Ryszard Szwarc
Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

Wrocław, 6 grudnia 2021

Recenzja rozprawy habilitacyjnej
„Dyskretna analiza harmoniczna"
dr. Bartosza Trojana

Rozprawa habilitacyjna składa się z 5 prac opublikowanych, w okresie 2015-2020, w *Mathematische Annalen*, *Journal of Fourier Analysis and Applications* (2 prace), w *American Journal of Mathematics* oraz *Mathematical Research Letters*. Rozprawa opublikowana została w czasopismach matematycznych o bardzo dobrym i dobrym poziomie. Dwie prace zostały napisane wspólnie z Mariuszem Mirkiem. Współautor ocenił udział Bartosza Trojana w obu pracach na 50%. Wszystkie prace wchodzące w skład rozprawy są obszerne (od 27 do 60 stron).

Autoreferat wnikliwie opisuje osiągnięcia kandydata, wprowadzając w klarowny sposób niezbędne elementy teorii i wcześniejsze wyniki uzyskane przez innych badaczy. Wkład kandydata do dwu wspólnych prac rozprawy został jasno opisany pod względem merytorycznym.

Bartosz Trojan uzyskał doktorat w 2004. W okresie po doktoracie, poza pracami wchodzącymi do rozprawy, opublikował 16 prac. Wszystkie prace są współautorskie i dotyczą różnych aspektów analizy i rachunku prawdopodobieństwa. Zwraca uwagę bardzo wysoki poziom czasopism, w których zostały opublikowane: *Inventiones Mathematicae* (84 strony), *Advances in Mathematics*, *Journal of Functional Analysis* (2 prace), *Transactions of the American Mathematical Society* (2 prace), *International Mathematics Research Notices*, *Constructive Approximation*.

Wg bazy Mathematical Reviews prace Bartosza Trojana były cytowane 152 razy przez 103 autorów. O jakości wyników świadczą cytowania pochodzące od Terence'a Tao oraz Jean Bourgaina, jak i innych czołowych specjalistów analizy harmonicznej. Według serwisu Google Scholar liczba cytowań wynosi 281. Indeks Hirscha kandydata wynosi 6 według bazy Web of Science. Całkowity indeks Impact Factor na 23 publikacje jest równy 27,178, czyli średnio 1,182 na publikację. Impact Factor prac powstałych po doktoracie wynosi 24,917, średnio 1,246 na publikację.

Prace wchodzące w skład rozprawy dotyczą badania ograniczoności w $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ rozmaitych operatorów określonych poprzez analogię z operatorami splotu na przestrzeniach $L^p(\mathbb{R}^d)$. Ze względu na strukturę przestrzeni, wiele metod znanych i używanych w klasycznej teorii nie przenosi się na przypadek dyskretny i wymaga w związku z tym nowych narzędzi, np. związanych z przybliżaniem liczb rzeczywistych liczbami wymiernymi oraz z rozkładem liczb pierwszych.

W pracy [H1], wspólnej z Mariuszem Mirkiem, zwraca uwagę twierdzenie stanowiące, że operator postaci

$$Tf(x) = \sum_{p \in \mathbb{P}} f(x-p)K(p)\log|p|,$$

określony na $\ell^r(\mathbb{Z})$ jest ograniczony. Od funkcji $K(p)$ wymagany jest warunek skracań. W szczególności twierdzenie można zastosować do funkcji $K(x) = x^{-1}$. Pojawienie się czynnika $\log|p|$ związane jest z gęstością liczb pierwszych. Zwykle, dla wielu operatorów całkowych w przypadku ciągłym, ograniczoność w L^r uzyskuje się poprzez dowodzenie słabego typu $(1,1)$ i zastosowanie twierdzenia interpolacyjnego Marcinkiewicza. W przypadku dyskretnym ta metoda nie jest dostępna, ze względu na brak oszacowań słabego typu. W związku z tym konieczne jest użycie innych narzędzi. W pracy [H1] udowodniono również naturalne uogólnienie lematu Cotlara z 1955 dotyczącego zbieżności prawie wszędzie średnich ergodycznych dyskretnej transformaty Hilberta, dla układu dynamicznego $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu, S)$, gdzie S jest przekształceniem zbioru X, zachowującym miarę. Uogólnienie polega na uśrednianiu względem zbioru liczb pierwszych, tzn. w średnich uwzględnia się tylko potęgi S^p, gdzie $|p|$ przebiega zbiór liczb pierwszych. Znowu konieczne jest wprowadzenie czynnika $\log|p|$. Wyniki uzyskane w pracy [H1] wymagały subtelnych i bardzo zaawansowanych technik dowodzenia. W autoreferacie kandydat naszkicował główne elementy potrzebne w rozumowaniach. Bardzo cenne jest też umieszczenie badań z pracy [H1] na tle wcześniejszych osiągnięć wielu wybitnych matematyków.

