AUTOREFERAT

1 Imię i nazwisko

Jan Andrzej Palczewski

2 Dyplomy, stopnie naukowe

- Doktorat z matematyki: Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 2005 (wyróżnienie)
  Tytuł: *Portfele impulsowe: modelowanie, zabezpieczanie i optymalizacja*
  Promotor: *prof. dr hab. Łukasz Stettner*
- Magister matematyki: Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, 2001
  Tytuł: *Estymacja wartości zagrożonej (VaR) z wykorzystaniem metod symulacyjnych*
  Opiekun: *dr Włodzimierz Waluś*
- Licencjat z matematyki: Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, 1999
- Licencjat z informatyki: Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, 1999

3 Informacja o zatrudnieniu

- Stypendium doktoranckie, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk: 2001-2005
- Adiunkt, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego: 2005-2012
- Lecturer, School of Mathematics, University of Leeds, Leeds, Wielka Brytania: 2006-2015
- Associate Professor, School of Mathematics, University of Leeds, Leeds, Wielka Brytania: 2015-teraz

4 Ogólny opis osiągnięcia naukowego

Moje osiągnięcia naukowe można podzielić na 3 grupy (referencje do odpowiednich artykułów podane są w nawiasach kwadratowych):

1. ciągłość i istnienie optymalnych momentów zatrzymania dla niestandardowych optymalnych problemów zatrzymania: (a) z nieciągłością funkcji wypłaty względem zmiennej czasowej [H1], (b) z nieciągłością funkcji wypłaty względem zmiennej przestrzennej [H2], (c) bez dyskonta [H3];

2. problemy sterowania impulsowego z nieskończonym horyzontem (a) z opóźnieniem wykonania impulsu [H1], (b) z ergodycznym funkcjonałem typu średni zysk na jednostkę czasu [H5];
3. zastosowania sterowania impulsowego w badaniach operacyjnych (problem z wielokrotnym zatrzymywaniem) [H4].

Większość wyników pojawiających się w literaturze zakłada specjalną postać procesu stanu (np., że jest to jednowymiarowa dyfuzja) i wykorzystuje różniczkową charakteryzację funkcji wartości w celu otrzymania (niemal) jawnych rozwiązań (jest to podejście przyjęte w [H4]). Wyniki otrzymane w [H1], [H2], [H3], [H5] stosują się do ogólnej klasy wielowymiarowych procesów Markowa z ciągłymi i nieciągłymi trajektoriami (np. do procesów Levy'ego) i dostarczają własności pomocnych w dalszych badaniach nad charakteryzacją funkcji wartości lub nad numerycznym jej przybliżeniem.

5 Osiągnięcie naukowe

5.1 Tytuł osiągnięcia naukowego

Problemy optymalnego zatrzymania i ich zastosowania

5.2 Publikacje wchodzące w skład osiągnięcia naukowego

H1 Jan Palczewski, Łukasz Stettner, *Finite Horizon Optimal Stopping of Discontinuous Functionals with Applications to Impulse Control with Delay*, SIAM Journal on Control and Optimization, 48 (8), 2010, 4874-4909

H2 Jan Palczewski, Łukasz Stettner, *Stopping of functionals with discontinuity at the boundary of an open set*, Stochastic Processes and Their Applications, 121, 2011, 2361-2392

H3 Jan Palczewski, Łukasz Stettner, *Infinite horizon stopping problems with (nearly) total reward criteria*, Stochastic Processes and Their Applications, 124, 2014, 3887-3920

H4 John Moriarty, Jan Palczewski, *Real option valuation for reserve capacity*, European Journal of Operational Research, 257 (1), 2017, 251-260

H5 Jan Palczewski, Łukasz Stettner, *Impulse control maximising average cost per unit time: a non-uniformly ergodic case*, SIAM Journal on Control and Optimization, 55 (2), 2017, 936-960

5.3 Szczegółowy opis osiągnięcia naukowego

5.3.1 Wprowadzenie i motywacja

Niech E będzie lokalnie zwartą przestrzenią polską, tj. ośrodkową przestrzenią metryczną, w której każda domknięta kula jest zwarta. Czytelnik może myśleć o E jako $\mathbb{R}^n$ lub dowolnym domkniętym podzbiorze $\mathbb{R}^n$ z jakąkolwiek normą. Oznaczmy przez $\mathcal{B}$ σ-algebrę podzbiorów borelowskich E. Na przestrzeni z filtracją $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ (gdzie zakładamy, że σ-algebry są uniwersalnie zupełne [22]) rozważmy prawostronnie ciągły proces stochastyczny $(X_t)_{t\geq 0}$ z wartościami w E i rodzinę miar prawdopodobieństwa $(\mathbb{P}^x)_{x\in E}$ na $\mathcal{F}$, które spełniają następujące warunki (pełną definicję Czytelnik może znaleźć w [22, Section 3.1]):

1. (*własność Markowa*) dla dowolnych $x \in E$, $t \geq s \geq 0$ i $A \in \mathcal{B}$,

$$\mathbb{P}^x(X_t \in A|\mathcal{F}_s) = \mathbb{P}^x(X_t \in A|X_s) \quad \mathbb{P}^x\text{-p.n.},$$

2. $\mathbb{P}^x(X_0 = x) = 1$,

3. dla każdego $t \geq 0$ i $\omega \in \Omega$, istnieje $\omega' \in \Omega$, takie że

$$X_{t+u}(\omega) = X_t(\omega').$$

Piątka $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (\mathbb{P}^x)_{x\in E}, (X_t)_{t\geq 0})$ nazwana się jednorodną w czasie rodziną Markowa. Własności rodzin Markowa opisane są dokładnie w [22, Chapter 3] i [29, Chapter 1 and 2]. Jak powszechnie przyjęte w literaturze, będziemy nazywać proces $(X_t)_{t\geq 0}$ jednorodnym w czasie procesem Markowa. Przez $\mathbb{E}^x$ będziemy oznaczać wartość oczekiwaną względem miary $\mathbb{P}^x$. Zwróćmy uwagę, że niejednorodny w czasie proces Markowa jest zawarty w powyższej definicji poprzez rozszerzenie przestrzeni stanów o współrzędną reprezentującą czas.

Optymalne zatrzymanie. Teoria optymalnego zatrzymania przeżywa ostatnio renesans dzięki zastosowaniach w finansach i badaniach operacyjnych (np. do wyceny opcji amerykańskich, do ustalenia optymalnego czasu sprzedaży lub wyceny zasobów naturalnych [56], do wyceny opcji typu ‘swing’ z zastosowaniami w handlu energią [16]) oraz w statystyce (np. testowanie hipotez sekwencyjnych [55]). W *problemach optymalnego zatrzymania* dąży się do zmaksymalizowania funkcjonału

$$J(x, \tau) = \mathbb{E}^x \Big\{ \int_0^\tau e^{-\int_0^s r(X_u)du} f(X_s)ds + e^{-\int_0^\tau r(X_u)du} g(X_\tau) \Big\} \tag{1}$$

po wszystkich czasach zatrzymania τ względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Supremum $J(x, \tau)$ względem czasów zatrzymania τ nazywa się *funkcją wartości*:

$$w(x) = \sup_\tau J(x, \tau).$$

Proces stochastyczny $X(t)$ reprezentuje losową ewolucję pewnej wielkości, na przykład cenę akcji lub zasobu naturalnego (gazu, ropy itp.), stan eksperymentu naukowego, popyt na konkretny produkt, jak również inne czynniki środowiskowe lub ekonomiczne. Bieżący zysk jest reprezentowany przez funkcję f podczas gdy wpływy z ostatecznego zakupu/likwidacji pozycji w momencie τ lub zamknięcia zakładu produkcyjnego są opisane przez g. Funkcja r opisuje chwilową stopę procentową, która służy do dyskontowania przyszłych przepływów pieniężnych. Teoria optymalnego zatrzymania zajmuje się charakteryzacją funkcji wartości $w(x)$ i optymalnych czasów zatrzymania, tj. takich czasów zatrzymania τ_x, że $w(x) = J(x, \tau_x)$. Istnienie optymalnych czasów zatrzymania wymaga dodatkowych założeń. Zwykle oczekuje się, że optymalny czas zatrzymania ma postać $\inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$, gdzie $D = \{x \in E : w(x) = g(x)\}$ jest nazywany obszarem zatrzymania. Badania koncentrują się na warunkach gwarantujących istnienie optymalnych czasów zatrzymania w powyższej formie, na jawnym opisie obszaru zatrzymania i funkcji wartości (problemy ze swobodnym brzegiem) oraz na gładkości funkcji wartości (patrz [55, 63]). Problemy optymalnego zatrzymania procesów Markowa były badane od ponad 40 lat. Podstawowe wyniki dotyczące funkcji wartości i optymalnych momentów zatrzymania można znaleźć np. w [25, 45, 10, 63]. Funkcja wartości jest opisana jako najmniejsza funkcja superharmoniczna (excessive, superharmonic function), która majoryzuje wypłatę g

(patrz także [19] i [H4]). Własność ta jest ściśle powiązana z pojęciem obwiedni Snella w kontekście optymalnego zatrzymania ogólnych procesów stochastycznych, ponieważ superharmoniczność funkcji wartości odpowiada temu, że proces wartości jest nadmartyngałem. Superharmoniczna charakteryzacja funkcji wartości leży u podstaw różniczkowego podejścia zainicjowanego przez Bensoussana i Lions'a [8]: funkcja wartości jest dana jako rozwiązanie nierówności wariacyjnej:

$$\min\big(-\mathcal{A}w + rw - f, w - g\big) = 0, \tag{2}$$

gdzie $\mathcal{A}$ jest generatorem (X_t). Zastosowanie tej metody wymaga by generator był w formie różniczkowej, ale jednocześnie pozwala na wykorzystanie obszernej teorii równań różniczkowych cząstkowych. Zwykle okazuje się, że funkcja wartości nie jest wystarczająco gładka, aby być klasycznym rozwiązaniem (2) i konieczne jest wówczas użycie słabszego pojęcia rozwiązania, na przykład w sensie lepkościowym, patrz [48] i [49, Chapter 9]. Wariacyjna charakteryzacja funkcji wartości (w sensie lepkościowym) jest otrzymana w [H3].

Kolejne dwa nurty literatury są ściśle związane z pozostałymi pracami wchodzącymi w skład osiągnięcia naukowego (przegląd wyników można znaleźć w [74]). Podejścia te nie są ograniczone przez formę generatorów oraz dostępność wyników z teorii równań różniczkowych cząstkowych. Pierwsze podejście to metoda kary wprowadzona w [58] i uogólniona w [70]; to podejście jest stosowane w [H2]. Metoda kary czerpie z pomysłów opracowanych dla równań różniczkowych cząstkowych, ale wykorzystuje czysto probabilistyczne argumenty. Oryginalnym pomysłem na rozwiązanie (2) było zastąpienie ograniczenia $w \geq g$ przez składnik kary

$$-\mathcal{A}w + rw - f - \beta(g - w)^+ = 0$$

dla $\beta > 0$. Oczekuje się, że gdy β rośnie do nieskończoności, to rozwiązanie powyższego równania będzie zbiegać do rozwiązania nierówności wariacyjnej (2).

