Wrocław, 12. maja 2017 r.

Światosław Gal
Instytut Matematyczny
Uniwersytetu Wrocławskiego
pl. Grunwaldzki 2/4
50-384 Wrocław
sgal@math.uni.wroc.pl

Recenzja rozprawy habilitacyjnej Jonatana Gutmana
pt. Średni wymiar i jego zastosowania w dynamice topologicznej

Ogólna charakterystyka naukowa kandydata

Habilitant jest dojrzałym kandydatem do stopnia doktora habilitowanego. Pierwszą pracę opublikował niecałe dziesięć lat temu. Od tego czasu napisał samodzielnie lub wspólnie (co najmniej) dziewiętnaście prac, z których pięć ukazało się w *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, najlepszym piśmie specjalistycznym z dziedziny. Pozostałe prace ukazały się m. in. w takich dobrych czasopismach jak *Journal d'Analyse Mathématique* czy *Proceedings of the London Mathematical Society.*

Kandydat ma bardzo solidne wykształcenie matematyczne. Nie tylko doktorat obroniony pod opieką cenionego w środowisku specjalisty z dziedziny układów dynamicznych profesora Benjamina Weissa z Jerozolimy ale również staże podoktoranckie u Bernarda Hosta (Université Paris-Est) czy Bena Greena (Cambridge/Oxford).

Habilitant prowadzi żywą współpracę z silnymi matematykami w jego dziedzinie (Elon Lindenstrauss, Lewis Bowen, Eli glasner, Tomasz Downarowicz) ale i z rówieśnikami (Masaki Tsukamoto i in.).

Jonatan Gutman jest laureatem unijnego grantu Skłodowskiej-Curie. Aktywnie prezentuje uzyskane wyniki na seminariach i konferencjach.

Omówienie rozprawy

Podstawą wniosku habilitacjnego jest cykl pięciu prac. Trzy z nich są pracami samodzielnymi, pozostałe są wynikiem współpracy z Masakim Tsukamoto oraz Elonem Lindenstraussem (w różnych układach).

Główne pojęcie badane w tych pracach to *średni wymiar* wprowadzony przez Michała Gromowa w 1999 r. a rozwinięty przez Elona Lindenstraussa oraz Benjamina Weissa w pracy z 2000 r. Jest on niezmiennikiem topologicznych układów dynamicznych. Dostarcza on subtelniejszej (od np. metod spektralnych, czy entropii, która w badanych przykładach jest częstonieskończona) metody rozróżnienia takich układów.

Ze średnim wymiarem (mdim) blisko związane są *wymiar zanurzeniowy* (edim) oraz *wymiar okresowy* (perdim).

Wyniki dotyczące hipotezy Lindenstraussa i Tsukamoty

Tę część osiągnięcia stanowią prace

Mean dimension and Jaworski-type theorems w *Proceedings of the London Mathematical Society* , 111(4):831–850, 2015,

Mean dimension and a sharp embedding theorem: extensions of aperiodic subshifts Praca wspólna z Masakim Tsukamoto w *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 34:1888–1896, 2014,

Embedding topological dynamical systems with periodic points in cubical shifts w *Ergodic Theory and Dynamical Systems* (wesja elektorniczna z 2017), oraz

Embedding topological dynamical systems with periodic points in cubical shifts w *Ergodic Theory and Dynamical Systems* (wersja elektroniczna z 2017).

Cykl ten został zapoczątkowany pracą habilitanta *Mean dimension and Jaworski-type theorems*. W pracy tej habilitant znacznie poprawia klasyczne twierdzenie Jaworskiego mówiące, że skończenie wymiarowy aperiodyczny (lub z punktami periodycznymi o periodzie odpowiednio dużym względem wymiaru) odwracalny topologiczny system dynamiczny (X, T) dopuszcza ekwiwariantne włożenie w przesunięcie na $[0, 1]^{\mathbf{Z}}$.

Każde ekwiwariantne odwzorowanie $F\colon (X, T) \to \left([0, 1]^d\right)^{\mathbf{Z}}$ zadane jest przez funkcję $f\colon X \to [0, 1]^d$ zdefiniowaną jako złożenie F z rzutem na współrzędną odpowiadającą $0 \in \mathbf{Z}$. Zrozumienia wymaga warunek włożoności. Okazuje się, że przy założeniu, że $\mathrm{perdim}(X, T) < d/2$ to dla generycznej (w sensie kategorii Baire'a) funkcji f odwzorowanie F jest immersją.

Dla uzyskania takiego wzmocnienia twierdzenia Jaworskiego dr Gutman wykorzystuje pojęcie markerów wprowadzone przez Downarowicza. W szczególności korzysta on ze swoich wcześniejszych wyników [Gut, Gut11] gdzie pokazuje, że własność markerów jest równoważna pewnemu wzmocnieniu własności Rochlina dla topologicznych systemów dynamicznych.

