman-Putnam-Skau [27] oraz Giordano-Putnam-Skau [22, 21] w związku z teorią równoważności orbitalnej dla minimalnych układów dynamicznych Cantora oraz teorią C^*-algebr. Autorzy ci pokazali, że informację o strukturze algebraicznej AF-grup można wykorzystać do rozróżniania związanych z nimi układów dynamicznych i C^*-algebr.

W pracy [11] opisałem charaktery nieprzywiedlne pewnej specjalnej AF-grupy, mianowicie tzw. pełnej grupy dla ergodycznej hiperskończonej relacji równoważności. Grupę tę można rozpatrywać jako granicę prostą skończonych grup symetrycznych $S(2^n)$ względem zanurzeń $s \in S(2^n) \to (s, s) \in S(2^{n+1})$. Goryachko i Petrov w pracy [23] opisali innymi metodami charaktery nieprzywiedlne AF-grupy, którą można rozpatrywać jako granicę prostą grup $S(n!)$. W pracy [H6] (wspólnej z Medynetsem), stosując techniki rozwinięte w [11] i własności dynamiczne AF-grup, opisaliśmy wszystkie charaktery nieprzywiedlne każdej AF-grupy prostej, która ma skończenie wiele miar ergodycznych na przestrzeni dróg odpowiedniego diagramu Brattelego.

2) Grupy z rodzin Higmana-Thompsona $\{F_{n,r}\}, \{G_{n,r}\}$. Grupy te pełnią ważną rolę w teorii grup (zob. np. [9]). Najbardziej znana jest grupa Thompsona $F = F_{2,1}$, składająca się ze wszystkich kawałkami liniowych przekształceń ciągłych przedziału $[0,1]$ z osobliwościami w punktach $\{\frac{p}{2^q} : p, q \in \mathbb{N}\}$ z nachyleniem $\{2^q : q \in \mathbb{Z}\}$. Pytanie, czy grupa F jest amenabelna, od dawna pozostaje otwarte.

W pracy [H5] (wspólnej z Medynetsem) podaliśmy pełen opis charakterów nieprzywiedlnych dla grup z rodziny Higmana-Thompsona. Pokazaliśmy, że dla każdej grupy Higmana-Thompsona G zbiór charakterów nieprzywiedlnych składa się z charakteru regularnego χ_{reg} oraz z homomorfizmów grupowych $\phi : G/G' \to \mathbb{T}$ z abelianizacji grupy G do okręgu jednostkowego. Jako zastosowanie do teorii ergodycznej pokazaliśmy, że dla dowolnej grupy prostej Higmana-Thompsona każde wierne działanie zachowujące miarę na przestrzeni probabilistycznej jest zasadniczo wolne.

Wcześniej, wspólnie z Nikolajem Nessonowem podaliśmy pełny opis charakterów nieprzywiedlnych dla iloczynów półprostych nieskończonej grupy symetrycznej i nieskończonej potęgi kartezjańskiej grupy dyskretnej, $S(\infty) \ltimes \Gamma^\infty$ (czasami nazywanych nieskończonymi produktami wiankowymi). Grupy $S(\infty) \ltimes \Gamma^\infty$ są naturalnymi rozszerzeniami nieskończonej grupy symetrycznej $S(\infty)$. Gdy grupa Γ jest skończona, charaktery grupy $S(\infty) \ltimes \Gamma^\infty$ były badane przez Boyera [7] z punktu widzenia C^*-algebr i K_0-funktora. W pracy [13] wspólnej z Nessonowem podaliśmy pełny opis charakterów nieprzywiedlnych dla $S(\infty) \ltimes \Gamma^\infty$ dla dowolnej grupy Γ. Jest to uogólnienie rezultatu Thoma [41], który klasyfikuje charaktery nieprzywiedlne dla $S(\infty)$. Ponadto w pracach [14] i [15] opisaliśmy *projektywne* charaktery nieprzywiedlne grup $S(\infty) \ltimes \mathbb{Z}_n^\infty$. Jest to uogólnienie rezultatu Nazarowa [35], dotyczącego $S(\infty)$.

Co ciekawe, dla powyższych trzech klas grup sympleksy charakterów są bardzo różnych rozmiarów. Dla nieskończonego produktu wiankowego istnieje kontinuum charakterów nieprzywiedlnych. Dla grup aproksymatywnie skończonych mamy przeliczalnie wiele charakterów. Dla grup prostych Higmana-Thompsona są tylko dwa charaktery: trywialny i regularny.

2.2 Nieprzywiedlność reprezentacji związanych z działaniami grup

Reprezentację, której nie można zapisać jako sumę prostą innych reprezentacji, nazywamy *nieprzywiedlną*. Podobnie jak reprezentacje faktorialne, reprezentacje nieprzywiedlne stanowią podstawowe części składowe bardziej skomplikowanych reprezentacji. Ich rolę można porównać do roli liczb pierwszych w teorii liczb. Dla nieskończonych grup dyskretnych często nie udaje się opisać wszystkich reprezentacji nieprzywiedlnych. Wtedy ważne staje się wskazanie dużych klas takich reprezentacji albo udowodnienie, że konkretne reprezentacje są nieprzywiedlne.

Mając daną grupę przeliczalną G działającą na zbiorze X oraz punkt $x \in X$, definiujemy *reprezentację kwaziregularną* ρ_x w $l^2(Gx)$, gdzie Gx jest orbitą punktu x, wzorem

$$(\rho_x(g)f)(y) = f(g^{-1}y).$$

Zauważmy, że klasa izomorfizmu reprezentacji ρ_x zależy tylko od stabilizatora $\mathrm{St}_G(x)$ punktu x.

Efektywne kryterium nieprzywiedlności reprezentacji kwaziregularneh zostało podane przez Mackeya. Przypomnijmy, że podgrupy H_1, H_2 grupy G są *współmierne*, jeśli $H_1 \cap H_2$ ma skończony indeks w H_1 oraz w H_2. Podgrupy H_1 i H_2 są *kwazisprzężone* w G, jeśli podgrupa

gH_1g^{-1} jest współmierna z H_2 dla pewnego $g \in G$. Definiujemy *komensurator* podgrupy $H < G$ jako podgrupę określoną wzorem

$$\mathrm{comm}_G(H) = \{g \in G : H \cap gHg^{-1} \text{ ma skończony indeks w } H \text{ oraz w } gHg^{-1}\}.$$

Mackey udowodnił:

Twierdzenie 2. 1) *Niech H będzie podgrupą nieskończonej przeliczalnej grupy dyskretnej G. Wtedy reprezentacja kwaziregularna $\rho_{G/H}$ jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathrm{comm}_G(H) = H$.
2) *Niech H_1, H_2 będą podgrupami w G takimi, że* $\mathrm{comm}_G(H_i) = H_i$, $i = 1, 2$. *Wtedy reprezentacje ρ_{G/H_1} i ρ_{G/H_2} są unitarnie równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy podgrupy H_1 i H_2 są kwazisprzężone.*

Jeśli grupa G działa na przestrzeni mierzalnej (X, μ), gdzie μ jest miarą probabilistyczną, z zachowaniem miary, to istnieje naturalna *reprezentacja Koopmana* κ grupy G w $L^2(X, \mu)$, określona wzorem

$$(\kappa(g)f)(x) = f(g^{-1}x).$$

Ważność tej reprezentacji polega na tym, że własności spektralne κ znajdują odbicie we własnościach dynamicznych działania grupy, jak ergodyczność lub słabe mieszanie.

Wiadomo, że jeśli działanie jest ergodyczne, to operatory $\kappa(g)$ wraz z operatorami mnożenia przez funkcje z $L^\infty(X, \mu)$ generują całą algebrę operatorów ograniczonych na $L^2(X, \mu)$ w słabej topologii operatorowej. Reprezentacja κ ma jako podprzestrzeń niezmienniczą zbiór funkcji stałych na X. Naturalne jest pytanie, czy reprezentacja κ jest nieprzywiedlna na dopełnieniu ortogonalnym tej podprzestrzeni w $L^2(X, \mu)$ (wtedy mówimy, że κ jest *prawie nieprzywiedlna*). Pytanie to zostało postawione w pracy Vershika [44] (Problem 4). Odpowiedź jest pozytywna bardzo rzadko. Jednym z niewielu przykładów jest dowolna gęsta podgrupa grupy $\mathrm{Aut}([0, 1], \mu)$ wszystkich automorfizmów przedziału jednostkowego, zachowujących miarę Lebesgue'a μ, ze słabą topologią.

Ogólniej, jeśli miara μ jest tylko kwaziniezmiennicza, można nadal określić reprezentację Koopmana, stosując pochodną Radona-Nikodyma:

$$(\kappa(g)f)(x) = \sqrt{\frac{\mathrm{d}\mu(g^{-1}(x))}{\mathrm{d}\mu(x)}} f(g^{-1}x).$$

Jeśli miara μ nie jest niezmiennicza, to funkcje stałe nie stanowią podprzestrzeni niezmienniczej i reprezentacja Koopmana może być nieprzywiedlna w całym $L^2(X, \mu)$. Znanych jest kilka przykładów działań z miarami kwaziniezmienniczymi, dla których reprezentacja Koopmana jest nieprzywiedlna:

- działania nieprzemiennych grup wolnych na swoich brzegach
  (zob. [32] i prace tam cytowane);
- działania krat grup Liego (lub grup algebraicznych) na ich brzegach Poissona-Furstenberga
  (zob. [4] i prace tam cytowane);

- działanie grupy podstawowej rozmaitości zwartej o ujemnej krzywiźnie na brzegu tej rozmaitości z miarami klasy Patersona-Sullivana [2];

- kanoniczne działanie grup Thompsona na odcinku z miarą Lebesgue'a [20].