Drugie podejście do rozwiązania problemów optymalnego zatrzymania jest oparte na technice dyskretyzacji czasu badanej w [41, 70, 61] i zastosowanej w [35] do konstrukcji algorytmów numerycznych. Zagadnienie optymalnego zatrzymania w czasie ciągłym (1) jest przybliżane przez problemy z momentami zatrzymania przyjmującymi wartości na dyskretnej siatce. Pokazuje się następnie, że gdy odległości pomiędzy kolejnymi punktami siatki zmierzają do 0, to funkcja wartości zbiega do funkcji wartości w oryginalnego problemu. Kluczowym krokiem jest pokazanie, w jaki sposób pewne własności funkcji wartości dla problemów z czasem dyskretnym przekładają się na własności granicznej funkcji wartości w. Podejście to jest stosowane w [H1] .

Sterowanie impulsowe. Strategia impulsowa to ciąg par $V = (\tau_i, \xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$, gdzie τ_i są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, a zmienne losowe ξ_i przyjmują wartości w E i są $\mathcal{F}_{\tau_i}$-mierzalne. Para (τ_i, ξ_i) jest rozumiana w następujący sposób: w momencie τ_i proces (X_t) zostaje przesunięty do stanu ξ_i. Strategia V jest *dopuszczalna* dla $x \in E$, jeśli $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tworzy rosnącą sekwencję czasów zatrzymania (być może przyjmującą wartość nieskończoność) i $\lim_{i\to\infty} \tau_i = \infty$, $\mathbb{P}^x$-p.n. Aby opisać dynamikę procesu sterowanego, wprowadzimy konstrukcję z [64, Rozdział 2], która wykorzystuje pomysły [58]. Weźmy $\Omega = D(R^+, E)^\infty$, gdzie $D(R^+, E)$ jest kanoniczną przestrzenią funkcji $R^+ \to E$ prawostronnie ciągłych z lewostronnymi granicami. Niech $(\mathcal{F}^1_t)$ będzie filtracją kanoniczną na $D(R^+, E)$ i indukcyjnie definiujemy $\mathcal{F}^{n+1}_t = \mathcal{F}^n_t \otimes F^1_t$. Czasy zatrzymania τ_i są adaptowane do filtracji $(\mathcal{F}^i_t \times \{\emptyset, D(R^+, E)\}^\infty)_{t\geq 0}$ podczas gdy impulsy ξ_i są adaptowane do $\mathcal{F}^i_{\tau_i} \times \{\emptyset, D(R^+, E)\}^\infty$. Trajektorię sterowanego procesu (X_t) definiujemy na Ω za pomocą współrzędnych x^n, tj. $X_t = x^n_t$ dla $t \in [\tau_{n-1}, \tau_n)$, kładąc $\tau_0 := 0$. W ten sposób, dla ustalonej strategii impulsowej V definiujemy miarę prawdopodobieństwa $\mathbb{P}$ na Ω. Chociaż sterowany proces (X_t) i miara prawdopodobieństwa $\mathbb{P}$ zależy od strategii V, będziemy to w większości pomijać w notacji. Zauważmy, że jeśli niekontrolowany proces $(X_t)_{t\geq 0}$ jest rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego z ruchem Browna lub procesem Levy'ego (jak to ma miejsce w większości publikacji, por. [49, 50, 12]), powyższa konstrukcja nie jest konieczna, a sterowany proces można skonstruować na oryginalnej przestrzeni prawdopodobieństwa, patrz [34].

Dwa funkcjonały oceniające jakość strategii impulsowej będą pojawiały się w prezentacji osiągnięcia naukowego. *Zdyskontowany funkcjonał* ma postać

$$J_\alpha(x,V) = \mathbb{E}^x\Big\{\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t)dt - \sum_{i=1}^\infty e^{-\alpha\tau_i} c(X_{\tau_i -}, \xi_i)\Big\}, \tag{3}$$

gdzie $X_{\tau_i -}$ oznacza stan procesu w momencie τ_i przed wykonaniem impulsu ($X_{\tau_i -} = x^i_{\tau_i}$ w powyższej notacji), a $c(\cdot,\cdot)\geq 0$ to koszt impulsu przesuwającego proces z $X_{\tau_i -}$ do ξ_i. Średni zysk na jednostkę czasu to *funkcjonał ergodyczny* postaci

$$J(x,V) = \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathbb{E}^x\Big\{\int_0^T f(X_t)dt - \sum_{i=1}^\infty 1_{\tau_i\leq T} c(X_{\tau_i -}, \xi_i)\Big\}. \tag{4}$$

Funkcje wartości związane z maksymalizacją powyższych funkcjonałów będą oznaczane odpowiednio przez v_α i v. Zdyskontowany funkcjonał odpowiada ekonomicznej koncepcji wartości bieżącej netto (NPV), ponieważ wszystkie przyszłe płatności są dyskontowane do czasu 0. Z natury, takie funkcjonały przywiązują dużą wagę do wypłat, które mają miejsce w niedalekiej przyszłości. Przeciwnie, funkcjonał ergodyczny jest nieczuły na wyniki w krótkich horyzontach czasowych, o ile długoterminowe wypłaty są stabilne. Te różnice można najlepiej zrozumieć na przykładzie problemów związanych z zarządzeniem lasami lub rybołówstwem. Optymalizacja funkcji ergodycznej $J(x,V)$ często prowadzi do sterowań ergodycznych (tj. sterowany proces jest ergodyczny), które są ściśle związane ze zrównoważoną gospodarką zasobami [17], tj. taką gospodarką, która utrzymuje stacjonarną populację drzew lub ryb. Sterowanie optymalne dla funkcjonałów zdyskontowanych często prowadzi do wyeksploatowania zasobów naturalnych.

Badanie problemów ze sterowaniem impulsowym dla zdyskontowanych funkcjonałów zapoczątkowane zostało przez serie prac Bensoussana i Lionsa we wczesnych latach siedemdziesiątych. W pracach tych podają oni wariacyjną charakteryzację funkcji wartości v_α [7, 9]. Teoria sterowania impulsowego zawdzięcza swą popularność zastosowaniom w finansach [23, 33]. Transakcje na rynkach finansowych generują koszty, które zazwyczaj są ściśle odgraniczone od zera, tj. nawet najmniejsza transakcja wymaga zapłaty pewnych ustalonych ściśle dodatnich kosztów. W związku z tym handel musi odbywać się w dyskretnych momentach czasu i świetnie pasuje do struktury sterowania impulsowego: moment transakcji jest opisywany przez τ_i, zaś ilość zakupionych/sprzedanych akcji jest reprezentowana przez ξ_i.

Rozwiązanie problemu sterowania impulsowego (3) zwykle sprowadza się do rozwiązania następującego *równania Bellmana*

$$v_\alpha(x) = \sup_\tau \mathbb{E}^x\Big\{\int_0^\tau e^{-\alpha t} f(X_t)dt + e^{-\alpha\tau} M v_\alpha(X_\tau)\Big\}, \tag{5}$$

gdzie $Mv_\alpha(x) = \sup_{\xi\in E}[v_\alpha(\xi) - c(x,\xi)]$ jest operatorem impulsu. W większości prac wykorzystywana jest charakteryzacja wariacyjna rozwiązania tego równania, wykazywane jest istnienie i jednoznaczność rozwiązania, a następnie stosowany jest tzw. *argument weryfikacyjny* ('verification theorem'), patrz [9, 49]. Inny podejście w literaturze polega na przybliżaniu v_α poprzez problemy z ograniczoną liczbą impulsów (optymalne problemy wielokrotnego zatrzymania), patrz [43, 44, 18, 5]. Takie podejście jest stosowane w [H1]. W pracy tej używamy jednak czysto probabilistycznych argumentów, aby udowodnić, że funkcja wartości v_α spełnia (5) i jest ciągła. Te własności v_α umożliwiają konstrukcję optymalnej strategii.

Funkcja wartości v dla ergodycznego funkcjonału (4) okazuje się być stała dla większości problemów, które umiemy rozwiązać. *Równanie Bellmana* zawiera dodatkowo pomocniczą funkcję w:

$$w(x) = \sup_{\tau} \mathbb{E}^x \Big\{ \int_0^\tau \big(f(X_s) - \lambda\big) ds + Mw(X_\tau) \Big\}. \tag{6}$$

Stała λ ma być optymalną wartością $v(x)$ która, jak wspomnieliśmy, ma nie zależeć od początkowego punktu x. Ponieważ w nie jest funkcją wartości, nie wynika ona naturalnie z problemu optymalizacyjnego. W przeciwieństwie do zdyskontowanego problemu, znalezienie pary w i λ spełniającej powyższe równanie Bellmana nie jest wystarczające do stwierdzenia, że λ jest wartością optymalną. To znacznie komplikuje klasyczne podejście typu 'zgadnij i sprawdź', patrz [31]. Nawet udowodnienie, że strategia V otrzymana z rozwiązania (6), tj. czasy interwencji τ_i zadane przez kolejne czasy wejścia do obszaru stopowania $\{x \in E : w(x) = Mw(x)\}$ i wielkości impulsów ξ_i realizujące $Mw(X_\tau)$, daje wartość λ funkcjonału $J(x, V)$ wymaga, aby spełniony był następujący warunek transwersalności ('transversality condition'):

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\mathbb{E}_x\{w(X_T^V)\}}{T} = 0, \tag{7}$$

gdzie $(X_t^V)_{t\geq 0}$ jest sterowanym procesem. Z tych powodów badanie funkcjonałów ergodycznych odbywało się w znacznie wolniejszym tempie niż w przypadku funkcjonałów zdyskontowanych. Pierwsze wyniki uzyskano w [59, 60] przy założeniu jednostajnej ergodyczności i ze stałymi kosztem impulsów. Wyniki te zostały rozszerzone do kosztów typu $c(x, \xi) = c_1(x) + c_2(\xi)$ w [64] i do quasi-zwartych półgrup przejścia w [65]. Pewne założenia zwartości wymagane były również w pracy [30]. Ergodyczna problemy sterowania impulsowego dla procesów dyfuzji na ograniczonych obszarach były badane w [38] i [54]. Powyższe wyniki są oparte na metodzie znikającego dyskonta, patrz także [6] , w której rozwiązanie (w, λ) równania Bellmana (6) otrzymuje się w granicy przy $\alpha \to 0$ z funkcji wartości problemów zdyskontowanych v_α. Optymalizacja funkcjonału ergodycznego (6) w $\mathbb{R}$ z liniową funkcją kosztu c zależną tylko od wielkości impulsu i z $f \leq 0$ zostało rozwiązane w [31] z wykorzystaniem argumentów probabilistycznych. Moja praca [H5] rozszerza istniejące wyniki do nieograniczonych przestrzeni stanów i ogólnych procesów Fellera-Markowa z wykorzystaniem klasycznej metody znikającego dyskonta, ale przy znacznie słabszych założeniach.

