AUTOREFERAT

YONATAN GUTMAN

Dane osobowe

Imię i nazwisko: Yonatan Gutman
Adres: Instytut Matematyczny,
Polska Akademia Nauk
ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa
Adres e-mail: y.gutman@impan.pl
Strona WWW: `http://www.impan.pl/~gutman/`

Wykształcenie

- **Studia doktoranckie w dziedzinie matematyki**, 2004-2008, tytuł doktora nadany w 2009.
  Uniwersytet Hebrajski w Jerozolimie, Izrael.
  Promotor: prof. Benjamin Weiss.
  Tytuł rozprawy: Universals and Invariants in Dynamics (Obiekty uniwersalne i niezmiennicze w dynamice).

- **Studia magisterskie (M.Sc) w dziedzinie matematyki**, 2001- 2003.
  Stanford University, Stanford, CA.
  Średnia ocena: A.

- **Studia licencjackie (B.A.) w dziedzinie matematyki-fizyki**, 1998 - 2001.
  Technion – Izraelski Instytut Technologii, Haifa, Izrael.
  Studia zakończone z wyróżnieniem (Summa cum laude, salutatorian) w 2001 r..
  Średnia ocena: 98,4 (na 100)

Academic Appointments

Wrzesień 2013- Adiunkt.
Zakład Układów Dynamicznych
Instytut Matematyczny
Polska Akademia Nauk.

2014 Postdoctoral Fellow (staż podoktorski).
Instytut Matematyki
University of Oxford
Opiekun stażu podoktorskiego: prof. Ben Green.

2013 Postdoctoral Fellow (staż podoktorski).
Wydział Matematyki Czystej i Statystyki Matematycznej
University of Cambridge.
Opiekun stażu podoktorskiego: prof. Ben Green.

2012 Adiunkt.
Zakład Układów Dynamicznych
Instytut Matematyczny

	Polska Akademia Nauk.
Październik-Listopad 2011	Pobyt naukowy. Institut des Hautes Études Scientifiques (IHÉS).
2011	Chateaubriand Fellow (staż podoktorski). Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées Université Paris-Est Marne-la-Vallée. Opiekun stażu podoktorskiego: prof. Bernard Host.
2010	Staż podoktorski CNRS (CDD Chercheur) . Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées Centre National de la Recherche Scientifique- UMR 8050 Université Paris-Est Marne-la-Vallée. Opiekun stażu podoktorskiego: prof. Bernard Host.
2009-2010	Postdoctoral Fellow (staż podoktorski). Szkoła Nauk Matematycznych Uniwersytet Telawiwski. Opiekun stażu podoktorskiego: prof. Eli Glasner.

1. Wskazane osiągnięcia habilitacyjne

Wskazanym osiągnięciem jest cykl 5 prac zatytulowany:

Średni wymiar i jego zastosowania w dynamice topologicznej

1.1. **Lista prac zawierających wskazane osiągnięcia.**

[HAB1] Yonatan Gutman and Masaki Tsukamoto. Mean dimension and a sharp embedding theorem: extensions of aperiodic subshifts. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 34:1888–1896, 2014.

[HAB2] Yonatan Gutman. Mean dimension and Jaworski-type theorems. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 111(4):831–850, 2015.

[HAB3] Yonatan Gutman, Elon Lindenstrauss, and Masaki Tsukamoto. Mean dimension of $\mathbb{Z}^k$-actions. *Geom. Funct. Anal.*, 26(3):778–817, 2016.

[HAB4] Yonatan Gutman. Takens embedding theorem with a continuous observable. In *Ergodic theory - Advances in dynamical systems.*, pages 134–141. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2016.

[HAB5] Yonatan Gutman. Embedding topological dynamical systems with periodic points in cubical shifts. 27 stron. *Praca przyjęta do druku w Ergodic Theory Dynam. Systems* (2017). doi: 10.1017/etds.2015.40.

W przypadku prac współautorskich [HAB1, HAB3] wkład każdego współautora należy traktować mniej więcej równy. Odpowiednie oświadczenia zostały dołączone do wniosku.