Przypadek ogólny nie jest jednak należycie zbadany i znalezienie innych przykładów stanowi wyzwanie.

Jeden z ważnych rezultatów mojej habilitacji dotyczy nieprzywiedlności i rozłączności reprezentacji Koopmana i reprezentacji kwaziregularnej dla dwoch klas działań grup:

1) Wspólnie z Grigorchukiem pokazaliśmy w [H2], że reprezentacje kwaziregularne i pewne reprezentacje Koopmana stowarzyszone z działaniami grup słabo gałęziowych na brzegach drzew ukorzenionych są nieprzywiedlne i parami rozłączne.

2) W [H1] pokazałem, że reprezentacje Koopmana dla działań grup Higmana-Thompsona na odcinkach i ogólnie dla działań *ściągających miarę* są nieprzywiedlne.

2.3 Działania niewolne

Działanie grupy G na przestrzeni borelowskiej (X, Σ) przez automorfizmy borelowskie wyznacza w naturalny sposób odwzorowanie z sympleksu $\mathcal{M}(X, \Sigma, G)$ niezmienniczych miar probabilistycznych do sympleksu charakterów $\mathcal{X}(G)$, określone wzorem

$$\mu \to \chi_\mu, \quad \chi_\mu(g) = \mu(\mathrm{Fix}(g)), g \in G. \tag{2.1}$$

Powstaje naturalne pytanie, czy punkty ekstremalne w $\mathcal{M}(X, \Sigma, G)$ (tj. niezmiennicze miary ergodyczne) przechodzą na punkty ekstremalne w $\mathcal{X}(G)$ (tj. charaktery nieprzywiedlne). Okazuje się, że ogólna odpowiedź jest negatywna. Jeśli np. miara μ ma tę własność, że działanie grupy G na (X, Σ, μ) jest zasadniczo wolne (tzn. $\mu(\mathrm{Fix}(g)) = 0$ dla każdego $g \in G \setminus \{e\}$), to χ_μ jest charakterem regularnym. Jeśli grupa G nie ma nieskończonych klas elementów sprzężonych, to charakter ten jest przywiedlny.

Aby badać, kiedy charaktery odpowiadające miarom ergodycznym są nieprzywiedlne, Vershik [44] wprowadził pojęcie *działania niewolnego*. Załóżmy, że G jest grupą przeliczalną działającą na przestrzeni probabilistycznej (X, Σ, μ) z zachowaniem miary. Stabilizator punktu $x \in X$ oznaczamy przez $\mathrm{St}_G(x) = \{g \in G : gx = x\}$.

Definicja 3. Mówimy, że powyższe działanie jest *totalnie niewolne* (w skrócie TNF), jeśli rodzina zbiorów $\mathrm{Fix}(g)$ dla $g \in G$ łącznie ze zbiorami miary zero generuje σ-algebrę Σ.

Definicja 4. Mówimy, że powyższe działanie jest *ekstremalnie niewolne* (w skrócie ENF), jeśli istnieje podzbiór $A \subset X$ z $\mu(A) = 1$ taki, że $\mathrm{St}_G(x) \neq \mathrm{St}_G(y)$, jeśli $x, y \in A$, $x \neq y$.

Vershik [44] (zob. też [45]) pokazał, że dla grup przeliczalnych te dwa pojęcia się pokrywają. Postawił on również hipotezę, że ergodyczne działanie grupy przeliczalnej G na (X, Σ, μ) z zachowaniem miary jest totalnie niewolne wtedy i tylko wtedy, gdy charakter χ_μ jest nieprzywiedlny. W pracy [H4] (wspólnej z Grigorchukiem) wykazaliśmy jednak, że obie implikacje tej hipotezy są fałszywe.

W tej samej pracy badaliśmy charaktery grup słabo gałęziowych. Są to grupy działające na drzewach ukorzenionych z zachowaniem pewnych warunków. Ta klasa grup ma liczne zastosowania w teorii grup, kombinatoryce, teorii spektralnej, dynamice holomorficznej i rachunku prawdopodobieństwa. Zawiera ona ciekawe grupy o nietypowych własnościach, jak grupa Grigorchuka czy grupa Basilica, przynoszące rozwiązania dawno postawionych problemów. Aby badać te grupy, wprowadziliśmy dwa nowe rodzaje działań niewolnych. Tu przedstawimy pojęcie, istotne przy omawianiu charakterów nieprzywiedlnych.

Definicja 5. Załóżmy, że grupa przeliczalna G działa na przestrzeni Lebesgue'a (X, Σ, μ) z zachowaniem miary. Mówimy, że działanie to jest *perfekcyjnie niewolne* (w skrócie PNF), jeśli istnieje rodzina $\mathcal{A}$ podzbiorów mierzalnych w X, która wraz ze zbiorami miary zero generuje Σ i dla każdego $A \in \mathcal{A}$, G_A-orbita $\{gx : g \in G_A\} \subset X$ jest nieskończona dla μ-prawie wszystkich $x \in A$.

Dla ergodycznych działań grup przeliczalnych z zachowaniem miary pokazaliśmy w [H4], że PNF implikuje TNF, i podaliśmy nowy dowód równoważności TNF i ENF. Wykorzystując te rezultaty, skonstruowaliśmy nieskończoną przeliczalną rodzinę charakterów nieprzywiedlnych dla każdej grupy słabo gałęziowej. Wydaje się, że opisanie wszystkich charakterów nieprzywiedlnych dla dowolnych takich grup jest zadaniem mało realistycznym. Zauważmy, że wykorzystując rezultaty niedawnej pracy [5], można dla takich grup skonstruować zbiór charakterów nieprzywiedlnych mocy kontinuum.

2.4 Losowe podgrupy niezmiennicze

Charaktery i działania niewolne są ściśle związane z *losowymi podgrupami niezmienniczymi*. Rozpatrzmy zbior $\mathrm{Sub}(G)$ wszystkich podgrup grupy G. Zbiór ten ma topologię Tichonowa jako podzbiór w $\{0,1\}^G$. Grupa G działa na $\mathrm{Sub}(G)$ przez sprzężenie:

$$H \in \mathrm{Sub}(G) \to g(H) = gHg^{-1} \in \mathrm{Sub}(G).$$

Losowa podgrupa niezmiennicza (IRS, invariant random subgroup) w G to G-niezmiennicza miara probabilistyczna na $\mathrm{Sub}(G)$.

Jeśli N jest podgrupą normalną w G, to miara Diraca δ_N skupiona na N jest IRS. Tak więc IRS jest uogólnieniem podgrupy normalnej. Mówimy, że IRS jest ciągła, jeśli nie ma atomów.

Załóżmy, że grupa G działa na przestrzeni Lebesgue'a (X, μ) z zachowaniem miary. Rozważmy odwzorowanie

$$\Psi : X \to \mathrm{Sub}(G), \quad \Psi(x) = \mathrm{St}_G(x). \tag{2.2}$$

Jeśli działanie jest ekstremalnie niewolne, to Ψ jest izomorfizmem modulo zbiory miary zero między (X, μ) i $(\mathrm{Sub}(G), \Psi_*\mu)$ (zob. [44]), gdzie $\Psi_*\mu$ oznacza miarę indukowaną. Jeśli ponadto działanie jest ergodyczne i zachowuje miarę, a miara μ jest bezatomowa, to $\Psi_*\mu$ jest ciągłą IRS w G. Ponadto w [1] i [10] udowodniono, że każda IRS może być otrzymana w ten sposób. Tak więc IRS są ważne z punktu widzenia charakteryzacji działań zachowujących miarę.

Naturalnym problemem jest klasyfikacja ergodycznych losowych podgrup niezmienniczych (w skrócie EIRS) dla danej grupy. Problem ten został rozwiązany tylko dla niektórych klas grup. Vershik [45] opisał EIRS w $S(\infty)$. Thomas i Tucker-Drob [42], [43] opisali EIRS w granicach induktywnych grup symetrycznych względem zanurzeń diagonalnych oraz w granicach induktywnych grup alternujących.

Niech ϕ będzie IRS w G. Ponieważ ϕ jest miarą na $\mathrm{Sub}(G)$ niezmienniczą względem działania grupy G, ϕ wyznacza charakter grupy G za pomocą wzoru (2.1):

$$\chi_\phi(g) = \phi(\{H \in \mathrm{Sub}(G) : gHg^{-1} = H\}), \quad g \in G.$$

Z drugiej strony, na podstawie [1] istnieje borelowska przestrzeń probabilistyczna (X, Σ, μ) taka, że $\phi = \Psi^*\mu$, gdzie Ψ jest odwzorowaniem z (2.2). Można też skonstruować charakter χ'_ϕ, wychodząc od miary μ. Co ciekawe, prowadzi to do innego wzoru:

$$\chi'_\phi(g) = \phi(\{H \in \mathrm{Sub}(G) : g \in H\}).$$

Dla pewnych grup charaktery χ_ϕ i χ'_ϕ pokrywają się dla dowolnej IRS ϕ. Przykłady to nieskończona grupa symetryczna [45], grupy aproksymatywnie skończone badane w [H7] i grupy Higmana-Thompsona [H5]. Są jednak przykłady, gdzie $\chi_\phi \neq \chi'_\phi$. W przygotowywanej wspólnej pracy z Grigorchukiem pokazujemy, że dla grup gałęziowych pewne IRS skonstruowane w [5] mają tę własność.