5.3.2 Procesy Fellera i ich własności

Większość artykułów zawartych w osiągnięciu naukowym odnosi się do ogólnej klasy procesów Markowa spełniających słaby warunek Fellera. Poniżej podajemy definicję tych procesów i ich podstawowe własności. Niektóre z tych wyników zostały udowodnione w [H1]. Niech $\mathcal{C}$ będzie przestrzenią ciągłych ograniczonych funkcji $E \to \mathbb{R}$ z normą supremum. Oznaczmy przez $\mathcal{C}_0$ jej liniową podprzestrzeń złożoną z funkcji znikających w nieskończoności, tj. funkcji $f \in \mathcal{C}$, takich że $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = 0$. Niech P_t oznacza półgrupę przejścia procesu $(X_t)_{t\geq 0}$, tj. $P_t h(x) = \mathbb{E}^x\{h(X_t)\}$

dla dowolnej ograniczonej mierzalnej funkcji $h : E \to \mathbb{R}$. Proces Markowa $(X_t)_{t\geq 0}$ spełnia *słaby warunek Fellera*, jeśli

$$P_t\, \mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}_0.$$

Słaby warunek Fellera jest konieczny do istnienia optymalnych czasów zatrzymania dla procesów Markowa (patrz przykład na końcu rozdziału 3.1 w [H1]). Klasa słabych procesów Fellera obejmuje procesy Levy'ego [1, Theorem 3.1.9], rozwiązania stochastycznych równań różniczkowych z ciągłymi ograniczonymi współczynnikami i losowością Levy'ego ([1, Theorem 6.7.2]) oraz wiele dyfuzji i dyfuzji ze skokami o nieograniczonych współczynnikach. Ze względu na ogólną strukturę słabych procesów Fellera, artykuły [H1], [H2], [H3], [H5] mają szerokie zastosowanie.

Słabe procesy Fellera mają dwie istotne dla nas własności. W stwierdzeniu 2.1 w [H1] pokazujemy, że dla każdego $T > 0$, zwartego podzbioru $K \subset E$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty $L \subset E$, taki że

$$\sup_{x\in K} \mathbb{P}^x\big\{\exists\, s \in [0,T] \quad X_s \notin L\big\} \leq \varepsilon.$$

Dzięki temu badanie procesu (X_t) w czasie $[0,T]$ może być ograniczone do dziedziny zwartej L z dużym prawdopodobieństwem. [22, Theorem 3.7] formułuje dalsze własności trajektorii podobne do ciągłości: dla każdego zbioru zwartego $K \subset E$ i dowolnych $\varepsilon, \delta > 0$ istnieje $h_0 > 0$, takie że

$$\sup_{0\leq h\leq h_0} \sup_{x\in K} \mathbb{P}^x\{X_h \notin B(x,\delta)\} \leq \varepsilon,$$

gdzie $B(x,\delta)$ oznacza kulę otwartą o środku x i promieniu δ.

5.3.3 Problemy zatrzymania dla funkcjonałów nieciągłych w czasie i sterowanie impulsowe z opóźnieniem – artykuł [H1]

Artykuł składa się z dwóch części: problemów optymalnego zatrzymania z parametrem i nieciągłościami względem czasu, oraz zastosowaniem tych wyników do sterowania impulsowego z opóźnieniem.

Pierwsza część artykułu wykorzystuje metody probabilistyczne wprowadzone w [41]. Rozważmy zagadnienie optymalnego zatrzymania

$$v(x,s,T,b) = \sup_{\tau\leq T-s} \mathbb{E}^x\big\{F(s+\tau,T,X_\tau,b)\big\}, \tag{8}$$

gdzie b jest parametrem należącym do lokalnie zwartej przestrzeni polskiej E^B. Jeśli funkcja F jest ciągła i ograniczona, to wówczas funkcja wartości v jest ciągła, a optymalny czas zatrzymania to pierwszy czas wejścia do zbioru punktów $x \in E$, w których funkcja wartości pokrywa się z F (patrz [74] i zawarta tam literatura). Praca [H1] bada problemy optymalnego zatrzymania dla nieciągłej funkcji F. Pokazujemy, w jaki sposób nieciągłości funkcji F przenoszą się na funkcję wartości v i badamy istnienie optymalnych momentów zatrzymania. Wyniki są otrzymane dla ogólnej klasy słabych procesów Fellera. Dzięki tej ogólności mogą być one wykorzystane przy formułowaniu nierówności wariacyjnych dla funkcji wartości oraz dowodzeniu jej gładkości, patrz np. [20, 21]. Nasze wyniki mają również zastosowanie przy numerycznym rozwiązywaniu optymalnych problemów zatrzymania metodami różniczkowymi, dostarczając szczegółowych oszacowań wielkości skoków, ich dokładnych pozycji i zależności między funkcją wartości a optymalnymi momentami zatrzymania. W szczególności pokazujemy, że przy pewnych rodzajach nieciągłości nie istnieją optymalne czasy zatrzymania (konstruujemy wówczas ε-optymalne czasy zatrzymania). Podajemy również warunki wystarczające na funkcję wypłaty F, by optymalne czasy zatrzymania istniały w standardowej formie (pierwszy moment wejścia do zbioru zatrzymania) chociaż funkcja wartości jest nieciągła. Wyniki, gdy F jest prawostronnie ciągła względem zmiennej czasowej znajdują się w twierdzeniach 3.1 i 3.10. Przypadek lewostronnej ciągłości rozważany jest w twierdzeniach 4.2 i 4.3.

Dla $T^* \geq 0$ i $f, g \in \mathcal{C}([0, T^*] \times E \times E^B)$ zdefiniujmy funkcję wypłaty

$$F(t, T, x, b) = 1_{t<T} f(t, x, b) + 1_{t \geq T} g(T, x, b) \tag{9}$$

i funkcję wartości v przez (8) dla $T \in [0, T^*]$, $s \in [0, T]$, $x \in E$, $b \in E^B$. Twierdzenie 3.1 w [H1] bada własności ciągłości funkcji v. Okazuje się, że v jest ciągła względem wszystkich parametrów dla $T < T^*$. Ciągłość rozszerza się do T^*, jeśli $g \geq f$. Wówczas istnieje optymalny czas zatrzymania w standardowej postaci, tj. $\tau_s = \inf\{t \geq 0 : \ w(t+s, T, X(t), b) = F(t+s, T, X(t), b)\}$. To ostatnie stwierdzenie wynika również ze standardowego podejścia martyngałowego dla problemów optymalnego zatrzymania, patrz [55, Chapter I, Theorem 2.2], ale nasz dowód (w Lemacie 3.4) wprowadza nową technikę dowodzenia istnienia i postaci ε-optymalnych i optymalnych czasów zatrzymania nawet w dobrze zbadanym przypadku ciągłej i ograniczonej funkcji F. Główna siła twierdzenia 3.1 polega na wykazaniu ciągłości funkcji wartości w odniesieniu do wszystkich parametrów, w szczególności s i T, i wykracza poza istniejące wyniki.

W rozdziale 3.2 w [H1] badamy problemy optymalnego zatrzymania postaci

$$w(x, T_1, T_2, b) = \sup_{T_1 \leq \tau \leq T_2} \mathbb{E}_x\{F(\tau, T_2, X_\tau, b)\}.$$

Sprowadzamy je do wcześniej badanego problemu pokazując, że

$$w(x, T_1, T_2, b) = \mathbb{E}_x\{v(X_{T_1}, T_1, T_2, b)\}.$$

Problemy optymalnego zatrzymania, dla których funkcja F ma wiele nieciągłości w czasie zależnych dodatkowo od parametru b jest badana w rozdziale 3.3:

$$F(t, x, b) = \sum_{i=0}^{N^*} 1_{t \in [t_i(b), t_{i+1}(b))} f_i(t, x, b) + 1_{t=T^*} f_{N^*+1}(T^*, x, b),$$
$$(t, x, b) \in [0, T^*] \times E \times B, \tag{10}$$

gdzie funkcje f_i są ciągłe i ograniczone, a funkcje t_i są ciągłe i spełniają $t_i(b) \leq t_{i+1}(b)$. W rozdziale 3.4 badamy problemy lewostronnie ciągłe w czasie. Pokazujemy, że jeśli F jest również półciągła z góry, to funkcja wartości dziedziczy lewostronną ciągłość w czasie i optymalny czas zatrzymania zadany jest w standardowej postaci. Zauważmy, że ten przypadek (nawet bez zależności od parametru) wykracza poza to, co obejmuje klasyczna teoria oparta na (prawostronnie ciągłej) charakteryzacji nadmartyngałowej procesu wartości, patrz [55, Section I.2].

Druga część artykułu stosuje powyższe wyniki do badania problemu sterowania impulsowego na skończonym horyzoncie czasowym, gdy występuje opóźnienie wykonania impulsu (impulsy zlecone w czasie τ są wykonane w momencie $\tau + \Delta$ dla ustalonego $\Delta > 0$) i wymagana jest minimalna przerwa $h > 0$ między impulsami. Takie problemy znajdują wiele zastosowań w finansach i procesach decyzyjnych (opóźnienia wynikające z przepisów prawnych, z opóźnionej dostępności danych, braku płynności na rynku lub warunków narzuconych na opcje rzeczywiste, patrz [4, 12]). Okazuje się, że nieciągłości opisane powyżej powstają naturalnie, gdy występuje opóźnienie w wykonaniu impulsów lub rozdzielenie impulsów. [50] bada specjalną wersję powyższego problemu sterowania impulsowego, gdy opóźnienie wykonania Δ jest równe minimalnej przerwie h między impulsami, zaś proces stanu opisany jest przez dyfuzję ze skokami. Problem sterowania impulsowego zostaje przekształcony w ciąg optymalnych problemów zatrzymania bez opóźnień i rozwiązany za pomocą technik wariacyjnych. [12] rozważa bardziej ogólne sterowania (opóźnienie wykonania Δ jest wielokrotnością h); proces stanu jest wielowymiarową dyfuzją. Autorzy pokazują wariacyjną charakteryzację funkcji wartości (w sensie lepkościowym) i podają szkic algorytmu numerycznego. Inna podejście jest stosowane w [4], gdzie otrzymane są jawne wzory opisujące optymalną strategię impulsową w przypadku, gdy nie ma wymaganej minimalnej przerwy miedzy impulsami $h = 0$ (wykonanie impulsów może być opóźnione), a klasa dopuszczalnych strategii impulsowych jest ograniczona do tzw. strategii progowych. Rozdział 5 pracy [H1] uogólnia [12] w następujący sposób: proces stanu jest ogólnym słabym procesem Fellera na lokalnie zwartej polskiej przestrzeni stanów i nie ma ograniczeń na Δ i h. Pokazujemy równoważną reprezentację problemu sterowania impulsowego jako skończony układ problemów optymalnego zatrzymania (z parametrem). Dowodzimy istnienia i postaci optymalnej strategii, a także wskazujemy nieciągłości funkcji wartości dla pomocniczych problemów optymalnego zatrzymania, patrz twierdzenie 5.1. Dzięki czysto probabilistycznemu podejściu, unikamy w naszych dowodach technicznych problemów jakie nieciągłości wprowadzają przy analizie funkcji wartości z wykorzystaniem podejścia wariacyjnego. Właśnie to podejście probabilistyczne pozwala nam na skonstruowanie optymalnej strategii impulsowej, czego autorzy [12] nie byli w stanie osiągnąć; optymalność strategii zaproponowanej w [12, Section 5.2] nie została wykazana. Nasz układ problemów optymalnego zatrzymania może służyć jako podstawa do rozwiązania numerycznego: można go zapisać jako oddzielne problemy optymalnego zatrzymania, które po wygładzeniu (patrz twierdzenie 3.5) mają reprezentacje w postaci nierówności wariacyjnych jak w [12].