1.2. **Inne wyniki naukowe uzyskane po doktoracie.**

Publikacje napisane po doktoracie niewchodzące w skład osiągnięcia habilitacyjnego (w chronologii rosnącej dat ukazania się artykułu):

(1) Eli Glasner and Yonatan Gutman. The universal minimal space for groups of homeomorphisms of h-homogeneous spaces. In *Dynamical Systems and Group Actions*, volume 567 of *Contemp. Math.*, pages 105–118. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.

(2) Yonatan Gutman and Hanfeng Li. A new short proof for the uniqueness of the universal minimal space. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 141(1):265–267, 2013.

(3) Eli Glasner and Yonatan Gutman. Minimal hyperspace actions of homeomorphism groups of h-homogeneous spaces. *Journal d'Analyse Mathématique*, 119(1):305–332, 2013.

(4) Lewis Bowen and Yonatan Gutman. Nonabelian free group actions: Markov processes, the abramov–rohlin formula and yuzvinskii's formula–corrigendum. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 33(02):643–645, 2013.

(5) Lewis Bowen and Yonatan Gutman. A juzvinskii addition theorem for finitely generated free group actions. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 34(01):95–109, 2014.

(6) Tomasz Downarowicz, Yonatan Gutman, and Dawid Huczek. Rank as a function of measure. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 34:2741–2750, 2014.

(7) Yonatan Gutman and Lionel Nguyen Van Thé. On relative extreme amenability. *Sci. Math. Jpn.*, 28:133–141, 2015.

(8) Yonatan Gutman and Masaki Tsukamoto. Embedding minimal dynamical systems into hilbert cubes. Praca w recenzji. http://arxiv.org/abs/1511.01802, 2015.

(9) Yonatan Gutman, Freddie Manners, and Péter P. Varjú. The structure theory of nilspaces I. Praca w recenzji. arxiv.org/abs/1605.08945, 2016.

(10) Yonatan Gutman, Freddie Manners, and Péter P. Varjú. The structure theory of nilspaces II: Representation as nilmanifolds. Praca w recenzji. arxiv.org/abs/1605.08948, 2016.

(11) Yonatan Gutman, Freddie Manners, and Péter P. Varjú. The structure theory of nilspaces III: Inverse limit representations and topological dynamics. Praca w recenzji. arxiv.org/abs/1605.08950, 2016.

1.3. **Wstęp.**

Średni wymiar jest niezmiennikiem układów dynamicznych wprowadzonym przez Gromowa w [Gro99]. Analogicznie do entropii topologicznej, która jest miarą liczby bitów na jednostkę czasu potrzebnych do opisania punktu w systemie, średni wymiar jest miarą liczby parametrów na jednostkę czasu. Podstawowy przykład stanowi działanie przesunięcia (shiftu) na kostce Hilberta $[0,1]^{\mathbb{Z}}$, którego średni wymiar wynosi 1. Układ ten ma nieskończony wymiar i nieskończoną entropię topologiczną, jednak średni wymiar jest przydatnym niezmiennikiem numerycznym dla tak dużych układów dynamicznych.

Teoria średniego wymiaru została rozwinięta i systematycznie zbadana przez Lindenstraussa i Weissa w [LW00]. Znalazła już zastosowania w badaniach nad odwzorowaniami holomorficznymi ([Gro99, Gou08, MT15]), C^*-algebrami ([EN14, Phi16]) i automatami komórkowymi ([CSC10]), a także w dynamice topologicznej ([LW00, Lin99, Gut11, HAB1, LT12, HAB2, HAB3, GT15, HAB5]), dynamice symbolicznej ([BD04, Gut11]) i fizyce matematycznej([Gro99, MT11, HAB4, HAB5]). Znakomite opracowanie teorii średniego wymiaru z perspektywy teorii wymiaru znajduje się w monografii [Coo05] (angielskie tłumaczenie: [Coo15]).

Niniejszy autoreferat dotyczy przed wszystkim zastosowań średniego wymiaru w dynamice topologicznej, ale przedstawi również pewne zastosowania w fizyce matematycznej.

