

AUTOREFERAT

1. Imię i nazwisko

Bartosz Trojan

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe

2004 Uniwersytet Wrocławski

Doktor matematyki, dyplom obroniony z wyróżnieniem w 2004r.

promotor: prof. dr hab. Ewa Damek

tytuł: Hua-harmoniczne funkcje na jednorodnych obszarach Siegela

2000 Uniwersytet Wrocławski

Magister matematyki, dyplom obroniony w 2000r.

promotor: prof. dr hab. Ewa Damek

tytuł: Jądra Poissona i funkcje pluriharmoniczne $\mathcal{H}^2$ na jednorodnych obszarach Siegela

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

2017 – adiunkt w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk

2016 – 2017 adiunkt na Wydziale Matematyki Politechniki Wrocławskiej

2005 – 2016 adiunkt w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego

2006 – 2009 Postdoc na Uniwersytecie w Sydney, Australia
mentor: prof. Donald Cartwright

2005 – 2006 Postdoc na Uniwersytecie w Orleanie, Francja
mentor: prof. Jean-Philippe Anker

2004 – 2005 Postdoc na Uniwersytecie w Sassari, Włochy
mentor: prof. Tim Steger

4. Omówienie osiągnięcia, o którym mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce

(a) Tytuł osiągnięcia naukowego

Dyskretna analiza harmoniczna

(b) Lista prac składających się na osiągnięcie naukowe

[H1] M. Mirek, B. Trojan, *Cotlar's ergodic theorem along the prime numbers*, Journal of Fourier Analysis and Applications 21, 822–848 (2015)

[H2] M. Mirek, B. Trojan, *Discrete maximal functions in higher dimensions and applications to ergodic theory*, American Journal of Mathematics 138, 1495–1532 (2016)

[H3] B. Trojan, *Variational estimates for discrete operators modeled on multi-dimensional polynomial subsets of primes*, Mathematische Annalen 374, 1597–1656 (2019)

- [H4] B. Trojan, *Variational estimates for operators on some thin subsets of primes*, Mathematical Research Letters 27, 591–628 (2020)
- [H5] B. Trojan, *Endpoint estimates for the maximal function over prime numbers*, Journal of Fourier Analysis and Applications, 25, 3123–3153 (2019)

(c) Omówienie prac składających się na osiągnięcie naukowe

Przed przystąpieniem do szczegółowego omówienia prac, poniżej przedstawię ich krótkie streszczenia.

- H1. Udowodniliśmy twierdzenie Cotlara dla liczb pierwszych, które mówi że dla dowolnego układu dynamicznego $(X, \mathcal{B}, \mu, S)$, gdzie $(X, \mathcal{B}, \mu)$ jest σ -skończoną przestrzenią z miarą μ , a $S : X \rightarrow X$, mierzalnym i odwracalnym przekształceniem zachowującym miarę oraz dla dowolnej funkcji $f \in L^r(X, \mu)$, $r > 1$, granica

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{p \in \mathbb{P} \cap [1, N]} f(S^p x) \frac{\log p}{p}$$

istnieje dla μ -prawie wszystkich $x \in X$, gdzie $\mathbb{P}$ jest zbiorem liczb pierwszych.

- H2. Udowodniliśmy wielowymiarowy odpowiednik twierdzenia Birkhoffa–Bourgaina wzdłuż wielowymiarowych podzbiorów liczb całkowitych zadanych przez rodzinę przekształceń wielomianowych: Dla każdej σ -skończonej przestrzeni z miarą $(X, \mathcal{B}, \mu)$ i dowolnej rodziny przekształceń $\{S_1, \dots, S_d\}$ komutujących, odwracalnych i zachowujących miarę oraz dla każdego $f \in L^p(X, \mu)$, $p > 1$, granica

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^k} \sum_{n \in \mathbb{N}^k \cap [1, N]^k} f(S_1^{\mathcal{P}_1(n)} S_2^{\mathcal{P}_2(n)} \dots S_d^{\mathcal{P}_d(n)} x)$$

istnieje dla μ -prawie wszystkich $x \in X$, gdzie $\mathcal{P}_j$ jest wielomianem o wartościach całkowitych na $\mathbb{Z}^k$. Otrzymaliśmy to pokazując oszacowania dla półnormy wariacyjnej.

- H3. Pokazałem, rozszerzenie punktowych twierdzeń ergodycznych Birkhoffa–Bourgaina i Cotlara do wielowymiarowych podzbiorów liczb pierwszych zadanych przez rodzinę przekształceń wielomianowych jak w [H2]. Udowodniłem to pokazując oszacowania na r -wariacyjną półnormę dla dyskretnych operatorów Radona.
- H4. Udowodniłem oszacowania na r -wariacyjną półnormę dla operatorów Radona wzdłuż cienkich podzbiorów liczb pierwszych postaci $\{p \in \mathbb{P} : \{\varphi_1(p)\} < \psi(p)\}$. Wyniki te pociągają rozszerzenia punktowych twierdzeń Birkhoffa–Bourgaina i Cotlara.
- H5. Rozważałem ergodyczny system dynamiczny $(X, \mathcal{B}, \mu, S)$, w którym $(X, \mathcal{B}, \mu)$ jest przestrzenią probabilistyczną. Pokazałem, że dla każdej funkcji należącej do przestrzeni Orlicza

$$L(\log L)^2(\log \log L)(X, \mu),$$

średnie ergodyczne

$$\frac{1}{\pi(N)} \sum_{p \in \mathbb{P}_N} f(S^p x),$$

zbiegają dla μ -prawie wszystkich $x \in X$, tj. $\mathbb{P}_N$ oznacza zbiór liczb pierwszych nie większych niż N a $\pi(N) = \#\mathbb{P}_N$.

Wstęp ¹

Prace składające się na osiągnięcie naukowe traktują o dyskretnych operatorach osobliwych. Ich badanie zapoczątkował Hilbert zauważając, że operator H_{dis} określony dla funkcji o skończonym nośniku $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ wzorem

$$H_{\text{dis}}f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} f(x-n) \frac{1}{n}$$

spełnia oszacowanie

$$\|H_{\text{dis}}f\|_{\ell^2} \leq C\|f\|_{\ell^2},$$

dla pewnej dodatniej stałej C . W 1928 roku Riesz [42] udowodnił, że dla każdego $p \in (1, \infty)$ istnieje stała $C_p > 0$ taka, że nierówność

$$\|H_{\text{dis}}f\|_{\ell^p} \leq C_p\|f\|_{\ell^p},$$

jest spełniona dla wszystkich funkcji $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$. Pokazał również, że operator H zadany wzorem

$$Hf(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|y|>\epsilon} f(x-y) \frac{dy}{y},$$

jest ograniczony na $L^p(\mathbb{R})$ dla wszystkich $p \in (1, \infty)$. Dwa lata później w [17], Hardy i Littlewood udowodnili, że zarówno funkcja maksymalna

$$M_{\text{dis}}f(x) = \sup_{N \in \mathbb{N}} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |f(x-n)|,$$

jak i jej ciągły odpowiednik

$$Mf(x) = \sup_{t>0} \frac{1}{t} \int_0^t |f(x-y)| dy,$$

są ograniczone na $\ell^p(\mathbb{Z})$ i $L^p(\mathbb{R})$, odpowiednio, dla wszystkich $p \in (1, \infty]$. Powyższe wyniki zainicjowały wieloletnie badania, czego efektem jest bogata teoria Calderóna–Zygmunda. Późniejsze prace głównie dotyczyły ciągłych operatorów osobliwych, ze względu na to, że ich dyskretne odpowiedniki można było otrzymać adaptując metody ciągłe. Znakomitym źródłem referencji jest tutaj monografia [44]. W tym miejscu warto zaznaczyć, że wprawdzie operatory zdefiniowane powyżej nie są ograniczone na $\ell^1(\mathbb{Z})$ i $L^1(\mathbb{R})$, odpowiednio, ale spełniają oszacowania słabego typu $(1, 1)$. Przypomnijmy, że operator T spełnia oszacowania słabego typu $(1, 1)$, jeśli dla pewnej stałej $C > 0$ i wszystkich funkcji $f \in L^1(\mathbb{R})$ zachodzi nierówność

$$\sup_{\lambda>0} \lambda \cdot |\{x \in \mathbb{R} : |Tf(x)| \geq \lambda\}| \leq C\|f\|_{L^1}.$$

W ostatnim czasie rozwój teorii Calderóna–Zygmunda obejmował również badanie ograniczoności maksymalnych transform Radona, których najprostszym przykładem jest

$$Rf(x) = \sup_{t>0} \frac{1}{t} \int_0^t |f(x-y^2)| dy.$$

¹W tej części opierałem się na autoreferacie [31] i wstępie do [38].

Zauważmy, że dla nieujemnej funkcji f , przez prostą zamianę zmiennych, dostajemy kolejno

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t f(x-y^2) dy &= \frac{1}{2t} \int_0^{t^2} f(x-y) \frac{dy}{\sqrt{y}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2t} \int_{2^{-n-1}t^2}^{2^{-n}t^2} f(x-y) \frac{dy}{\sqrt{y}} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\frac{n}{2}} Mf(x). \end{aligned} \quad (1)$$

W szczególności otrzymane punktowe oszacowanie (1) implikuje, że R jest ograniczony na $L^p(\mathbb{R})$ dla $p \in (1, \infty]$ i słabego typu $(1, 1)$. W tym miejscu naturalnym jest pytanie:

Czy dyskretny odpowiednik operatora R , tj.

$$R_{\text{dis}}f(x) = \sup_{N \in \mathbb{N}} |R_N f(x)|,$$

gdzie

$$R_N f(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(x-n^2),$$

jest ograniczony na $\ell^p(\mathbb{Z})$ dla $p \in (1, \infty)$?

W latach osiemdziesiątych zagadnieniem tym zainteresował się Bourgain, co zaowocowało cyklem prac [9–11] stanowiących fundamenty dyskretnej analizy harmonicznej. Okazało się, że średnie R_N mają inne zachowanie niż ich ciągłe odpowiedniki. Żeby to zobrazować skorzystamy z transformaty Fouriera. Dla funkcji f o skończonym nośniku możemy napisać

$$R_N f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{f}(\xi) m_N(\xi) e^{-2\pi i \xi x} d\xi,$$

gdzie $\hat{f}$ i m_N są funkcjami 1-okresowymi zadanymi wzorami

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} f(x) e^{2\pi i \xi x} \quad \text{oraz} \quad m_N(\xi) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n^2 \xi}.$$

Rozważmy dowolny nieskracalny ułamek a/q . Wtedy dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned} m_{kq}(a/q) &= \frac{1}{kq} \sum_{n=0}^{kq-1} e^{2\pi i n^2 a/q} \\ &= \frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} e^{2\pi i r^2 a/q} = G(a/q). \end{aligned}$$

Przypomnijmy, że w 1818 roku Gauss udowodnił, że

$$|G(a/q)| = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } q \equiv 2 \pmod{4}, \\ q^{-\frac{1}{2}} \left| \left(\frac{a}{q} \right) \right| & \text{jeśli } q \equiv 1 \pmod{2}, \\ \sqrt{2} q^{-\frac{1}{2}} \left| \left(\frac{a}{q} \right) \right| & \text{jeśli } q \equiv 0 \pmod{4}, \end{cases}$$

gdzie $(\frac{a}{q})$ jest symbolem Jacobiego przyjmującym wartości 0, -1 lub 1 . Z drugiej strony ciągły mnożnik

$$\Phi_N(\xi) = \int_0^1 e^{2\pi i \xi (Nx)^2} dx$$

spełnia oszacowanie

$$|\Phi_N(\xi)| \leq CN^{-1} |\xi|^{-\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

W szczególności $|\Phi_{kq}(a/q)|$ maleje wraz ze wzrostem k .

Przeprowadzone rozumowanie sugeruje, że asymptotyczne zachowanie m_N skoncentrowane jest wokół punktów ξ mających diofantyczne aproksymacje o małych mianownikach. Istotnie, Bourgain pokazał, że dla dowolnych $\beta > \alpha > 0$, jeśli

$$\left| \xi - \frac{a}{q} \right| \leq N^{-2+\alpha}$$

dla pewnych $1 \leq a \leq q \leq N^\beta$, $(a, q) = 1$, to

$$m_N(\xi) = G(a/q)\Phi_N(\xi - a/q) + O(N^{\alpha-\beta}). \quad (3)$$

Zatem dla otrzymania pełnego opisu mnożnika m_N pozostaje zbadać łuki poboczne, tj.

$$[0, 1] \setminus \left(\bigcup_{1 \leq q \leq N^\beta} \bigcup_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q \mathfrak{M}_N(a/q) \right),$$

gdzie przez $\mathfrak{M}_N(a/q)$ oznaczamy łuk główny

$$\mathfrak{M}_N(a/q) = \{ \xi \in [0, 1] : \left| \xi - \frac{a}{q} \right| \leq N^{-2+\alpha} \}. \quad (4)$$

W tym miejscu idealnym narzędziem okazała się nierówność Weyla, z której wynika, że dla dowolnego $\beta > 0$ istnieje stała $C > 0$ taka, że jeśli

$$\left| \xi - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2},$$

dla pewnych $1 \leq a \leq q$, $(a, q) = 1$, $N^\beta \leq q \leq N^{2-\beta}$, to dla wszystkich $N \in \mathbb{N}$,

$$|m_N(\xi)| \leq CN^{-\frac{\beta}{4}}.$$

Powyższa analiza mnożnika m_N oparta jest na metodzie łuków opracowanej w latach dwudziestych przez Hardy'ego i Littlewooda w kontekście formuły asymptotycznej w problemie Waringa. Podsumowując, mnożnik m_N można przybliżyć przez sumę zlokalizowanych wyrażeń $G(a/q)\Phi_N(\cdot - a/q)$, gdzie a/q przebiega pewien zbiór ułamków o małych mianownikach względem skali N . Błąd przybliżenia jest niesiony przez łuki poboczne a jego wielkość można kontrolować przy użyciu nierówności Weyla. W konsekwencji, oszacowanie R_{dis} w ℓ^2 można sprowadzić do oszacowań maksymalnych dla mnożnika przybliżającego. Te ostatnie opierają się na rozłączności łuków (4) i maleniu sum Gaussa $G(a/q)$.

W tym miejscu pojawia się kolejna istotna różnica między dyskretną a ciągłą analizą harmoniczną. W tej ostatniej, operatory Radona dają funkcję maksymalną słabego typu $(1, 1)$, co w połączeniu z oszacowaniami na L^2 i w oparciu o teorię interpolacji, pozwala wywnioskować oszacowania na L^p dla $p \in (1, 2)$. Ponad dwadzieścia lat po ukazaniu się prac Bourgaina, Buczolich i Mauldina w [12], udowodnili, że operator maksymalny R_{dis} nie jest słabego typu $(1, 1)$. W pewnym sensie uzasadnia to dlaczego oszacowania w ℓ^p dla $p \neq 2$ wymagały nowych pomysłów.

Drugim kamieniem milowym dla rozwoju dyskretnej analizy harmonicznej jest praca Ionescu i Waingera [21], w której rozpatrywane były dyskretne operatory osobliwe, tj.

$$T_{\text{dis}}f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} f(x - P(n)) \frac{1}{n},$$

gdzie P jest wielomianem o wartościach całkowitych takim, że $P(0) = 0$. W pracy tej autorzy pokazali, że dla każdego $p \in (1, \infty)$ istnieje stała $C_p > 0$ taka, że

$$\|T_{\text{dis}}f\|_{\ell^p} \leq C_p \|f\|_{\ell^p},$$

dla wszystkich funkcji $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ o skończonym nośniku. Jednak największym wkładem w rozwój dziedziny było opracowanie subtelnej metody wyboru ułamków a/q , tak aby powstały mnożnik pozwalający wykorzystać silną ortogonalność.