5.3.4 Problemy zatrzymania dla funkcjonałów nieciągłych przestrzennie - artykuł [H2]

Niech $\mathcal{O} \subset E$ będzie zbiorem otwartym i $\tau_{\mathcal{O}} = \inf\{t : X(t) \notin \mathcal{O}\}$ będzie pierwszym czasem wyjścia z $\mathcal{O}$. Praca [H2] bada problem maksymalizacji kilku klas funkcjonałów z nieciągłościami przestrzennymi:

1. Zatrzymanie jest dozwolone do czasu $\tau_{\mathcal{O}}$. Wypłata jest opisana przez funkcję G przed momentem $\tau_{\mathcal{O}}$ oraz przez funkcję H w momencie $\tau_{\mathcal{O}}$:
$$J(s,x,\tau) = \mathbb{E}^x\Big\{ \int_0^{\tau\wedge\tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha u} f\big(s+u, X(u)\big)du + 1_{\tau<\tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha\tau} G\big(s+\tau, X(\tau)\big) + 1_{\tau\geq\tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha\tau_{\mathcal{O}}} H\big(s+\tau_{\mathcal{O}}, X(\tau_{\mathcal{O}})\big)\Big\}, \tag{11}$$
gdzie $(s,x) \in [0,\infty) \times E$, $\alpha > 0$, $\tau \geq 0$ i $f, G, H : [0,\infty) \times E \to \mathbb{R}$ są ciągłymi ograniczonymi funkcjami.

2. Zatrzymanie jest dozwolone do czasu $\tau_{\mathcal{O}}$, a funkcja wypłaty $F : [0,\infty) \times E \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[0,\infty) \times \mathcal{O}$ i być może nieciągła względem zmiennej przestrzennej na $[0,\infty) \times \mathcal{O}^c$:
$$J(s,x,\tau) = \mathbb{E}^x\Big\{ \int_0^{\tau\wedge\tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha u} f\big(s+u, X(u)\big)du + e^{-\alpha(\tau\wedge\tau_{\mathcal{O}})} F\big(s+(\tau\wedge\tau_{\mathcal{O}}), X(\tau\wedge\tau_{\mathcal{O}})\big)\Big\}. \tag{12}$$

Ten funkcjonał obejmuje, w szczególności, przypadek, gdy F jest ciągła na $[0,\infty) \times \overline{\mathcal{O}}$ i na $[0,\infty) \times \overline{\mathcal{O}}^c$ z możliwym skokiem na brzegu $[0,\infty) \times \partial\mathcal{O}$, tzn. ciągłość psuje się w momencie opuszczenia domkniętego zbioru $\overline{\mathcal{O}}$; w funkcjonale (11) ciągłość psuje się przy opuszczeniu otwartego zbioru $\mathcal{O}$.

3. Horyzont czasowy jest nieskończony, $T = \infty$, lub skończony, $T < \infty$, zaś funkcjonał ma następującą postać:

$$J(s,x,\tau) = \mathbb{E}^x\Big\{ \int_0^{\tau\wedge(T-s)} e^{-\alpha u} f\big(s+u, X(u)\big)du + e^{-\alpha(\tau\wedge T)} F\big((s+\tau)\wedge T, X(\tau\wedge(T-s))\big)\Big\}, \tag{13}$$

gdzie funkcja wypłaty F jest ciągła wszędzie poza $[0,\infty) \times \partial\mathcal{O}$.

Problemy pierwszego typu są badane w [8] dla niezdegenerowanych procesów dyfuzji przy założeniach, że $G \le H$ i $\mathcal{O}$ ma gładki brzeg $\partial\mathcal{O}$. Autorzy używają technik kary podobnych do naszych, ale stosują je na poziomie nierówności wariacyjnych. Uogólnienia szły w dwóch kierunkach: powiększenie klasy procesów, do których można zastosować metodę kary, i złagodzenie założeń na funkcjonał, np. [43] usuwa założenie o niezdegenerowaniu dyfuzji, zaś [26], wykorzystując pojęcie rozwiązań lepkościowych, usuwa wiele założeń na parametry dyfuzji i gładkość funkcjonału. Funkcjonały trzeciego typu były ostatnio intensywnie badane. [36] dowodzi ciągłości i podaje wariacyjną charakteryzację funkcji wartości dla problemu optymalnego zatrzymania jednowymiarowych dyfuzji, gdy funkcja wypłaty F jest borelowska i ograniczona. Ze względu na metodę dowodową, która opiera się silnie na jednowymiarowości procesu, tego wyniku nie można rozszerzyć na wielowymiarowe dyfuzje. [2, 3] badają problemy zatrzymania dla półciągłej funkcji wypłaty F dla dyfuzji i pewnych dyfuzji ze skokami w jednym wymiarze. Dowodzą oni, że funkcja wartości dla funkcjonału z półciągłą z góry (z dołu) funkcją F jest półciągła z góry (z dołu). Istnienie optymalnych czasów zatrzymania jest wykazane, ale brakuje ich konstrukcji.

Praca [H2] opiera się na probabilistycznej technice kary wprowadzonej w [58] i rozszerzonej w [69]. W przypadku problemu (11) technika kary sprowadza się do pokazania, że funkcje w^β spełniające równanie

$$\begin{aligned} w^\beta(s,x) = \mathbb{E}^x\Big\{ \int_0^{\tau_{\mathcal{O}}} e^{-\alpha u}\Big[f\big(s+u, X(u)\big) + \beta\Big(G\big(s+u, X(u)\big) - w^\beta\big(s+u, X(u)\big)\Big)^+\Big] du \\ + e^{-\alpha\tau_{\mathcal{O}}} H\big(s+\tau_{\mathcal{O}}, X(\tau_{\mathcal{O}})\big)\Big\} \end{aligned} \tag{14}$$

zbiegają, gdy $\beta \to \infty$, do funkcji wartości $w(s,x) = \sup_\tau J(s,x,\tau)$. Zostało to wykazane w rozdziale 2, twierdzenie 2.9. Dowód składa się z następujących ogólnych kroków: wykazanie istnienia i jednoznaczności rozwiązań (14) w przestrzeni funkcji mierzalnych i ograniczonych; pokazanie, że to rozwiązanie jest ciągłe; udowodnienie jednostajnej zbieżności w_β do w na zbiorach zwartych (w odpowiednim podzbiorze (s,x)). Zauważmy, że chociaż podejście to ma charakter probabilistyczny, problem zatrzymania jest w jakiś sposób ukryty, podobnie jak w przypadku nierówności wariacyjnych. Dla porównania, w artykule [H1] problem optymalnego stopowania z czasem ciągłym jest przybliżany problemami optymalnego stopowania z czasem dyskretnym.

Rozdział 3 bada zachowanie funkcji wartości w okolicach brzegu $\partial\mathcal{O}$. Głównym rezultatem jest twierdzenie 3.1, w którym pokazujemy, że dla $x \in \partial\mathcal{O}$ mamy $\lim_{y\to x, y\in\mathcal{O}} w(s,y) = G \vee H(s,x)$. Wynika stąd, że koniecznym warunkiem do ciągłości funkcji wartości jest $G \le H$. Twierdzenie

4.3 dowodzi ciągłości w względem s, x, oraz istnienie optymalnych czasów zatrzymania. Kluczowe dla powyższych wyników jest założenie własności Fellera procesu zabijanego po wyjściu z $\mathcal{O}$, tj. odwzorowanie $x \mapsto \mathbb{E}^x\{1_{t<\tau_{\mathcal{O}}} h(X_t)\}$ jest ciągłe dla funkcji ciągłej f i dla $t > 0$. Dowód ciągłości w na $[0,\infty) \times \mathcal{O}$ wymaga dalszych założeń dotyczących zachowania procesu blisko granicy, patrz założenia (A2) i (A3) w pracy. Trudności spowodowane są możliwymi skokami procesu (nielokalnym zachowaniem) i brakiem założeń o gładkości brzegu $\mathcal{O}$.

W rozdziale 6 dowodzimy ciągłości funkcji wartości na $[0,\infty) \times \bar{\mathcal{O}}$ dla funkcjonału (12) (Stwierdzenie 6.1). Proces $t \mapsto F(t, X_t)$ może nie być prawostronnie ciągły, więc nie możemy tutaj odwoływać się do klasycznej teorii. W szczególności, optymalne czasy zatrzymania mogą nie istnieć. Podobny problem napotykamy w rozdziale 7, gdzie badamy funkcję wartości dla funkcjonału (13). Pokazujemy (Twierdzenie 7.5), że funkcja wartości jest ciągła wszędzie poza brzegiem $[0,\infty) \times \partial\mathcal{O}$. Kluczowym dla dowodu jest założenie regularności punktów brzegu $\partial\mathcal{O}$ (założenie (A5)).

5.3.5 Problemy zatrzymania bez dyskonta - artykuł [H3]

W pracach [H3] i [H5] przyjmujemy następujące założenie dotyczące ergodyczności procesu $(X_t)_{t\geq 0}$: istnieje miara prawdopodobieństwa μ na $\mathcal{B}$, taka że dla dowolnego $x \in E$

$$\lim_{t\to\infty} \|P_t(x,\cdot) - \mu(\cdot)\|_{TV} = 0,$$

gdzie $\|\cdot\|_{TV}$ oznacza normę wahania, zaś $P_t(x, A) = \mathbb{E}^x\{1_{X_t \in A}\}$, $A \in \mathcal{B}$, jest funkcją przejścia dla procesu $(X_t)_{t\geq 0}$.

Rozważmy początkowo problem optymalnego zatrzymania bez dyskonta:

$$w(x) = \sup_{\tau} \limsup_{T\to\infty} \mathbb{E}^x \Big\{ \int_0^{\tau\wedge T} f(X_s)ds + g(X_{\tau\wedge T}) \Big\}. \tag{15}$$

Zauważmy, że całka $\int_0^\tau f(X_s)ds$ może nie istnieć z dodatnim prawdopodobieństwem lub wartość oczekiwana może być nieokreślona. Powyżej, oba problemy matematyczne zostały rozwiązane poprzez wprowadzenie $\limsup_{T\to\infty}$ i obcinanie τ do przedziału czasowego $[0, T]$. Nie jest jednak jasne, jakie ta sztuczka ma konsekwencje w modelowaniu, np. czy wynik zależy od tego czy użyjemy granicy dolnej czy górnej przy $T \to \infty$. W odpowiedzi na to pytanie pomocna jest założona ergodyczność procesu $(X_t)_{t\geq 0}$. Jeśli $\mu(f) := \int_E f(x)\mu(dx) < 0$, to całka $\int_0^T f(X_s)ds$ zmierza p.n. do $-\infty$, co zachęca do wcześniejszego zatrzymania. Rzeczywiście, pokazujemy w [H3], że możemy się ograniczyć w (15) do momentów zatrzymania ze skończoną wartością oczekiwaną względem miary $\mathbb{P}^x$; wówczas granica górna w definicji funkcji w może być pominięta. Dowodzimy dalej, że istnieje optymalny moment zatrzymania w standardowej postaci, tj. zatrzymanie w pierwszym momencie, gdy $g(X_t) = w(X_t)$. Wyniki te, wraz z ciągłością funkcji wartości, otrzymujemy w Rozdziale 2 przy założeniu, że f i g są ciągłe i ograniczone, a proces zbiega wystarczająco szybko do miary niezmienniczej; jest to wyrażone pośrednio w założeniach (B1) i (C1) - (C2), por. Lemat 2.18.

Zauważmy, że gdy $\mu(f) > 0$, to funkcja wartości jest trywialna: $w(x) = \infty$ dla wszystkich x. Przypadku $\mu(f) = 0$ nie można badać metodami stosowanymi w pracy.