1.4. **Pojęcia wstępne.**

Dynamika topologiczna zajmuje się badaniem ciągłych działań $G \times X \to X$ grup topologicznych Hausdorffa (zwykle metrycznych) G przestrzeniach zwartych Hausdorffa (zwykle metrycznych) X. Parę (G,X) nazywa się **topologicznym układem dynamicznym**, a X nazywa się G-**układem**. Domknięty, G-niezmienniczy podzbiór X nazywa się **podukładem**. G-układ X nazywany jest **minimalnym**, jeśli X i $\emptyset$ są jego jedynymi podukładami (G,X). G-układ X nazywa się **aperiodycznym**[1], jeśli równość $gx = x$ dla pewnego $x \in X$ implikuje $g = \mathrm{Id}$. Morfizm między dwoma układami dynamicznymi (G,X) i (G,Y) jest zadany przez ciągłe odwzorowanie $\varphi : X \to Y$, które jest **zgodne z dynamiką** G (czyli $\varphi(gx) = g\varphi(x)$ dla wszystkich $x \in X$ i $g \in G$). Jeśli φ jest suriekcją, φ (a czasem również X) nazywa się **rozszerzeniem**, a Y nazywa się **faktorem** of X. Jeśli φ jest iniekcją, nazywa się je **zanurzeniem**. Układy (G,X) i (G,Y) nazywa się **izomorficznymi**, jeśli φ jest bijekcją. Stosujemy też notację (X,T), gdy $T : X \to X$ jest odwzorowaniem ciągłym (nie musi być iniekcją ani suriekcją), a parę (X,T) nazywamy układem dynamicznym (z niewielkim nadużyciem notacji).

1.5. **Problem zanurzenia dla topologicznych układów dynamicznych i średni wymiar.**

Zgodnie z terminologią stosowaną w [Lip09], przy danej klasie układów dynamicznych $\mathscr{C}$ układ $\mathbb{U} \in \mathscr{C}$ nazywa się **uniwersalnym** dla $\mathscr{C}$, jeśli każdy element $\mathscr{C}$ jest izomorficzny z pewnym podukładem $\mathbb{U}$. Zgodnie z klasyczną teorią wymiaru Mengera-Nöblinga ([HW41, tw. V.2]), $(2d+1)$-wymiarowa kostka $\mathrm{E}_{2d+1} \triangleq [0,1]^{2d+1}$ jest uniwersalna dla klasy przestrzeni metrycznych o wymiarze $\leq d$ (w sensie wymiaru pokryciowego Lebesgue'a). Naturalnym odpowiednikiem dynamicznym kostki d-wymiarowej E_d wydaje się rozważenie przesunięcia (działania shiftowego) na kostce d-wymiarowej, $\mathbb{E}_d = \left(\left([0,1]^d\right), \sigma\right)$, gdzie odwzorowanie σ zadane jest jako $\sigma((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$, czyli

$$(\ldots, x_{-2}, x_{-1}, \mathbf{x_0}, x_1, x_2, \ldots) \xrightarrow{\sigma} (\ldots, x_{-1}, x_0, \mathbf{x_1}, x_2, x_3, \ldots).$$

Pytamy zatem, dla jakiej klasy topologicznych układów dynamicznych przesunięcie na kostce d-wymiarowej jest układem uniwersalnym. Trywialną obserwacją jest, że przesuniecie na kostce ∞-wymiarowej $\left(\left([0,1]^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{Z}}, \mathrm{shift}\right)$ jest układem uniwersalnym dla wszystkich topologicznych układów dynamicznych, wprowadzamy więc pojęcie **wymiaru zanurzeniowego**:

$$\mathrm{edim}(\mathbb{Z},X) = \min\{d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} | (\mathbb{Z},X) \hookrightarrow (([0,1]^d)^{\mathbb{Z}}, \mathrm{shift})$$

Jest to minimalna wartość d, przy której istnieje ciągłe i zgodne z dynamiką zanurzenie $(\mathbb{Z},X)$ w przesunięciu na kostce d-wymiarowej. Innymi słowy $\{(\mathbb{Z},X) | \ \mathrm{edim}(\mathbb{Z},X) \leq d\}$ jest maksymalną klasą topologicznych układów dynamicznych, dla której układ $\mathbb{E}_d$ jest uniwersalny.