Operatory dyskretne w naturalny sposób pojawiają się w zagadnieniach ergodycznych. Niech $(X, \mathcal{B}, \mu, S)$ będzie układem dynamicznym, tj. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ jest σ -skończoną przestrzenią z miarą, a $S : X \rightarrow X$ odwracalnym przekształceniem zachowującym miarę μ . W 1931 roku w pracy [4] Birkhoff udowodnił, że dla każdej funkcji $f \in L^p(X, \mu)$, $p \in [1, \infty)$, granica

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(S^n x)$$

istnieje dla μ -prawie wszystkich $x \in X$. Klasyczny dowód tego twierdzenia przebiega w dwóch etapach: W pierwszym wyznaczamy w $L^2(X, \mu)$ gęstą klasę funkcji, dla której zachodzi punktowa zbieżność. W tym celu rozważamy następujące dwa podzbiory

$$\mathcal{I} = \{f \in L^2(X, \mu) : f(Sx) = f(x)\} \quad \text{ i } \quad \mathcal{B} = \{g(Sx) - g(x) : g \in L^2(X, \mu) \cap L^\infty(X, \mu)\}.$$

Jak łatwo zauważyć, dla $f \in \mathcal{I}$ mamy $\mathcal{M}_N f = f$, gdzie

$$\mathcal{M}_N f(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(S^n x),$$

natomiast dla $f \in \mathcal{B}$ otrzymujemy

$$|\mathcal{M}_N f(x)| = \frac{1}{N} |g(S^N x) - g(x)| \leq \frac{2}{N} \|g\|_{L^\infty}.$$

Pozostaje uzasadnić, że $\mathcal{I} \oplus \mathcal{B}$ jest gęste w $L^2(X, \mu)$, co nie jest trudnym zadaniem. W drugim kroku pokazujemy oszacowania maksymalne

$$\left\| \sup_{N \in \mathbb{N}} |\mathcal{M}_N f| \right\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}, \quad p > 1 \quad (5)$$

lub

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda \cdot \mu \left\{ x \in X : \sup_{N \in \mathbb{N}} |\mathcal{M}_N f(x)| > \lambda \right\} \leq C_1 \|f\|_{L^1}. \quad (6)$$

W świetle zasady transferencji Calderóna układ dynamiczny $(\mathbb{Z}, \mathbf{P}(\mathbb{Z}), \#, S)$ złożony ze zbioru liczb całkowitych wraz z miarą liczącą i operatorem przesunięcia $Sf(x) = f(x + 1)$, jest modelowym układem dynamicznym, tzn. oszacowania maksymalne dla $(\mathbb{Z}, \mathbf{P}(\mathbb{Z}), \#, S)$ pociągają oszacowania maksymalne dla dowolnego systemu dynamicznego. Dla $(\mathbb{Z}, \mathbf{P}(\mathbb{Z}), \#, S)$ prawdziwość nierówności (5) i (6) wynika z własności funkcji maksymalnej rozważanej przez Hardy'ego i Littlewooda.

W pracy [11], Bourgain udowodnił, że dla każdego $p \in (1, \infty)$ i $f \in L^p(X, \mu)$, granica

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(S^{n^2}x)$$

istnieje dla μ -prawie wszystkich $x \in X$. Wprawdzie zasada transferencji Calderóna pozwala otrzymać oszacowania maksymalne z oszacowań dla R_N , to jednak znalezienie gęstej klasy, dla której zachodzi punktowa zbieżność, jest kłopotliwe. Dlatego Bourgain zaproponował badanie nierówności oscylacyjnej na $L^2(X, \mu)$. Mianowicie, pokazał, że jeśli dla dowolnego ciągu $(N_j : j \in \mathbb{N}_0)$ takiego, że $N_{j+1} \geq 2N_j$, i każdego $J \in \mathbb{N}$ istnieje stała $C_J > 0$, dla której

$$\sum_{j=1}^J \left\| \sup_{N \in (N_{j-1}, N_j]} |\mathcal{R}_N f - \mathcal{R}_{N_{j-1}} f| \right\|_{L^2}^2 \leq C_J \|f\|_{L^2}^2, \quad (7)$$

gdzie

$$\mathcal{R}_N f(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(S^{n^2}x),$$

przy czym $\lim_{J \rightarrow \infty} C_J/J = 0$, to ciąg $(\mathcal{R}_N f : N \in \mathbb{N})$ jest zbieżny μ -prawie wszędzie. Korzystając teraz z transferencji, oszacowanie (7) można wywnioskować z odpowiedniego oszacowania dla modelowego systemu dynamicznego, którego dowód jest nieznacznie trudniejszy niż pokazanie nierówności maksymalnej w $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Prace Bourgaina zainspirowały badania nad operatorami osobliwymi modelowanymi wzdłuż podciągów liczb naturalnych $a = (a_n : n \in \mathbb{N})$ posiadających pewne właściwości arytmetyczne, tzn. operatorów postaci

$$M_{\text{dis}}^a f(x) = \sup_{N \in \mathbb{N}} \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N f(x - a_n) \right| \quad \text{oraz} \quad H_{\text{dis}}^a f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x - a_n) - f(x + a_n)}{n}.$$

Jeszcze w latach osiemdziesiątych, Bourgain [8] zainteresował się przypadkiem średnich wzdłuż liczb pierwszych $\mathbb{P}$, tj.

$$M_{\text{dis}}^{\mathbb{P}} f(x) = \sup_{N \in \mathbb{N}} \frac{1}{\pi(N)} \left| \sum_{p \in \mathbb{P}_N} f(x - p) \right|,$$

gdzie $\mathbb{P}_N$ jest zbiorem liczb pierwszych nie większych od N i $\pi(N) = \#\mathbb{P}_N$. Autor zauważył, że można tutaj zastosować podobny schemat rozumowania jak dla ciągu (n^2) . Argument wymagał zmiany definicji łuków głównych, natomiast na łukach pobocznych, w miejscu nierówności Weyla skorzystał z nierówności Vinogradov'a. Pozwoliło to pokazać nierówność maksymalną w $\ell^2(\mathbb{Z})$. Rozszerzenie do $\ell^p(\mathbb{Z})$ dla $p > 1$ zostało opublikowane przez Wierdlę w [45].

Na koniec wspomnijmy, że niedawno w pracach [29, 30] Mirek studiował ciekawą klasę ciągów postaci $\mathbf{B}_h = (\lfloor h(n) \rfloor : n \in \mathbb{N})$ i $\mathbf{P}_h = \mathbf{B}_h \cap \mathbb{P}$, gdzie $h(x) = x^c L(x)$ jest funkcją należącą do rodziny zdefiniowanej przez Leitmanna w [27] dla $1 < c < 1 + \epsilon$. W szczególności autor udowodnił, że dla każdego $r \in (1, \infty]$ istnieje $C_r > 0$ taka, że dla dowolnej funkcji $f \in \ell^r(\mathbb{Z})$,

$$\left\| \sup_{N \in \mathbb{N}} \frac{1}{\#(\mathbf{B}_h \cap [1, N])} \sum_{n \in \mathbf{B}_h \cap [1, N]} |f(x - n)| \right\|_{\ell^r} \leq C_r \|f\|_{\ell^r}$$

oraz

$$\left\| \sup_{N \in \mathbb{N}} \frac{1}{\#(\mathbf{P}_h \cap [1, N])} \sum_{p \in \mathbf{P}_h \cap [1, N]} |f(x - W(p))| \right\|_{\ell^r} \leq C_r \|f\|_{\ell^r}, \quad (8)$$

gdzie $W : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dowolnym wielomianem stopnia ≥ 1 . Ponadto, w przypadku zbiorów $\mathbf{B}_h$ autor pokazał również oszacowanie maksymalne słabego typu $(1, 1)$. W pracy [Pre0] rozszerzyłem ten wynik na przypadek $c = 1$. Dalsze przykłady ciągów liczb naturalnych oraz odpowiadających im funkcji maksymalnych można znaleźć w [43].

W kolejnych pięciu sekcjach omówię najważniejsze rezultaty otrzymane w pracach składających się na osiągnięcie naukowe.

H1. Cotlar's ergodic theorem along the prime numbers

W 1955 roku Cotlar w pracy [15] pokazał zbieżność μ -prawie wszędzie ergodycznej przyciętej transformaty Hilberta, tzn. dla każdego $f \in L^r(X, \mu)$, $r \in [1, \infty)$ istnienie granicy

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{f(S^n x)}{n}$$

dla μ -prawie wszystkich $x \in X$. Analogiczne twierdzenie dla liczb pierwszych badaliśmy w [H1].

Twierdzenie 1. [H1, Theorem 1] Niech $(X, \mathcal{B}, \mu, S)$ będzie układem dynamicznym. Wtedy dla każdej funkcji $f \in L^r(X, \mu)$, $r \in (1, \infty)$, granica

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{p \in \mathbb{P}_N} f(S^p x) \frac{\log |p|}{p}$$

istnieje dla μ -prawie wszystkich $x \in X$.

Z pomocą transferencji Calderóna zagadnienie punktowej zbieżności możemy sprowadzić do odpowiedniego problemu dla modelowego systemu dynamicznego. W tym kontekście możemy badać bardziej ogólne przycięte operatory osobliwe zadane jądrem Calderóna–Zygmunda $K \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ spełniającym nierówność

$$|x| |K(x)| + |x|^2 |K'(x)| \leq 1,$$

dla $|x| \geq 1$, wraz z warunkiem skracania

$$\sup_{\lambda \geq 1} \left| \int_{1 \leq |x| \leq \lambda} K(x) \, dx \right| \leq 1.$$

Wtedy operator osobliwy wzdłuż liczb pierwszych definiujemy dla funkcji o skończonym nośniku $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ wzorem

$$Tf(x) = \sum_{p \in \mathbb{P}} f(x - p) K(p) \log |p|.$$

Niech T_N będzie przycięciem T , tzn.

$$T_N f(x) = \sum_{p \in \mathbb{P}_N} f(x - p) K(p) \log |p|.$$

W istocie udowodniliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. [H1, Theorem 2] Funkcja maksymalna

$$T_* f(x) = \sup_{N \in \mathbb{N}} |T_N f(x)|,$$

jest ograniczona na $\ell^r(\mathbb{Z})$ dla dowolnego $r \in (1, \infty)$. Ponadto, punktowa granica

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_N f(x)$$

istnieje i jest równa Tf oraz T jest ograniczony na $\ell^r(\mathbb{Z})$ dla dowolnego $r \in (1, \infty)$.

Zwróćmy uwagę, że w przeciwieństwie do nierówności maksymalnej, punktowa zbieżność nie jest własnością, która podlega zasadzie transferencji Calderóna. Dlatego dla dowodu wykorzystaliśmy półnormę oscylacyjną. Niech H_N będzie przyciętym operatorem Hilberta, tj.

$$H_N f(x) = \sum_{p \in \pm \mathbb{P}_N} f(x-p) \frac{\log |p|}{p}.$$

Twierdzenie 1 wynika z poniższego rezultatu.

Twierdzenie 3. [H1, Theorem 5] Niech $(k_j : j \in \mathbb{N})$ będzie rosnącym ciągiem liczb naturalnych i $\tau \in (1, 2]$. Wtedy dla każdego $J \in \mathbb{N}$ istnieje $C_J > 0$ taka, że dla dowolnej $f \in \ell^2(\mathbb{Z})$,

$$\sum_{j=1}^J \left\| \sup_{n \in (k_{j-1}, k_j]} |H_{\tau^n} f - H_{\tau^{k_{j-1}}} f| \right\|_{\ell^2}^2 \leq C_J \|f\|_{\ell^2}^2$$

przy czym $\lim_{J \rightarrow \infty} C_J / J = 0$.

Dowód Twierdzenia 2 dla $r = 2$ wymaga dobrego zrozumienia mnożników, które odpowiadają przyciętym operatorom osobliwym. Podobnie jak w przypadku operatora uśredniającego, adaptacja metody łuków Hardy’ego–Littlewooda w połączeniu z nierównością Vinogradova pozwoliła skonstruować odpowiedni mnożnik przybliżający. Dla $r \neq 2$, początkowo chcieliśmy dostosować elegancki argument Wierdla [45] oparty na pewnej własności liczb pierwszych. Jak się jednak okazało rozumowanie to zawiera błąd, który w przypadku operatora uśredniającego jest łatwy do poprawienia, ale dla przyciętych całek osobliwych już takim nie jest. Dlatego zaproponowaliśmy inne podejście, które z jednej strony uzupełnia dowód Wierdla, z drugiej — istotnie upraszcza metodę Bourgaina. Pokazaliśmy także, że funkcja o dostatecznie zlokalizowanym spektrum względem Q ma normę ℓ^r równo rozłożoną w klasach modulo Q . Pomysł ten rozwijaliśmy w późniejszych badaniach. Według mojej wiedzy, jako pierwsi podjęliśmy badanie przyciętych dyskretnych operatorów osobliwych.

Warto wspomnieć, że Twierdzenie 2 rozszerza twierdzenie Ionescu–Waingera [21] na zbiór liczb pierwszych. Warto też zaznaczyć, że nasze podejście jest inne i daje silniejszy wynik ponieważ badaliśmy funkcję maksymalną dla przyciętych operatorów osobliwych, która jest obiektem trudniejszym do analizy niż sam operator. Dzięki temu mogliśmy zdefiniować ergodyczną całkę osobliwą jako punktową granicę jej przycięć.

Wariacyjny odpowiednik Twierdzenia 2 pozwalający uniknąć badania półnormy oscylacyjnej, udowodniliśmy w pracy [35].

H2. Discrete maximal functions in higher dimensions and applications to ergodic theory

Niech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ będzie σ -skończoną przestrzenią z miarą oraz $\{S_1, \dots, S_d\}$ komutującą rodziną odwracalnych przekształceń zachowujących miarę μ . Niech $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_d) : \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}^d$ oznacza przekształcenie wielomianowe takie, że każda składowa $\mathcal{P}_j$ jest wielomianem k -zmiennych o wartościach całkowitych spełniającym $\mathcal{P}_j(0) = 0$. Zdefiniujemy średnie

$$\mathcal{A}_N^{\mathcal{P}}(x) = N^{-k} \sum_{n \in \mathbb{N}_N^k} f(S_1^{\mathcal{P}_1(n)} S_2^{\mathcal{P}_2(n)} \dots S_d^{\mathcal{P}_d(n)} x),$$

gdzie $\mathbb{N}_N = \{1, 2, \dots, N\}$. Głównym wynikiem pracy [H2] jest następujące twierdzenie ergodyczne.

Twierdzenie 4. [H2, Theorem A] Załóżmy, że $p \in (1, \infty)$. Dla każdego $f \in L^p(X, \mu)$ istnieje $f^* \in L^p(X, \mu)$ taka, że

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}_N^{\mathcal{P}} f(x) = f^*(x)$$

dla μ -prawie wszystkich $x \in X$.

Dla dowodu punktowej zbieżności Bourgain, obok oszacowania maksymalnego, pokazywał oszacowanie półnormy oscylacyjnej. Istnieje jednak półnorma bardziej odpowiednia do badania punktowej zbieżności, tj. półnorma wariacyjna, która dla dowolnego ciągu $(a_n : n \in \mathbb{N})$ zdefiniowana jest wzorem

$$V_r(a_n : n \in \mathbb{N}) = \sup_{n_0 < n_1 < \dots < n_J} \left(\sum_{j=1}^J |a_{n_j} - a_{n_{j-1}}|^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Rzeczywiście, jeśli $r > 2$ to dla dowolnego ciągu $(N_j : j \in \mathbb{N}_0)$ takiego, że $N_{j+1} \geq 2N_j$, z nierówności Höldera mamy

$$\left(\sum_{j=1}^J \sup_{n \in (N_{j-1}, N_j]} |a_n - a_{N_{j-1}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq J^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}} V_r(a_n : n \in \mathbb{N}).$$

Ponadto,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \leq |a_0| + V_r(a_n : n \in \mathbb{N}). \quad (9)$$

W końcu, jak łatwo zauważyć, $V_r(a_n : n \in \mathbb{N}) < \infty$ dla pewnego $r \geq 1$ implikuje, że ciąg (a_n) jest zbieżny. Powyższe własności półnormy wariacyjnej uzasadniają, że dla dowodu Twierdzenia 4 wystarczy pokazać, że jeśli $f \in L^p(X, \mu)$ to

$$\|V_r(\mathcal{A}_N^{\mathcal{P}} f : N \in \mathbb{N})\|_{L^p} < \infty.$$

Oszacowania wariacyjne podlegają zasadzie transferencji Calderóna, dlatego możemy ograniczyć się do badania modelowego systemu dynamicznego, tj. $(\mathbb{Z}^d, \mathbf{P}(\mathbb{Z}^d), \#)$ z rodziną operatorów przesunięcia $\{S_1, S_2, \dots, S_d\}$, gdzie $S_j f(x) = f(x + e_j)$. W tym kontekście operator $\mathcal{A}_N^{\mathcal{P}}$ przyjmuje postać

$$A_N^{\mathcal{P}} f(x) = N^{-k} \sum_{n \in \mathbb{N}_N^k} f(x - \mathcal{P}(n)).$$

Twierdzenie 5. [H2, Theorem C] Niech $p \in (1, \infty)$ i $r > \max\{p, p'\}$. Wtedy istnieje stała $C_p > 0$ taka, że dla dowolnej funkcji $f \in \ell^p(\mathbb{Z}^d)$,

$$\|V_r(A_N^{\mathcal{P}} f : N \in \mathbb{N})\|_{\ell^p} \leq C_p \frac{r}{r-2} \|f\|_{\ell^p}.$$

Ponadto, stała C_p nie zależy od współczynników przekształcenia wielomianowego $\mathcal{P}$.