Pozostała część artykułu dotyczy optymalnego zatrzymania przy współczynniku dyskonta zależnym od stanu:

$$w(x) = \sup_{\tau} \limsup_{T\to\infty} \mathbb{E}^x \Big\{ \int_0^{\tau\wedge T} e^{-\int_0^s r(X_u)du} f(X_s)ds + e^{-\int_0^{\tau\wedge T} r(X_u)du} g(X_{\tau\wedge T}) \Big\}. \tag{16}$$

Tutaj $r(\cdot)$ odpowiada chwilowej stopie dyskontowej/procentowej. Nasze główne osiągnięcie polega na usunięciu powszechnie stosowanego założenia, że stopa dyskontowa jest oddzielona jednostajnie od 0 (to znaczy, $\inf_x r(x) > 0$). Takie założenie jest powszechnie stosowane w literaturze przy rozwiązywaniu problemów optymalnego zatrzymania z nieskończonym horyzontem czasowym [8, 55, 56, 58]; zwykle stopa dyskontowa jest dodatnią stałą. Motywacja do usunięcia tego założenia pochodzi ze świata finansów, w którym w wielu krajach w ostatnich latach utrzymywały się niemal zerowe lub zerowe stopy procentowe.

Jednostajne oddzielenie stopy dyskonta od zera zapewnia, przy odpowiednich założeniach dotyczących wzrostu f i g, że funkcja wartości jest skończona. Pozwala również przybliżać problemy z nieskończonym horyzontem czasowym przez problemy ze skończonym horyzontem. Zniesienie dyskonta lub usunięcie założenia o jego jednostajnym oddzieleniu od zera powoduje wiele trudności. W szczególności, jak zostało wspomniane powyżej, całkowalność funkcjonału jest zagrożona. Rozwiązaniem tego problemu może być narzucenie restrykcyjnych założeń na f i g. W podejściu martyngałowym powszechnie przyjmuje się, że $\mathbb{E}^x\{\int_0^\infty e^{-\int_0^s r(X_u)du} f^-(X_s)ds\} < \infty$ dla każdego x i że rodzina $\{e^{-\int_0^\tau r(X_u)du} g^-(X_\tau) : \ \tau\text{-moment zatrzymania}\}$ jest jednostajnie całkowalna, patrz [49, 55] i odnośniki. Można zamiast tego założyć, że $f \leq 0$, patrz [63, 55].

Ogólny problem optymalnego zatrzymania bez ograniczeń na funkcję f był badany w [59, 66, 68] dla jednostajnie geometrycznie ergodycznych procesów Fellera. Takie procesy zbiegają wykładniczo szybko do miary niezmienniczej, a prędkość tej zbieżności jest niezależna od punktu początkowego. Te założenia są głównie spełnione przez procesy zdefiniowane na przestrzeniach zwartych. Uogólnienia tych wyników można znaleźć w [67], gdzie autor założył, że trajektorie procesu można podzielić na wycieczki o długościach całkowalnych z kwadratem między dwoma zbiorami zwartymi, a optymalność badano w specjalnej klasie momentów zatrzymania (takich, że ilekroć proces trafia do jednego ze wspomnianych zbiorów zwartych, to jego historia zostaje zapomniana).

Praca [H3] rozszerza metodologię [59, 66] do niejednostajnie i niegeometrycznie ergodycznych procesów. Funkcja wartości i potencjały nie są tutaj jednostajnie ograniczone i główną trudnością w dowodach jest opanowanie tej nieograniczoności. Jest to możliwe dzięki następującym założeniom: $\mu(f) < 0$, funkcja r jest nieujemna, ciągła i ograniczona, i albo spełnione są założenia (1a) oraz (1b) lub założenie (2) poniżej:

1a) istnieje funkcja $K : E \to (0, \infty)$ ograniczona na zbiorach zwartych i funkcja $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$, takie że
$$\|P_t(x, \cdot) - \mu(\cdot)\|_{TV} < K(x)h(t),$$
$\int_0^\infty h(t)dt < \infty$, i $\mathbb{E}^x\{K(X_T)\} < \infty$ dla każdego $x \in E$ i $T \geq 0$,

1b) proces (X_t) jest silnie fellerowski, lub dla dowolnego zbioru zwartego $L \subset E$ istnieje $\alpha > 0$, taka że $\sup_{x \in L,\, T \geq 0} \mathbb{E}^x\{K(X_T)^{1+\alpha}\} < \infty$ (jednostajna całkowalność),

2) (warunek wielkich odchyleń) dla każdego $\delta, \varepsilon > 0$ i zbioru zwartego $K \subset E$ istnieje $N > 0$ i $p > 0$, takie że dla $n \geq N$ i $x \in K$ mamy
$$\mathbb{P}^x\Big\{\Big|\frac{1}{\int_0^{n\delta} e^{-\int_0^s r(X_u)du} ds} \int_0^{n\delta} e^{-\int_0^s r(X_u)du}\big(f(X_s) - \mu(f)\big)ds\Big| > \varepsilon\Big\} \leq e^{-p(n\delta)}.$$

Wówczas moment zatrzymania $\tau_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : \ g(X_t) \geq w(X_t) - \varepsilon\}$ jest ε-optymalny dla każdego $\varepsilon > 0$ (twierdzenie 3.7), funkcja wartości w jest ciągła (twierdzenie 3.11) i spełnia, w sensie lepkościowym, nierówność wariacyjną (2) (rozdział 4 w [H3]). Twierdzenie 3.8 stwierdza, że jeśli dodatkowo $R = \lim_{t\to\infty} \int_0^t r(X_s)ds < \infty$ $\mathbb{P}^x$-p.n. (na przykład, $r \equiv 0$) to moment zatrzymania $\tau^* = \inf\{t \geq 0 :\ g(X_t) \geq w(X_t)\}$ jest optymalny.

Rozdział 6 w [H3] gromadzi przykłady procesów, dla których szybkość zbieżności do miary niezmienniczej jest pod-wykładnicza. Z prac [32, 71] wywnioskowaliśmy warunki dla dyfuzji, w ramach których mamy $h(t) = (1+t)^{-p}$, $p > 0$, lub $h(t) = \exp(t^p)$ dla $p \in (0,1)$. Na podstawie pracy [42] sformułowaliśmy warunki wystarczające do niejednorodnej, ale geometrycznej ergodyczności dla dyfuzji ze skokami.

5.3.6 Problemy sterowania impulsowego z funkcjonałem ergodycznym – artykuł [H5]

Maksymalizacja funkcjonału ergodycznego (4) znacznie się upraszcza, jeśli proces stanu $(X_t)_{t\geq 0}$ jest jednostajnie geometrycznie ergodyczny [59, 64]. W pracy [H5] naszym celem jest udowodnienie istnienia optymalnej strategii impulsowej przy słabszych założeniach. Przypomnijmy, że jednorodna ergodyczność jest w dużej mierze ograniczona do zwartych przestrzeni stanów E. W [H5] zastępujemy to założeniem, że dopuszczalne strategie impulsowe przenoszą proces do pewnego zbioru zwartego $U \subset E$, tj. $\xi_i \in U$ dla wszystkich i.

Metoda zanikającego dyskonta (stosowana również w [D3] dla problemu z czasem dyskretnym) polega na przybliżaniu funkcji wartości problemu ergodycznego funkcjami wartości dla problemów zdyskontowanych $v_\alpha(x) = \sup_V J_\alpha(x, V)$ (patrz (3)) w następującym sensie. Funkcja v_α spełnia równanie Bellmana (5) (twierdzenie 3.3 w [H5]). Ustalmy $z \in U$. Wówczas $w_\alpha(x) = v_\alpha(x) - v_\alpha(z)$ spełnia

$$w_\alpha(x) = \sup_\tau \mathbb{E}^x \left\{ \int_0^\tau e^{-\alpha s}(f(X_s) - \alpha v_\alpha(z))ds + e^{-\alpha\tau} M w_\alpha(X_\tau) \right\}.$$

Dowodzimy w twierdzeniu 3.12, że $w(x) = \lim_{\alpha\to 0} w_\alpha(x)$ jest dobrze zdefiniowana i spełnia następujące równanie Bellmana

$$w(x) = \sup_\tau \mathbb{E}^x \left\{ \int_0^\tau (f(X_s) - \lambda)ds + Mw(X_\tau) \right\}, \tag{17}$$

gdzie $\lambda = \limsup_{\alpha\to 0} \alpha v_\alpha(z)$.

Zwartość U jest używana w dowodzie w wielu miejscach. Pozwala pokazać jednostajną (względem α) ciągłość Mw_α na zbiorach zwartych, a co za tym idzie, pozwala znaleźć $\alpha_n \to 0$, taki że ciąg funkcji Mw_{α_n} jest zbieżny. Ponieważ impuls można wykonać w momencie 0, zwartość U gwarantuje dolne ograniczenie dla funkcji w_α niezależne od α i jednostajną ograniczoność w_α na U. Jako, że dowody w pracy bazują silnie na zwartości U, można postrzegać nasz model jako będący pomiędzy problemem sterowania impulsowego na ogólnej przestrzeni E oraz problem ze zwartą przestrzenią stanów i silnymi założeniami ergodyczności procesu.

Problem optymalnego zatrzymania (17) odpowiada problemowi badanemu w pracy [H3]. Mamy zatem istnienie optymalnego czasu zatrzymania w postaci pierwszego momentu wejścia do zbioru $D = \{x \in E :\ w(x) = Mw(x)\}$. Oznaczmy przez $\xi(x)$ maksymalizator $Mw(x)$, tj.

$$\xi(x) = \operatorname*{argmax}_{\xi\in U}[w(\xi) - c(x,\xi)].$$

Wtedy kandydatem na optymalną strategię impulsową jest $V = (\tau_i, \xi_i)$ zadane przez

$$\tau_i = \inf\{t \geq \tau_{i-1} :\ X_t \in D\}, \qquad \xi_i = \xi(X_{\tau_i}),$$

gdzie przyjmujemy $\tau_0 := 0$. Iterując równanie Bellmana (17) dostajemy $J(x,V) = \lambda$ pod warunkiem, że spełniony jest warunek transwersalności (7). Jest to typowe podejście w literaturze [31] i trywialne, kiedy funkcja w jest ograniczona, jak to jest w przypadku [59, 60, 64]. W pracy [H5] używamy twierdzenia tauberowskiego (Lemat 3.16), aby udowodnić, że λ jest górną granicą dla $J(x,V)$. Później dowodzimy słabszej własności niż transwersalność, a mianowicie $\limsup_{T\to\infty} \frac{\mathbb{E}_x\{w(X_T^V)\}}{T} \leq 0$. Pozwala nam to wywnioskować, że strategia V osiąga wartość λ, zobacz twierdzenie 3.17. Pozostaje jeszcze wykazanie, że λ jest optymalną wartością funkcjonału (4). Dzięki naszej konstrukcji λ, dostajemy to ze wspomnianego twierdzenia tauberowskiego. W pracy [31], która stosuje podejście typu 'zgadnij i sprawdź', jest to dowodzone niezależnie z silnym wykorzystaniem własności badanego tam problemu.

Rozdział 4 poświęcony jest usunięciu założenia, że potencjał $q = \mathbb{E}^x\big\{\int_0^\infty \big(f(X_t) - \mu(f)\big)dt\big\}$ funkcji f jest ograniczony od dołu. W twierdzeniu 4.8 pokazujemy, że optymalna wartość funkcjonału $J(x,V)$ jest stała (niezależna od $x \in E$) i konstruujemy ε-optymalne strategie. Dowód opiera się na przybliżaniu funkcji f funkcjami f_N, dla których potencjał jest ograniczony od dołu (tak, aby istniała optymalna strategia), a jednocześnie ich odpowiednie optymalne wartości zbiegają do λ, gdy $N \to \infty$.