Relacje między charakterami a IRS można wykorzystywać do uzyskiwania rezultatów o IRS. Z opisu charakterów nieprzywiedlnych grup Higmana-Thompsona [H5] wynika, że każda grupa G z tej klasy ma tylko dwie EIRS: $\delta_{\{e\}}$ i δ_G, gdzie $\{e\}$ jest podgrupą trywialną. W pracy [H7] (z Medynetsem), wykorzystując opis charakterów nieprzywiedlnych grup aproksymatywnie skończonych z [H6] opisujemy EIRS dla tych grup. Zauważmy, że dla grup badanych w pracach [H5] i [H7] charaktery χ_ϕ and χ'_ϕ pokrywają się dla każdej IRS ϕ. Ponadto dla tych grup odwzorowanie $\phi \to \chi_\phi$ ustala bijekcję między charakterami nieprzywiedlnymi a ergodycznymi losowymi podgrupami niezmienniczymi. Klasa AF-grup rozważana w [H7] zawiera klasę granic induktywnych grup symetrycznych względem zanurzeń diagonalnych. Tak więc rezultaty pracy [H7] uogólniają klasyfikację EIRS z [42].

2.5 Ważny przykład: nieskończona grupa symetryczna $S(\infty)$

Nieskończona grupa symetryczna $S(\infty)$ należy do grup, których charaktery są najczęściej badane. Grupa ta jest określona jako zbiór tych bijekcji zbioru liczb całkowitych dodatnich, które „ruszają” tylko skończenie wiele elementów. Można ją uważać za granicę prostą skończonych grup symetrycznych $S(n)$ permutujących liczby całkowite od 1 do n.

Charaktery nieprzywiedlne grupy $S(\infty)$ pierwszy opisał Thoma [41] z analitycznego punktu widzenia, używając ciągów całkowicie dodatnich. Później Vershik i Kerov [30] podali inny dowód, w którym charaktery nieprzywiedlne grupy $S(\infty)$ są granicami ciągów charakaterów grup $S(n)$. To podejście bywa nazywane *asymptotyczną teorią charakterów*. Inne podejście rozwinęli Olshansky i Okunkov. W pracy [36] Okunkov udowodnił twierdzenie Thoma, stosując metody półgrupowe Olshansky'ego. Poniżej krótko omawiamy rezultat Thoma i objaśniamy metody Kerova-Vershika. W moich pracach dotyczących charakterów stosowałem pewien wariant podejścia Okunkova-Olshansky'ego; zostanie on omówiony w dalszych podrozdziałach.

Dla $s \in S(\infty)$ nośnik $\mathrm{supp}(s)$ to zbiór tych liczb całkowitych dodatnich i, dla których $s(i) \neq i$. Element $s \in S(\infty)$ jest cyklem długości $r > 1$, jeśli ma tylko jedną orbitę długości r. Każdy element $s \in S(\infty)$ można jednoznacznie (z dokładnością do porządku czynników) zapisać jako iloczyn cykli $s_1 s_2 \cdots s_m$ o rozłącznych nośnikach.

Charaktery nieprzywiedlne grupy $S(\infty)$ można sparametryzować za pomocą dwóch (skończonych lub nieskończonych) nierosnących ciągów dodatnich liczb całkowitych $\alpha = \{\alpha_j\}, \beta = \{\beta_k\}$ (zwanych parametrami Thoma) spełniających warunek $\sum \alpha_j + \sum \beta_k \geqslant 1$. Mając takie dwa ciągi, definiujemy funkcję $\phi = \phi_{\alpha,\beta}$ na $S(\infty)$ następująco:

(1) jeśli $s \in S(\infty)$ ma rozkład na cykle $s = s_1 \cdots s_m$, to

$$\phi(s) = \prod_{i=1}^{m} \phi(s_i);$$

(2) jeśli s jest cyklem długości r, to

$$\phi(s) = \sum_j \alpha_j^r + (-1)^{r-1} \sum_k \beta_k^r.$$

Twierdzenie 6 (Thoma)**.** *Funkcja χ na $S(\infty)$ jest charakterem nieprzywiedlnym wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi = \phi_{\alpha,\beta}$ dla pewnych parametrów Thoma α, β.*

Mamy $S(\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S(n)$, gdzie $S(n)$ jest grupą bijekcji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Kerov i Vershik zauważyli, że każdy charakter nieprzywiedlny χ grupy $S(\infty)$ jest granicą punktową ciągu χ_n charakterów nieprzywiedlnych grup $S(n)$:

$$\chi(s) = \lim_{n\to\infty} \chi_n(s) \text{ dla każdego } s \in S(\infty).$$

Charaktery grupy $S(n)$ są sparametryzowane przez diagramy Younga o n kwadratach. Niech $\{\lambda_n\}$ będzie ciągiem diagramów Younga, gdzie λ_n składa się z n kwadratów. Oznaczmy przez $r_{n,i}$ i $c_{n,i}$ długość i-tego wiersza i i-tej kolumny w λ_n i niech χ_{λ_n} będzie charakterem nieprzywiedlnym grupy $S(n)$ odpowiadającym λ_n. Kerov i Vershik pokazali, że ciąg χ_{λ_n} jest zbieżny do pewnej funkcji χ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice

$$\alpha_i = \lim_{n\to\infty} r_{n,i}/n, \quad \beta_i = \lim_{n\to\infty} c_{n,i}/n.$$

Ponadto χ jest wtedy powyższą funkcją $\phi_{\alpha,\beta}$. Kerov i Vershik podali nowy dowód faktu, że $\phi_{\alpha,\beta}$ jest charakterem, konstruując reprezentację $\pi_{\alpha,\beta}$ typu skończonego taką, że $\phi_{\alpha,\beta} = \mathrm{tr}(\pi_{\alpha,\beta})$.

Autorzy ci zauważyli ciekawą asymptotyczną własność diagramów Younga. Niech Λ_n oznacza zbiór wszystkich diagramów Younga o n kwadratach. Charakter regularny χ_{reg} grupy $S(n)$ ma rozkład

$$\chi_{\mathrm{reg}} = \sum_{\lambda\in\Lambda_n} c_\lambda \chi_\lambda, \quad \text{gdzie } c_\lambda > 0, \quad \sum_{\lambda\in\Lambda_n} c_\lambda = 1.$$

Współczynniki c_λ mają precyzyjny opis kombinatoryczny i definiują pewną miarę na Λ_n, zwaną *miarą Plancherela*. W [29] Kerov i Vershik pokazali, że przy $n \to \infty$ kształt typowego diagramu Younga (po odpowiednim przeskalowaniu) dąży do pewnej krzywej. Własność ta była następnie badana przez wielu autorów. Znaleziono w szczególności ważne związki z wartościami własnymi macierzy losowych (zob. [6] i bibliografię tamże).

3 Użyte metody i zaobserwowane własności

W tym rozdziale omawiam metody, których używam do badania charakterów i reprezentacj grup dyskretnych, oraz rozmaite własności charakterów, które można zaobserwować.

3.1 Konstrukcja Gelfanda-Naimarka-Segala i reprezentacje faktorialne

Jedną z ważnych metod badania charakterów jest zastosowanie teorii reprezentacj grup. Jak widzieliśmy we wstępie, reprezentacje pewnego typu prowadzą do charakterów. Odwrotny kierunek jest też możliwy. Niech χ będzie charakterem grupy przeliczalnej G. Wtedy istnieje reprezentacja π grupy G w pewnej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ z wyróżnionym wektorem ξ o tej własności, że

$$\chi(g) = (\pi(g)\xi, \xi) \text{ dla każdego } g \in G, \tag{3.1}$$

gdzie $(\cdot, \cdot)$ jest iloczynem skalarnym w $\mathcal{H}$. Trójkę $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ nazywamy *konstrukcją Gelfanda-Naimarka-Segala* (w skrócie konstrukcją GNS). Opis tej konstrukcji wraz z pewnymi jej dodatkowymi własnościami można znaleźć np. w [H6].

Jeśli S jest pewnym zbiorem operatorów w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, to jego *komutant* S' składa się z wszystkich operatorów przemiennych z operatorami z S:

$$S' = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : AB = BA \text{ dla każdego } B \in S\},$$

gdzie $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ jest algebrą wszystkich ograniczonych operatorów liniowych w $\mathcal{H}$. Jeśli π jest reprezentacją unitarną grupy G, oznaczmy przez $\mathcal{M}_\pi$ algebrę von Neumanna generowaną przez operatory reprezentacji π. Algebrę tę można otrzymać jako drugi komutant zbioru $S = \pi(G) = \{\pi(g) : g \in G\}$, tj. $\mathcal{M}_\pi = (\pi(G))''$.

Definicja 7. Reprezentację π grupy G nazywamy *faktorialną*, jeśli $\mathcal{M}_\pi$ jest faktorem, tj. ma trywialne centrum: $\mathcal{M}_\pi \cap \mathcal{M}'_\pi = \mathbb{C}\mathrm{Id}$.

Konstrukcja GNS prowadzi do bijekcji między charakterami nieprzywiedlnymi grupy G a reprezentacjami faktorialnymi typu skończonego. W ten sposób opis charakterów sprowadza się do opisu reprezentacji. W moich pracach stosuję rozmaite metody teorii reprezentacji, aby uzyskać rezultaty dotyczące charakterów. Reprezentacji można też użyć, by wykazać, że dana funkcja χ na grupie G jest charakterem. Bezpośredni dowód, że χ spełnia warunek 2) definicji 1, może być skomplikowany; niekiedy prościej jest wskazać reprezentację π typu skończonego mającą ślad tr na algebrze $\mathcal{M}_\pi$ i taką, że $\chi(g) = \mathrm{tr}(\pi(g))$ dla każdego $g \in G$. W pracy [13] (wspólnej z Nessonovem) wykorzystaliśmy tę ideę, by skonstruować charaktery nieprzywiedlne na nieskończonych produktach wiankowych $S(\infty) \ltimes \Gamma^\infty$.