Wymiar zanurzeniowy można interpretować jako topologiczny odpowiednik pojęć pojawiających się w miarowych układach dynamicznych. Niech $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ będzie odwracalnym układem zachowującym miarę. Funkcja mierzalna $P : X \to \{1, 2, \ldots, m\}$ jest nazywana *rozbiciem generującym*, jeśli odwzorowanie $I_P(x) \triangleq (P(T^k(x)))_{k\in\mathbb{Z}}$, $x \in X$ prawie na pewno rozdziela punkty. Podobnie funkcję ciągłą $f : X \to [0,1]^d$ nazwiemy **generatorem topologicznym**, jeśli **odwzorowanie orbitalne** $I_f(x) \triangleq (f(T^k(x)))_{k\in\mathbb{Z}}$, $x \in X$ rozdziela punkty. Zauważmy, że $d = \mathrm{edim}(\mathbb{Z},X)$ jest minimalną wartością d, dla której istnieje generator topologiczny $f : X \to [0,1]^d$. Zgodnie z twierdzeniem Kriegera o generatorze ([Kri70]) jeśli układ $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ jest ergodyczny i $h_\mu(T) < \log(d)$, to istnieje rozbicie generujące złożone z d elementów.

Oczywiście zbiór punktów okresowych może uniemożliwiać zanurzenie układu dynamicznego w przesunięciu na kostce: na przykład jeśli zbiór punktów stałych układu $(\mathbb{Z},X)$ ma wymiar ostro większy

---
[1]Niektórzy autorzy nazywają takie układy *wolnymi*.

niż 1, to oczywiście $\mathrm{edim}(\mathbb{Z},X) > 1$. Dokładniej, niech $P_m = \{x \in X \,|\, \exists 1 \le \ell \le m, T^\ell x = x\}$ oznacza zbiór punktów o okresie $\le m$. Wprowadźmy **wymiar okresowy** jako wektor nieskończony

$$\mathrm{perdim}(\mathbb{Z},X) = \Big(\frac{\dim(P_m)}{m}\Big)_{m\in\mathbb{N}}.$$

Jest to oczywiście topologiczny niezmiennik dynamiczny. Niech $d > 0$. Piszemy $\mathrm{perdim}(\mathbb{Z},X) < d$ (lub odpowiednio $\mathrm{perdim}(\mathbb{Z},X) \le d$), jeśli dla każdego $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{perdim}(\mathbb{Z},X)|_m < d$ (odpowiednio $\mathrm{perdim}(\mathbb{Z},X)|_m \le d$). Łatwo zauważyć, że $\mathrm{perdim}(\mathbb{Z},X) \le \mathrm{edim}(\mathbb{Z},X)$ dla każdego topologicznego układu dynamicznego $(\mathbb{Z},X)$.

W pierwszej chwili mogłoby wydawać się, że punkty okresowe stanowią jedyną przeszkodę w możliwości zanurzenia w przesunięciu na kostce. Przesłanką w tym kierunku jest klasyczne twierdzenie Kakutaniego-Bebutowa, które mówi, że $\mathbb{R}$-przestrzeń X można zanurzyć w przestrzeni funkcji ciągłych na $\mathbb{R}$ (z topologią zwarto-otwartą), jeśli zbiór punktów okresowych można zanurzyć w $\mathbb{R}$ (patrz [Kak68] i [Aus88, rozdział 13]). Już w latach 70. XX wieku Auslander zadał pytanie, czy dowolny minimalny układ dynamiczny $(\mathbb{Z},X)$ można zanurzyć w przesunięciu na kostce 1-wymiarowej $\mathbb{E}_1$. W [Jaw74] Jaworski wykazał, że dowolny aperiodyczny, skończenie wymiarowy topologiczny układ dynamiczny $(\mathbb{Z},X)$ można zanurzyć w $\mathbb{E}_1$, co dawało nadzieję na odpowiedź pozytywną. Mimo to 26 lat później Lindenstrauss i Weiss w pracy [LW00] udzielili odpowiedzi negatywnej, posługując się nowym niezmiennikiem, jakim był średni wymiar. Przypomnijmy jego definicję w kontekście działań $\mathbb{Z}^k$[2].