5.3.7 Zastosowania w badaniach operacyjnych - artykuł [H4]

Artykuł ten ma na celu wprowadzenie metodologii optymalnego zatrzymania i sterowania impulsowego w środowisku badań operacyjnych w obszarze zarządzania sieciami energetycznymi. Struktura problemów, jakimi dotychczas zajmowała się ta społeczność, uległa radykalnej zmianie w związku z niedawnym wzrostem produkcji energii odnawialnej. W przeszłości produkcja była deterministyczna i kontrolowana centralnie przez krajowego zarządcę. Losowość obecna była tylko po stronie popytu. Ogromny wzrost produkcji energii wiatrowej i słonecznej wprowadził znaczące fluktuacje losowe po stronie podaży. Istniejące metody, wykorzystujące deterministyczną optymalizację z gwarancjami, nie są w stanie poradzić sobie ze zwiększoną losowością w systemie i nie zapewniają realistycznej wyceny i strategii zarządzania zasobami produkcji elektrycznej [28, 62].

Problem badany w artykule [H4] dotyczy rynków bilansujących energii elektrycznej [37], w szczególności, zapewnienia rezerwy operacyjnej z wykorzystaniem baterii [15, 73]. Kontrakty rezerwy operacyjnej mogą być postrzegane jako instrumenty pochodne, ale z fizycznym rozliczeniem. Problem matematyczny polegałby na grze pomiędzy operatorem systemu (wybierającym moment realizacji) a operatorem baterii (wybierającym czas ładowania i ustanawiającym wielkość opłat). Aby uprościć problem, w pracy [H4] zakładamy, że opłaty oraz poziom bilansu energetycznego x^*, przy którym opcja jest realizowana, są ustalone. Naszym celem jest znalezienie strategii ładowania baterii i powiązanej z tym jej wyceny. Matematycznie problem ten można postrzegać jako problem sterowania impulsowego z funkcjonałem

$$J(x,V) = \mathbb{E}^x\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}\big(e^{-r\tau_i}\big(p_c - f(X_{\tau_i})\big) + e^{-r\sigma_i}K_c\big)\Big\},$$

gdzie $(X_t)_{t\geq 0}$ opisuje poziom zbilansowania systemu energetycznego (produkcja – popyt), $f(x)$ jest funkcją wyceniającą ('price stack function', tak, że $f(X_t)$ to cena energii na rynku bilansującym w chwili t), i $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ jest sekwencją momentów stopu spełniającą $\tau_{i+1} \geq \sigma_i$, gdzie $\sigma_i = \inf\{t \geq \tau_i : X_t \leq x^*\}$. Stała p_c jest premią otrzymywaną, gdy opcja jest sprzedawana na rynku, zaś K_c jest opłatą otrzymaną w momencie wykonania opcji. Praca [H4] analizuje ten problem przy założeniu, że $X_t = W_t$ i $f(x) = D + de^{-bx}$, gdzie $D, d, b \in \mathbb{R}$ i $(W_t)_{t\geq 0}$ jest ruchem Browna. W pracy [47] uogólniamy te wyniki na ogólne dyfuzje liniowe $(X_t)_{t\geq 0}$.

W rozdziale 2 badamy szczegółowo przypadek, gdy dozwolony jest tylko jeden impuls (jeden cykl ładowania-rozładowania). Tutaj, podobnie jak w drugiej części artykułu, głównym celem jest jawne wyznaczenie optymalnej strategii. W tym celu korzystamy z geometrycznej charakteryzacji funkcji wartości dla problemów optymalnego zatrzymania wyprowadzonej w [19]. Autorzy tej pracy pokazują, że funkcja superharmoniczna dla procesu $(X_t)_{t\geq 0}$ jest wklęsła w odpowiednio przeskalowanej przestrzeni. Ponieważ funkcja wartości jest najmniejszą funkcją superharmoniczną majoryzującą wypłatę, znalezienie jej upraszcza się do znalezienia najmniejszej funkcji wklęsłej majoryzującej odpowiednio zmodyfikowaną funkcję wypłaty. Korzystając z tej metody, wykazujemy, że w zależności od doboru parametrów, obszar zatrzymania jest półprostą, zwartym przedziałem lub sumą dwóch zwartych przedziałów. Dowody twierdzeń z tego i pozostałych rozdziałów zgromadzone są w elektronicznym dodatku (załączonym na końcu dołączonej wersji artykułu).

W rozdziale 3 maksymalizujemy funkcjonał $J(x, V)$ w zbiorze dopuszczalnych strategii opisanych powyżej (przypadek ten nazywamy w pracy 'lifetime problem'). Zakładamy, że $p_c + K_c < f(x^*)$, aby uniknąć trywialnych strategii 'arbitrażowych'. Definiujemy operator $\mathcal{T}$ działający na funkcjach nieujemnych ciągłych ϕ spełniających $\limsup_{x\to-\infty} \phi(x)e^{ax} < \infty$:

$$\mathcal{T}\phi = \sup_{\tau} \mathbb{E}^x \Big\{ e^{-r\tau}\big(p_c - f(X_\tau)\big) + e^{-r\sigma}\big(K_c + \phi(X_\sigma)\big) \Big\},$$

gdzie $\sigma = \inf\{t \geq \tau : X_t \leq x^*\}$. W lemacie 3.6 pokazujemy, że granica $v = \lim_{n\to\infty} \mathcal{T}^n \mathbf{0}$ istnieje i v jest ściśle dodatnią funkcją ograniczoną (w pracy funkcja v jest oznaczone przez V). Jest jasne, że v jest punktem stałym operatora $\mathcal{T}$. Istnienie optymalnego czasu zatrzymania dla $\mathcal{T}v$ jest udowodnione w lemacie 3.8, gdzie również pokazujemy, że zbiór stopu jest zawarty w przedziale (x^*, ∞). Oznacza to, że istnieje optymalna strategia dla $J(x, V)$ uzyskująca wartość $v(x)$. Znalezienie funkcji wartości v jest ułatwione przez jej charakteryzację jako jedyny punkt stały $\mathcal{T}$ w przestrzeni funkcji ciągłych nieujemnych ϕ, dla których zbiór stopu w $\mathcal{T}\phi$ jest zawarty w (x^*, ∞) (patrz lemat 3.5). Ten wynik jest stosowany w rozdziałach 3.4.1-3.4.3, gdzie znajdujemy strategie optymalne dla różnych kombinacji parametrów.

6 Publikacje wykraczające poza osiągnięcie naukowe

6.1 Sterowanie stochastyczne i zarządzanie portfelem inwestycyjnym

D1 Jan Palczewski, Jerzy Zabczyk, *Portfolio diversification with Markovian prices*, Probability and Mathematical Statistics, 25 (1), 2005, 75-95

D2 Jan Palczewski, Łukasz Stettner, *Impulsive control of portfolios*, Applied Mathematics and Optimization 56 (1), 2007, 67-103

D3 Jan Palczewski, Łukasz Stettner, *Growth-optimal portfolios under transaction costs*, Applicationes Mathematicae, 35, 2008, 1-31

D4 Georgios Aivaliotis, Jan Palczewski, *Investment Strategies and Compensation of a Mean-Variance Optimizing Fund Manager*, European Journal of Operational Research, 234 (2), 2014, 561-570

D5 Jan Palczewski, Rolf Poulsen, Klaus Schenk-Hoppé, Huamao Wang, *Dynamic Portfolio Optimization with Transaction Costs and State-Dependent Drift*, European Journal of Operational Research, 243 (3), 2015, 921-931

Praca [D1] nie weszła w skład rozprawy doktorskiej. Motywacją do badań była praca [57], w której bada się problem śledzenia benchmarku inwestycyjnego na rynku finansowym przy stałych i proporcjonalnych kosztach transakcji. Problemy tego typu były przedmiotem badań wielu naukowców, np. [40, 13]. My uogólniamy dynamikę poza geometryczny ruch Browna i rozważamy więcej niż jeden instrument ryzykowny. Pokazujemy najpierw istnienie i postać rozwiązań optymalnych. Uzyskujemy jawne wyniki w przypadku jednego instrumentu ryzykownego, którego cena jest zadana jako wykładniczy proces Poissona formułując nierówność wariacyjną i dowodząc twierdzenie weryfikacyjne. Konstruujemy rekurencyjny algorytm do znalezienia rozwiązania wspomnianej nierówności wariacyjnej przy stałych kosztach transakcji. Trudność w znalezieniu rozwiązania wynika z faktu, że generator nie jest lokalny.

Praca [D2] weszła w skład mojej rozprawy doktorskiej. Rozważamy w niej problem optymalizacji portfelowej z horyzontem nieskończonym na rynku z kosztami transakcji ściśle oddzielonymi od 0. Funkcjonał ma postać (3). Zakładamy, że ceny instrumentów finansowych tworzą wielowymiarowy, słaby proces Fellera. Dowód ciągłości funkcji wartości i istnienia optymalnej strategii wykorzystuje technikę dyskretyzacji czasu, tak jak w [H1].

Praca [D3] dotyczy maksymalizacji funkcjonału ergodycznego

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathbb{E}^x\{\log(X_T^\pi/X_0^\pi)\},$$

gdzie $(X_t^\pi)_{t\geq 0}$ to proces wartości portfela inwestycyjnego odpowiadający strategii samofinansującej π. Funkcjonał mierzy długoterminowy średni (ergodyczny) logarytmiczny zwrot portfela. Model jest w czasie dyskretnym z kosztami transakcji. Ceny akcji i czynniki ekonomiczne tworzą proces Fellera, podczas gdy same czynniki ekonomiczne są jednostajnie geometrycznie ergodyczne. Stosujemy metodę znikającego dyskonta (tak jak w [H5]), ale ze słabszymi założeniami wynikającymi z czasu dyskretnego i szczególnego sposobu, w jaki sterowanie wpływa na proces bogactwa. W drugiej części pracy rozważamy model, w którym czynniki ekonomiczne są tylko częściowo obserwowane.

W [D4] analizujemy strategie inwestycyjne wynikające ze stosowania różnych systemów wynagrodzeń dla zarządzającego funduszem inwestycyjnym, którego preferencje są typu Markowitza, tj. mają postać $\mathbb{E}(H_T) - \theta Var(H_T)$, gdzie H_T jest wynagrodzeniem otrzymanym w chwili T a $\theta > 0$ jest związana z awersją do ryzyka. Funkcjonał ten, ze względu na obecność wariancji, nie spełnia warunku Bellmana i nie można do niego stosować standardowych metod sterowania stochastycznego. Zamiast tego, opisujemy funkcję wartości poprzez rozwiązania pomocniczych problemów sterowania stochastycznego. Pokazujemy, że funkcje wartości tych problemów pomocniczych są jednoznacznymi wielomianowo rosnącymi rozwiązaniami lepkościowymi odpowiednich równań HJB, co pozwala nam udowodnić zbieżność schematów numerycznych różnic skończonych. Korzystając z tych wyników, uzyskujemy rozwiązania numeryczne dla różnych schematów wynagrodzeń i badamy ich wpływ na wyniki zarządzanych portfeli.