Oszacowania wariacyjne w analizie harmoniczej, jak i w teorii ergodycznej, były już tematem kilku prac, m.in. [23–25, 46]. W szczególności praca Krause [25] zainspirowała nas do badania półnormy wariacyjnej w wielu wymiarach. Nasz dowód Twierdzenia 5 silnie zależy od oszacowania maksymalnego, które w istocie jest uogólnieniem pracy Bourgaina [11] na wiele wymiarów.

Twierdzenie 6. [H2, Theorem D] Dla każdego $p \in (1, \infty]$ istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdego $f \in \ell^p(\mathbb{Z}^d)$,

$$\left\| \sup_{N \in \mathbb{N}} |A_N^{\mathcal{P}} f| \right\|_{\ell^p} \leq C \|f\|_{\ell^p}. \quad (10)$$

Ponadto, stała C nie zależy od współczynników przekształcenia wielomianowego $\mathcal{P}$.

Oszacowania maksymalne (10) miały istotny wkład w rozwój projektu z Mirkiem i Steinem dotyczącym oszacowań w ℓ^p funkcji maksymalnej dla przyciętych operatorów osobliwych typu Radona. Mianowicie w pracy [33] pokazaliśmy, że dla każdego $p \in (1, \infty)$ istnieje $C > 0$ taka, że dla dowolnej funkcji $f \in \ell^p(\mathbb{Z}^d)$,

$$\left\| \sup_{N \in \mathbb{N}} |T_N^{\mathcal{P}} f| \right\|_{\ell^p} \leq C \|f\|_{\ell^p}, \quad (11)$$

gdzie $T_N^{\mathcal{P}}$ jest przyciętym operatorem osobliwym, tzn.

$$T_N^{\mathcal{P}} f(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}_N^k \setminus \{0\}} f(x - \mathcal{P}(y)) K(y),$$

przy czym K jest jądrem Calderóna–Zygmunda na $\mathbb{R}^k$ oraz $\mathbb{Z}_N = \{-N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N\}$. W dowodzie nierówności (11) musieliśmy zamienić supremum po zbiorze liczb naturalnych na supremum po liczbach diadycznych $\{2^n : n \in \mathbb{N}_0\}$. Wprawdzie operatory $T_N^{\mathcal{P}}$ nie są dodatnie, ale dla $N \in [2^n, 2^{n+1})$ mamy punktowe oszacowanie

$$|T_N^{\mathcal{P}} f(x)| \leq C(|T_{2^n}^{\mathcal{P}} f(x)| + A_N^{\mathcal{P}} |f|(x))$$

dla pewnej stałej $C > 0$, co pociąga

$$\left\| \sup_{N \in \mathbb{N}} |T_N^{\mathcal{P}} f| \right\|_{\ell^p} \leq C \left(\left\| \sup_{n \in \mathbb{N}_0} |T_{2^n}^{\mathcal{P}} f| \right\|_{\ell^p} + \left\| \sup_{N \in \mathbb{N}} A_N^{\mathcal{P}} |f| \right\|_{\ell^p} \right).$$

Dowód Twierdzenia 6 korzysta z pomysłu zaczerpniętego z pracy [21], gdzie ograniczoność na ℓ^p osobliwego operatora typu Radona pokazano rozbijając go na dwie części, z których pierwsza kontrolowana jest na ℓ^p druga na ℓ^2 , w połączeniu z pewną metodą interpolacyjną. Dokładniej, dla każdego $\epsilon \in (0, 1]$ i $\lambda > 0$ skonstruowaliśmy operator $A_N^{\lambda, \epsilon}$ taki, że

$$\left\| \sup_{N \in \mathbb{N}} |A_N^{\mathcal{P}} f - A_N^{\lambda, \epsilon} f| \right\|_{\ell^2} \leq D \epsilon \lambda^{-1} \|f\|_{\ell^2}$$

oraz dla każdego $p \in (1, \infty)$,

$$\left\| \sup_{N \in \mathbb{N}} |A_N^{\lambda, \epsilon} f| \right\|_{\ell^p} \leq C \epsilon \lambda^{\epsilon} \|f\|_{\ell^p}.$$

Powyższe oszacowania w połączeniu ze wspomnianą techniką interpolacyjną pozwoliły udowodnić (10). Otrzymaliśmy w ten sposób dowód oszacowań maksymalnych inny niż w pracy [11]. W oparciu o argument interpolacyjny opisany w [25], dla dowodu Twierdzenia 6 wystarczy pokazać Twierdzenie 5 oraz oszacowanie r -wariacyjne dla $p = 2$ i dowolnego $r > 2$. Z uwagi na nierówność (9), budując teorię ℓ^2 mogliśmy ograniczyć się do badania półnormy r -wariacyjnej. W przypadku oszacowań maksymalnych teorię ℓ^2 Bourgain oparł na metodzie łuków Hardy’ego–Littlewooda, nierówności Weyla i Lemacie Logarytmicznym [11, Lemma 4.1], patrz (23). Tutaj zaproponowaliśmy inne podejście. Mianowicie, zamiast Lematu Logarytmicznego skorzystaliśmy z następującej nierówności numerycznej

$$V_r(a_j : 0 \leq j \leq 2^s) \leq \sqrt{2} \sum_{i=0}^s \left(\sum_{j=0}^{2^{s-i}-1} |a_{(j+1)2^i} - a_{j2^i}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Nierówność ta pozwoliła nam bezpośrednio analizować mnożnik przybliżający dając oszacowanie wariacyjne w ℓ^2 dla małych kostek. Dla dużych kostek rozwinięcie podejścia opracowanego w [H1], umożliwiło nam porównanie dyskretnych norm ℓ^p mnożników przybliżających z ciągłymi normami L^p pewnych mnożników na $\mathbb{R}^d$, o których wiadomo, że dają funkcję maksymalną ograniczoną na L^p . Idea ta w połączeniu z argumentem interpolacyjnym [21] nie była wcześniej używana i dała nowy dowód oszacowania maksymalnego w ℓ^p dla dużych kostek. W końcu, oszacowanie maksymalne w ℓ^p dla $p \neq 2$ i małych kostek pokazaliśmy z logarytmiczną stratą. W tym miejscu adaptowaliśmy pomysł Bourgaina z [11, Lemma 7.32] podając nieznacznie prostszy dowód.

H3. Variational estimates for discrete operators modeled on multi-dimensional polynomial subsets of primes

Niech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ będzie σ -skończoną przestrzenią z miarą oraz $\{S_1, \dots, S_d\}$ rodziną komutujących, odwracalnych przekształceń zachowujących miarę μ . Niech $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_d) : \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}^d$ oznacza przekształcenie wielomianowe takie, że każda składowa $\mathcal{P}_j$ jest wielomianem k -zmiennych o wartościach całkowitych spełniającym $\mathcal{P}_j(0) = 0$. Niech B będzie otwartym i ograniczonym podzbiorem $\mathbb{R}^k$ zawierającym początek układu współrzędnych takim, że dla pewnego $\iota > 0$ i wszystkich $N \in \mathbb{N}$,

$$[-\iota N, \iota N]^k \subseteq B_N \subseteq [-N, N]^k,$$

gdzie dla $\lambda > 0$ położyliśmy

$$B_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^k : \lambda^{-1}x \in B\}.$$

W pracy [H3] rozważałem średnie

$$\mathcal{A}_N^{\mathcal{P}} f(x) = \frac{1}{\pi_B(N)} \sum_{n \in \mathbb{N}^{k'}} \sum_{p \in \mathbb{P}^{k''}} f\left(T_1^{\mathcal{P}_1(n,p)} \dots T_d^{\mathcal{P}_d(n,p)} x\right) \mathbb{1}_{B_N}(n, p),$$

gdzie $k = k' + k''$ oraz

$$\pi_B(N) = \sum_{n \in \mathbb{N}^{k'}} \sum_{p \in \mathbb{P}^{k''}} \mathbb{1}_{B_N}(n, p).$$

Jednym z głównych wyników pracy jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 7. [H3, Theorem A] Załóżmy, że $p \in (1, \infty)$. Dla każdego $f \in L^p(X, \mu)$ istnieje $f^* \in L^p(X, \mu)$ taka, że

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}_N^{\mathcal{P}} f(x) = f^*(x)$$

dla μ -prawie wszystkich $x \in X$.

Sumy wzdłuż liczb pierwszych są bardzo nieregularne, dlatego wygodniej jest pracować z ważonymi średnimi postaci

$$\mathcal{M}_N^{\mathcal{P}} f(x) = \frac{1}{\vartheta_B(N)} \sum_{n \in \mathbb{N}^{k'}} \sum_{p \in \mathbb{P}^{k''}} f\left(T_1^{\mathcal{P}_1(n,p)} \dots T_d^{\mathcal{P}_d(n,p)} x\right) \mathbb{1}_{B_N}(n, p) \left(\prod_{j=1}^{k''} \log p_j \right), \quad (13)$$

gdzie

$$\vartheta_B(N) = \sum_{n \in \mathbb{N}^{k'}} \sum_{p \in \mathbb{P}^{k''}} \mathbb{1}_{B_N}(n, p) \left(\prod_{j=1}^{k''} \log p_j \right).$$

Jak pokazałem w artykule [H3], punktowa zbieżność $(\mathcal{A}_N^{\mathcal{P}} : N \in \mathbb{N})$ może być wywnioskowana z właściwości $(\mathcal{M}_N^{\mathcal{P}} : N \in \mathbb{N})$.

Obok operatorów uśredniających rozważałem punktową zbieżność przyciętych dyskretnych operatorów osobliwych. Precyzyjniej, niech $K \in C^1(\mathbb{R}^k \setminus \{0\})$ będzie jądrem Calderóna–Zygmunda spełniającym nierówność

$$\|x\|^k |K(x)| + \|x\|^{k-1} \|\nabla K(x)\| \leq 1,$$

dla $x \in \mathbb{R}^k$, $\|x\| \geq 1$, wraz z warunkiem skracania

$$\int_{B_\lambda \setminus B_{\lambda'}} K(x) \, dx = 0,$$

dla dowolnych $0 < \lambda' \leq \lambda$. Wtedy przycięty dyskretny operator osobliwy $\mathcal{H}_N^{\mathcal{P}}$ zadany jest wzorem

$$\mathcal{H}_N^{\mathcal{P}} f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^{k'}} \sum_{p \in (\pm \mathbb{P})^{k''}} f\left(T_1^{\mathcal{P}_1(n,p)} \dots T_d^{\mathcal{P}_d(n,p)} x\right) K(n, p) \mathbb{1}_{B_N}(n, p) \left(\prod_{j=1}^{k''} \log |p_j| \right). \quad (14)$$

Wagi logarytmiczne w (13) i (14) odpowiadają gęstości liczb pierwszych. W pracy udowodniłem następujące twierdzenie, które jest rozszerzeniem twierdzenia ergodycznego Cotlara [15].

Twierdzenie 8. [H3, Theorem B] Załóżmy, że $p \in (1, \infty)$. Dla każdego $f \in L^p(X, \mu)$ istnieje $f^* \in L^p(X, \mu)$ taka, że

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{H}_N^{\mathcal{P}} f(x) = f^*(x)$$

dla μ -prawie wszystkich $x \in X$.

Właściwości półnormy wariacyjnej pozwalają wywnioskować Twierdzenia 7 i 8 z następującego wyniku.

Twierdzenie 9. [H3, Theorem C] Dla każdego $p \in (1, \infty)$ istnieje stała $C_p > 0$ taka, że dla każdego $r \in (2, \infty)$ i wszystkich funkcji $f \in L^p(X, \mu)$,

$$\|V_r(\mathcal{M}_N^{\mathcal{P}} f : N \in \mathbb{N})\|_{L^p} \leq C_p \frac{r}{r-2} \|f\|_{L^p} \quad (15)$$

oraz

$$\|V_r(\mathcal{H}_N^{\mathcal{P}} f : N \in \mathbb{N})\|_{L^p} \leq C_p \frac{r}{r-2} \|f\|_{L^p}. \quad (16)$$

Stała C_p nie zależy od współczynników przekształcenia wielomianowego $\mathcal{P}$.

Oszacowania wariacyjne dla dyskretnych operatorów były tematem prac [23, 25, 32, 34, 35, 46, H2]. W [25], Krause studiował przypadek $d = k = k' = 1$ i otrzymał nierówność (15) dla $p \in (1, \infty)$ i $r > \max\{p, p'\}$. Z drugiej strony, Zorin-Kranich w [46] dla tego samego przypadku otrzymał nierówność (15) dla wszystkich $r \in (2, \infty)$, ale dla p w pewnym otoczeniu 2. Dopiero ostatnio w [32] udowodniliśmy wariacyjne oszacowania dla pełnego zakresu parametrów, tzn. $p \in (1, \infty)$ i $r \in (2, \infty)$, co odpowiada przypadkowi $k'' = 0$. W [46], Zorin-Kranich pokazał też (15) dla operatorów uśredniających modelowanych na liczbach pierwszych, tj. kiedy $d = k = k'' = 1$ z wielomianem $\mathcal{P}(x) = x$. Warto wspomnieć, że oszacowania wariacyjne dla operatorów dyskretnych opierają się na oszacowaniach dla ich ciągłych odpowiedników otrzymanych w [24], zobacz także [32, Appendix].

Wariacyjne oszacowania dla dyskretnych operatorów osobliwych były badane w [14, 32, 34, 35]. W [35], otrzymaliśmy nierówność (16), dla przyciętej transformaty Hilberta modelowanej na liczbach pierwszych, co odpowiada $d = k = k'' = 1$ z wielomianem $P(x) = x$. W rzeczywistości, dyskretne operatory osobliwe typu Radona wymagały nowego podejścia. Bardzo ważny kamień milowy został położony przez Ionescu i Waingera w [21]. W końcu, pełne badania nad wariacyjnymi oszacowaniami dla dyskretnych przyciętych operatorów osobliwych typu Radona otrzymaliśmy w [32], co odpowiada $d = k = k'$.

Odnosząc się do punktowych twierdzeń ergodycznych wzdłuż liczb pierwszych, istnieją pewne wyniki oparte na normie oscylacyjnej. W [8], Bourgain pokazał punktową zbieżność średnich wzdłuż liczb pierwszych dla funkcji z $L^2(X, \mu)$. Następnie jego wynik był rozszerzony na wszystkie $L^p(X, \mu)$, $p > 1$, przez Wierdla w [45], zobacz także [11, Section 9]. Nie długo po tym, Nair w [36] udowodnił Twierdzenie 7 dla $L^2(X, \mu)$, $d = k = k'' = 1$, i dowolnego wielomianu o całkowitych współczynnikach. Nair także studiował średnie ergodyczne dla funkcji z $L^p(X, \mu)$, $p \neq 2$, jednak [37, Lemma 14] zawiera błąd. W rzeczywistości, oszacowania mnożnika W_N nie są wystarczające do pokazania, że suma rozważana na końcu dowodu ma oszacowania niezależne od $|\alpha - a/b|$. W końcu, rozszerzenie ergodycznego twierdzenia Cotlara na liczby pierwsze było badane w [H1], zobacz także [35].