3.2 Konstrukcja grupoidowa

Opiszemy tu inną ważną konstrukcję reprezentacji, zwaną *konstrukcją grupoidową*. Szczegóły można znaleźć w [19].

Niech (X, μ) będzie standardową przestrzenią probabilistyczną, na której grupa przeliczalna G działa z zachowaniem miary. Oznaczmy przez $\mathcal{R}$ relację równoważności orbitalnej na X:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in X \times X : y = gx \text{ dla pewnego } g \in G\}.$$

Dla $A \subset \mathcal{R}$ i $x \in X$ definiujemy $A_x = A \cap (X \times \{x\})$. Określamy miarę ν na $\mathcal{R}$ wzorem

$$\nu(A) = \int_X |A_x| d\mu(x).$$

Definicja 8. (Lewa) *reprezentacja grupoidowa* grupy G to reprezentacja unitarna π w $L^2(\mathcal{R}, \nu)$ określona wzorem

$$(\pi(g)f)((x, y)) = f(g^{-1}x, y).$$

Niech ξ będzie wektorem jednostkowym danym przez $\xi(x, y) = \delta_{x,y} \in L^2(\mathcal{R}, \nu)$, gdzie $\delta_{x,y}$ jest deltą Kroneckera. Zauważmy, że

$$(\pi(g)\xi, \xi) = \mu(\mathrm{Fix}(g)) \text{ dla każdego } g \in G.$$

Funkcja $\chi(g) = \mu(\mathrm{Fix}(g))$ jest zatem dodatnio określona (spełnia warunek 2) definicji 1) i jest charakterem.

Konstrukcję grupoidową można także wykorzystać, aby uzyskać informacje o działaniach grupy przeliczalnej na borelowskich przestrzeniach probabilistycznych na podstawie własności charakterów tej grupy. Na przykład w pracy [H5] stosujemy tę metodę, by udowodnić następujący rezultat (zob. też [38]):

Twierdzenie 9. *Załóżmy, że każda faktorialna reprezentacja typu skończonego przeliczalnej ICC grupy G jest albo przeliczalna, albo typu I, oraz że G ma co najwyżej przeliczalnie wiele reprezentacji faktorialnych typu skończonego. Wtedy każde wierne działanie ergodyczne grupy G zachowujące miarę jest zasadniczo wolne.*

Rezultat ten wykorzystaliśmy do udowodnienia, że wierne działania ergodyczne prostych grup Higmana-Thompsona są zasadniczo wolne.

3.3 Multiplikatywność charakterów nieprzywiedlnych

Dla wielu ważnych przykładów grup (w tym dla większości grup rozważanych w tym autoreferacie) charaktery nieprzywiedlne mają pewną *własność multiplikatywności*, która ułatwia ich opis. Własność ta z grubsza stwierdza, że dla elementów $g_1, g_2 \in G$ spełniających pewne warunki mamy

$$\chi(g_1 g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2)$$

dla *dowolnego* charakteru nieprzywiedlnego grupy G. Aby to zilustrować, rozważmy nieskończoną grupę symetryczną $S(\infty)$, czyli grupę bijekcji zbioru $\mathbb{N}$ ruszających jedynie skończenie wiele elementów. Dla $s \in S(\infty)$ oznaczmy przez $\mathrm{supp}(s)$ zbiór tych liczb całkowitych, których s nie pozostawia na miejscu. Własność multiplikatywności dla $S(\infty)$ jest następująca:

Stwierdzenie 10. *Niech χ będzie charakterem nieprzywiedlnym grupy $S(\infty)$. Wtedy $\chi(s_1 s_2) = \chi(s_1)\chi(s_2)$ dla dowolnych $s_1, s_2 \in S(\infty)$ spełniajacych warunek* $\mathrm{supp}(s_1) \cap \mathrm{supp}(s_2) = \varnothing$.

Naszkicujemy dowód dla elementów specjalnego typu. Dla $i \in \mathbb{N}$ niech $\sigma_i \in S(\infty)$ zamienia miejscami i oraz $i+1$, a inne elementy pozostawia na miejscu. Niech $i, k \in \mathbb{N}$, $k > i+1$. Rozważmy konstrukcję GNS $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ odpowiadającą χ. Zauważmy, że dla $l > k$ elementy $\sigma_i\sigma_k$ i $\sigma_i\sigma_l$ są sprzężone. Zatem

$$\chi(\sigma_i\sigma_k) = \chi(\sigma_i\sigma_l) = (\pi(\sigma_i\sigma_l)\xi, \xi). \tag{3.2}$$

Przyjmijmy dla prostoty, że ciąg operatorów $\pi(\sigma_l)$ jest zbieżny (w słabej topologii operatorowej) do pewnego operatora A (w przeciwnym razie przechodzimy do zbieżnego podciągu). Ponieważ każdy element $g \in S(\infty)$ rusza tylko skończenie wiele liczb całkowitych, dla dużych l operatory $\pi(\sigma_l)$ i $\pi(g)$ są ze sobą przemienne. Wynika stąd, że A komutuje ze wszystkimi operatorami $\pi(g)$, $g \in S(\infty)$, a więc $A \in \mathcal{M}_\pi'$. Z drugiej strony $A \in \mathcal{M}_\pi$, jako granica operatorów reprezentacji π. Wobec tego $A \in \mathcal{M}_\pi \cap \mathcal{M}_\pi' = \mathbb{C}\mathrm{Id}$, ponieważ π jest reprezentacją faktorialną. Ponadto σ_l jest sprzężone z σ_k dla każdego l, a zatem

$$(A\xi, \xi) = \lim(\pi(\sigma_l)\xi, \xi) = \lim \chi(\sigma_l) = \chi(\sigma_k).$$

Wynika stąd, że $A = \chi(\sigma_k)\mathrm{Id}$. Przechodząc do granicy $l \to \infty$ w (3.2), otrzymujemy żądany rezultat:

$$\chi(\sigma_i\sigma_k) = (\pi(\sigma_i)A\xi, \xi) = \chi(\sigma_k)(\pi(\sigma_i)\xi, \xi) = \chi(\sigma_i)\chi(\sigma_k).$$

W pracach [H4-H7] udowodniliśmy różnego rodzaju własności multiplikatywne dla różnych klas grup. Własności te zostały wykorzystane do klasyfikacji charakterów nieprzywiedlnych.

3.4 Rozszerzanie reprezentacji

Reprezentację grupy nieskończonej G można niekiedy rozszerzyć na inny, większy obiekt algebraiczny zawierający G (np. półgrupę). Badając rozszerzoną reprezentację, można często uzyskać wartościowe informacje o reprezentacji wyjściowej. Metoda ta została spopularyzowana przez G. Olshanskiego, który w [37] zastosował ją efektywnie do badania reprezentacji pewnych grup związanych z $S(\infty)$.

Zilustrujemy tę metodę na przykładzie reprezentacji faktorialnej skończonego typu grupy $S(\infty)$; niech π będzie taką reprezentacją. Dla $i \neq k \in \mathbb{N}$ niech $\sigma_{i,k} \in S(\infty)$ oznacza permutację zamieniającą miejscami i oraz k i nieruszającą pozostałych liczb całkowitych. W poprzednich oznaczeniach $\sigma_i = \sigma_{i,i+1}$. Można pokazać, że istnieje słaba granica operatorowa

$$\mathcal{O}_i = \lim_{k\to\infty} \pi(\sigma_{i,k}) \tag{3.3}$$

(zob. [37] lub [36]). Granice te są parami przemienne ze sobą dla różnych $i \in \mathbb{N}$, a także zachodzą naturalne relacje komutacyjne z operatorami reprezentacji: $\pi(s)\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{s(i)}\pi(s)$ dla każdego $s \in S(\infty)$, $i \in \mathbb{N}$. Pozwala to na rozszerzenie reprezentacji π z $S(\infty)$ na półgrupę $S(\infty) \ltimes \mathbb{Z}_+^\infty$ za pomocą wzoru $\pi(e_i) = \mathcal{O}_i$, gdzie $e_i \in \mathbb{Z}_+^\infty$ ma 1 na miejscu i oraz 0 na pozostałych miejscach. W istocie Olshanski [37] pokazał, że π można rozszerzyć do pewnej *półgrupy chipów*, której tu nie rozpatrujemy, by uniknąć szczegółów technicznych.

W [36], stosując metody kombinatoryczne, Okunkov pokazał, że $\mathcal{O}_i$ ma widmo czysto punktowe złożone z dwóch (skończonych lub nieskończonych) ciągów $\{\alpha_j\}, \{-\beta_k\}$, gdzie $\alpha_j, \beta_k > 0$ oraz

$$\sum_j \alpha_j + \sum_k \beta_k \leqslant 1.$$

Okunkov podał nowy dowód opisu charakterów nieprzywiedlnych $S(\infty)$ z pracy Thoma [41]. Ciągi $\{\alpha_j\}, \{\beta_k\}$ są parametrami Thoma charakteru nieprzywiedlnego, odpowiadającego π. W pracach [13], [14] i [15] (wspólnych z Nessonovem) zastosowaliśmy operatory Okunkova $\mathcal{O}_i$ do opisu reprezentacji faktorialnych typu skończonego oraz charakterów nieprzywiedlnych nieskończonych produktów wiankowych $S(\infty) \ltimes \Gamma^\infty$.