W [D5] tworzymy algorytmy numeryczne dla problemu inwestycyjnego z proporcjonalnymi kosztami transakcji. Nasza metoda bazuje na drzewach dwumianowych adaptowanych dla przypadków różnych struktur preferencji inwestora reprezentowanych przez funkcję dryfu $\mu(t, s)$ w dynamice cen akcji $dS_t = \mu(t, S_t)S_t dt + \sigma S_t dW_t$. Nasze wyniki mają znaczenie zarówno w dziedzinie metod numerycznych, gdzie znajdujemy sposoby aby obliczenia były wykonalne i szybkie; oraz w dziedzinie ekonomii, gdzie zajmujemy się wpływem preferencji inwestora na optymalne portfele i ich proces bogactwa.

6.2 Statystyka i uczenie maszynowe

D6 Anna Palczewska, Jan Palczewski, Richard Marchese Robinson, Daniel Neagu, *Interpreting random forest models using a feature contribution method*, Proceedings of IEEE IRI 2013, 112-119, DOI: 10.1109/IRI.2013.6642461

D7 Anna Palczewska, Jan Palczewski, Richard Marchese Robinson, Daniel Neagu, *Interpreting random forest classification models using a feature contribution method*, Integration of Reusable Systems, Advances in Intelligent Systems and Computing, Volume 263, 2014, 193-218

D8 Andrzej Palczewski, Jan Palczewski, *Theoretical and Empirical Estimates of Mean-Variance Portfolio Sensitivity*, European Journal of Operational Research, 234 (2), 2014, 402-410

D9 Błażej Miasojedow, Wojciech Niemiro, Jan Palczewski, Wojciech Rejchel, *Asymptotics of Monte Carlo maximum likelihood estimators*, Probability and Mathematical Statistics, 36 (2), 2016, 295-310

D10 Błażej Miasojedow, Wojciech Niemiro, Jan Palczewski, Wojciech Rejchel, *Adaptive Monte Carlo Maximum Likelihood*, Challenges in Computational Statistics and Data Mining, Studies in Computational Intelligence, Volume 605, 2016, 247-270

D11 Richard L. Marchese Robinson, Anna Palczewska, Nathan Kidley, Jan Palczewski *Comparison of the Predictive Performance and Interpretability of Random Forest and Linear Models on Benchmark Datasets*, Journal of Chemical Information and Modeling, 57 (8), 2017, 1773-1792

D12 Jhonny Gonzalez, John Moriarty, Jan Palczewski *Bayesian calibration and number of jump components in electricity spot price models*, Energy Economics, 65, 2017, 375-388

D13 Anna Palczewska, Jan Palczewski, Georgios Aivaliotis, Łukasz Kowalik, *RobustSPAM for inference from noisy longitudinal data and preservation of privacy*, 16th IEEE International Conference on Machine Learning and Applications (ICMLA), 2017, 344-351, DOI: 10.1109 /ICMLA.2017.0-137

W pracach [D6] i [D7] opracowujemy metodologię analizy modeli klasyfikacyjnych typu las losowy ('random forest') [11]. Nasze metody zostały później niezależnie zaimplementowane przez Soerena H. Wellinga w pakiecie forestfloor [72] do języka programowania R. W [D11] stosujemy nasze wyniki, aby uzyskać wgląd w modele przewidujące właściwości chemiczne związków na podstawie informacji strukturalnych; celem jest zidentyfikowanie, które fragmenty związku odpowiedzialne są za daną własność chemiczną (np. toksyczność). Innym aspektem analizy danych zajmujemy się w pracy [D13]. Naszym celem jest wnioskowanie statystyczne na podstawie nieuporządkowanych danych ze znacznikami czasowymi, które, dodatkowo, obarczone są błędem. Tego typu dane i problemy z jakością tych danych pojawiają się zwykle w bazach danych zawierających wpisy dokonywane przez ludzi, takich jak elektroniczne karty zdrowia. Artykuł obejmuje modelowanie probabilistyczne, algorytmy i statystykę.

Przybliżenia Monte Carlo w obliczeniach estymatora największej wiarogodności w modelach z nieznanymi stałymi normującymi i zmiennymi objaśniającymi są badane w pracach [D9] i [D10]. Estymatory największej wiarygodności (ML) są powszechnie stosowane w statystyce do szacowania parametrów modeli. Jednak w przypadku wielu skomplikowanych modeli dokładne obliczenie takich estymatorów jest bardzo trudne lub niemożliwe. Takie problemy pojawiają się, jeśli rozważane gęstości prawdopodobieństwa znane są tylko z dokładnością do stałych normujących, na przykład w losowych polach Markowa lub statystyce przestrzennej. Rozważmy parametryczny model ze zmiennymi objaśniającymi

$$p(y|x,\theta) = \frac{1}{C(x,\theta)} f(y|x,\theta),$$

gdzie $y \in \mathbb{R}^d$ to zmienna objaśniana, $x \in \mathbb{R}^l$ jest zmienną objaśniającą, $\theta \in \mathbb{R}^p$ to parametr opisujący relację między y a x. Stała normująca $C(x,\theta) = \int f(y|x,\theta)dy$ jest skomplikowana obliczeniowo (na przykład wymaga obliczenia wysoce wielowymiarowej całki). Estymatorem największej wiarogodności nazywamy maksymalizator θ^* prawdopodobieństwa $\prod_i p(y_i|x_i,\theta)$, gdzie $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,I}$ to dostępna próbka danych (obserwacja). Metody Monte Carlo Maximum Likelihood (MCML) przybliżają stałą normującą (która jest funkcją zmiennych x i θ) za pomocą odpowiedniej średniej z próby. W [D9] dowodzimy asymptotycznej normalności estymatora, co umożliwia optymalny wybór liczby próbek Monte Carlo dla danej wielkości obserwacji i analizę błędów estymacji. Nasze wyniki są silniejsze niż w [14]; stosując inne metody dowodowe jesteśmy w stanie wyrazić dokładną zależność między wariancją estymatora, wielkością próbki Monte Carlo i rozmiarem obserwacji. Nasz dowód uogólnia wyniki pracy [27] z łatwiejszego przypadku modeli z brakującymi danymi do modeli ze zmiennymi objaśniającymi. Usprawniamy nasze algorytmy w pracy [D10], gdzie wprowadzamy metody adaptacyjne, które w trakcie estymacji dostosowują rozkład próbek Monte Carlo w celu poprawy dokładności estymatora.

Metody bayesowskie (podobne do teorii filtracji w analizie stochastycznej) są stosowane w [D12] celu estymowania parametrów modelu cen spot energii elektrycznej. Cena spot jest modelowana jako suma $n+1$ procesów Ornstein'a-Uhlenbeck'a (OU):

$$X(t) = \sum_{i=0}^{n} Y_i(t),$$

gdzie Y_0 jest gaussowskim procesem OU

$$dY_0(t) = \lambda_0^{-1}(\mu - Y_0(t))dt + \sigma dW(t), \quad Y_0(0) = y_0,$$

i każdy $Y_i, i \geq 1$, jest skokowym procesem OU

$$dY_i(t) = -\lambda_i^{-1} Y_i(t)dt + dL_i(t), \quad Y_i(0-) = y_i, i = 1, \dots, n,$$

gdzie L_i jest (być może niejednorodnym w czasie) złożonym procesem Poissona. Gaussowski składnik jest odpowiedzialny za 'normalne' fluktuacje procesu cen, podczas gdy składniki poissonowskie modelują (rzadkie) skoki. Podobny model ale z $n = 1$ był badany w [46], gdzie autorzy najpierw rozdzielają sygnał na skokowy i gaussowski (poprzez prosty filtr poziomowy), a później dokonują estymacji parametrów. Ze względu na przyjętą metodę ich estymatory są obciążone i stosują się tylko do modelu z $n = 1$. My natomiast projektujemy algorytm Markov Chain Monte Carlo (odpowiednik MCML), aby ustalić liczbę składników skokowych i odpowiednie parametry bez konieczności uprzedniej dekompozycji procesu ceny.

Praca [D8] powstała w wyniku moich zainteresowań praktycznymi problemami alokacji aktywów i zaangażowania w projekt "Zarządzanie rezerwami dewizowymi" zlecony przez Narodowy Bank Polski. Zajmujemy się w tej pracy oceną wpływu błędu estymacji parametrów zwrotów aktywów na optymalne wagi portfelowe w modelu Markowitza. Otrzymujemy wyniki analityczne w przypadku gaussowskim i metody bootstrapowe dla oszacowania tych efektów z rozkładów empirycznych. Podejście Black'a-Litterman'a [39], zaprojektowane, między innymi, w celu zminimalizowania tych problemów, jest badane w [51] i [52] (praca przyjęta do druku); zaproponowane algorytmy zaimplementowane są w pakiecie BLmodel [53] języka R.

6.3 Ekonomia matematyczna

D14 Klaus R. Schenk-Hoppé, Jan Palczewski, *From Discrete to Continuous Time Evolutionary Finance Models*, Journal of Economic Dynamics and Control, 34 (5), 2010, 913-931

D15 Klaus R. Schenk-Hoppé, Jan Palczewski, *Market Selection of Self-financing Strategies in Continuous Time*, Journal of Mathematical Economics, 46 (2), 2010, 248-266

D16 Daniel Ladley, Terje Lensberg, Jan Palczewski, Klaus R. Schenk-Hoppé, *Fragmentation and stability of markets*, Journal of Economic Behavior & Organization, 119, 2015, 466-481

D17 Jan Palczewski, Klaus R. Schenk-Hoppé, Tongya Wang, *Itchy Feet vs Cool Heads: Flow of Funds in an Agent-Based Financial Market*, Journal of Economic Dynamics and Control, 63, 2016, 53-68

Artykuły te dotyczą modeli rynkowych, w których ceny aktywów są nie są podane z zewnątrz, lecz wynikają z działań uczestników rynku i równoważenia popytu i podaży (tzw. modele cen endogenicznych).

Prace [D14] i [D15] są teoretyczne. Klasycznie ewolucyjne modele finansowe z cenami endogenicznymi formułuje się w czasie dyskretnym (patrz [24]). [D14] znajduje graniczny model, kiedy odległość między kolejnymi krokami czasowymi w modelu dyskretnym zbiega się do 0. Twierdzenie 2 pokazuje istnienie i jednoznaczność rozwiązań dla modelu granicznego, równanie (11) w [D14]. Zbieżność jest dowodzona w twierdzeniu 3. Model ciągły jest badany w pracy [D15], gdzie wyprowadzamy wyniki dotyczące asymptotycznej dynamiki (względnego) majątku uczestników rynku i cen aktywów dla strategii inwestycyjnych o stałych wagach ('constant proportions strategies'), zob. twierdzenia 1 i 2.

Umiejętności i wiedza są wysoko wynagradzane w praktyce finansowej, ale w dużej mierze są ignorowane w teoretycznych modelach rynków finansowych. W [D16] budujemy model, w którym inwestorzy nabywają umiejętności wyceny aktywów (instrumentów pochodnych) w wyniku gry na rynkach finansowych. Interesuje nas zrozumienie związku między centralizacją rynków, rozkładem umiejętności w populacji i odpornością rynków. W przeciwieństwie do modeli, które nie uwzględniają umiejętności, stwierdzamy, że centralizacja rynków może prowadzić do zmniejszenia stabilności cen i mniejszej odporności na zaburzenia i wstrząsy rynkowe, ponieważ zwiększa, w stanie równowagi, udział inwestorów nie posiadających wystarczających umiejętności. Inny model obliczeniowy jest badany w [D17]. Łączy on podejście oparte na dyskretnym wyborze z modelowania agentowego, w którym cały kapitał jest mobilny (fundusze przechodzą między strategiami inwestycyjnymi bazując na ich historycznych wynikach), a ewolucyjnymi modelami finansowymi, w których cały wzrost jest endogeniczny (ceny aktywów zależą od popytu i podaży na rynku). Badamy wpływ wielkości tego przepływu funduszy na dynamikę rynku, w szczególności na zmienność cen i udział tzw. 'noise traders'.