W świetle zasady transferencji Calderóna, dowodząc Twierdzenie 9 możemy pracować z modelowym systemem dynamicznym. Niech $M_N^{\mathcal{P}}$ i $H_N^{\mathcal{P}}$ będą odpowiadającymi operatorami, tzn.

$$M_N^{\mathcal{P}} f(x) = \frac{1}{\vartheta_B(N)} \sum_{n \in \mathbb{N}^{k'}} \sum_{p \in \mathbb{P}^{k''}} f(x - \mathcal{P}(n, p)) \mathbb{1}_{B_N}(n, p) \left(\prod_{j=1}^{k''} \log p_j \right)$$

oraz

$$H_N^{\mathcal{P}} f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^{k'}} \sum_{p \in (\pm \mathbb{P})^{k''}} f(x - \mathcal{P}(n, p)) K(n, p) \mathbb{1}_{B_N}(n, p) \left(\prod_{j=1}^{k''} \log |p_j| \right).$$

Przejdziemy teraz do opisu metody dowodu Twierdzenia 9 dla modelowego systemu dynamicznego. Dla uproszczenia prezentacji skupimy się na operatorach uśredniających. Niech $\mathfrak{m}_N$ będzie dyskretnym mnożnikiem Fouriera odpowiadającym $M_N^{\mathcal{P}}$. Aby poradzić sobie z krótkimi wariacjami zastosowałem trik ostatnio użyty w pracy [34], porównaj także [46]. Mianowicie, dla danego $\rho \in (0, 1)$ rozważałem zbiór $\mathcal{D}_\rho = \{N_n : n \in \mathbb{N}\}$, gdzie $N_n = \lfloor 2^{n\rho} \rfloor$. Podzieliłem r -wariacyjną półnormę na dwie części: długie wariacje i krótkie wariacje. Dla każdego $p \in (1, \infty)$ dobrałem ρ w taki sposób, że oszacowanie w ℓ^p krótkich wariacji było stosunkowo łatwe. Następnie, aby kontrolować długie wariacje skorzystałem z rozkładu jedności, który zbudowaliśmy w [32], tj.

$$1 = \sum_{s=0}^{n-1} \Xi_{n,s}^\beta + \left(1 - \sum_{s=0}^{n-1} \Xi_{n,s}^\beta \right)$$

dla pewnego parametru $\beta \in \mathbb{N}$. Każdy projektor $\Xi_{n,s}^\beta$ ma nośnik zawarty w skończonej sumie rozłącznych kostek mających środki w punktach wymiernych należących do $\mathcal{R}_s^\beta$. W ten sposób, rozróżniłem część mnożnika, gdzie mogłem wyznaczyć jego asymptotykę, od mocno oscylującej. Do kontroli oscylującej części wykorzystałem nierówność Weyla–Vinogradova z logarytmiczną stratą w połączeniu z oszacowaniem na normę ℓ^p na mnożniki typu Ionescu–Wainger. Nierówność Weyla–Vinogradova jest jedną z nowości w omawianej pracy. Korzystając z nierówności trójkąta łatwo zauważyć, że dla kontroli pierwszej części wystarczy udowodnić

$$\left\| V_r \left(\mathcal{F}^{-1} \left(\mathfrak{m}_{N_n} \Xi_{n,s}^\beta \hat{f} \right) : n > s \right) \right\|_{\ell^p} \leq C_p (s+1)^{-2} \|f\|_{\ell^p}. \quad (17)$$

Najpierw, używając metody łuków Hardy’ego–Littlewooda, wyznaczyłem asymptotykę mnożników $\mathfrak{m}_{N_n}$. W tym miejscu natrafiłem na pierwszą różnicę w stosunku do [32]. Mianowicie, dla ξ dostatecznie bliskiego punktu wymiernego a/q mamy

$$\mathfrak{m}_{N_n}(\xi) = G(a/q) \Phi_{N_n}(\xi - a/q) + O\left(\exp\left(-c\sqrt{\log N_n}\right)\right), \quad (18)$$

pod warunkiem, że $1 \leq q \leq (\log N_n)^{\beta'}$, gdzie $G(a/q)$ jest sumą gaussowską i Φ_{N_n} wersją całkową $\mathfrak{m}_{N_n}$. Ograniczenie na wielkość mianowników jest konsekwencją tego, że dla większych q twierdzenie Siegela–Walfisza ma dodatkowy składnik związany z ewentualnym zerem Siegela. Drugim problemem jest wolniejsze malenie błędu w (18). W szczególności ma to wpływ na rozmiary kostek w rozkładzie jedności. Oba fakty powodują, że analiza mnożnika przybliżającego jest trudniejsza. Aby temu zaradzić, pracowałem bezpośrednio z $\mathfrak{m}_{N_n}$. Ponadto, dostałem ujednolicone podejście do wariacyjnych oszacowań dla operatorów uśredniających i przyciętych dyskretnych operatorów osobliwych.

Wracając do szkicu dowodu, w celu pokazania (17), półnormę wariacyjną podzieliłem na dwie części: $s < n < 2^{\kappa_s}$ i $2^{\kappa_s} \leq n$, gdzie $\kappa_s \simeq (s+1)^{\rho/10}$. Dla dużych skali $2^{\kappa_s} < n$, transferowałem oszacowanie w L^p dla r -wariacyjnej półnormy odpowiedniego ciągłego mnożnika. Ponieważ sumy gaussowskie spełniają $|G(a/q)| \lesssim q^{-\delta}$ dla pewnej $\delta > 0$ pokazałem, że norma ℓ^2 maleje jak $(s+1)^{-\delta\beta\rho}$. W konsekwencji, dobierając β

dostatecznie duże, w oparciu o interpolację, otrzymałem oszacowanie rzędu $(s+1)^{-2}$ na normę w ℓ^p dla r -wariacyjnej półnormy dla dużych skali. W przypadku małych skali $s < n \leq 2^{\kappa_s}$, oszacowanie normy ℓ^2 otrzymałem z pomocą numerycznej nierówności (12). Także i tym razem pokazałem, że norma ℓ^2 jest ograniczona przez $(s+1)^{-\delta\beta\rho+1}$. Z powodu słabszej asymptotyki w (18), oszacowanie półnormy r -wariacyjnej dla małych skali wymagał nowego podejścia. Pomysł polega na dalszym podzieleniu zbioru indeksów na diadyczne bloki i skonstruowaniu w każdym z nich dobrego mnożnika przybliżającego dającego oszacowanie normy ℓ^p niezależne od bloku. Kosztem dodatkowego czynnika κ_s^2 , dostałem oszacowania r -wariacji dla małych skali. Ta część dowodu jest nowa. W oparciu o argument interpolacyjny, w połączeniu z wyborem β dostatecznie dużego, otrzymałem oszacowanie na normę ℓ^p postaci $(s+1)^{-2}$.

H4. Variational estimates for operators on some thin subsets of primes

Dla danego systemu dynamicznego $(X, \mathcal{B}, \mu, S)$ i wielomianu P o wartościach całkowitych takiego, że $P(0) = 0$, rozważałem operatory uśredniające postaci

$$\mathcal{A}_N f(x) = \frac{1}{\#(\mathbf{P} \cap [1, N])} \sum_{p \in \mathbf{P} \cap [1, N]} f(S^{P(p)}x),$$

gdzie $\mathbf{P}$ jest pewnym cienkim podzbiorem liczb pierwszych $\mathbb{P}$, tzn.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#(\mathbf{P} \cap [1, N])}{\#(\mathbb{P} \cap [1, N])} = 0.$$

Obok operatorów uśredniających studiowałem też punktowe zbieżności dyskretnych przyciętych transformat Hilberta z odpowiednią funkcją wagową ω ,

$$\mathcal{H}_N f(x) = \sum_{p \in \pm \mathbf{P} \cap [1, N]} f(S^{P(p)}x) \frac{\omega(|p|)}{p}.$$

Przed sformułowaniem głównych wyników zdefiniujmy cienkie podzbiory $\mathbb{P}$, którymi zajmowałem się w [H4]. Niech $\mathcal{L}$ będzie rodziną funkcji wolnozmiennających $L : [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ taką, że

$$L(x) = \exp \left(\int_1^x \frac{\vartheta(t)}{t} dt \right)$$

dla pewnej funkcji $\vartheta \in C^\infty([1, \infty))$ spełniającej

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \vartheta(x) = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^n \vartheta^{(n)}(x) = 0 \quad \text{dla każdego} \quad n \in \mathbb{N}.$$

W klasie $\mathcal{L}$ wyróżniamy podklasę $\mathcal{L}_0$ taką, że $\lim_{x \rightarrow \infty} L(x) = \infty$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \vartheta(x) = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n \vartheta^{(n)}(x)}{\vartheta(x)} = 0 \quad \text{dla każdego} \quad n \in \mathbb{N},$$

przy czym dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje stała $C_\epsilon > 0$ taka, że $C_\epsilon x^\epsilon \vartheta(x) \geq 1$. Następnie dla każdego $c \in (0, 2)$ przez $\mathcal{R}_c$ oznaczamy rodzinę rosnących funkcji postaci

$$h(x) = x^c L(x),$$

gdzie $L \in \mathcal{L}_0$ jeśli $c = 1$, i $L \in \mathcal{L}$ w przeciwnym wypadku. Definicja klasy $\mathcal{R}_c$ pochodzi od Leitmanna [27]. Powyższa wersja została zaczerpnięta z [29].

Niech φ_1 i φ_2 będą ustalonymi funkcjami takimi, że $\varphi_1^{-1} \in \mathcal{R}_{c_1}$ i $\varphi_2^{-1} \in \mathcal{R}_{c_2}$, dla pewnych $c_1, c_2 \in [1, 2)$. Zbiory, które badałem mają postać

$$\mathbf{P}_+ = \{p \in \mathbb{P} : \{\varphi_1(p)\} < \psi(p)\}, \quad \mathbf{P}_- = \{p \in \mathbb{P} : \{-\varphi_1(p)\} < \psi(p)\},$$

gdzie $\psi : [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ spełnia $0 < \psi \leq \frac{1}{2}$ oraz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi^{(k)}(x)}{\varphi_2^{(k+1)}(x)} = 1$$

dla każdego $k = 0, 1, \dots, d+2$, gdzie d jest stopniem wielomianu P . W całej pracy zakładałem, że $\gamma_1 = 1/c_1$ i $\gamma_2 = 1/c_2$ spełniają:

(i) jeśli $d = 1$,

$$\begin{cases} (1 - \gamma_1) + 15(1 - \gamma_2) < 1, \\ 3(1 - \gamma_1) + 12(1 - \gamma_2) < 2, \end{cases}$$

(ii) jeśli $d = 2$,

$$\begin{cases} 3(1 - \gamma_1) + 62(1 - \gamma_2) < 3, \\ 4(1 - \gamma_1) + 32(1 - \gamma_2) < 3, \end{cases}$$

(iii) jeśli $d \in \{3, \dots, 9\}$,

$$\begin{cases} \frac{1}{3 \cdot 2^d}(1 - \gamma_1) + \left(1 + \frac{1}{6(2^d - 1)}\right)(1 - \gamma_2) < \frac{1}{3 \cdot 2^d}, \\ (1 - \gamma_2) < \frac{1}{4 \cdot 2^d}, \end{cases}$$

(iv) jeśli $d \geq 10$,

$$\frac{2}{3d(d+1)^2}(1 - \gamma_1) + \left(1 + \frac{1}{3d(d+1)}\right)(1 - \gamma_2) < \frac{2}{3d(d+1)^2}.$$

Własności półnormy wariacyjnej pozwalają wywnioskować punktowe twierdzenia ergodyczne z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 10. [H4, Theorem A & B] Niech $\mathbf{P} \in \{\mathbf{P}_-, \mathbf{P}_+\}$. Dla każdego $s > 0$ istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdego $r > 2$ i dowolnej funkcji $f \in L^s(X, \mu)$,

$$\|V_r(\mathcal{A}_N f : N \in \mathbb{N})\|_{L^s} \leq C \frac{r}{r-2} \|f\|_{L^s} \quad (19)$$

oraz

$$\|V_r(\mathcal{H}_N f : N \in \mathbb{N})\|_{L^s} \leq C \frac{r}{r-2} \|f\|_{L^s} \quad (20)$$

Stała C nie zależy od współczynników wielomianu P .

Zauważmy, że nierówność (20) pozwala zdefiniować ergodyczną transformatę Hilberta dla funkcji $f \in L^s(X, \mu)$, $s > 1$, wzorem

$$\mathcal{H}f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{H}_N f(x)$$

dla μ -prawie wszystkich $x \in X$.

Jak łatwo pokazać w przypadku, gdy $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ oraz $\psi(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x)$, otrzymujemy

$$\mathbf{P}_- = \{p \in \mathbb{P} : p = \lfloor \varphi^{-1}(n) \rfloor \text{ dla pewnego } n \in \mathbb{N}\}.$$

Zbiory tej postaci były studiowane w [29]. W konsekwencji oszacowania (19) pociągają (8), jak i punktowe twierdzenie ergodyczne [29, Theorem 1.14].

Przejdźmy teraz do krótkiego opisu dowodu Twierdzenia 10. W świetle zasady transferencji Calderóna możemy ograniczyć się do modelowego systemu dynamicznego. Jak zwykle r -wariacje podzieliłem na dwie części: krótkie i długie wariacje. Jeśli długie wariacje przebiegają zbiór $\mathbf{Z}_\rho = \{\lfloor 2^{k\rho} \rfloor : k \in \mathbb{N}\}$ dla pewnego $\rho \in (0, 1)$, to krótkie wariacje stają się znacznie łatwiejsze. W rzeczywistości, oszacowanie krótkich wariacji sprowadza się do oszacowania normy $\ell^1(\mathbb{Z})$ jądra splotowego, co jest konsekwencją oszacowań pewnych sum eksponencjalnych wzdłuż zbioru $\mathbf{P}$ w połączeniu z twierdzeniem o liczbach pierwszych lub twierdzeniem Mertensa. W długich wariacjach, operator modelowany wzdłuż zbioru $\mathbf{P}$ zamieniłem na operator modelowany wzdłuż liczb pierwszych $\mathbb{P}$. W tym kroku, musiałem uzyskać malenie na normy ℓ^2 dla różnicy tych operatorów. Korzystając z twierdzenia Plancherela, uzyskałem je z oszacowań pewnych sum eksponencjalnych wzdłuż $\mathbf{P}$. Pozwoliło to sprowadzić wariacyjne oszacowania wzdłuż $\mathbf{P}$ do wariacyjnych oszacowań wzdłuż $\mathbb{P}$, które były tematem badań w [H3].

Jak widzimy w dowodzie Twierdzenia 10, ważnym narzędziem były oszacowania pewnych sum eksponencjalnych.

Twierdzenie 11. [H4, Theorem 1] Dla $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\tau \in \{0, 1\}$ i $1 \leq X \leq X' \leq 2X$, definiujemy

$$S(X, X') = \sum_{X < n \leq X'} \exp\left(2\pi i(\xi P(n) + m(\varphi_1(n) - \tau\psi(n)))\right) \Lambda(n),$$

gdzie Λ jest funkcją von Mangoldta. Wtedy dla każdego $\epsilon > 0$,

(i) jeśli $d = 1$,

$$|S(X, X')| \lesssim_\epsilon X^{1+\epsilon} \left(|m|^{\frac{1}{4}} X^{-\frac{1}{12}} + |m|^{\frac{1}{14}} (\varphi_1(X)\sigma_1(X))^{-\frac{1}{14}} + X^{\frac{1}{12}} (\varphi_1(X)\sigma_1(X))^{-\frac{1}{4}} \right),$$

(ii) jeśli $d = 2$,

$$|S(X, X')| \lesssim_\epsilon X^{1+\epsilon} \left(|m|^{\frac{1}{12}} X^{-\frac{1}{16}} + |m|^{\frac{1}{30}} (\varphi_1(X)\sigma_1(X))^{-\frac{1}{20}} + X^{\frac{1}{32}} (\varphi_1(X)\sigma_1(X))^{-\frac{1}{8}} \right),$$

(iii) jeśli $d \in \{3, \dots, 9\}$,

$$|S(X, X')| \lesssim_\epsilon X^{1+\epsilon} \left(X^{-\frac{1}{4 \cdot 2^d}} + |m|^{\frac{1}{4(2^d-1)}} X^{-\frac{d-1}{8(2^d-1)}} + |m|^{\frac{1}{6(2^d-1)}} (\varphi_1(X)\sigma_1(X))^{-\frac{1}{3 \cdot 2^d}} \right),$$

(iv) jeśli $d \geq 10$,

$$|S(X, X')| \lesssim_\epsilon X^{1+\epsilon} \left(X^{-\frac{1}{4d(d+1)}} + |m|^{\frac{1}{2d(d+1)}} X^{-\frac{d-1}{4d(d+1)}} + |m|^{\frac{1}{3d(d+1)}} (\varphi_1(X)\sigma_1(X))^{-\frac{2}{3d(d+1)^2}} \right).$$

Niejawne stałe w powyższych oszacowaniach są niezależne od m , τ , X , X' oraz ξ .

Dowód Twierdzenia 11 opiera się na zastosowaniu tożsamości Vaughana w połączeniu z lematem van der Corputa. Cztery przypadki w tezie twierdzenia wynikają z tego, że korzystałem z lematu van der Corputa w klasycznej postaci, jak i ostatnio otrzymanej przez Heath-Browna w [19].