Metoda półgrupowa znajduje również zastosowanie dla grup działających na przestrzeniach borelowskich lub topologicznych. Załóżmy, że grupa G działa na przestrzeni topologicznej X. Oznaczmy przez $\operatorname{supp}(g) = \{x \in X : gx \neq x\}$ nośnik elementu $g \in G$. Dla każdego podzbioru otwartego $A \subset X$ rozpatrujemy podgrupę elementów o nośniku w A:

$$G_A = \{g \in G : \operatorname{supp}(g) \subset A\}.$$

Niech π będzie reprezentacją grupy G w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Rozważmy podprzestrzeń wektorów G_A-niezmienniczych:

$$\mathcal{H}_A = \{\eta \in \mathcal{H} : \pi(g)\eta = \eta \text{ dla każdego } g \in G_A\}.$$

Niech P_A będzie rzutowaniem ortogonalnym na $\mathcal{H}_A$. Rzutowania te spełniają naturalne relacje komutacyjne z operatorami reprezentacji π:

$$\pi(g)P_A = P_{g(A)}\pi(g).$$

Rzutowania P_A i P_B nie są na ogół ze sobą przemienne, jeśli $A \cap B \neq \varnothing$. W pracy [H6] (wspólnej z Medynetsem) pokazaliśmy jednak, że jeśli grupa aproksymatywnie skończona G działa na przestrzeni dróg X diagramu Brattelego oraz π jest reprezentacją faktorialną typu skończonego, to

$$P_A P_B = P_B P_A = P_{A\cup B} \text{ dla dowolnych otwarto-domkniętych } A, B \subset X.$$

Wtedy π oraz χ można rozszerzyć do reprezentacji półgrupy $G \ltimes \Sigma_X$, gdzie Σ_X jest półgrupą abelową podzbiorów domkniętych w X z mnożeniem $A \cdot B = A \cup B$. Rzutowania P_A grają istotną rolę w opisie charakterów nieprzywiedlnych grup aproksymatywnie skończonych. W pracy [H4] (z Grigorchukiem) zastosowaliśmy je do badania charakterów grup słabo gałęziowych, a także w pracy [H7] (z Medynetsem) do badania IRS w grupach aproksymatywnie skończonych.

4 Główne rezultaty

Poniżej opisuję główne rezultaty pracy habilitacyjnej (4.1-4.4). W podrozdziałach 4.5-4.6 krótko omawiam niektóre inne moje wyniki.

4.1 Grupy aproksymatywnie skończone

Grupy aproksymatywnie skończone można wygodnie opisać jako grupy działające na diagramach Brattelego.

Definicja 11. *Diagram Brattelego* to graf nieskończony $B = (V, E)$, którego zbiór wierzchołków $V = \bigcup_{i \geqslant 0} V_i$ i zbiór krawędzi $E = \bigcup_{i \geqslant 1} E_i$ mają rozkłady na rozłączne zbiory V_i oraz E_i (poziomy diagramu), przy czym
(i) $V_0 = \{v_0\}$ jest jednym punktem;
(ii) zbiory V_i i E_i są skończone;
(iii) każda krawędź z E_i łączy wierzchołek z V_{i-1} z wierzchołkiem z V_i.

Oznaczmy przez X_B zbiór wszystkich nieskończonych dróg w B zaczynających się w v_0i przechodzących przez każdy poziom V_i dokładnie raz. Wprowadzamy w X_B topologię generowaną przez zbiory cylindryczne $U(e_1, \ldots, e_n) = \{x \in X_B : x_i = e_i,\ i = 1, \ldots, n\}$, gdzie $(e_1, \ldots, e_n)$, $e_j \in E_j$, jest skończoną drogą w B. Przestrzeń X_B z tą topologią jest przestrzenią Cantora. Jeśli B jest diagramem Brattelego, to dla każdego $n \geqslant 1$ oznaczamy przez G_n grupę tych homeomorfizmów przestrzeni X_B, które permutują jedynie pierwsze n początkowych odcinków dróg nieskończonych $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1} \ldots\} \in X_B$. Przyjmijmy $G_B = \bigcup_{n \geqslant 1} G_n$.

Definicja 12. Grupę G_B nazywamy *pełną grupą* diagramu Brattelego B.

Pełne grupy diagramów Brattelego nazywa się też grupami aproksymatywnie skończonymi.

Pewne własności dynamiczne i algebraiczne pełnych grup diagramów Brattelego są wyznaczone przez własności kombinatoryczne diagramów Brattelego (zob. [H6], roz. 2.1).

Uwaga 1. Niech $B = (V, E)$ będzie diagramem Brattelego, a G_B jego pełną grupą.

1. Układ dynamiczny (X_B, G_B) jest minimalny, tj. każda G_B-orbita jest gęsta, wtedy i tylko wtedy, gdy diagram B jest *prosty*, tzn. dla każdego $n \geqslant 1$ istnieje $m > n$ takie, że każdy wierzchołek z V_n jest połączony z każdym wierzchołkiem z V_m.

2. Układ dynamiczny (X_B, G_B) jest minimalny wtedy i tylko wtedy, gdy komutant grupy G_B jest grupą prostą, tj. nie ma nietrywialnych podgrup normalnych.

3. Grupa G_B jest prosta wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $n \geqslant 1$ istnieje $m > n$ takie, że każdy wierzchołek z V_n jest połączony z każdym wierzchołkiem z V_m oraz liczba dróg łączących te wierzchołki jest parzysta. Takie diagramy Brattelego nazywamy *parzystymi*. Grupa G_B pokrywa się wtedy ze swoim komutantem.

4. Przypuśćmy, że istnieje $d \in \mathbb{N}$ takie, że $|V_i| \leqslant d$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Wtedy układ dynamiczny (X_B, G_B) ma co najwyżej d niezmienniczych miar ergodycznych.

Główny rezultat pracy [H6] jest następujący:

Twierdzenie 13. *Niech G_B będzie pełną grupą prostego diagramu Brattelego B. Załóżmy, że grupa G_B jest prosta i (G_B, X_B) ma skończenie wiele niezmienniczych miar ergodycznych $\mu_1, \ldots, \mu_k$. Dla każdego charakteru nieprzywiedlnego χ grupy G_B istnieją parametry $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \{0, 1, \ldots, \infty\}$ takie, że*

$$\chi(g) = \mu_1(\mathrm{Fix}(g))^{\alpha_1} \cdots \mu_k(\mathrm{Fix}(g))^{\alpha_k} \tag{4.1}$$

dla każdego $g \in G$. Tutaj $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X_B : g(x) = x\}$.

Zauważmy, że wzór (4.1) można zapisać, wykorzystując odzorowanie (2.1) prowadzące od miar do charakterów. Rozważmy mianowicie miarę $\mu_\alpha = \mu_1^{\otimes\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \mu_k^{\otimes\alpha_k}$ na $X_B^{\alpha_1+\ldots+\alpha_k}$. Wtedy wzór (4.1) można zapisać jako $\chi(g) = \mu_\alpha(\mathrm{Fix}(g))$, $g \in G$. Twierdzenie 13 potwierdza zatem hipotezę Vershika dla klasy AF-grup. Ponadto, wykorzystując rezultaty pracy [H6], w [H7] pokazaliśmy, że wszystkie nietrywialne ergodyczne podgrupy losowe dla AF-grup są postaci $\varphi = \Psi_*\mu_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^k$ (zob. (2.2)).

4.2 Działania ścieśnialne i grupy Higmana-Thompsona

Definicja 14. Niech n i r będą ustalonymi liczbami naturalnymi. Grupa $F_{n,r}$ składa się z tych kawałkami liniowych, rosnących homeomorfizmów h przedziału $[0, r]$, których punkty osobliwe należą do zbioru $\mathbb{Z}[1/n] = \{\frac{p}{n^k} : p, k \in \mathbb{N}\}$, przy czym pochodna funkcji h w każdym punkcie nieosobliwym jest równa n^k dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

Grupa $G_{n,r}$ składa się z tych prawostronnie ciągłych bijekcji przedziału $[0, r)$ na siebie, które są kawałkami liniowe, mają skończenie wiele punktów nieciągłości i punktów osobliwych i wszystkie te punkty należą do $\mathbb{Z}[1/n]$; ponadto wszystkie nachylenia funkcji należą do $\{n^k : k \in \mathbb{Z}\}$ i funkcja przeprowadza $\mathbb{Z}[1/n] \cap [0, r)$ na siebie.

Zauważmy, że $F_{n,r} \subset G_{n,r}$. W istocie, $F_{n,r}$ składa się dokładnie z tych elementów $g \in G_{n,r}$, które są ciągłe. Komutanty grup $F_{n,r}$ i $G_{n,r}$ są proste. Abelianizacja grupy $F_{n,r}$ jest izomorficzna z $\mathbb{Z}^n$ (zob. [8], roz. 4). Abelianizacja grupy $G_{n,r}$ jest trywialna dla n parzystego i równa $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dla n nieparzystego (zob. [28]).

W pracy [H5], aby badać charaktery grup Higmana-Thompsona, wprowadzamy pojęcie *działań ścieśnialnych*. Załóżmy, że grupa G działa na nieskończonej przestrzeni topologicznej Hausdorffa X. Dla $g \in G$ definiujemy *nośnik* wzorem $supp(g) = \overline{\{x \in X : g(x) \neq x\}}$.

Definicja 15. Mówimy, że działanie grupy G na X jest *ścieśnialne*, jeśli istnieje baza $\mathfrak{U}$ topologii w X o następujących własnościach:

(i) dla każdego $g \in G$ istnieje $U \in \mathfrak{U}$ takie, że $\mathrm{supp}(g) \subset U$;

(ii) dla każdego $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$ istnieje $g \in G$ takie, że $g(U_1) \subset U_2$;

(iii) dla dowolnych $U_1, U_2, U_3 \in \mathfrak{U}$ z $\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 = \varnothing$ istnieje $g \in G$ takie, że $g(U_1) \cap U_3 = \varnothing$ oraz $\mathrm{supp}(g) \cap U_2 = \varnothing$.