W pracy [H2] badane są dyskretne średnie ergodyczne związane z rodziną operatorów S_i, $i = 1, 2, \ldots, d$, określonych i zachowujących miarę w abstrakcyjnej przestrzeni miarowej $(X, \mathcal{B}, \sigma)$. Wyniki te są uogólnieniami na wiele wymiarów twierdzenia Birkhoffa oraz twierdzenia Cotlara. Głównym wynikiem jest zbieżność prawie wszędzie średnich określonych na funkcjach f z $L^r(X, \mu)$ wzorem

$$\frac{1}{N^k} \sum_{n \in [1,N]^{\times k}} f(S_1^{P_1(n)} S_2^{P_2(n)} \ldots S_d^{P_d(n)} x),$$

gdzie P_i są wielomianami k zmiennych o wartościach całkowitych znikających w punkcie $n = (0, 0, \ldots, 0)$. W szczególności wyniki można zastosować np. do wielomianów postaci $P_i(n) = n_i^{k_i}$. Istotnym narzędziem do uzyskania zbieżności prawie wszędzie było oszacowanie półnorm wariacyjnych, określonych poprzez modyfikację półnorm badanych przez Bourgaina. W pracy podane są oszacowania półnorm w normie ℓ^r niezależnych od wyboru wielomianów. Metody stosowane w pracy wymagały głębokiej wiedzy i swobody w posługiwaniu się zaawansowanym aparatem współczesnej analizy harmonicznej.

Podobne zagadnienia badane były w samodzielnej pracy [H3]. Tym razem średnie związane są z liczbami pierwszymi. Metody dowodzenia są analogiczne jak w pracy [H2], jednak zagadnienie stwarza wiele nowych trudności w związku z rozważaniem wyłącznie liczb pierwszych, czyli „cienkiego" podzbioru liczba naturalnych.

Praca [H4] poświęcona jest badaniu średnich względem „małych" podzbiorów zbioru liczb pierwszych, tzn. takich, że ilość elementów w przedziale $[1, N]$ podzielona przez ilość liczb pierwszych w tym przedziale dąży do zera wraz z N. Kandydat zajmuje się zbieżnoścą dyskretnych transformat Hilberta obciętych do przedziału $[1, N]$, określonych na wyżej opisanych podzbiorach liczb pierwszych w normie . Podane są dodatkowe warunki na dopuszczalne podzbiory liczb pierwszych w języku funkcji, dla których funkcje odwrotne spełniają pewne warunki wzrostu. Zbieżność prawie wszędzie uzyskana została w oparciu o oszacowania wariacyjne w normie L^r dla $r > 1$. Wiadomo (z pracy LaVictoire z 2011), że w przypadku $r = 1$ zbieżność prawie wszędzie nie zachodzi, więc również oszacowania wariacyjne w przypadku $r = 1$ nie są spełnione. Wyniki pracy są bardzo subtelne. Ich uzyskanie wymagało świetnego opanowania technik wspólczesnej teorii całek i sum singularnych. Praca oparta jest na ideach z publikacji J. Bourgaina, R. Naira, M. Mirka oraz D. Leitmanna.

W pracy [H5] badania dotyczą znowu zbieżności średnich ergodycznych względem liczb pierwszych w przestrzeni L^r. Przypadek $r = 1$ nie jest osiągalny. Jednak możliwe jest zawężenie przestrzeni L^1 do przestrzeni Orlicza związanych z funkcją $\log^2 L \log\log L$. Zbieżność prawie wszędzie uzyskuje się poprzez oszacowanie słabego typu dla średnich, gdzie po prawej stronie nierówności pojawia się czynnik $\lambda^{-1}\log^2(\lambda^{-1})$. Dodatkowy czynnik związany z kwadratem logarytmu wymaga zawężenia zakresu funkcji do wyżej wspomnianej przestrzeni Orlicza. W szczególności praca zawiera inny dowód twierdzenia Wierdla o zbieżności w przestrzeniach L^r dla $r > 1$. W przypadku $r = 1$, w którym nie ma zbieżności prawie wszędzie, praca [H5] zawiera pierwszy wynik, w którym przestrzeń L^1 została zawężona do przestrzeni niewiele mniejszej. Dzięki temu uzyskuje się niemal automatycznie przypadek $r > 1$.

