

Toruń, 27. 11. 2019

prof. dr hab. Mariusz Lemańczyk
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika
ul. Chopina 12/18
87-100 Toruń

Z-ca Dyrektora ds. Naukowych IMPAN
dr hab. Piotr Nowak

Recenzja rozprawy habilitacyjnej
pt. „Charaktery dyskretnych nieskończonych grup i powiązane
zagadnienia”
oraz ocena dorobku naukowego
dr. Artema Dudko

Dr Artem Dudko uzyskał stopień doktora na Uniwersytecie w Toronto w roku 2012, broniąc rozprawy doktorskiej pt. „Dynamics of holomorphic maps: Resurgence of Fatou coordinates, and polytime computability of Julia sets”. Następnie pracował przez cztery lata w Institute for Mathematical Sciences of the State University of New York, odbył staż podoktorski na Uniwersytecie w Toronto (2016/2017), a od roku 2017 jest profesorem wizytującym w Instytucie Matematycznym PAN. Tematykę badań naukowych habilitanta uważam za szeroką: dynamika holomorficzna oraz teoria reprezentacji (z elementami teorii układów dynamicznych).

Ocena rozprawy habilitacyjnej dr. A. Dudko. Na rozprawę habilitacyjną składa się (monotematyczny) cykl 7 prac, opublikowanych w latach 2013–2019, do których się będę odwoływał, używając wykazu prac z Autoreferatu: prace [H1]–[H7]. Prace zostały opublikowane w renomowanych czasopismach: J. of Functional Analysis (2), Groups, Geometry and Dynamics (2), J. of Modern Dynamics (1), Proceedings AMS (1) (praca [H2] została opublikowana w Contemp. Math.).

Tematyka rozprawy dotyczy klasycznych zagadnień teorii reprezentacji grup, a osiągnięte wyniki są poważne w skali światowej.

Kluczowym obiektem rozpatrywanym w rozprawie jest pojęcie *charakteru* przez co rozumie się funkcję $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$ spełniającą w-ki: $\chi(g_1 g_2) = \chi(g_2 g_1)$, $\chi(e) = 1$ i, co kluczowe, χ jest pół-dodatnio określona. W klasycznym przypadku reprezentacji unitarnej, powiedzmy, dla uproszczenia, skończonej wymiarowej, charakter odpowiada śladowi reprezentacji (tzn. odpowiednich macierzy).¹ Takie rozumienie charakteru jest bliskie koncepcji charakteru Dirichleta w teorii liczb, w szczególności mamy zawsze dwa charaktery „trywialne”: charakter $\chi_1(g) = 1$ dla wszystkich g oraz charakter χ_0 , zwany *regularnym*, zdefiniowany wzorem $\chi_0(e) = 1$ oraz $\chi_0(g) = 0$ dla wszystkich $g \neq e$. Z samej definicji wynika, że charaktery tworzą podzbiór wypukły. W istocie rzeczy jest to nawet sympleks Choqueta, tzn. każdy charakter ma jednoznaczne przedstawienie jako całka po charakterach, które są punktami ekstremalnymi. Z oczywistych powodów kluczowy jest zatem opis wszystkich charakterów, które są punktami ekstremalnymi, charaktery te są nazywane *charakterami nieprzywiedlnymi*. Możemy tu zauważyć, że χ_1 jest zawsze nieprzywiedlny, natomiast χ_0 niekoniecznie (np. w przypadku reprezentacji grup skończonych). Chociaż na pierwszy rzut oka teoria charakterów to nie jest dokładnie to samo co teoria reprezentacji unitarnych grup, to jednak (klasycznie) wiadomo, że poprzez tzw. konstrukcję Gelfanda-Naimarka-Segala charaktery są we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z tzw. reprezentacjami faktorialnymi. W przypadku abelowym oczywiście charakterami nieprzywiedlnymi będą „zwykłe” charaktery (tzn. homomorfizmy grupowe o wartościach w okręgu jednostkowym), zatem w ogólnym (nieabelowym) przypadku na zbiór charakterów można patrzeć jak na uogólnienie pojęcia grupy dualnej (a rozwijaną teorię rozpatrywać jako naturalne uogólnienie teorii dualności Pontriagina). Jednym z ciekawych źródeł otrzymywania charakterów grup² jest teoria ergodyczna. Rzeczywiście, jeśli mamy zadane działanie grupy G na przestrzeni probabilistycznej (X, μ) (np. poprzez homeomorfizmy zachowujące miarę μ , o X zakładamy, że jest to przestrzeń metryczna zwarta, μ zaś jest miarą borelowską), to wzór $\chi_\mu(g) = \mu(\text{Fix}(g)) = \mu(\{x \in X; gx = x\})$ definiuje charakter (dla nie do końca oczywistego dowodu tego faktu najlepiej „podnieść” miarę μ na relację orbitalną wyznaczoną przez działanie grupy i sprowadzić zagadnienie do klasycznej pół-dodatniej określoności ciągu $g \mapsto \langle \pi(g)\xi, \xi \rangle$ dla pewnej re-