(iv) dla dowolnych $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$ istnieje $U_3 \in \mathfrak{U}$ takie, że $U_3 \supset U_1 \cup U_2$.

Udowodniamy:

Twierdzenie 16. *Załóżmy, że prosta grupa przeliczalna G ma działanie ścieśnialne na regularnej przestrzeni Hausdorffa X. Wtedy każdy charakter grupy G jest kombinacją liniową charakteru regularnego i charakteru trywialnego.*

Dowodzimy również, że komutant $F'_{n,r}$ ma działanie ścieśnialne na $[0, r]$, skąd wywnioskowujemy:

Twierdzenie 17. *Niech $G = F_{n,r}$ lub $G = G_{n,r}$ dla pewnych n, r. Wtedy G' ma tylko dwa charaktery nieprzywiedlne: regularny i trywialny. Jesli χ jest charakterem nieprzywiedlnym grupy G, to albo χ jest charakterem regularnym, albo $\chi(g) = \rho([g])$, gdzie $[g]$ jest obrazem elementu g w abelianizacji G/G', a $\rho : G/G' \to \mathbb{T}$ jest pewnym homomorfizmem grup.*

Stąd otrzymujemy wniosek, że wszystkie wierne działania ergodyczne grup Higmana-Thompsona, zachowujące miarę, są zasadniczo wolne.

Jako zastosowanie działań ścieśnialnych i twierdzenia 16, w [H5] udowodniliśmy twierdzenie 17 dla pełnych grup nieredukowalnych przesunięć typu skończonego. Definicje można znaleźć w [34].

4.3 Grupy słabo gałęziowe

Grupy słabo gałęziowe to klasa grup działających na *drzewach ukorzenionych*. Dla prostoty ograniczymy się do *regularnych drzew ukorzenionych*.

Definicja 18. *d-regularne drzewo ukorzenione* T_d to drzewo, którego zbiór wierzchołków ma rozkład $V = \bigcup_{i \geqslant 0} V_i$ na rozłączne zbiory V_i (poziomy drzewa) o następujących własnościach:
(i) $V_0 = \{v_0\}$ jest pojedynczym wierzchołkiem, połączonym z d wierzchołkami z V_1;
(ii) każdy wierzchołek z V_n dla $n \in \mathbb{N}$ jest połączony z dokładnie $d + 1$ wierzchołkami: jednym z V_{n-1} i d wierzchołkami z V_{n+1}.

Ustalmy $d \geqslant 2$. Niech $\mathrm{Aut}(T_d)$ oznacza grupę wszystkich automorfizmów grafu T_d. Zauważmy, że elementy grupy $\mathrm{Aut}(T_d)$ zachowują poziomy V_n. Brzeg ∂T_d to zbiór wszystkich nieskończonych dróg w T_d o początku w v_0 i przechodzących przez każdy poziom V_n dokładnie jeden raz. Dla każdego $v \in V_n$ istnieje poddrzewo $T_v \subset T_d$ z korzeniem w v, izomorficzne z T_d. Niech $\partial T_v \subset \partial T_d$ będzie jego brzegiem. Wprowadźmy w ∂T_d topologię generowaną przez zbiory ∂T_v, $v \in V$. Grupa $\mathrm{Aut}(T_d)$ działa w sposób ciągły na ∂T_d. Przestrzeń ∂T ma dokładnie jedną miarę $\mathrm{Aut}(T_d)$-niezmienniczą μ. Jest to miara Bernoullego taka, że $\mu(\partial T_v) = \frac{1}{d^n}$ dla każdego $v \in V_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Niech $G < \mathrm{Aut}(T_d)$. Dla $n \in \mathbb{N}$ i $v \in V_n$ oznaczmy przez $\mathrm{St}_G(v)$ stabilizator wierzchołka v, a przez $\mathrm{St}_G(n)$ podgrupę stabilizującą wszystkie punkty z V_n:

$$\mathrm{St}_G(v) = \{g \in G : gv = v\}, \quad \mathrm{St}_G(n) = \bigcap_{v \in V_n} \mathrm{St}_G(v).$$

Zauważmy, że podgrupy $\mathrm{St}_G(n)$, $n \in \mathbb{N}$, są normalne w G i mają skończony indeks. Definiujemy *sztywny stabilizator* $\mathrm{rist}_G(v)$ wierzchołka v jako podgrupę tych elementów $g \in G$. które działają trywialnie na poddrzewie T_v. Sztywny stabilizator n-tego poziomu definiujemy jako podgrupę generowaną przez sztywne stabilizatory wszystkich wierzchołków $v \in V_n$, tj.

$$\mathrm{rist}_G(n) = \langle \mathrm{rist}_G(v) : v \in V_n \rangle.$$

Definicja 19. Grupę $G < \mathrm{Aut}(T_d)$ nazywamy *gałęziową*, jeśli działa w sposób przechodni na każdym poziomie V_n drzewa T_d, przy czym dla każdego n podgrupa $\mathrm{rist}_G(n)$ ma skończony indeks w G. Grupę $G < \mathrm{Aut}(T_d)$ nazywamy *słabo gałęziową*, jeśli działa w sposób przechodni na każdym poziomie V_n oraz grupa $\mathrm{rist}_G(n)$ jest nieskończona dla każdego n (równoważnie, grupa $\mathrm{rist}_G(v)$ jest nietrywialna dla każdego wierzchołka v).

Zauważmy, że każda grupa gałęziowa jest słabo gałęziowa. Z Proposition 6.5 w pracy [26] wynika, że $(G, \partial T_d, \mu)$ jest ergodyczne wtedy i tylko wtedy, gdy działanie G jest przechodnie na każdym poziomie V_n. Podobnie rzecz się ma dla innych własności, jak minimalność, topologiczna przechodniość i jednoznaczna ergodyczność. W szczególności działanie grup słabo gałęziowych na $(\partial T_d, \mu)$ jest ergodyczne.

Dla $n \in \mathbb{N}$ i $G < \mathrm{Aut}(T_d)$ rozważmy działanie diagonalne grupy G na $(\partial T_d^n, \mu^{\otimes n})$:

$$g(x_1, \ldots, x_n) = (gx_1, \ldots, gx_n) \text{ dla } g \in G, \ (x_1, \ldots, x_n) \in \partial T_d^n.$$

W [H4] udowodniliśmy

Stwierdzenie 20. *Dla każdej grupy słabo gałęziowej $G < \mathrm{Aut}(T_d)$ i każdego $n \in \mathbb{N}$ działanie diagonalne grupy G na $(\partial T_d^n, \mu^{\otimes n})$ jest perfekcyjnie niewolne (zob. definicję 5). Jeśli grupa G jest gałęziowa oraz $n \geqslant 2$, to działanie to ma nieskończenie (przeliczalnie) wiele składowych ergodycznych.*

Jako wniosek, dla każdej grupy gałęziowej otrzymaliśmy nieskończenie (przeliczalnie) wiele charakterów nieprzywiedlnych i ergodycznych losowych podgrup niezmienniczych.

Przypomnijmy, że jeśli T jest d-regularnym drzewem ukorzenionym, to jego brzeg ∂T można utożsamić z przestrzenią ciągów $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, gdzie $x_j \in \{1, \ldots, d\}$. Niech

$$\mathcal{P} = \left\{ p = (p_1, p_2, \ldots, p_d) : p_i > 0 \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, d \text{ oraz } \sum_{i=1}^{d} p_i = 1 \right\} \tag{4.2}$$

będzie zbiorem wszystkich rozkładów prawdopodobieństwa na alfabecie $\{1, 2, \ldots, d\}$, przypisujących dodatnie prawdopodobieństwo każdej literze, oraz niech

$$\mathcal{P}^* = \{p \in \mathcal{P} : p_i \neq p_j \text{ dla dowolnych } 1 \leqslant i < j \leqslant d\}. \tag{4.3}$$

Dla $p \in \mathcal{P}$ oznaczmy przez $\mu_p = \prod_{\mathbb{N}} p$ miarę Bernoullego na ∂T. Gówny rezultat pracy [H2] jest następujący:

Twierdzenie 21. *Niech G będzie przeliczalną, podwykładniczo ograniczoną grupą słabo gałęziową, działającą na pewnym regularnym drzewie ukorzenionym, oraz niech $p \in \mathcal{P}^*$. Wtedy:*

1) *reprezentacja Koopmana κ_p stowarzyszona z działaniem grupy G na $(\partial T, \mu_p)$ jest nieprzywiedlna;*

2) *reprezentacja ta nie jest unitarnie równoważna żadnej reprezentacji kwaziregularnej $\rho_x, x \in \partial T$;*

3) *reprezentacje Koopmana odpowiadające różnym $p \in \mathcal{P}^*$ są parami rozłączne.*

„Grupa podwykładniczo ograniczona” oznacza tu grupę podwykładniczo ograniczonych automorfizmów drzewa T. Zauważmy, że na mocy tego twierdzenia dla każdej grupy słabo gałęziowej otrzymujemy kontinuum różnych nieprzywiedlnych reprezentacji Koopmana.