H5. Endpoint estimates for the maximal function over prime numbers

Niech $(X, \mathcal{B}, \mu, S)$ będzie ergodycznym systemem dynamicznym, w którym $(X, \mathcal{B}, \mu)$ jest przestrzenią probabilistyczną. W pracy [H5] rozważałem operatory uśredniające wzdłuż liczb pierwszych, tj.

$$\mathcal{A}_N f(x) = \frac{1}{\pi(N)} \sum_{p \in \mathbb{P}_N} f(S^p x),$$

gdzie $\mathbb{P}_N$ jest podzbiorem liczb pierwszych nie większych od N i $\pi(N) = \#\mathbb{P}_N$. Badanie średnich ergodycznych wzdłuż liczb pierwszych zapoczątkował Bourgain w [8] rozważając przypadek funkcji należących do $L^2(X, \mu)$. Zbieżność dla $L^p(X, \mu)$, $p > 1$, pokazał Wierdl w [45], porównaj także [11, Section 9]. Jednak zachowanie dla punktu granicznego $p = 1$ było otwartym problemem przez ponad dwadzieścia lat. Adaptując metodę opracowaną przez Buczolicha i Mauldaina w [12], LaVictoire w [26] pokazał, że dla każdego ergodycznego systemu dynamicznego istnieje funkcja $f \in L^1(X, \mu)$ taka, że ciąg $(\mathcal{A}_N f : N \in \mathbb{N})$ nie zbiega na zbiorze miary dodatniej. Celem pracy [H5] było znalezienie blisko $L^1(X, \mu)$ przestrzeni Orlicza, dla której zachodzi punktowe twierdzenie ergodyczne.

Twierdzenie 12. [H5, Theorem A] Dla każdej funkcji $f \in L(\log L)^2(\log \log L)(X, \mu)$ granica

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}_N f(x)$$

istnieje dla μ -prawie wszystkich $x \in X$.

W świetle punktowej zbieżności otrzymanej przez Bourgaina w [9], porównaj także [35], dla dowodu Twierdzenia 12 wystarczy pokazać słabe maksymalne oszacowania dla funkcji z

$$L(\log L)^2(\log \log L)(X, \mu).$$

Nierówność tę można wywnioskować z następującego oszacowania restrykcyjnego.

Twierdzenie 13. [H5, Theorem B] Istnieje stała $C > 0$ taka, że dla dowolnego podzbioru $A \subset X$,

$$\mu\left\{x \in X : \sup_{N \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_N(\mathbb{1}_A)(x) > \lambda\right\} \leq C\lambda^{-1} \log^2(e/\lambda)\mu(A)$$

dla wszystkich $0 < \lambda < 1$.

Odwołując się do zasady transferencji Calderóna, Twierdzenie 13 można wywnioskować z odpowiadającego wyniku dla modelowego systemu dynamicznego. Precyzyjniej, oznaczmy przez A_N operator uśredniający na $\mathbb{Z}$,

$$A_N f(x) = \frac{1}{\pi(N)} \sum_{p \in \mathbb{P}_N} f(x - p).$$

Wtedy

Twierdzenie 14. [H5, Theorem C] Istnieje $C > 0$ taka, że dla dowolnego skończonego podzbioru $F \subset \mathbb{Z}$,

$$\left|\left\{x \in \mathbb{Z} : \sup_{N \in \mathbb{N}} A_N(\mathbb{1}_F)(x) > \lambda\right\}\right| \leq C\lambda^{-1} \log^2(e/\lambda) |F|$$

dla wszystkich $0 < \lambda < 1$.

Twierdzenie 14 wraz z oszacowaniami maksymalnymi na $\ell^2(\mathbb{Z})$ są wystarczająco silne, aby pociągać nierówność maksymalną dla wszystkich funkcji z $\ell^p(\mathbb{Z})$, $p > 1$, co daje alternatywny dowód twierdzenia Wierdla [45].

Przejdźmy teraz do szkicu dowodu Twierdzenia 14. Bez straty ogólności biorąc supremum możemy ograniczyć się do liczb diadycznych. Ponadto, jest łatwiej pracować z ważonymi średnimi M_N niż A_N , gdzie

$$M_N f(x) = \frac{1}{\vartheta(N)} \sum_{p \in \mathbb{P}_N} f(x - p) \log p,$$

gdzie $\vartheta(N) = \sum_{p \in \mathbb{P}_N} \log p$. Dla ustalonego $t > 0$ i każdego $n \in \mathbb{N}$ rozłożyłem operator M_{2^n} na dwie części A_n^t i B_n^t w taki sposób, że funkcja maksymalna związana z A_n^t ma $\ell^{1,\infty}$ -pólnormę $\lesssim t\|f\|_{\ell^1}$, natomiast odpowiadająca B_n^t ma $\ell^2(\mathbb{Z})$ -normę $\lesssim \exp(-c\sqrt{t})\|f\|_{\ell^2}$. Dobierając $t \simeq \log^2(e/\lambda)$ nierówności te zastosowane do dystrybucji $\left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} M_{2^n}(\mathbb{1}_F) > \lambda \right\}$ dają optymalne oszacowanie. Podobny pomysł pojawił się już w pracy Bourgaina [7]. W kontekście dyskretnej analizy harmonicznej zastosowany był przez Ionescu w [20]. Rozkładając operator M_{2^n} korzystałem z metody łuków Hardy’ego–Littlewooda. Jednak, aby otrzymać wykładnicze malenie błędu przybliżenia, z powodu twierdzenia Page’a, mnożnik przybliżający musi także zawierać drugi składnik asymptotyki. Stąd, istnienie zera Siegela pociąga za sobą, że w otoczeniu punktu wymiernego a/q mnożnik przybliżający $\widehat{L}_{2^n}^{a,q}(\cdot - a/q)$ zależy od liczby wymiernej a/q . Dzięki log-wypukłości $\ell^{1,\infty}$ słabe oszacowania wynikają z nierówności

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{Z} : \sup_{t \leq n} \left| \sum_{a \in A_q} \mathcal{F}^{-1}(\widehat{L}_{2^n}^{a,q}(\cdot - a/q) \eta_s(\cdot - a/q) \hat{f})(x) > \lambda \right| \right\} \right| \leq C \frac{1}{\lambda \varphi(q)} \|f\|_{\ell^1},$$

dla $2^s \leq q < 2^{s+1}$, $1 \leq s \leq \sqrt{t}$, której dowód wykorzystuje zachowanie sum Gaussa

$$G(\chi, n) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{r \in A_q} \chi(r) e^{2\pi i r n / q},$$

gdzie χ jest charakterem Dirichleta modulo q .

W tym miejscu warto zauważyć, że praca [H5] jest pierwszym wynikiem z dyskretnej analizy harmonicznej, który w miejsce braku słabego typu $(1, 1)$ dowodzi restrykcyjne słabe oszacowania typu Orlicza.

5. Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej

Zaraz po obronieniu rozprawy doktorskiej odbyłem staż podoktorski na Uniwersytecie w Sassari, Włochy, gdzie pod kierunkiem profesora Tima Stegera studiowałem teorię budynków afinicznych. Staż ten zakończyłem w czerwcu 2005 roku. Wraz z początkiem roku akademickiego 2005/6 rozpocząłem staż podoktorski na Uniwersytecie w Orleanie, Francja, gdzie wspólnie z profesorem Jean-Philippe Ankerem badałem spacery losowe na budynkach afinicznych. Kolejne dwa i pół roku spędziłem na stażu na Uniwersytecie w Sydney, Australia, badając strukturę egzotycznych budynków afinicznych. Po powrocie do Polski, w latach 2010–6 zatrudniony byłem na stanowisku adiunkta w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego. Od 2017 do chwili obecnej zatrudniony jestem w Polskiej Akademii Nauk.

Poza pięcioma pracami stanowiącymi tematyczny cykl rozprawy habilitacyjnej, po uzyskaniu stopnia doktora opublikowałem jeszcze 15 artykułów, a kolejne siedem zostało złożone do recenzji. Łącznie jestem autorem lub współautorem 30 prac. Liczba cytowań, według bazy Web of Science (na dzień 25.08.2020), jest równa 95 zaś h-indeks wynosi 6.

Poniżej przedstawiam listę prac, które powstały po uzyskaniu stopnia doktora.

- [P1] C. Nana, B. Trojan, *L^p boundedness of Bergman projections in tube domains over homogeneous cones*, Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa-Classe Di Scienze 5 (2011), 477–51
- [P2] K. Hughes, B. Krause, B. Trojan, *The maximal function and conditional square function control the variation: An elementary proof*, Proceedings of the American Mathematical Society 144 (2016), 3583–3588
- [P3] B. Krause, M. Mirek, B. Trojan, *On the Hardy–Littlewood majorant problem for arithmetic sets*, Journal of Functional Analysis 271 (2016), 164–181
- [P4] A. Bendikov, W. Cygan, B. Trojan, *Limit theorems for random walks*, Stochastic Processes and their Applications 127 (2017), 3268–3290
- [P5] W. Cygan, T. Grzywny, B. Trojan, *Asymptotic behaviour of densities of unimodal convolution semigroups*, Transactions of the American Mathematical Society 369 (2017), 5623–5644
- [P6] M. Mirek, E.M. Stein, B. Trojan, *$\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ -estimates for discrete operators of Radon types: Variational estimates*, Inventiones Mathematicae 209 (2017), 665–748
- [P7] M. Mirek, B. Trojan, P. Zorin-Kranich, *Variational estimates for averages and truncated singular integrals along the prime numbers*, Transactions of the American Mathematical Society 369 (2017), 5403–5423
- [P8] G. Świdorski, B. Trojan, *Periodic perturbations of unbounded Jacobi matrices I: Asymptotics of generalized eigenvectors*, Journal of Approximation Theory 216 (2017), 38–66
- [P9] B. Krause, M. Mirek, B. Trojan, *Two-parameter version of Bourgain’s inequality: Rational frequencies*, Advances in Mathematics 323 (2018), 720–744
- [P10] T. Steger, B. Trojan, *Littlewood–Paley theory for triangle buildings*, Journal of Geometric Analysis 28 (2018), 1122–1150
- [P11] G. Grzywny, M. Ryznar, B. Trojan, *Asymptotic behaviour and estimates of slowly varying convolution semigroups*, International Mathematics Research Notices 23 (2019), 7193–7258
- [P12] M. Mirek, E.M. Stein, B. Trojan, *$\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ -estimates for discrete operators of Radon types: Maximal estimates*, Journal of Functional Analysis 277 (2019), 2471–2892
- [P13] B. Trojan, *Long time behaviour of random walks on the integer lattice*, Monatshefte Für Mathematik 191 (2020), 349–376
- [P14] G. Świdorski, B. Trojan, *Asymptotics of orthogonal polynomials with slowly oscillating recurrence coefficients*, Journal of Functional Analysis 278 (2020), doi: 10.1016/j.jfa.2019.108326
- [P15] G. Świdorski, B. Trojan, *Asymptotic behaviour of Christoffel–Darboux kernel via three-term recurrence relation I*, przyjęta do Constructive Approximation (2020)
- [Pre0] B. Trojan, *Weak type $(1, 1)$ estimates for maximal functions along 1-regular sequences of integers*, 2020
- [Pre1] B. Trojan, *Asymptotic behaviour of heat kernels and Green functions on affine buildings*, 2020
- [Pre2] T. Grzywny, Ł. Leżaj, B. Trojan, *Transition densities of subordinators of positive order*, 2019

- [Pre3] G. Świdorski, B. Trojan, *Asymptotic behaviour of Christoffel–Darboux kernel via three-term recurrence relation II*, 2020
- [Pre4] G. Świdorski, B. Trojan, *About essential spectra of Jacobi matrices*, 2020
- [Pre5] G. Świdorski, B. Trojan, *Orthogonal polynomials with periodically modulated recurrence coefficients in the Jordan block case*, 2020
- [Pre6] M. Rzeszut, B. Trojan, *Concrete representation of atomic (F4) filtration*, 2020

Mój dorobek naukowy dopełniają jeszcze poniższe trzy publikacje, z których [M1] jest pracą magisterską, a [D1] pracą doktorską.

- [M1] *Poisson kernels and pluriharmonic $\mathcal{H}^2$ functions on homogeneous Siegel domains*, Journal of Lie Theory 12 (2002), 217–243
- [M2] A. Bonami, D. Buraczewski, E. Damek, A. Hulanicki, R. Penney, *Hua-harmonic functions on symmetric irreducible Siegel domains of type II*, Journal of Functional Analysis 188 (2002), 38–74
- [D1] *Asymptotic Expansions and Hua-harmonic functions on bounded homogeneous domains*, Mathematische Annalen 336 (2006), 73–110

Przejdźmy teraz do krótkiego opisu najważniejszych wyników uzyskanych w pozostałych pracach zgrupowane w czterech poniższych sekcjach.

Dyskretna analiza harmoniczna

P2. *The maximal function and conditional square function control the variation: An elementary proof*

Oszacowania wariacyjne mają swoje źródło w zagadnieniach probabilistycznych. Ich badanie zainicjował Lepinglé w pracy [28] pokazując, że dla pewnej stałej $C > 0$,

$$\|V_r(f_n : n \in \mathbb{N})\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}$$

oraz

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda \cdot \mathbb{P}(V_r(f_n : n \in \mathbb{N}) > \lambda) \leq C\|f\|_{L^1},$$

gdzie $(f_n : n \in \mathbb{N}_0)$ jest martyngałem generowanym przez funkcję $f \in L^p(\Omega, \mathbb{P})$, $p \geq 1$, względem ustalonej filtracji $(\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}_0)$. Pierwotny dowód jest skomplikowany i stosunkowo techniczny. Obecnie prostsze rozumowania można znaleźć w [39] i [11], porównaj także [24]. Wszystkie opierają się na oszacowaniach funkcji skoków. W pracy [P2] pokazaliśmy w jaki sposób można kontrolować dystrybuantę $\mathbb{P}(V_r(f_n : n \in \mathbb{N}) > \lambda)$ w terminach funkcji maksymalnej

$$\mathcal{M}f = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n|,$$

i warunkowej funkcji kwadratowej

$$s(f) = \left(\sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[|f_n - f_{n-1}|^2 | \mathcal{F}_{n-1}] \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Udowodniliśmy, że istnieje stała $C > 0$ taka, że dla wszystkich $\delta \in (0, 1/2)$, $r > 2$ i $\lambda > 0$,

$$C \cdot \mathbb{P}(V_r(f_n : n \in \mathbb{N}) > 3\lambda; \mathcal{M}f \leq \delta\lambda) \leq \mathbb{P}(s(f) > \delta\lambda) + \frac{\delta^2}{(r-2)^2} \cdot \mathbb{P}(V_r(f) > \lambda). \quad (21)$$

W szczególności całkując dystrybuanty dostajemy, że dla każdego $p \in (0, \infty)$ i $r > 2$, $V_r(f) \in L^p(\Omega, \mathbb{P})$, o ile $\mathcal{M}f$ i $s(f)$ należą do $L^p(\Omega, \mathbb{P})$. Jeśli filtracja jest regularna to dla każdego $p \in (0, \infty)$ dostajemy charakteryzację martyngałowej przestrzeni Hardy'ego

$$f \in H_{\mathcal{M}}^p(\Omega, \mathbb{P}) \iff V_r(f) \in L^p(\Omega, \mathbb{P}).$$

P3. On the Hardy–Littlewood majorant problem for arithmetic sets

W roku 1935 Hardy i Littlewood w [18] sformułowali hipotezę, że dla każdego $p \geq 2$ istnieje stała $C_p > 0$ taka, że dla dowolnego skończonego zbioru $A \subset \mathbb{Z}$ i dowolnego ciągu liczb zespolonych $(a_n : n \in A)$ spełniającego $\sup_{n \in A} |a_n| \leq 1$ mamy

$$\left\| \sum_{n \in A} a_n e^{2\pi i n \xi} \right\|_{L^p(\mathbb{T}, d\xi)} \leq C_p \left\| \sum_{n \in A} e^{2\pi i n \xi} \right\|_{L^p(\mathbb{T}, d\xi)}. \quad (22)$$

Korzystając z równości Parsewala, łatwo można pokazać, że $C_p = 1$ dla dowolnego parzystego p . Ponadto, już Hardy i Littlewood zauważyli, że $C_3 > 1$. W 1962 roku, Boas [6] pokazał, że $C_p > 1$ dla $p \notin \{2k : k \in \mathbb{N}\}$. W końcu, na początku lat siedemdziesiątych Bachelis [2] udowodnił, że C_p jest nieograniczona dla $p \notin \{2k : k \in \mathbb{N}\}$. W pracy [P3] skonstruowaliśmy klasę zbiorów, dla których hipoteza jest prawdziwa. Mianowicie, rozważaliśmy zbiory postaci

$$\mathbf{B}_+ = \{n \in \mathbb{N} : \{\varphi(n)\} < \psi(n)\} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{B}_- = \{n \in \mathbb{N} : \{-\varphi(n)\} < \psi(n)\},$$

gdzie φ i ψ są funkcjami odwrotnymi do $x^c L_1(x)$ i $x L_2(x)$, odpowiednio, dla pewnych wolnozmiennających się L_1 i L_2 oraz $c \in [1, 2)$. Nierówność (22) ma wiele zastosowań w analizie harmonicznej i teorii liczb.