Prace powstałe po doktoracie związane są z szerokim zakresem zagadnień.

Część z nich, w tym obszerna praca opublikowana wspólnie z M. Mirkiem i E. Steinem w Inventiones Mathematicae, dotyczy dyskretnej analizy harmonicznej, podobnej do badań prowadzonych w rozprawie. Inną część stanowią prace o tzw. budynkach afinicznych, w tym wspólna publikacja z T. Stegerem, rozwijająca teorię Littlewooda-Paley'a na tych strukturach.

Ważnym elementem dorobku jest cykl prac o własnościach spektralnych macierzy Jacobiego i związanych z nimi wielomianach ortogonalnych. Publikacje te powstały we współpracy z Grzegorzem Świderskim. Macierze Jacobiego są ważną częścią teorii operatorów samosprzężonych, zarówno ograniczonych jak i nieograniczonych, na przestrzeni Hilberta. Każdy operator samosprzężony jest sumą prostą operatorów z tzw. prostym spektrum. Z kolei operatory z prostym spektrum są unitarnie równoważne z macierzami Jacobiego. Główne zagadnienia badane w pracach dotyczą charakteru miary ortogonalizującej, w szczególności absolutnej ciągłości. Wyniki otrzymuje się poprzez analizę asymptotycznego zachowania się współczynników macierzy Jacobiego.

Bartosz Trojan, ze względu na szerokie zainteresowania i obszerną wiedzę, z powodzeniem prowadzi współpracę z wieloma badaczami specjalizującymi się w analizie harmonicznej, rachunku prawdopodobieństwa, teorii ergodycznej i wspomnianej wyżej teorii wielomianów ortogonalnych. W większości prace te, ze względu na wartościowe wyniki, publikowane są w bardzo dobrych i dobrych czasopismach.

Bartosz Trojan w okresie pracy w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego prowadził kursy związane z informatyką dla studentów matematyki specjalizujących się w zakresie informatyki. Zajęcia miały za zadanie praktyczne przygotowanie studentów pod kątem przyszłego ich zatrudnienia.

W latach 2013–17 prowadził zaawansowane seminarium z analizy harmonicznej i teorii ergodycznej dla doktorantów i pracowników naukowych. Na seminarium omawiano klasyczne wyniki zawarte w monografiach, oraz współczesne osiągnięcia w oparciu o publikacje z ostatnich 30 lat czołowych specjalistów w dziedzinie.

W roku 2020 Bartosz Trojan został laureatem programu Gaspar Monge Visiting Professor na Politechnice w Palaiseau, we Francji. W ramach programu kandydat prowadził semestralny kurs „Dyskretna Analiza Harmoniczna" skierowany dla studentów i doktorantów wszystkich paryskich uniwersytetów.

Bartosz Trojan pełnił funkcję promotora pomocniczego w dwu przewodach doktorskich: Wojciecha Cygana (obrona w 2015) oraz Grzegorza Świderskiego (obrona w 2017).

W okresie 2001-2020 kandydat był wykonawcą w 4 grantach badawczych.

W mojej opinii rozprawa habilitacyjna jest znakomita, stanowi znaczny wkład do analizy harmonicznej, zatem spełnia ustawowe wymagania. Pozostały dorobek naukowy jest niezwykle obszerny pod względem ilości i jakości publikacji. Również dorobek dydaktyczny wskazuje na wysoka aktywność Bartosza Trojana w tym zakresie działalności.

Podsumowując, uważam, że wymagania zawarte w Artykule 219 (Dz. U. 2021.478) prawa o szkolnictwie wyższym i nauce są spełnione. W związku z tym popieram wniosek o nadanie dr. Bartoszowi Trojanowi stopnia doktora habilitowanego nauk matematycznych w zakresie matematyki.

Ryszard Szwarc