4.4 Widma reprezentacji związanych z działaniami grup

W [H3] badaliśmy z Grigorchukiem związki pomiędzy własnościami spektralnymi reprezentacji Koopmana, kwaziregularnych i grupoidowych. Dla danej reprezentacji unitarnej U grupy G i danego elementu $m \in \mathbb{C}[G]$ (lub ogólnie $m \in l^1(G)$) rozważmy operator typu Hecke

$$U(m) = \sum_{s \in G} m(s)U(s).$$

Oznaczmy przez $\sigma(A)$ widmo operatora A. Główny rezultat pracy [H3] jest następujący:

Twierdzenie 22. 1) *Jeśli grupa przeliczalna G działa ergodycznie na standardowej przestrzeni probabilistycznej (X, μ), zachowując miarę, oraz $m \in \mathbb{C}[G]$, to*

$$\sigma(\kappa(m)) \supset \sigma(\rho_x(m)) = \sigma(\pi(m)) \tag{4.4}$$

dla μ-prawie wszystkich $x \in X$, gdzie κ jest reprezentacją Koopmana, π jest reprezentacją grupoidową stowarzyszoną z działaniem G na X, a ρ_x są reprezentacjami kwaziregularnymi.
2) *Jeśli ponadto (G, X, μ) jest hiperskończone, to*

$$\sigma(\kappa(m)) = \sigma(\pi(m)). \tag{4.5}$$

3) *Jeśli zachodzą założenia punktu* 1) *oraz miara μ jest G-niezmiennicza i nieatomowa, to $\sigma(\kappa_0(m)) = \sigma(\pi(m))$, gdzie κ_0 jest ograniczeniem reprezentacji κ do dopełnienia ortogonalnego przestrzeni funkcji stałych w $L^2(X, \mu)$.*

Jako zastosowanie znaleźliśmy widmo grupy torsyjnej $\mathcal{G} = \langle a, b, c, d \rangle$ pośredniego wzrostu skonstruowanej przez Grigorchuka w [25] i badanej w pracy [24] oraz w innych pracach.

Twierdzenie 23. *Widmem grafu Cayleya grupy $\mathcal{G}$ jest* $[-2, 0] \cup [2, 4]$.

4.5 Nieskończone produkty wiankowe

Niech Γ będzie grupą z topologią dyskretną, a Γ^n jej n-tym iloczynem kartezjańskim. Niech e będzie jedynką w Γ. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ grupa Γ^{n-1} zanurza się w Γ^n za pomocą wzoru

$$(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}) \to (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}, e).$$

Niech Γ^∞ oznacza granicę prostą grup Γ^n. Można ją uważać za grupę ciągów nieskończonych w Γ o prawie wszystkich elementach równych e. Nieskończona grupa symetryczna $S(\infty)$ działa na Γ^∞, permutując współrzędne. Iloczyn półprosty $S(\infty) \ltimes \Gamma^\infty$ nazywamy *nieskończonym produktem wiankowym.*

W pracy [13] klasyfikujemy charaktery nieprzywiedlne grupy $S(\infty) \ltimes \Gamma$. Aby uniknąć zbędnych szczegółów technicznych, opiszemy tu jedynie przestrzeń parametrów dla tych charakterów. Podobnie jak dla grupy $S(\infty)$, rozpatrujemy dwa (skończone lub nieskończone) ciągi nierosnące liczb $\alpha = \{\alpha_k\}$, $\beta = \{\beta_j\}$ spełniające warunek

$$\sum_k \alpha_k + \sum_j \beta_j \leqslant 1. \tag{4.6}$$

Niech $\rho = \{\rho_k\}$, $\varrho = \{\varrho_j\}$ będą dwoma ciągami (tej samej mocy co odpowiednio α i β) skończenie wymiarowych reprezentacji nieprzywiedlnych grupy Γ o tej własności, że

$$\sum_k \alpha_k \cdot \dim \rho_k + \sum_j \beta_j \cdot \dim \varrho_j \leqslant 1.$$

Jeśli nierówność ta jest ostra, oznaczmy przez τ reprezentację grupy Γ *typu skończonego;* w przeciwnym razie niech τ oznacza funkcję na Γ tożsamościowo równą zeru. Pokazujemy, że charaktery nieprzywiedlne grupy $S(\infty) \ltimes \Gamma^\infty$ są sparametryzowane przez powyższe rodziny liczb i reprezentacji $\{\alpha, \beta, \rho, \varrho, \tau\}$, np. istnieje bijekcja między zbiorem takich rodzin a zbiorem charakterów nieprzywiedlnych grupy $S(\infty) \ltimes \Gamma^\infty$.

4.6 Rezultaty z dynamiki holomorficznej

Dynamika holomorficzna bada iteracje odwzorowań holomorficznych (tj. analitycznych w sensie zespolonym). Typowe przykłady to wielomiany i funkcje wymierne. Jednym z kluczowych obiektów zainteresowania jest zbiór tych punktów, dla których iteracje danego odwzorowania zachowują się chaotycznie, tzw. *zbiór Julii.* W szeregu prac badałem *złożoność obliczeniową* zbiorów Julii. Z grubsza mówiąc, chodziło o ustalenie, jak szybko można uzyskać za pomocą komputera dokładne aproksymacje danego zbioru Julii. Znalazłem kilka ważnych przypadków, w których ta złożoność jest *wielomianowa*, co pozwala na uzyskiwanie efektywnych obrazów na ekranie:

- odwzorowania wymierne z nierekurentnymi orbitami krytycznymi
  [12];
- odwzorowania wymierne spełniające *warunek Colleta-Eckmanna*
  [17] (praca wspólna z Yampolskim);
- wielomiany Feigenbauma drugiego stopnia
  [18] (praca wspólna z Yampolskim).

Jednym z najważniejszych moich rezultatów w dynamice holomorficznej jest rozstrzygnięcie dawno postawionego pytania o to, czy zbiór Julii znanego wielomianu Feigenbauma ma dodatnią miarę. Wspólnie z Sutherlandem pokazaliśmy [16], że zbiór ten ma wymiar Hausdorffa mniejszy niż 2, a zatem ma miarę zero.

Przedmiotem mojej **pracy doktorskiej** były dwie kwestie:
1) wielomianowa złożoność obliczeniowa dla zbiorów Julii odwzrorowań wymiernych z nierekurentnymi orbitami krytycznymi;
2) opis dynamiki odwzorowań wymiernych, które mają prosty paraboliczny punkt stały (tj. punkt stały o krotności 1 z niezerową drugą pochodną w tym punkcie), z użyciem *teorii odradzania* (resurgent theory).

5 Curriculum vitae

5.1 Granty, nagrody i wyróżnienia

- Grant Polonez Polskiego Centrum Nauki, 2017-2019 (główny badacz).

- Daniel B. DeLury Teaching Award, University of Toronto, 2012.
- Connaught Graduate Scholarship, 2008-2012 (Connaught Foundation).
- Ontario Graduate Scholarship, 2008-2011.
- Nagroda Akademii Nauk Ukrainy, 2007.
- Srebrne medale Międzynarodowych Olimpiadach Matematycznych, Glasgow, 2002, i Washington, 2001.

5.2 Wystąpienia na zaproszenie na konferencjach

- January 28, 2019, Can one hear the shape of a group?, Alfred Renyi Institute of Mathematics, Budapest, Hungary.
- January 17, 2019, On computational complexity of Cremer Julia sets, Ergodic Theory and Dynamical Systems Seminar, University of Warwick, Coventy, UK.
- January 15, 2019, On Hausdorff dimension of the Feigenbaum Julia set, Dynamical Systems Seminar, Imperial College London, UK.
- July 23, 2018, On Hausdorff dimension of the Feigenbaum Julia set, Dynamical Systems Seminar, University of Barcelona, Spain.
- July 5, 2018, On computability and computational complexity of Julia sets, New Developments in Complex Analysis and Function Theory, University of Crete, Heraklion, Greece.
- March 27, 2018, On the Lebesgue measure of the Feigenbaum Julia set, Algorithmic Questions in Dynamical Systems, Institut de Mathématiques de Toulouse, France.
- August 14, 2017, On the Julia set of the Feigenbaum quadratic polynomial, Conference "Just a little calculation in dynamics", Będlewo, Poland.
- April 5, 2016, On computational aspects of the Feigenbaum fixed point of period-doubling renormalization, Workshop "Computation in Dynamics", ICERM, Brown University, USA.
- March 20, 2016, On measure of the Feigenbaum fixed point Julia set, AMS special session "Holomorphic Dynamics", Spring Eastern Sectional Meeting, Stony Brook University, USA.
- February 26, 2016, On spectra of Koopman, groupoid and quasi-regular representations, New York Applied Algebra Collogquium, CUNY Graduate Center, USA.
- November 12, 2015, On Koopman, groupoid and quasi-regular representations and weakly branch groups, Conference "Geometric and Probabilistic Methods in Group Theory and Dynamical Systems", Texas A&M University, USA.

- September 12, 2014, On diagonal actions of branch groups and the corresponding characters, Linear Analysis Seminar, Texas A&M University, USA.

- September 10, 2014, Representations associated with group actions and spectra of Hecke type operators, Groups and Dynamics Seminar, Texas A&M University, USA.

- February 25, 2014, On characters of approximately finite groups and Higman-Thompson groups, Conference "Groups acting on rooted trees and around", Paris, France.

- December 8, 2013, The Julia set of the Feigenbaum map is poly-time computable, Section "Holomorphic dynamics and related topics", CMS Winter meeting, Ottawa, Canada.

5.3 Działalność organizacyjna

- Współorganizowanie konferencji "Dynamics, measures and dimensions", Będlewo, 7-12 kwietnia, 2019.

- Zima 2019 - dziś: współorganizowanie seminarium Holomorphic Dynamics Learning w IMPAN.

- Współorganizowanie konferencji "On geometric complexity of Julia sets", Będlewo, 18-23 marca, 2018.

- Jesień 2017 - dziś: współorganizowanie Dynamics Seminar w IMPAN.

- Jesień 2016 - wiosna 2017: współorganizowanie Dynamics Seminar i Dynamics Mini-Courses w Mathematics Department, University of Toronto.

- Współorganizowanie AMS special session on Holomorphic Dynamics at Spring Eastern Sectional Meeting, Stony Brook University, 19-20 kwietnia, 2016.