P6. $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ -estimates for discrete operators of Radon types: Variational estimates

P12. $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ -estimates for discrete operators of Radon types: Maximal estimates

Niech $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_d) : \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}^d$ oznacza przekształcenie wielomianowe takie, że każda składowa $\mathcal{P}_j$ jest wielomianem k -zmiennych o wartościach całkowitych spełniającym $\mathcal{P}_j(0) = 0$. Niech B będzie otwartym i ograniczonym podzbiorem $\mathbb{R}^k$ zawierającym środek układu współrzędnych i takim, że dla pewnego $\iota > 0$ i wszystkich $N \in \mathbb{N}$,

$$[-\iota N, \iota N]^k \subseteq B_N \subseteq [-N, N]^k.$$

W pracy [P12] rozważaliśmy średnie

$$A_N^{\mathcal{P}} f(x) = N^{-k} \sum_{n \in \mathbb{N}^k} f(x - \mathcal{P}(n)) \mathbb{1}_{B_N}(n).$$

Ponadto, badaliśmy też przycięte dyskretne operatory osobliwe zdefiniowane dla funkcji o skończonym nośniku wzorem

$$T_N^{\mathcal{P}} f(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^k \setminus \{0\}} f(x - \mathcal{P}(y)) K(y) \mathbb{1}_{B_N}(y),$$

gdzie $K \in C^1(\mathbb{R}^k \setminus \{0\})$ jest jądrem Calderóna–Zygmunda spełniającym

$$\|x\|^k |K(x)| + \|x\|^{k-1} \|\nabla K(x)\| \leq 1,$$

dla $x \in \mathbb{R}^k$, $\|x\| \geq 1$ oraz warunek skracania

$$\sup_{\lambda \geq 1} \left| \int_{1 \leq \|x\| \leq \lambda} K(x) dx \right| \leq 1.$$

Jednym z wyników pracy [P12] jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 15. *Dla każdego $p \in (1, \infty)$ istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdej funkcji $f \in \ell^p(\mathbb{Z}^d)$,*

$$\left\| \sup_{N \in \mathbb{N}} |A_N^{\mathcal{P}} f| \right\|_{\ell^p} \leq C \|f\|_{\ell^p} \quad \text{oraz} \quad \left\| \sup_{N \in \mathbb{N}} |T_N^{\mathcal{P}} f| \right\|_{\ell^p} \leq C \|f\|_{\ell^p}.$$

Stała C nie zależy od współczynników odwzorowania wielomianowego $\mathcal{P}$.

Dowód Twierdzenia 15 opierał się na konstrukcji dyskretnego odpowiednika funkcji kwadratowej. W ten sposób dostaliśmy jednolitą teorię, a zarazem nowy dowód dla wielowymiarowego twierdzenia maksymalnego Bourgaina [H2], patrz Twierdzenie 6. Skonstruowana funkcja kwadratowa była także kluczowym narzędziem w [P6], gdzie badaliśmy oszacowania wariacyjne dla operatorów $A_N^{\mathcal{P}}$ i $T_N^{\mathcal{P}}$. Tutaj, o jądrze K musimy założyć silniejszy warunek skracania

$$\int_{B_\lambda \setminus B_{\lambda'}} K(x) dx = 0$$

dla dowolnych $0 < \lambda \leq \lambda'$.

Twierdzenie 16. *Dla każdego $p \in (1, \infty)$ istnieje $C > 0$ takie, że dla dowolnego $r > 2$ i każdej funkcji $f \in \ell^p(\mathbb{Z}^d)$,*

$$\left\| V_r(A_N^{\mathcal{P}} f : N \in \mathbb{N}) \right\|_{\ell^p} \leq C \frac{r}{r-2} \|f\|_{\ell^p} \quad \text{oraz} \quad \left\| V_r(T_N^{\mathcal{P}} f : N \in \mathbb{N}) \right\|_{\ell^p} \leq C \frac{r}{r-2} \|f\|_{\ell^p}.$$

Stała C nie zależy od współczynników odwzorowania wielomianowego $\mathcal{P}$.

Zauważmy, że Twierdzenie 16 jest rozszerzeniem [H2], patrz Twierdzenie 5, do pełnego zakresu parametrów, tj. $p \in (1, \infty)$ i $r > 2$. Ponadto, w oparciu o zasadę transferencji Calderóna i własności półnormy wariacyjnej automatycznie dostajemy odpowiednie punktowe twierdzenia ergodyczne.

P10. Two-parameter version of Bourgain's inequality: Rational frequencies

Niech $A_n = (-2^{-n-1}, 2^{-n-1})$ dla $n \in \mathbb{N}_0$. Załóżmy, że $\Lambda \subset \mathbb{R}$ jest skończonym zbiorem spełniającym następujący warunek oddzielania: dla dowolnych $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, jeśli $\lambda \neq \lambda'$ to $|\lambda - \lambda'| \geq 1$. W [11], Bourgain udowodnił, że istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdej funkcji $f \in L^2(\mathbb{R})$ mamy

$$\left\| \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left| \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{A_n^\lambda} \mathcal{F} f) \right| \right\|_{L^2} \leq C (\log \# \Lambda)^2 \|f\|_{L^2}, \quad (23)$$

gdzie $A_n^\lambda = \lambda + A_n$, natomiast $\mathcal{F}$ oznacza operator transformaty Fouriera na $\mathbb{R}$. Nierówność ta, zwana Lematem Logarytmicznym, została wykorzystana do pokazania punktowego twierdzenia ergodycznego dla operatorów uśredniających wzdłuż $(n^2 : n \in \mathbb{N})$. W pracy [P9] pokazaliśmy jej dwuparametrowy wariant. Mianowicie, jeśli Λ jest skończonym podzbiorem $Q_1^{-1}\mathbb{Z} \times Q_2^{-1}\mathbb{Z}$ dla pewnych $Q_1, Q_2 \in \mathbb{N}$ spełniającym warunek oddzielania, wtedy istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdej funkcji $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$,

$$\left\| \sup_{n_1, n_2 \in \mathbb{N}} \left| \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{R_{n_1, n_2}^\lambda} \mathcal{F} f) \right| \right\|_{L^2} \leq C \log \log(Q_1 \sqrt{\# \Lambda}) \log \log(Q_2 \sqrt{\# \Lambda}) \|f\|_{L^2}, \quad (24)$$

gdzie $R_{n_1, n_2}^\lambda = \lambda + A_{n_1} \times A_{n_2}$, natomiast $\mathcal{F}$ oznacza operator transformaty Fouriera na $\mathbb{R}^2$. Nierówność (24), ma zastosowanie w studiowaniu dyskretnych dwuparametrowych funkcji maksymalnych, które obecnie są tematem badań Mirka i Wrighta.

Analiza na budynkach afinicznych

P11. Littlewood–Paley theory for triangle buildings

Pre1. Asymptotic behaviour of heat kernels and Green functions on affine buildings

W 1975 roku, Cairoli i Walsh [13] zainicjowali badania nad martyngałami dwuparametrowymi. Przypomnijmy, że ciąg σ -ciał $(\mathcal{F}_{n,m} : n, m \in \mathbb{Z})$ na σ -skończonej przestrzeni z miarą $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ jest dwuparametrową filtracją, jeśli

$$\mathcal{F}_{n+1,m} \subseteq \mathcal{F}_{n,m}, \quad \mathcal{F}_{n,m+1} \subseteq \mathcal{F}_{n,m}. \quad (25)$$

Wtedy ciąg $(f_{n,m} : n, m \in \mathbb{Z})$ jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_{n,m} : n, m \in \mathbb{Z})$, jeśli

$$\mathbb{E}[f_{n+1,m} | \mathcal{F}_{n,m}] = \mathbb{E}[f_{n,m+1} | \mathcal{F}_{n,m}] = f_{n,m}. \quad (26)$$

Zauważmy, że warunki (25) i (26) wymuszają strukturę jedynie dla porównywalnych indeksów. Przypuszczalnie w takiej ogólności nie jest możliwe zbudowanie teorii funkcji kwadratowej Littlewooda–Paley, dlatego w [13] autorzy wprowadzili warunek

$$\mathbb{E}[f | \mathcal{F}_{n,\infty} | \mathcal{F}_{\infty,m}] = \mathbb{E}[f | \mathcal{F}_{\infty,m} | \mathcal{F}_{n,\infty}] = f_{n,m}, \quad (F_4)$$

gdzie

$$\mathcal{F}_{n,\infty} = \sigma\left(\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_{n,m}\right), \quad \mathcal{F}_{\infty,m} = \sigma\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_{n,m}\right).$$

Przy warunku (F_4) , zarówno funkcja kwadratowa

$$Sf = \left(\sum_{n,m \in \mathbb{Z}} |d_{n,m}f|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

gdzie $d_{n,m}$ jest operatorem podwójnej różnicy, tj.

$$d_{n,m}f = f_{n,m} - f_{n-1,m} - f_{n,m-1} + f_{n-1,m-1},$$

jak i funkcja maksymalna

$$Mf = \sup_{n,m \in \mathbb{Z}} |f_{n,m}|,$$

mają normy $L^p(\Omega, \nu)$ porównywalne z normą $\|f\|_{L^p}$, $p > 1$. Ciekawy wynik dotyczący filtracji spełniających (F_4) można znaleźć w pracy [Pre6].

Najprostszy przykład kiedy warunek (F_4) nie jest spełniony można otrzymać rozważając grupę Heisenberga wraz z nieizotopowymi dwuparametrowymi dylatacjami

$$\delta_{s,t}(x, y, z) = (sx, ty, stz).$$

Ponieważ w tym kontekście diadyczne kostki nie mają takich samych własności jak kostki euklidesowe, jest dużo wygodniej pracować z p -adyczną wersją grupy Heisenberga, którą można zidentyfikować z podzbiorem Ω_0 maksymalnego brzegu budynku związanego z grupą $GL(3, \mathbb{Q}_p)$ składającym się z punktów przeciwnych do ustalonego ω_0 . Zbiór Ω_0 ma naturalną, dwuparametrową filtrację $(\mathcal{F}_{n,m} : n, m \in \mathbb{Z})$. W pracy [P10], pokazaliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 17. *Dla każdego $p \in (1, \infty)$ istnieje $C > 0$ taka, że dla wszystkich funkcji $f \in L^p(\Omega_0, \nu)$,*

$$\|Mf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}$$

oraz

$$C^{-1}\|f\|_{L^p} \leq \|Sf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}.$$

W rzeczywistości, Twierdzenie 17 udowodniliśmy dla wszystkich budynków typu $\tilde{A}_2$ włączając w to egzotyczne przypadki o trywialnej grupie automorfizmów. Nasze argumenty są czysto geometryczne i nie korzystają z działania grupy.

Budynki afiniczne są dyskretnymi odpowiednikami przestrzeni symetrycznych G/K i jako takie związane są z niearchimedesowymi grupami Liego. Ich uzwarcenia były intensywnie badane z punktu widzenia teorii grup i teorii miary [16], jak i przy użyciu niearchimedesowej geometrii analitycznej [41]. W pracy [Pre1] wyznaczyłem asymptotykę jąder ciepła dla izotropowych spacerów losowych o przestrzeni stanów złożonej z dobrych wierzchołków budynków afinicznych. Ponadto, pokazałem asymptotyczne zachowanie odpowiadającej funkcji Greena. Rezultat ten jest niearchimedesowym odpowiednikiem [1] i stanowi także analityczny wkład pozwalający opisać jądro Martina oraz uzwarcenie Martina, co jest tematem wspólnych badań z Bertrandem Rémy.

Wielomiany ortogonalne i operatory Jacobiego

P8. Periodic perturbations of unbounded Jacobi matrices I: Asymptotics of generalized eigenvectors

P14. Asymptotics of orthogonal polynomials with slowly oscillating recurrence coefficients

P15. Asymptotic behaviour of Christoffel–Darboux kernel via three-term recurrence relation I

Pre3. Asymptotic behaviour of Christoffel–Darboux kernel via three-term recurrence relation II

Pre4. About essential spectra of Jacobi matrices

Pre5. Orthogonal polynomials with periodically modulated recurrence coefficients in the Jordan block case

Niech będą dane dwa ciągi $(a_n : n \in \mathbb{N}_0)$ i $(b_n : n \in \mathbb{N}_0)$ liczb rzeczywistych, przy czym $a_n > 0$. Dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$, niezerowy ciąg $(u_n : n \in \mathbb{N}_0)$ jest uogólnionym wektorem własnym, jeśli dla każdego $n \geq 1$,

$$a_{n-1}u_{n-1} + b_n u_n + a_n u_{n+1} = \lambda u_n,$$

dla pewnych $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$. W szczególności uogólnione wektory własne odpowiadające $\lambda \in \mathbb{R}$ i spełniające warunek

$$u_0 = 1, \quad u_1 = \frac{\lambda - b_0}{a_0},$$

nazywamy wielomianami ortogonalnymi i oznaczamy $(p_n : n \in \mathbb{N}_0)$. W świetle twierdzenia Favarda, wielomiany te są ortonormalne względem pewnej miary probabilistycznej, jednak miara ta nie musi być jednoznaczna. Często stosowanym warunkiem gwarantującym jej jednoznaczność jest warunek Carlemana, tzn.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \infty. \quad (27)$$

Wielomiany ortogonalne są ściśle związane z macierzą Jacobiego. Przypomnijmy jej definicję. Dla ciągów (a_n) i (b_n) przez $\mathcal{A}$ oznaczmy symetryczną trójdagonalną macierz postaci

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & \dots \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & a_2 & b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Wtedy macierz Jacobiego A jest domknięciem w ℓ^2 ograniczenia $\mathcal{A}$ do ciągów o skończonym nośniku. Jeśli teraz $\tilde{A}$ jest jakimkolwiek samosprężonym rozszerzeniem A , to miara borelowska

$$\mu(\cdot) = \langle E(\cdot)\delta_0, \delta_0 \rangle,$$

gdzie E jest rozkładem spektralnym $\tilde{A}$ a $\delta_0 = (1, 0, 0, \dots)$, jest miarą ortogonalności wielomianów $(p_n : n \in \mathbb{N}_0)$. Zauważmy, że macierz Jacobiego A jest operatorem ograniczonym wtedy i tylko wtedy, gdy parametry (a_n) i (b_n) są ciągami ograniczonymi. Jest to klasyczny przypadek dobrze opisany w literaturze. Dla kontrastu, teoria nieograniczonych macierzy Jacobiego jest znacznie słabiej rozwinięta ponieważ często metody wykorzystane w ograniczonym przypadku nie są tutaj dostępne. W rzeczywistości, nieorganiczne macierze Jacobiego mają bardziej złożoną strukturę. W pracy [22], autorzy zdefiniowali bardzo ważną klasę parametrów Jacobiego, zwaną okresowymi modulacjami. Klasa ta jest dostatecznie bogata, aby pozwolić na zbudowanie intuicji do ogólnej teorii. W szczególności w klasie tej znajdują się przykłady macierzy Jacobiego o czysto absolutnie ciągłym spektrum wypełniającym całą prostą, posiadające ograniczoną dziurę w absolutnie ciągłym spektrum, mające absolutnie ciągłe spektrum na półprostej, a także czysto singularne ciągłe spektrum o konkretnym wymiarze Hausdorfa, posiadające spektrum punktowe gęste na prostej czy posiadające puste spektrum istotne.

Precyzyjniej, parametry Jacobiego (a_n) i (b_n) są N -okresowo modulowane, jeśli istnieją dwa N -okresowe ciągi liczb rzeczywistych $(\alpha_n : n \in \mathbb{Z})$ and $(\beta_n : n \in \mathbb{Z})$, przy czym $\alpha_n > 0$, takie, że

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \right| &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_n}{a_n} - \frac{\beta_n}{\alpha_n} \right| &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \infty. \end{aligned}$$

Szczególnie ciekawą właściwością N -okresowo modulowanych parametrów Jacobiego jest fakt, że właściwości spektralne odpowiadającej macierzy Jacobiego wyznaczone są przez ślad macierzy X_1 , gdzie

$$X_i = \prod_{j=i}^{N+i-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j} & -\frac{\beta_j}{\alpha_j} \end{pmatrix}.$$

Wyróżniamy tutaj trzy przypadki: ciągły $|\operatorname{tr} X_1| < 2$, nieistotny $|\operatorname{tr} X_1| > 2$ i osobliwy $|\operatorname{tr} X_1| = 2$. W trakcie badania własności spektralnych operatora A pomocne okazały się dodatkowe założenia regularności na ciągi (a_n) i (b_n) . W pracy [P8], przy założeniu, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{a_{n+N}} - \frac{1}{a_n} \right| + \left| \frac{b_{n+N}}{a_{n+N}} - \frac{b_n}{a_n} \right| + \left| \frac{a_{n+N+1}}{a_{n+N}} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \infty, \quad (28)$$

pokazaliśmy, że jeśli $|\operatorname{tr} X_1| < 2$, to dla każdego zwartego przedziału $I \subset \mathbb{R}$ istnieją stałe $c_1, c_2 > 0$ takie, że dowolny uogólniony wektor własny $(u_n : n \in \mathbb{N}_0)$ związany z $\lambda \in I$ spełnia

$$\frac{c_1}{a_n} (u_0^2 + u_1^2) \leq u_{n-1}^2 + u_n^2 \leq \frac{c_2}{a_n} (u_0^2 + u_1^2), \quad (29)$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$. W szczególności otrzymujemy stąd, że operator A jest samosprężony wtedy i tylko wtedy, gdy warunek Carlemana (27) jest spełniony. Wtedy też, w oparciu o teorię subordynacji dla operatorów samosprężonych, można wywnioskować, że spektrum absolutnie ciągłe A jest całą prostą $\mathbb{R}$.