¹W ogólnym przypadku trzeba stosować aparat algebr von Neumanna dla definiowania śladu.

²Dla uproszczenia przyjmujemy, że rozpatrujemy przypadek przeliczalny.

prezentacji unitarnej π i odpowiednio dobranego wektora ξ). Odwzorowanie $\mu \mapsto \chi_\mu$ jest tu i naturalne, i ciekawe, gdyż po pierwsze sympleks miar niezmienniczych dla działania grupy G jest dobrze zrozumiały (przynajmniej w przypadku tzw. grup ze średnią) - punktami ekstremalnymi są tu miary ergodyczne i ciekawe byłoby sprawdzenie, czy również ich obrazy χ_μ są charakterami nieprzywiedlnymi. Można pytać dalej - czy zakładając tzw. „bogatą” strukturę grupy G charaktery χ_μ są **jedynymi** charakterami nieprzywiedlnymi grupy G . W pracy [H5] pozytywną odpowiedź na powyższe pytanie nazywa się *hipotezą Wierszyka*.

Dla osoby nieco z zewnątrz tematyki rozprawy habilitacyjnej (którą niewątpliwie jest recenzent) jest nieco zaskakującym fakt, że mimo tego, iż teoria reprezentacji grup była i jest rozwijana przez wybitnych matematyków (w tym medalistów Fieldsa) w sumie nie tak wiele wiadomo o charakterach nieprzywiedlnych interesujących grup. Z tego punktu widzenia rezultaty osiągnięte w rozprawie habilitacyjnej dr. A. Dudko wydają się nie tylko znaczące, ale niektóre z nich mają (w mojej ocenie) nawet charakter wybitny. Przejdźmy zatem do bardzo zwięzłego opisu tych rezultatów.³ Prace [H5] i [H6] (wspólne z K. Medynetssem) dotyczą (potwierdzenia) wspomnianej powyżej hipotezy Wierszyka. I tak w [H5] udowodniono, że w klasie grup Higmmana-Thompsona (zawierającej m.in. słynną grupę Thompsona $F_{2,1}$ (pewnych) przekształceń kawałkami liniowych odcinka) jedynymi charakterami nieprzywiedlnymi (poza charakterem regularnym) są charaktery (homomorfizmy grupowe) abelianizacji $G/[G, G]$. (Interesującą konsekwencją rezultatów z [H5] jest to, że każde działanie grupy Thompsona $F_{2,1}$ zachowujące miarę musi być *istotnie wolne*, tzn. $\mu(\{x \in X; fx = x\}) = 0$ dla wszystkich $f \neq e$.) W [H6] zaś opisano charaktery nieprzywiedlne prostych AF-grup posiadających skończenie wiele miar ergodycznych na przestrzeni dróg odpowiedniego diagramu Bratelliego. Seria prac wspólnych z Grigorczukiem [H2-H4] oraz praca [H1] dotyczą reprezentacji koopmanowskich, w obu wersjach, tzn. klasycznej, gdy zachowywana jest miara probabilistyczna, jak również w przypadku tzw. działań niesingularnych. Oczywiście w przypadku klasycznej teorii ergodycznej (działań grup abelowych) pytanie o nieprzywiedlność takiej reprezentacji nie ma za bardzo sensu. Ale w przypadku nieabelowym sytuacja zmienia się diametralnie (odpowiedni problem został „oficjalnie” postawiony przez Wierszyka 10 lat temu). Na wyróżnienie zasługuje jeden z głównych rezultatów w [H1], który pokazuje, że reprezentacje Koopmana grup Higmmana-Thompsona są nieprzywiedlne. W [H2] bada się nieprzywiedlność i rozłączność reprezentacji koopmanowskich grup