- Jesień 2012 – 2016: redaktor serii preprintów IMS.

- Jesień 2012: mini-kurs Dynamics of parabolic germs via Resurgent Theory.

- Jesień 2011: koordynowanie Dynamics Learning Seminar w Mathematics Department, University of Toronto.

- 2009 - 2010: prowadzenie Graduate Student Seminar w Mathematics Department, University of Toronto.

- 2008 – 2009: prowadzenie kółek matematycznych dla uczniów szkół średnich w University of Toronto, Mississauga i na kampusach St. George.

Recenzowanie prac do: Journal of European Mathematical Society, Mathematical Reports - Comptes rendus mathématiques, Communications in Mathematical Physics, Mathematical Reviews, Discrete and Continuous Dynamical Systems.

Bibliografia

[1] M. Abért, Y. Glasner i B. Virág. "Kesten's theorem for invariant random subgroups". W: *Duke Math. J.* 163.3 (2014), s. 465–488.

[2] U. Bader i R. Muchnik. "Boundary unitary representations - irreducibility and rigidity". W: *Journal of Modern Dynamics* 5.1 (2011), s. 49–69.

[3] B. Bekka. "Operator-algebraic superridigity for $SL_n(\mathbb{Z})$, $n \geqslant 3$". W: *Inventiones Mathematicae* 169 (2007), s. 401–425.

[4] M. E. B. Bekka i M. Cowling. "Some irreducible unitary representation of $G(K)$ for a simple algebraic group G over an algebraic number field K". W: *Math. Z.* 241.4 (2002), s. 731–741.

[5] F. Bencs i L. Tóth. "Invariant random subgroups of groups acting on rooted trees". W: *ArXiv e-prints* (2018). arXiv: `1801.05801 [math.GR]`.

[6] A. Borodin, A. Okounkov i G. Olshanski. "Asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups". W: *J. Amer. Math. Soc.* 13.3 (2000), s. 481–515.

[7] R. Boyer. "Character theory of infinite wreath product". W: *Int. J. Math. and Math. Sci.* 9 (2005), s. 1365–1379.

[8] K. Brown. "Finiteness properties of groups". W: *J. Pure Appl. Algebra* 44.1-3 (1987), s. 45–75.

[9] J. W. Cannon, J. W. Floyd i W. R. Parry. "Introductory notes on Richard Thompson's groups". W: *Enseign. Math. (2)* 42.3-4 (1996), s. 215–256.

[10] D. Creutz i J. Peterson. "Stabilizers of ergodic actions of lattices and commensurators". W: *Trans. Amer. Math. Soc.* 369.6 (2017), s. 4119–4166.

[11] A. Dudko. "Characters on the full group of an ergodic hyperfinite equivalence relation". W: *J. Funct. Anal.* 261.6 (2011), s. 1401–1414.

[12] A. Dudko. "Computability of the Julia set. Nonrecurrent critical orbits". W: *Discr. and Cont. Dynam. Sys.* 34.7 (2014), s. 2751–2778.

[13] A. Dudko i N. I. Nessonov. "A description of characters on infinite wreath product". W: *Methods Funct. Anal. Topology* 13.4 (2007), s. 301–317.

[14] A. Dudko i N. I. Nessonov. "Characters of projective representations of the infinite generalized symmetric group". W: *Mat. Sb.* 199.10 (2008), s. 3–32. *translation in Sb. Math.* 199.9-10 (2008), pp. 1421-1450.

[15] A. Dudko i N. I. Nessonov. "Projective characters of the infinite generalized symmetric group (Russian)". W: *Funktsional. Anal. i Prolozhen.* 42.1 (2008), s. 82–85. *translation in Funct. Anal. Appl.* 42.1 (2008), 69-71.

[16] A. Dudko i S. Sutherland. "On the Lebesgue measure of the Feigenbaum Julia set". W: *ArXiv e-prints* (2017). arXiv: `1712.08638 [math.DS]`.

[17] A. Dudko i M. Yampolsky. "Almost every real quadratic polynomial has a poly-time computable Julia set". W: *Found. Comp. Math.* 18.5 (2018), s. 1233–1243.

[18] A. Dudko i M. Yampolsky. “Poly-time computability of the Feigenbaum Julia set”. W: *Ergodic Theory and Dynam. Sys.* 36.8 (2016), s. 2441–2462.

[19] J. Feldman i C. Moore. “Ergodic Equivalence Relations, Cohomology, and Von Neumann Algebras. I”. W: *Trans. of the AMS* 2 (1977), s. 289–324.

[20] Ł. Garncarek. “Analogs of principal series representations for Thompson’s groups F and T”. W: *Indiana Univ. Math. J.* 61 (2012), s. 619–626.

[21] T. Giordano, I. F. Putnam i C. F. Skau. “Full groups of Cantor minimal systems”. W: *Israel J. Math.* 111 (1999), s. 285–320.

[22] T. Giordano, I. F. Putnam i C. F. Skau. “Topological orbit equivalence and C^*-crossed products”. W: *J. Reine Angew. Math.* 469 (1995), s. 51–111.

[23] E. Goryachko i F. Petrov. “Indecomposable characters of the group of rational rearrangements of a segment”. W: *Teoriya Predstavlenii, Dinamicheskie Sistemy, Kombinatornye Methody. XVI.* T. 360. Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Math. Inst. Setklov. (POMI). 2010, s. 17–31.

[24] R. Grigorchuk. “Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means (Russian)”. W: *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 48.5 (1984), s. 939–985.

[25] R. I. Grigorchuk. “Burnside’s problem on periodic groups”. W: *Funkts. Anal. Prilozh.* 14 (1) (1980), s. 53–54.

[26] R. I. Grigorchuk, V. Nekrashevich i V. I. Sushchanskii. “Automata, Dynamical Systems, and Groups”. W: *Tr. Math. Inst. im. V. A. Steklova, Ross. Akad. Nauk* 231 (2000), s. 134–214. Eng. transl. in Proc. Steklov Inst. Math. 231, pp. 128-203 (2000).

[27] R. H. Herman, I. F. Putnam i C. F. Skau. “Ordered Bratteli diagrams, dimension groups and topological dynamics”. W: *Internat. J. Math.* 3.6 (1992), s. 827–864.

[28] G. Higman. Notes on Pure Mathematics 8. Department of Pure Mathematics, Department of Mathematics, I.A.S. Australian National University, Canberra, 1974, s. vii+82.

[29] S. Kerov i A. Vershik. “Asymptotic behavior of the Plancherel measure of the symmetric group and the limit form of Young tableaux (Russian)”. W: *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 233.6 (1977), s. 1037–1040.

[30] S. Kerov i A. Vershik. “Asymptotic theory of the characters of a symmetric group”. W: *(Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 15.4 (1981), s. 15–27.

[31] A. A. Kirillov. “Positive definite functions on a group of matrices with elements from a discrete field”. W: *Sov. Math. Dokl.* 6 (1965), s. 707–709.

[32] G. Kuhn i T. Steger. “More irreducible boundary representations of free groups”. W: *Duke Math. J.* 82.2 (1996), s. 381–435.

[33] F. Leinen i O. Puglisi. “Positive definite functions of diagonal limits of finite alternating groups”. W: *J. London Math. Soc. (2)* 70.3 (2004), s. 678–690.

[34] H. Matui. “Topological full groupsof on-sided shifs of finite type”. W: *J. Reine Angew. Math.* 705 (2015), s. 35–84.

[35] M. L. Nazarov. "Projective representations of the infinite symmetric group". W: *Representation theory and dynamical systems.* T. 9. Adv. Soviet Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, s. 115–130.

[36] A. Okun'kov. "On representations of the infinite symmetric group". W: *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI).* Teor. Predst. Din. Sist. Komb. i Algoritm. Metody. 2 240 (1997), s. 166–228. Eng. transl. in J. Math. Sci. (New York) 96.5 (1999), 3550—3589.

[37] G. Olshanski. "Unitary representations of (G, K)-pairs connected with the infinite symmetric group $S(\infty)$. (Russian)". W: *Algebra i Analis* 1 (1989), s. 178–209. Eng. transl. in Leningrad Math. J. 1.4 (1990), 983–1014.

[38] J. Peterson i A. Thom. "Character rigidity for special linear groups". W: *J. Reine Angew. Math.* 716 (2016), s. 207–228.

[39] H. L. Skudlarek. "Die unzerlegbaren Charaktere einiger diskreter Gruppen". W: *Math. Annal.* 233 (1976), s. 213–231.

[40] M. Takesaki. T. 124. Encyclopedia of Mathematical Sciences. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002, s. XIX, 415.

[41] E. Thoma. "Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abz šhlbar unendlichen, symmetrischen Gruppe". W: *(German) Math. Z.* 85 (1964), s. 40–61.

[42] S. Thomas i R. Tucker-Drob. "Invariant random subgroups of strictly diagonal limits of finite symmetric groups". W: *Bull. Lond. Math. Soc.* 46.5 (2014), s. 1007–1020.

[43] R. Tucker-Drob i S. Thomas. "Invariant random subgroups of inductive limits of finite alternating groups". W: *J. Algebra* 503 (2018), s. 474–533.

[44] A. Vershik. "Nonfree actions of countable groups and their characters. (Russian)". W: *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Math. Inst. Steklov. (POMI).* Teoriya Predstavlenii, Dinamicheskie Sistemy, Kombinatornye Metody. XVIII 378 (2010).

[45] A. Vershik. "Totally non-free actions and the infinite symmetric group". W: *Mosc. Math. J.* 12.1 (2012), s. 193–212.

[46] D. Voiculescu. "Représentations factorielles de type II_1 de $U(\infty)$". W: *J. Math. Pures Appl.* IX 55 (1976), s. 1–20.