Literatura

[1] D. Applebaum. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, 2004.

[2] B. Bassan and C. Ceci. Optimal stopping with discontinuous reward: regularity of the value function and viscosity solution. *Stochastics and Stochastics Reports*, 72:55–77, 2002.

[3] B. Bassan and C. Ceci. Regularity of the value function and viscosity solutions in optimal stopping problems for general Markov processes. *Stochastics and Stochastics Reports*, 74:633–649, 2002.

[4] E. Bayraktar and M. Egami. The effects of implementation delay on decision-making under uncertainty. *Stochastic Processes and their Applications*, 117:333–358, 2007.

[5] C. Belak, S. Christensen, and F. Seifried. A general verification result for stochastic impulse control problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 55(2):627–649, 2017.

[6] A. Bensoussan. *Perturbation Methods in Optimal Control*. Gauthier-Villars, Paris, 1988.

[7] A. Bensoussan and J. L. Lions. Nouvelles methodes en contrôle impulsionnel. *Applied Mathematics and Optimization*, 1(4):289–312, 1975.

[8] A. Bensoussan and J.L. Lions. *Applications des Inéquations Variationnelles en contrôle Stochastique*. Dunod, 1978.

[9] A. Bensoussan and J.L. Lions. *Impulse control and quasivariational inequalities*. Gauthier-Villars, Montrouge; Heyden & Son, Inc., Philadelphia, PA, 1984.

[10] J. Bismut and B. Skalli. Temps d'arret optimal, théorie générale des processus et processus de Markov. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 39(4):301–313, 1977.

[11] L. Breiman. Random forests. *Machine Learning*, 45(1):5–32, 2001.

[12] B. Bruder and H. Pham. Impulse control problem on finite horizon with execution delay. *Stochastic Processes and their Applications*, 119:1436–1469, 2009.

[13] J. Cai, M. Rosenbaum, and P. Tankov. Asymptotic lower bounds for optimal tracking: A linear programming approach. *The Annals of Applied Probability*, 27(4):2455–2514, 2017.

[14] O. Cappe, R. Douc, and E. Moulines. On the convergence of the monte carlo maximum likelihhod method for latent lariable models. *Scandinavian Journal of Statistics*, 29:615â–635, 2002.

[15] R. Carmona and M. Ludkovski. Valuation of energy storage: An optimal switching approach. *Quantitative Finance*, 10(4):359–374, 2010.

[16] R. Carmona and N. Touzi. Optimal multiple stopping and valuation of swing options. *Mathematical Finance*, 18:239–268, 2008.

[17] C. W. Clark. *Mathematical bioeconomics: The mathematics of conservation*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ., 3rd ed. edition, 2010.

[18] M.H.A. Davis. *Markov models & optimization*, volume 49 of *Monogr. Statist. Appl. Probab.* CRC Press, Boca Raton, FL, 1993, 1993.

[19] S. Dayanik and I. Karatzas. On the optimal stopping problem for one-dimensional diffusions. *Stochastic Processes and their Applications*, 107(2):173–212, 2003.

[20] T. De Angelis. A note on the continuity of free-boundaries in finite-horizon optimal stopping problems for one-dimensional diffusions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 53(1):167–184, 2015.

[21] J. Detemple and Y. Kitapbayev. American options with discontinuous two-level caps. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 9(1):219–250, 2018.

[22] E.B. Dynkin. *Markov processes*, volume 1. Springer-Verlag, 1965.

[23] J.F. Eastham and K.J. Hastings. Optimal impulse control of portfolios. *Mathematics of Operations Research*, 13(4):588–605, 1988.

[24] I.V. Evstigneev, T. Hens, and K.R. Schenk-Hoppe. Globally evolutionarily stable portfolio rules. *Journal of Economic Theory*, 140(1):197–228, 2008.

[25] A.G. Fakeev. On the question of the optimal stopping of a Markov process (in russian). *Teor. Verojatnost. i Primenen.*, 16:708–710, 1971.

[26] W.H. Fleming and H.M. Soner. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Springer, 1993.

[27] C. J. Geyer and Y.J. Sung. Monte carlo likelihood inference for missing data models. *Annals of Statistics*, 35:990–â1011, 2007.

[28] S. Giannelos, I. Konstantelos, and G. Strbac. Option value of demand-side response schemes under decision-dependent uncertainty. *IEEE Transactions on Power Systems (forthcoming)*, 2018.

[29] I.I. Gikhman and A.V. Skorokhod. *The Theory of Stochastic Processes II*. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1974.

[30] D. Gątarek and Ł. Stettner. On the compactness method in general ergodic impulsive control of Markov processes. *Stochastics and Stochastics Reports*, 31:15–26, 1990.

[31] A. Jack and M. Zervos. Impulse control of one-dimensional Ito diffusions with an expected and a pathwise ergodic criterion. *Applied Mathematics and Optimization*, 54(1):71–93, 2006.

[32] S.A. Klokov and A.Yu. Veretennikov. On subexponential mixing rate for Markov processes. *Theory of Probability & Its Applications*, 49(1):110–122, 2005.

[33] R. Korn. Portfolio optimization with strictly positive transaction cost and impulse control. *Finanace and Stochastics*, 2:85–114, 1998.

[34] N.V. Krylov. *Controlled Diffusion Processes*. Springer, 1980.

[35] H.J. Kushner and P. Dupuis. *Numerical methods for stochastic control problems in continuous time*. Springer, 1992.

[36] D. Lamberton. Optimal stopping with irregular reward functions. *Stochastic Processes and their Applications*, 119:3253–3284, 2009.

[37] S. Lenhart, N. Nelson-Marsh, E.J. Wilson, and D. Solan. Electricity governance and the Western energy imbalance market in the United States: The necessity of interorganizational collaboration. *Energy Research & Social Science*, 19:94–107, 2016.

[38] P.L. Lions and B. Perthame. Quasi-variational inequalities and ergodic impulse control. *SIAM J. Control Optimization*, 24(4):604–615, 1986.

[39] R. Litterman et al. *Modern Investment Management: An Equilibrium Approach*. John Wiley & Sons, 2004.

[40] C. Liu and H. Zheng. Asymptotic analysis for target asset portfolio allocation with small transaction costs. *Insurance: Mathematics and Economics*, 66:59–68, 2016.

[41] V. Mackevicius. Passing to the limit in the optimal stopping problems of Markov processes. *Liet. Mat. Rink.*, 13(1):115–128, 1973.

[42] H. Masuda. Ergodicity and exponential β-mixing bounds for multidimensional diffusions with jumps. *Stochastic Processes and their Applications*, 117:35–56, 2007.

[43] J.L. Menaldi. On the optimal stopping time problem for degenerate diffusions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 18(6):697–721, 1980.

[44] J.L. Menaldi. Optimal impulse control problems for degenerate diffusions with jumps. *Acta Applicandae Mathematica*, 8(2):165–198, 1987.

[45] J.F. Mertens. Strongly supermedian functions and optimal stopping. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 26:119–139, 1973.

[46] T. Meyer-Brandis and P. Tankov. Multi-factor jump-diffusion models of electricity prices. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 11(05):503–528, 2008.

[47] J. Moriarty and J. Palczewski. Energy imbalance market call options and the valuation of storage. *arXiv:1610.05325*, 2016.

[48] B. Øksendal and K. Reikvam. Viscosity solutions of optimal stopping problems. *Stochastics and Stochochastic Reports*, 62:285–301, 1998.

[49] B. Øksendal and A. Sulem. *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions*. Springer, 2005.

[50] B. Øksendal and A. Sulem. Optimal stochastic impulse control with delayed reaction. *Applied Mathematics & Optimization*, 58:243–255, 2008.

[51] A. Palczewski and J. Palczewski. Elliptical Black-Litterman portfolio optimization. *http://ssrn.com/abstract=2941483*, 2017.

[52] A. Palczewski and J. Palczewski. Black-Litterman model for continuous distributions. *European Journal of Operational Research (forthcoming)*, 2018.

[53] Andrzej Palczewski and Jan Palczewski. *BLModel: Black-Litterman Posterior Distribution*, 2017.

[54] B. Perthame. Vanishing impulse cost in the quasivariational inequality for ergodic impulse control. *Asymptotic Anal.*, 1:13–21, 1988.

[55] G. Peskir and A.N. Shiryaev. *Optimal Stopping and Free-Boundary Problems*. Birkhäuser Verlag, 2006.

[56] H. Pham. *Continuous-time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications*. Springer, 2009.

[57] S. Pliska and K. Suzuki. Optimal tracking for asset allocation with fixed and proportional transaction costs. *Quantitative Finance*, 4(2):233–243, 2004.

[58] M. Robin. *Controle impulsionnel des processus de Markov*. PhD thesis, University of Paris IX, 1978.

[59] M. Robin. On some impulse control problems with long run average cost. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 19:333–358, 1981.

[60] M. Robin. Long-term average cost control problems for continuous time markov processes: A survey. *Acta Applicandae Mathematicae*, 1:281–299, 1983.

[61] W. J. Runggaldier and Ł. Stettner. On the construction of nearly optimal strategies for a general problem of control of partially observed diffusions. *Stochastics and Stochastic Reports*, 37(1-2):15–47, 1991.

[62] Mauricio E. Samper and Alberto Vargas. Investment decisions in distribution networks under uncertainty with distributed generationâpart i: Model formulation. *IEEE Transactions on Power Systems*, 28:2331–2340, 2013.

[63] A.N. Shiryaev. *Optimal stopping rules*. Springer, 1978.

[64] Ł. Stettner. On impulsive control with long run average cost criterion. *Studia Math.*, 76:279–298, 1983.

[65] Ł. Stettner. On ergodic impulsive control problems. *Stochastics*, 18:49–72, 1986.

[66] Ł. Stettner. On the Poisson equation and optimal stopping of ergodic Markov processes. *Stochastics*, 18:25–48, 1986.

[67] Ł. Stettner. On ergodic stopping and impulsive control problems for nonuniformly ergodic Markov processes. *Applied Mathematics and Optimization*, 19:75–95, 1989.

[68] Ł. Stettner. On some stopping and impulsive control problems with a general discount rate criteria. *Probability and Mathematical Statistics*, 10(2):223–245, 1989.

[69] Ł. Stettner and J. Zabczyk. Strong envelopes of stochastic processes and a penalty method. *Stochastics*, 4:267–280, 1981.

[70] Ł. Stettner and J. Zabczyk. Optimal stopping for Feller Markov processes. *Preprint No. 284, IMPAN, Warsaw*, 1983.

[71] A.Yu. Veretennikov. On polynomial mixing bounds for stochastic differential equations. *Stochastic Processes and their Applications*, 70:115–127, 1997.

[72] S. H. Welling. *forestFloor: Visualizes Random Forests with Feature Contributions*, 2016.

[73] B. Xu, Y. Dvorkin, D.S. Kirschen, C.A. Silva-Monroy, and J.P. Watson. A comparison of policies on the participation of storage in U.S. frequency regulation markets. *arXiv:1602.04420*, 2016.

[74] J. Zabczyk. Stopping problems in stochastic control. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Warsaw, Poland*, pages 1425–1437, 1984.

Jan Palczewski