³Bardzo ładnie napisany opis wyników można znaleźć w autoreferacie.

słabo gałęziowych. Duże wrażenie na recenzencie robi też praca [H4], w której negatywnie zweryfikowano przypuszczenie Wierszyka o tzw. totalnej „niewolności”⁴ działań grup (przeliczalnych), dla których charakter χ_μ jest nieprzywiedlny. Problemy klasyfikacji tzw. ergodycznych losowych podgrup niezmienniczych bada się w [H7], uogólniając wcześniejszą klasyfikację Thomasa i Tickera-Droba z 2014 r. Ponadto w pracach [H4-H7] wykazano różne interesujące aspekty mnożliwości charakterów nieprzywiedlnych w wybranych klasach grup.

Poziom naukowy rozprawy należy ocenić jako bardzo wysoki, a ze względu na wagę uzyskanych rezultatów uważam, że rozprawa zasługuje na **wyróżnienie**.

Ocena pozostałego dorobku naukowego. Dorobek habilitanta poza rozprawą obejmuje aż kilkanaście dodatkowych artykułów. Najważniejsze prace dotyczą dynamiki holomorficznej, do której habilitant wniósł również poważny wkład. Opublikowane prace dotyczą w większości zagadnień związanych ze złożonością zbioru Julii i są publikowane w bardzo dobrych czasopismach: Found. Comp. Math., Ergodic Theory Dynam. Syst., Discrete Cont. Dynam. Systems, C. R. Math. Acad. Sci. Nie wiem, jaki jest obecny status pracy [16] (wg spisu w Autoreferacie), jeśli wszystko się potwierdzi, to główny rezultat stanowiący, że zbiór Julii wielomianu Feigenbauma $f_{\text{Feig}}(z) = z^2 + c_{\text{Feig}}$ ma wymiar Hausdorffa < 2 , a w konsekwencji miarę Lebesgue’a zero, należy uznać za sensacyjny (jest to odpowiedź na otwarty od kilkudziesięciu lat problem). Pozostałe prace są bliżej zagadnień związanych z teorią reprezentacji (również te wcześniejsze prace A. Dudko są publikowane w bardzo dobrych czasopismach, np. Mat. Sb., Funkt. Anal. Prilozhen.).

Wg MathSciNet prace dr. A. Dudko są cytowane 44 razy (przez 36 autorów). Ocenilibym to jako wskaźnik raczej średni, wydaje się, że wcześniejsze prace z dynamiki holomorficznej nie spotkały się z jakimś specjalnym oddźwiękiem w (wymagającym) środowisku „holomorficznym”, natomiast ładne cytowania (co zrozumiałe) - 13 i 10 - mają prace [5] i [6].

Udział w międzynarodowym życiu matematycznym, nagrody, osiągnięcia organizacyjne i dydaktyczne dr. A. Dudko. Habilitant miał wystąpienia na zaproszenie na co najmniej kilkunastu konferencjach międzynarodowych. Na wyróżnienie zasługuje jego działalność organizacyjna: współorganizacja kilku konferencji, czy obecne współorganizowanie pre-

⁴Rodzina zbiorów $\text{Fix}(g)$, $g \in G$ wraz ze zbiorami miary zero ma generować całą rozpatrywaną σ -algebrę!

stiżowego seminarium dynamicznego w Instytucie Matematycznym PAN. Dr A. Dudko jest kierownikiem grantu NCN Polonez (na lata 2017-2019). W Autoreferacie nie znalazłem informacji o działalności dydaktycznej habilitanta (niemniej należy wspomnieć prowadzenie Gradutae Student Seminar, czy prowadzenie kółek matematycznych dla uczniów szkół średnich w okresie studiów doktoranckich na Uniwersytecie w Toronto).

Konkluzja

Uważam, że przedłożona rozprawa habilitacyjna oraz pozostały dorobek naukowy dr. Artema Dudko wypełniają (z naddatkiem) wymagania ustawowe i zwyczajowe dla nadania stopnia naukowego doktora habilitowanego.