Niech (X,d) będzie zwartą przestrzenią metryczną. Niech Y będzie przestrzenią topologiczną, a $f : X \to Y$ — odwzorowaniem ciągłym. Dla $\varepsilon > 0$ odwzorowanie f nazywa się **ε-zanurzeniem**, jeśli $\mathrm{diam} f^{-1}(y) < \varepsilon$ dla wszystkich $y \in Y$. Określmy $\mathrm{widim}_\varepsilon(X,d)$ jako najmniejszą liczbę całkowitą $n \ge 0$, przy której istnieje n-wymiarowy kompleks symplicjalny P i ε-zanurzenie $f : X \to P$. **Wymiar pokryciowy Lebesgue'a** jest zdefiniowany jako

$$\dim(X,d) = \sup_{\varepsilon>0} \mathrm{widim}_\varepsilon(X,d).$$

Można udowodnić, że $\dim(X)$ zależy tylko od topologii X, więc przy każdej równoważnej metryce otrzymamy tę samą wartość.

Ustalmy $k \in \mathbb{N}$. Da dodatniej liczby całkowitej N niech $[N]^k = \{0,1,2,\ldots,N-1\}^k \subset \mathbb{Z}^k$. Niech $(\mathbb{Z}^k,X)$ będzie topologicznym układem dynamicznym. Określmy nową metrykę $d_{[N]^k}$ na X jako

$$d_{[N]^k}(x,y) = \sup_{g\in[N]^k} d(gx,gy). \tag{1.1}$$

Możemy teraz zdefiniować **średni wymiar** $\mathrm{mdim}(\mathbb{Z}^k,X)$ jako[3]:

$$\mathrm{mdim}(\mathbb{Z}^k,X) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^k}\mathrm{widim}_\varepsilon(X,d_{[N]^k})\right).$$

Nietrudno jest zauważyć, że $\mathrm{mdim}(([0,1]^d)^{\mathbb{Z}^k},\mathrm{shift}) = d$, i że jeśli $Y \subset X$ jest domkniętym zbiorem $\mathbb{Z}^k$-niezmienniczym, to $\mathrm{mdim}(\mathbb{Z}^k,Y) \le \mathrm{mdim}(\mathbb{Z}^k,X)$. Lindenstrauss i Weiss skonstruowali[4] minimalny topologiczny układ dynamiczny $(\mathbb{Z},X)$, taki że $\mathrm{mdim}(\mathbb{Z},X) > 1$ co oznacza, że układu tego nie można zanurzyć w układzie $(([0,1]^1)^{\mathbb{Z}},\mathrm{shift})$.

Z drugiej strony Lindenstrauss udowodnił w [Lin99] zaskakujący wynik, że jeśli X jest układem minimalnym lub rozszerzeniem aperiodycznego układu minimalnego i $\mathrm{mdim}(\mathbb{Z},X) < cd$, przy $c = \frac{1}{36}$, to $(\mathbb{Z},X)$ można zanurzyć w układzie $(([0,1]^d)^{\mathbb{Z}},\mathrm{shift})$. W związku z tym Lindenstrauss postawił nowe naturalne pytanie [Lin99, p. 229]:

Pytanie 1.1. *(Lindenstrauss)*

[2]Definicję można w naturalny sposób rozszerzyć na przypadek działań grup ze średnią, korzystając przede wszystkim z lematu Ornsteina-Weissa dla funkcji podaddytywnych ([LW00, dodatek]). Hanfeng Li [Li13] rozszerza definicję średniego wymiaru jeszcze dalej, na przypadek działań grup soficznych.

[3]Można wykazać, że granica po N istnieje, i że $\mathrm{mdim}(X,\mathbb{Z}^k)$ zależy tylko od topologii X (patrz [LW00]).