W dalszych badaniach rozważaliśmy pewną klasę ciągów wolnooscyłujących, które w szczególności zawierają ciągi badane w [P8]. Powiemy, że ciąg (x_n) należy do $\mathcal{D}_r$, jeśli jest ograniczony i dla każdego $j \in \{1, \dots, r\}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta^j x|^{r_j} < \infty,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Delta^0 x_n &= x_n, \\ \Delta^j x_n &= \Delta^{j-1} x_{n+1} - \Delta^{j-1} x_n, \quad j \geq 1. \end{aligned}$$

Ponadto, $(x_n) \in \mathcal{D}_r^N$ jeśli dla każdego $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, podciąg $(x_{nN+i} : n \in \mathbb{N})$ należy do $\mathcal{D}_r$. W pracy [P14], pokazaliśmy, że jeśli $|\operatorname{tr} X_1| < 2$ oraz

$$\left(\frac{a_{n-1}}{a_n} : n \in \mathbb{N} \right), \left(\frac{b_n}{a_n} : n \in \mathbb{N} \right), \left(\frac{1}{a_n} : n \in \mathbb{N} \right) \in \mathcal{D}_r^N, \quad (30)$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+N-1} |\mathcal{D}_n^N(x)| = \frac{\sqrt{4 - (\operatorname{tr} X_1)^2}}{2\pi\mu'(x)} \quad (31)$$

lokalnie jednostajnie względem $x \in \mathbb{R}$, gdzie μ' jest gęstością pewnej (niekoniecznie jednoznacznej) miary ortogonalności μ oraz $\mathcal{D}_n^N$ jest przesuniętym wyznacznikiem Turána

$$\mathcal{D}_n^N(x) = \det \begin{pmatrix} p_{n+N-1}(x) & p_{n-1}(x) \\ p_{n+N}(x) & p_n(x) \end{pmatrix}.$$

Uogólniliśmy też główny wynik [P8] dowodząc (29) przy założeniu (30). Dzięki temu warunek Carlemana (27) pociąga, że operator A jest samosprzężony, jego część absolutnie ciągła spektrum jest całą prostą $\mathbb{R}$ a w oparciu o (31) możemy lokalnie jednostajnie przybliżyć gęstość jego miary spektralnej. W [P14] wyznaczyliśmy też asymptotyczne zachowanie wielomianów ortogonalnych, tj. udowodniliśmy, że dla dowolnego zwartego przedziału $K \subset \mathbb{R}$, istnieją ciągłe funkcje rzeczywiste θ_j i φ_j takie, że dla każdego $x \in K$,

$$\sqrt{a_{nN+i-1} p_{nN+i}(x)} = \sqrt{\frac{2|[X_i]_{2,1}|}{\pi\mu'(x)\sqrt{4 - (\operatorname{tr} X_1)^2}}} \sin \left(\sum_{j=1}^n \theta_{jN+i}(x) + \varphi_i(x) \right) + o_K(1), \quad (32)$$

gdzie $o_K(1)$ oznacza funkcję zbieżną do zera jednostajnie na K . Znajomość asymptotycznego zachowania wielomianów ortogonalnych pozwoliła nam zbadać zachowanie jądra *Christoffela–Darboux*, które definiujemy wzorem

$$K_n(x, y) = \sum_{j=0}^n p_j(x) p_j(y). \quad (33)$$

W istocie w pracy [P15] pokazaliśmy, że warunek regularności (30) pociąga za sobą zbieżność

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho_n} K_n(x, x) = \frac{\omega'(0)}{\mu'(x)} \quad (34)$$

lokalnie jednostajnie względem $x \in \mathbb{R}$, gdzie ω jest miarą równowagi odpowiadającej $\sigma_{\text{ess}}(\mathfrak{A})$ przy czym $\mathfrak{A}$ oznacza macierz Jacobiego związaną z ciągami $(\alpha_n : n \in \mathbb{N}_0)$ and $(\beta_n : n \in \mathbb{N}_0)$ oraz

$$\rho_n = \sum_{j=0}^n \frac{\alpha_j}{a_j}.$$

Ponadto, w przypadku $r = 1$ otrzymaliśmy dokładne oszacowania błędu w (32) dzięki czemu mogliśmy wyznaczyć asymptotyczne zachowanie jądra K_n poza przekątną

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho_n} K_n \left(x + \frac{u}{\rho_n}, x + \frac{v}{\rho_n} \right) = \frac{\omega'(0)}{\mu'(x)} \frac{\sin((u-v)\pi\omega'(0))}{(u-v)\pi\omega'(0)} \quad (35)$$

lokalnie jednostajnie względem $(u, v, x) \in \mathbb{R}^3$.

Sytuację $|\operatorname{tr} X_1| > 2$, zbadaliśmy w pracy [Pre4]. Rozwijając odpowiednią wersję dyskretnego twierdzenia Levinsona uzyskaliśmy asymptotyki uogólnionych wektorów własnych, co pozwoliło udowodnić, że warunki (30) pociągają, że operator A jest samosprzężony a jego spektrum istotne jest puste.

W końcu, gdy $|\operatorname{tr} X_1| = 2$ rozróżniamy dwa przypadki: kiedy macierz X_1 jest diagonalizowalna lub nie. W pierwszym przypadku macierz X_1 jest proporcjonalna do macierzy jednostkowej. Zastępując warunki (30) następującymi

$$\left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} a_n - a_{n-1} : n \in \mathbb{N} \right), \left(b_n - \frac{\beta_n}{\alpha_n} a_n : n \in \mathbb{N} \right), \left(\frac{1}{a_n} : n \in \mathbb{N} \right) \in \mathcal{D}_1^N, \quad (36)$$

przy dodatkowym założeniu, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+N} - a_n) = 0, \quad (37)$$

w pracy [Pre3] pokazaliśmy odpowiedniki (29), (32), (34) i (35). Ponadto, w tym przypadku formuła (31) przyjmuje postać

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_{(j+1)N+i-1}^2 |\mathfrak{D}_{jN+i}^N(x)| = \frac{\sqrt{-\operatorname{discr} \mathcal{R}_i(x)}}{2\pi\mu'(x)} \quad (38)$$

lokalnie jednostajnie względem $x \in \mathbb{R} \setminus \Lambda$, gdzie $\mathcal{R}_i$ jest pewnym odwzorowaniem macierzowym a Λ jest zbiorem tych $x \in \mathbb{R}$, dla których $\operatorname{discr} \mathcal{R}_i(x) < 0$. Warto tutaj zwrócić uwagę na zmianę potęgi $a_{(j+1)N+i-1}$ występującego przed wyznacznikiem Turána, porównaj (38) z (31).

Ostatnio, w [Pre6] studiowaliśmy przypadek kiedy X_1 jest podobna do nietrywialnej klatki Jordana. Zakładając

$$\left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} a_n - a_{n-1} : n \in \mathbb{N} \right), \left(b_n - \frac{\beta_n}{\alpha_n} a_n : n \in \mathbb{N} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{a_n}} : n \in \mathbb{N} \right) \in \mathcal{D}_1^N,$$

wraz z (37), zbadaliśmy granice odpowiadające (31), (32), (34) and (35). Jednakże, w tym przypadku obserwujemy zmianę w potęgze $a_{(j+1)N+i-1}$ nie tylko w (38), ale też w (32). Ponadto dla uzyskania zbieżności jądra Christoffela–Darboux modyfikacji wymaga także parametr skalujący ρ_n .

Jądra ciepła i spacery losowe

P5. *Asymptotic behaviour of densities of unimodal convolution semigroups*

P9. *Asymptotic behaviour and estimates of slowly varying convolution semigroups*

W 1923 roku Pólya [40] ($d = 1$) oraz w 1960 roku Blumental i Gettoor [5], opisali asymptotyczne zachowanie jądra ciepła $p(t; x)$ dla izotropowych α -stabilnych procesów w $\mathbb{R}^d$ dla $\alpha \in (0, 2)$, pokazując

$$\lim_{t \|x\|^{-\alpha} \rightarrow 0} \frac{p(t; x)}{t \|x\|^{-d-\alpha}} = A_{d, \alpha},$$

dla pewnej stałej dodatniej $A_{d, \alpha}$. W kontekście badania asymptotycznego zachowania jąder ciepła, w naturalny sposób pojawiają się procesy stabilne jako te, które posiadają dziedziny przyciągnięcia. Można je otrzymać poprzez subordynację ruchu Browna. Mianowicie, niech $(B_t : t \geq 0)$ będzie ruchem Browna w $\mathbb{R}^d$ i

niech $(T_t : t \geq 0)$ będzie niezależnym subordynatorem, tzn. procesem Lévy'ego, którego trajektorie są nieujemnymi funkcjami niemalejącymi. Wtedy proces $(B_{T_t} : t \geq 0)$ nazywamy podporządkowanym ruchem Browna. Subordynator można opisać zadając jego transformatę Laplace'a

$$\mathbb{E}e^{-\lambda T_t} = e^{-t\varphi(\lambda)}, \quad \lambda \geq 0,$$

gdzie φ jest wykładnikiem charakterystycznym, który ma postać

$$\varphi(\lambda) = b\lambda + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\lambda s})\mu(ds)$$

dla $b \geq 0$ oraz pewnej miary μ takiej, że

$$\int_{(0,\infty)} \min\{1, s\}\mu(ds) < \infty.$$

W szczególności φ jest funkcją Bernsteina. Wtedy funkcją charakterystyczną B_{T_t} jest

$$\mathbb{E}e^{i\langle \xi, B_{T_t} \rangle} = e^{-t\varphi(\|\xi\|^2)}.$$

Ostatnio w pracy [Pre2], szeroko badaliśmy funkcje przejścia dla subordynatorów.

Podporządkowując ruch Browna subordynatorem o wykładniku charakterystycznym $\varphi(\lambda) = \lambda^{\alpha/2}$, $\alpha \in (0, 2]$, dostajemy izotropowy α -stabilny proces $(B_t^\alpha : t \geq 0)$. Ich naturalne uogólnienie otrzymamy wybierając subordynatory o wykładnikach charakterystycznych będących funkcjami Bernsteina $\frac{\alpha}{2}$ -regularnie zmieniającymi się w nieskończoności dla $\alpha \in [0, 2]$. Przypomnijmy, że funkcja $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ jest α -regularnie zmieniająca się w nieskończoności jeśli dla każdego $\lambda > 0$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda r)}{f(r)} = \lambda^\alpha.$$

Procesy otrzymane w wyniku subordynacji ruchu Browna są szczególnymi przypadkami izotropowych procesów unimodalnych. Proces $(X_t : t \geq 0)$ jest izotropowym procesem unimodalnym w $\mathbb{R}^d$ jeśli jest czysto skokowym procesem Lévy'ego a jego miara Lévy'ego jest absolutnie ciągła na $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ o gęstość będącej funkcją radialną, radialnie nierosnącą. Wtedy funkcja charakterystyczna X_t ma postać

$$\mathbb{E}e^{i\langle \xi, X_t \rangle} = e^{-t\psi(\xi)},$$

gdzie

$$\psi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \cos\langle \xi, x \rangle) \nu(dx) + \eta \|\xi\|^2$$

dla pewnej $\eta \geq 0$, przy czym ν jest miarą Lévy'ego, tzn. $\nu(\{0\}) = 0$ oraz

$$\int_{\mathbb{R}^d} \min\{1, \|x\|^2\} \nu(dx) < \infty.$$

Funkcję ψ nazywamy wykładnikiem Lévy'ego–Chinczyna procesu $(X_t : t \geq 0)$. Z izotropowości wynika, że ψ jest funkcją radialną.

Niech $p(t; x)$ będzie funkcją przejścia dla izotropowego unimodalnego procesu Lévy'ego w $\mathbb{R}^d$. W pracy [P5] pokazaliśmy, że jeśli ψ jest α -regularnie zmieniająca się w nieskończoności dla $\alpha \in (0, 2)$, to dla pewnej dodatniej stałej $\mathcal{A}_{d,\alpha}$ mamy

$$\lim_{\substack{\|x\| \rightarrow 0 \\ t\psi(\|x\|^{-1}) \rightarrow 0}} \frac{p(t; x)}{t\|x\|^{-d}\psi(\|x\|^{-1})} = \mathcal{A}_{d,\alpha}. \quad (39)$$

Ponadto, jeśli $e^{t_0\psi}$ jest całkowalna dla pewnego $t_0 > 0$, to

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t\psi(\|x\|^{-1}) \rightarrow \infty}} \frac{p(t; x)}{p(t; O)} = 1. \quad (40)$$

Głównym krokiem przy dowodzeniu asymptotyki (39) było zbadanie zachowania ogonów $\mathbb{P}(\|X_t\| \geq r)$ co zrobiliśmy w oparciu o wersję twierdzenia tauberowskiego jednostajną względem czasu t . Pokazaliśmy także, że izotropowy unimodalny proces, dla którego granica (39) jest skończona i niezerowa, ma wykładnik Lévy’ego–Chinczyna α -regularnie zmieniający się w nieskończoności, dla pewnego $\alpha \in (0, 2)$. W końcu, przy założeniu $d \geq 3$, zbadaliśmy asymptotykę funkcji Greena,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{G(x)}{\|x\|^{-d} \psi(\|x\|^{-1})} = \frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}}. \quad (41)$$

Metody opracowane w [P5] uogólniliśmy w [P11], gdzie badaliśmy izotropowe procesy unimodalne, których symbole są wolnozmienniające się, co stanowi przypadek graniczny $\alpha = 0$. Zwróćmy uwagę, że procesy te nie należą do dziedziny przyciągnięcia procesów α -stabilnych. Warunek regularnej zmienności zastąpiliśmy warunkiem de Haana, który mówi, że dla danej funkcji wolnozmienniającej ℓ funkcja $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ należy do klasy de Haana związanej z ℓ , jeśli dla dowolnego $\lambda > 0$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda r) - f(r)}{\ell(r)} = \log \lambda.$$

Rozwijając metodę dowodzenia twierdzeń tauberowskich z [P5], pokazaliśmy, że jeśli ψ należy do klasy de Haana związanej z ℓ , to dla pewnej dodatniej stałej $\mathcal{A}_{d,0}$,

$$\lim_{\substack{\|x\| \rightarrow 0 \\ t\psi(\|x\|^{-1}) \rightarrow 0}} \frac{p(t; x)}{\|x\|^{-d} t\ell(\|x\|^{-1})} = \mathcal{A}_{d,0}. \quad (42)$$

Ponadto, jeśli dla izotropowego unimodalnego procesu granica (42) jest skończona i niezerowa, to jego wykładnik Lévy’ego–Chinczyna należy do klasy de Haana związanej z $c\ell$, dla pewnej stałej $c > 0$. Zauważmy, że w tym przypadku (40) nie zachodzi, bo $p(t; O)$ może być nieskończone dla t bliskich zero i w związku z tym potrzebny jest dodatkowy czynnik. Pokazaliśmy, że jeśli ℓ jest ograniczona to

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t\psi(\|x\|^{-1}) \rightarrow \infty}} \frac{p(t; x)}{t\|x\|^{-d} \ell(\|x\|^{-1}) e^{-t\psi(\|x\|^{-1})}} = \frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}}.$$

Dla $d \geq 3$, badaliśmy też zachowanie funkcji Greena. Udowodniliśmy, że

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{G(x)}{\|x\|^{-d} \psi(\|x\|^{-1})^{-2} \ell(\|x\|^{-1})} = \frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}},$$

co warto porównać z (41). W końcu pokazaliśmy też ostre obustronne oszacowania na jądro ciepła: jeśli ℓ jest ograniczona to istnieją $r_0, t_0 > 0$ takie, że

$$p(t, x) \asymp t\|x\|^{-d} \ell(\|x\|^{-1}) \exp(-t\psi(\|x\|^{-1})),$$

dla wszystkich $t \in (0, t_0)$ i $0 < \|x\| \leq r_0$.