Twierdzenie Jaworskiego jest ściśle związane z hipotezą Lindenstraussa oraz Tsukamoty, która mówi, że jeśli (X, T) jest odwracalnym topologicznym układem dynamicznym dla którego $\mathrm{mdim}(X, T) < d/2$ oraz $\mathrm{perdim}(X, T) < d/2$, gdzie d jest liczbą naturalną, to $\mathrm{edim}(X, T) \leq d$.

W trzech wyżej wymienionych pracach uzyskano częściowe potwierdzenie tej hipotezy (przy dodatkowych założeniach lub ze słabszą tezą). We wspólnej pracy z Lindenstraussem i Tsukamotą pokazano też, że średni wymiar dla działań $\mathbf{Z}^k$ z własnością markerów można wyliczyć przy pomocy definicji *a priori* zależącej od metryki, czyli metrycznego średniego wymiaru, który pojawia się w pracy Lindenstraussa i Weissa. Jest to wynik analogiczny do wariacyjnego twierdzenia wiążącego topologiczną entropię z entropią miarową. Wcześniej to twierdzenie było znane dla pewnych działań $\mathbf{Z}$.

W pracy tej też scharakteryzowano działania $\mathbf{Z}^k$ z własnością markerów oraz średnim wymiarem zero jako granice odwrotne układów o zerowej entropii. Podobnie jak poprzednio uogólnia to wcześniejszy wynik Elona Linddenstraussa dotyczący działania grupy cyklicznej.

Przejście od grupy $\mathbf{Z}$ do grupy $\mathbf{Z}^k$ nie jest prostym uogólnieniem a wprowadzenie przez dra Gutmana markerów wydaje się kluczowym pomysłem (we wcześniejszych rezultatach zakłada się, że układ ma aperiodyczny minimalny faktor).

Niedosyt pozostawia pytanie czy założenie o istnieniu markerów jest istotne. W szczególności, nie wiadomo, czy każde działanie $\mathbf{Z}^k$ dopuszcza markery. Poszlaki, że tak może być dostarcza twierdzenie 3.5 z ostatniej z prac. Ta sama praca zawiera dwa interesujące dodatki. O ile pierwszy, w którym autor dowodzi równoważności własności małych brzegów oraz znikania średniego wymiaru (dla działań z markerami) jest bezpośrednia generalizacją twierdzenia Lindenstraussa to drugi dodatek odpowiada na nietrywialne pytanie Downarowicza o charakteryzację własności małych brzegów w terminach rozszerzeń.

Wyniki z pogranicza fizyki matematycznej

Tę część osiągnięcia stanowi praca

TAKENS EMBEDDING THEOREM WITH A CONTINUOUS OBSERVABLE w *Ergodic theory — Advances in dynamical systems*, ss. 134–141.

W pierwszej z tych prac autor dowodzi analogu twierdzenia Takensa o „rekonstrukcji" układu dynamicznego. Matematycznie problem sprowadza się do pytania kiedy odwzorowanie $F\colon X \to [0,1]^{\mathbf{Z}}$ (zdefiniowane powyżej) złożone z rzutem na d kolejnych współrzędnych jest włożeniem. Hablitant pokazuje, że tak jest jeśli T jest injektywnym odwzorowaniem zwartej przestrzeni metrycznej X wymiaru $d/2$ a wymiary pokryciowe Lebesque'a zbiorów puntów okresowych z okresem n nie większym niż d są mniejsze niż $n/2$.

Jest to krótka praca (dowód zajmuje w zasadzie dwie strony) i stanowi dodatek do pracy [Gut15] przy pisaniu której autor nie był świadomy, że rozważane tam podejście z niewielkimi zmianami można zastosować i w tym problemie.

Ocena tematyki

Cykl prac składający się na rozprawę dotyczy aktywnie rozwijającej się dziedziny. Habilitant nie tworzy „swojej" matematyki a raczej odpowiada na pytania stawiane przez ekspertów w dziedzinie (np. Lindenstrauss czy Downarowicz).

Współautorzy dra Gutmana są cenionymi matematykami i łatwość z jaką nawiązuje współpracę należy ocenić wyłacznie na jego korzyść.

Ocena istotności wyników

Wyniki badań zaprezentowane w rozprawie dostarczają istotnego zrozumienia niezmiennika jaki jest średni wymiar oraz związane z nim pojęcia. Stanowią one jeden z początkowych (aczkolwiek znaczących) kroków otwierając tematykę na kolejne badania.

O znaczeniu wyników świadczy też reputacja czasopism, w których zostały one opublikowane.

Ocena prezentacji wyników

Zarówno prace przedstawione przez Kandydata jak i auoreferat napisane są przejrzyście. Jedyną „literówką” jaką udało mi się dostrzec jest brak potęgi k na w twierdzeniu 1.24.

Konkluzja:

Zarówno rozprawa, jak i cały dorobek Habilitanta stanowią znaczny wkład w rozwój matematyki. Jego prace mieszczą się w głównym nurcie teorii układów dynamicznych oraz odpowiadają na interesujące pytania i problemy. Wnoszę zatem o dopuszczenie dra Jonatana Gutmana do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.

Św. Gal

/Światosław R. Gal/