P4. Limit theorems for random walks

P13. Long time behaviour of random walks on the integer lattice

Kiedy przestrzeń stanów jest grafem, naturalnymi obiektami stają się operatory uśredniające i łańcuchy Markova. Najprostszy przykład otrzymamy rozważając spacer losowy na kracie całkowitoliczbowej. W tym przypadku zachowanie długoczasowe jądra ciepła jest dobrze zrozumiane przy założeniu, że spacer ma ograniczony krok. Niech p będzie funkcją przejścia aperiodycznego spaceru losowego na $\mathbb{Z}^d$. Dla $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{Z}^d$ połóżmy

$$p(n; x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} p(n-1; y) p(x-y),$$

gdzie $p(x) = p(O; x)$ oraz O jest początkiem układu współrzędnych. Przez $\mathcal{M}$ oznaczmy obszar Craméra, tzn. wnętrze wypukłej otoczki zbioru $\mathcal{V} = \{v \in \mathbb{Z}^d : p(v) > 0\}$. Niech κ będzie tranformatę Fouriera p , tj.

$$\kappa(z) = \sum_{v \in \mathcal{V}} p(v) e^{\langle z, v \rangle}.$$

Wtedy dla każdego $\delta \in \mathcal{M}$, funkcja

$$f_\delta(x) = \langle x, \delta \rangle - \log \kappa(x)$$

osiąga swoje maksimum w dokładnie jednym punkcie $s \in \mathbb{R}^d$. Niech $\phi(\delta) = f_\delta(s)$. Funkcja $s(\delta) = s$ okazała się bardzo przydatna do opisu spaceru losowego. Zwróćmy uwagę, że $\|s\|_2$ jest nieograniczone kiedy δ zbliża się do $\partial \mathcal{M}$. W rzeczywistości, w pracy [P13] udowodniłem, że istnieją $\eta \geq 1$ i $C > 0$ takie, że dla wszystkich $\delta \in \mathcal{M}$ i $v \in \mathcal{V}$,

$$1 \geq \frac{e^{\langle s, v \rangle}}{\kappa(s)} \geq C \text{dist}(\delta, \partial \mathcal{M})^\eta. \quad (43)$$

Oszacowanie (43) pozwoliło opisać asymptotyczne zachowanie spaceru losowego na kracie całkowitoliczbowej na obszarze zbieżnym do obszaru Craméra. Mianowicie, w pracy [P13] pokazałem, że

$$p(n; x) = (2\pi n)^{-\frac{d}{2}} (\det B_s)^{-\frac{1}{2}} e^{-n\phi(\delta)} \left(1 + O(n^{-1} \text{dist}(\delta, \partial \mathcal{M})^{-2\eta})\right), \quad (44)$$

gdzie $\delta = n^{-1}x$ oraz B_s jest formą kwadratową zdefiniowaną wzorem $B_s(u, u) = D_u^2 \log \kappa(s)$. Funkcja $\phi(\delta)$ opisuje niegaussowskie zachowanie spaceru losowego przy brzegu obszaru Craméra. W rzeczywistości, jeśli przez δ_0 oznaczmy wektor średniej spaceru to dla $\delta \in \mathcal{M}$ mamy

$$\phi(\delta) = \frac{1}{2} B_0^{-1}(\delta - \delta_0, \delta - \delta_0) + O(\|\delta - \delta_0\|_2^3)$$

oraz

$$\phi(\delta) \asymp \|\delta - \delta_0\|^2.$$

Obecnie niewiele wiadomo o zachowaniu asymptotycznym jądra ciepła dla spacerów z krokiem nieograniczonym. W pracy [P4], podjęliśmy próbę zbadania podporządkowanych spacerów. W kontekście spacerów losowych, procedura subordynacji została opisana w [3]. W oparciu o nią dostajemy klasę spacerów losowych o nieograniczonym nośniku. Precyzyjniej, niech $(S_n : n \in \mathbb{N}_0)$ będzie dowolnym aperiodycznym spacerem na $\mathbb{Z}^d$ o ograniczonym kroku. Załóżmy, że $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ jest funkcją Bernsteina taką, że $\varphi(0) = 0$ i $\varphi(1) = 1$. Niech μ będzie odpowiadającą jej miarą Lévy'ego. Kładziemy

$$c(\varphi, k) = \frac{1}{k!} \int_{(0, \infty)} t^k e^{-t} \mu(dt) + \begin{cases} b & \text{jeśli } k = 1, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Niech $(R_k : k \in \mathbb{N})$ będzie ciągiem niezależnych i jednakowo rozłożonych zmiennych losowych, niezależnych także od $(S_n : n \in \mathbb{N}_0)$ i takich, że $\mathbb{P}(R_i = k) = c(\varphi, k)$. Wtedy dla $\tau_n = R_1 + \dots + R_n$ definiujemy $S_n^\varphi = X_{\tau_n}$. Niech

$$p_\varphi(n; x) = \mathbb{P}(S_n^\varphi = x | S_0^\varphi = 0).$$

Założmy, że funkcja φ jest regularnie zmieniająca się w zerze o indeksie $0 < \alpha/2 < 1$. Powyższa procedura stanowi dyskretny odpowiednik subordynacji zdefiniowanej przez Bochnera w kontekście teorii półgrup operatorów.

W pracy [P4] badaliśmy twierdzenia graniczne dla spaceru $(S_n^\varphi : n \in \mathbb{N}_0)$. W pierwszej kolejności pokazaliśmy, że rozkład S_1^φ należy do dziedziny przyciągania B^α , tj. symetrycznego α -stabilnego procesu w $\mathbb{R}^d$. Dlatego o spacerze $(S_n^\psi : n \in \mathbb{N}_0)$ można myśleć jako o dyskretnym odpowiedniku α -regularnego procesu w $\mathbb{R}^d$. Pokazaliśmy także funkcjonalne twierdzenie graniczne, tzn. jeśli ciąg liczb dodatnich $(b_n : n \in \mathbb{N})$ spełnia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\varphi(b_n^{-1}) = 1,$$

to ciąg elementów losowych $(b_n^{-1/2} S_{[nt]}^\varphi : t \geq 0)$ zbiega w przestrzeni Skorohoda do elementu losowego B^α . W końcu, wyznaczyliśmy także asymptotyczne zachowanie funkcji przejścia $p_\varphi(n; \cdot)$. Z jednej strony, kiedy $n\varphi(\|x\|^{-2})$ dąży do nieskończoności mamy

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n\varphi(\|x\|^{-2}) \rightarrow \infty}} \frac{p_\varphi(n; x)}{(\varphi^{-1}(n^{-1}))^{d/2}} = D_{d,\alpha},$$

dla pewnej dodatniej stałej $D_{d,\alpha}$. Z drugiej strony, w oparciu o asymptotykę (44), kiedy $n\varphi(\|x\|^{-2})$ zbiega do zera, dostajemy

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n\varphi(\|x\|^{-2}) \rightarrow 0}} \frac{p_\varphi(n; x)}{n \|x\|^{-d} \varphi(\|x\|^{-2})} = C_{d,\alpha},$$

dla pewnej dodatniej stałej $C_{d,\alpha} > 0$.

6. Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę

Moje wieloletnie doświadczenie dydaktyczne w większości skupia się wokół przedmiotów informatycznych. Na przestrzeni lat kiedy zatrudniony byłem na Uniwersytecie Wrocławskim prowadziłem wiele zajęć dydaktycznych z zakresu informatyki dla studentów kierunku *Matematyka z informatyką*. Mając na uwadze przyszłe zatrudnienie absolwentów, wprowadzałem zaawansowane kursy programistyczne, które miały zapewnić w późniejszym czasie łatwiejsze przyswajanie specjalistycznych narzędzi oraz umożliwić wykorzystanie luki na rynku pracy. Przykładowo, uczyłem programowania w asemblerze x86, wykladałem o zabezpieczeniach systemów operacyjnych czy bezpieczeństwie oprogramowania.

W latach 2013–7 prowadziłem seminarium dla doktorantów i pracowników naukowych. Przewodnim tematem była praca Bourgaina [11], która zawiera dowód ograniczoności średnich ergodycznych wzdłuż kwadratów liczb całkowitych. Techniki zastosowane przez Bourgaina mają swoje korzenie w różnorodnych dziedzinach: od analizy harmonicznej przez przestrzenie Banacha, kombinatorykę i rachunek prawdopodobieństwa. Z tego powodu praca [11] jest znakomitym źródłem inspiracji. Na seminarium referowane były zarówno klasyczne wyniki, które z powodzeniem można znaleźć w książkach, jaki i najnowsze prace.

W roku 2020 zostałem laureatem programu Gaspar Monge Visiting Professor na Politechnice w Palaiseau, Francja. Niestety, ze względu na aktualną sytuację epidemiologiczną moja wizyta została przełożona. Jednakże, w ramach tego programu prowadziłem semestralny kurs „Dyskretna Analiza Harmoniczna” skierowany do studentów M2 i doktorantów wszystkich paryskich uniwersytetów.

Byłem promotorem pomocniczym w dwóch przewodach doktorskich: dr. Wojtka Cygana (2015) i dr. Grzegorza Świdorskiego (2017).

Literatura

- [1] J.-Ph. Anker and L. Ji, *Heat kernel and Green function estimates on noncompact symmetric spaces*, Geom. Funct. Anal. **9** (1999), 1035–1091.
- [2] G.F. Bachelis, *On the upper and lower majorant properties in $L^p(G)$* , Q. J. Math. **24** (1973), no. 1, 119–128.
- [3] A. Bendikov and L. Saloff-Coste, *Random walks on groups and discrete subordination*, Math. Nachr. **285** (2012), 580–605.
- [4] G.D. Birkhoff, *Proof of the ergodic theorem*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **17** (1931), 656–660.
- [5] R.M. Blumenthal and R.K. Gettoor, *Some theorems on stable processes*, Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960), 263–273.
- [6] R.P. Boas, *Entire functions*, vol. 5, Academic Press, 1954.
- [7] J. Bourgain, *Estimations de certaines fonctions maximales*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **301** (1985), no. 10, 499–502.
- [8] ———, *An approach to pointwise ergodic theorems*, Geometric Aspects of Functional Analysis, Springer, 1988, pp. 204–223.
- [9] ———, *On the maximal ergodic theorem for certain subsets of the integers*, Israel J. Math. **61** (1988), 39–72.
- [10] ———, *On the pointwise ergodic theorem on L^p for arithmetic sets*, Israel J. Math. **61** (1988), 73–84.
- [11] ———, *Pointwise ergodic theorems for arithmetic sets. With an appendix by the author, Harry Furstenberg, Yitzhak Katznelson and Donald S. Ornstein.*, Publ. Math.-Paris **69** (1989), no. 1, 5–45.
- [12] Z. Bucholicz and R.D. Mauldin, *Divergent square averages*, Ann. Math. **171** (2010), no. 3, 1479–1530.
- [13] R. Cairoli and J.B. Walsh, *Stochastic integrals in the plane*, Acta Math.-Djursholm **134** (1975), no. 1, 111–183.
- [14] J.T. Campbell, R.L. Jones, K. Reinhold, and M. Wierdl, *Oscillation and variation for the Hilbert transform*, Duke Math. J. **105** (2000), 59–83.
- [15] M. Cotlar, *A unified theory of Hilbert transforms and ergodic theorems*, Rev. Mat. Cuyana **1** (1955), no. 2, 105–167.
- [16] Y. Guivarc’h and B. Rémy, *Group-theoretic compactification of Bruhat-Tits buildings*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **39** (2006), no. 6, 871–920. MR 2316977
- [17] G.H. Hardy and J.E. Littlewood, *A maximal theorem with function-theoretic applications*, Acta Math.-Djursholm **54** (1930), 81–116.
- [18] ———, *Notes on the theory of series (XIX): A problem concerning majorants of Fourier series*, Q. J. Math. (1935), no. 1, 304–315.

- [19] D.R. Heath-Brown, *A new k -th derivative estimate for exponential sums via Vinogradov's mean value*, Tr. Mat. Inst. Steklova **296** (2017), 95–110.
- [20] A.D. Ionescu, *An endpoint estimate for the discrete spherical maximal function*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), no. 5, 1411–1417.
- [21] A.D. Ionescu and S. Wainger, *L^p boundedness of discrete singular Radon transforms*, J. Amer. Math. Soc. **19** (2006), no. 2, 357–383.
- [22] J. Janas and S. Naboko, *Spectral analysis of selfadjoint Jacobi matrices with periodically modulated entries*, J. Funct. Anal. **191** (2002), no. 2, 318–342.
- [23] R.L. Jones, R. Kaufman, J.M. Rosenblatt, and M. Wierdl, *Oscillation in ergodic theory*, Ergodic Theory Dynam. Syst. **18** (1998), no. 4, 889–935.
- [24] R.L. Jones, A. Seeger, and J. Wright, *Strong variational and jump inequalities in harmonic analysis*, Trans. Amer. Math. Soc. (2008), 6711–6742.
- [25] B. Krause, *Polynomial ergodic averages converge rapidly: Variations on a theorem of Bourgain*, arXiv:1402.1803, 2014.
- [26] P. LaVictoire, *Universally L^1 -bad arithmetic sequences*, J. Anal. Math. **113** (2011), no. 1, 241–263.
- [27] D. Leitmann, *The distribution of prime numbers in sequences of the form $[f(n)]$* , P. Lond. Math. Soc. **35** (1977), no. 3, 448–462.
- [28] D. Lepingle, *La variation d'ordre p des semi-martingales*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **36** (1976), no. 4, 295–316.
- [29] M. Mirek, *$\ell^p(\mathbb{Z})$ -boundedness of discrete maximal functions along thin subsets of primes and pointwise ergodic theorems*, Math. Z. **279** (2015), no. 1–2, 27–59.
- [30] ———, *Weak type $(1, 1)$ inequalities for discrete rough maximal functions*, J. Anal. Mat. **127** (2015), 303–337.
- [31] ———, *Discrete harmonic analysis*, Habilitation thesis, University of Wrocław, 2017.
- [32] M. Mirek, E.M. Stein, and B. Trojan, *$\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ -estimates for discrete operators of Radon type II: Variational estimates*, Invent. Math. **209** (2017), no. 3, 665–748.
- [33] ———, *$\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ -estimates for discrete operators of Radon type I: Maximal functions and vector-valued estimates*, Journal Funct. Anal. **277** (2019), 2471–2521.
- [34] M. Mirek, E.M. Stein, and P. Zorin-Kranich, *Jump inequalities for translation-invariant operators of radon type on $\mathbb{Z}^d$* , Adv. Math. **365** (2020), 107065.
- [35] M. Mirek, B. Trojan, and P. Zorin-Kranich, *Variational estimates for averages and truncated singular integrals along the prime numbers*, Trans. Amer. Math. Soc. **369** (2017), no. 8, 5403–5423.
- [36] R. Nair, *On polynomials in primes and J. Bourgain's circle method approach to ergodic theorems*, Ergodic Theory Dynam. Syst. **11** (1991), 485–499.
- [37] ———, *On polynomials in primes and J. Bourgain's circle method approach to ergodic theorems II*, Stud. Math. **105** (1993), no. 3, 207–233.

- [38] L. Pierce, *Discrete analogues in harmonic analysis*, Ph.D. thesis, Princeton University, 2009.
- [39] G. Pisier and Q. Xu, *The strong p -variation of martingales and orthogonal series*, Probab. Th. Relat. Fields **77** (1988), no. 4, 497–514.
- [40] G. Pólya, *On the zeros of an integral function represented by Fourier's integral*, Messenger of Math. **52** (1923), 185–188.
- [41] B. Rémy, A. Thuillier, and A. Werner, *Bruhat-Tits theory from Berkovich's point of view. I. Realizations and compactifications of buildings*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **43** (2010), no. 3, 461–554. MR 2667022
- [42] M. Riesz, *Sur les fonctions conjuguées*, Math. Z. **27** (1928), no. 1, 218–244.
- [43] J.M. Rosenblatt and M. Wierdl, *Pointwise ergodic theorems via harmonic analysis*, Ergodic Theory and Harmonic Analysis: Proceedings of the 1993 Alexandria Conference (K.E. Petersen and I. Salama, eds.), Cambridge University Press, 1995, pp. 3–152.
- [44] E.M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, Princeton, 1993.
- [45] M. Wierdl, *Pointwise ergodic theorem along the prime numbers*, Israel J. Math. **64** (1988), no. 3, 315–336.
- [46] P. Zorin-Kranich, *Variation estimates for averages along primes and polynomials*, J. Funct. Anal. **268** (2015), no. 1, 210–238.



 Bartosz Trojan