[4]Za pomocą tej samej techniki można dla każdego $r \in [0,\infty]$ skonstruować minimalny topologiczny układ dynamiczny $(\mathbb{Z},X)$, dla którego $\mathrm{mdim}(\mathbb{Z},X) = r$.

"Innym ciekawym, otwartym pytaniem jest problem maksymalnej wartości stałej c, przy której $\mathrm{mdim}(X,T) < cN$ *implikuje możliwość zanurzenia* (X,T) *w układzie* $\left(\left([0,1]^N\right)^{\mathbb{Z}}, \mathrm{shift}\right)$*. Udało nam się ustalić, że* $c \geq 1/36$*."*

Rozszerzając to pytanie na ogólne topologiczne układy topologiczne (w szczególności dopuszczając istnienie punktów okresowych) w pracy [LT14] Lindenstrauss i Tsukamoto postawili hipotezę, że *jedyne* przeszkody w możliwości zanurzenia w przesunięciu na kostce są związane ze średnim wymiarem i z wymiarem okresowym, a dokładniej:

Hipoteza 1.2. *(Lindenstrauss i Tsukamoto) Niech* $d \in \mathbb{N}$*. Jeśli* $\mathrm{mdim}(\mathbb{Z},X) < \frac{d}{2}$ *i* $\mathrm{perdim}(\mathbb{Z},X) < \frac{d}{2}$*, to układ* $(\mathbb{Z},X)$ *można zanurzyć w układzie* $(([0,1]^d)^{\mathbb{Z}}, \mathrm{shift})$ $(\mathrm{edim}(\mathbb{Z},X) = d)$*.*

Hipoteza jest ostra (nawet w wersji ograniczonej do określonych klas układów) w tym sensie, że można znaleźć przykłady, dla których stałe podane w hipotezie są optymalne:

- Flores w pracy ([Flo35]) pokazuje, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$, istnieje skończenie wymiarowy topologiczny układ dynamiczny (X_n, Id), taki że $2n+1 = \mathrm{edim}(X_n, \mathrm{Id}) > 2\,\mathrm{perdim}(X_n, \mathrm{Id}) = 2\dim(X_n) = 2n$.
- Zgodnie z [Gut11, sekcja 1.8], dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje topologiczny układ dynamiczny (Y_n, T_n), taki że $2n+1 = \mathrm{edim}(Y_n, T_n) > 2\,\mathrm{mdim}(Y_n, T_n) = 2n$.
- Zgodnie z [LT14, twierdzenie 1.3], dla każdego $n \in \mathbb{N}$, istnieje *minimalny* topologiczny układ dynamiczny (Z_n, T_n), taki że $\mathrm{edim}(Z_n, T_n) > 2\,\mathrm{mdim}(Y_n, T_n) = n$.
- Zgodnie z [HAB1, STWIERDZENIE 1.9], dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i aperiodycznego zerowymiarowego topologicznego układu dynamicznego (W,S), istnieje rozszerzenie $(W_n, T_n) \to (W,S)$, dla którego $\mathrm{edim}(W_n, T_n) > 2\,\mathrm{mdim}(W_n, T_n) = n$.

Należy jednak zwrócić uwagę, że warunki postawione w hipotezie Lindenstraussa-Tsukamoto nie są konieczne, tzn. istnieją układy, dla których $\frac{d}{2} \leq \mathrm{mdim}(\mathbb{Z},X) \leq d$ i/lub $\frac{d}{2} \leq \mathrm{perdim}(\mathbb{Z},X) \leq d$, a można zanurzyć układ $(\mathbb{Z},X)$ w układzie $(([0,1]^d)^{\mathbb{Z}}, \mathrm{shift})$. Przykładem jest układ $(\mathbb{Z},X) = (([0,1]^d)^{\mathbb{Z}}, \mathrm{shift})$.

Hipoteza w dalszym ciągu jest otwarta i jej pełne rozstrzygnięcie wydaje się trudnym problemem. Otrzymaliśmy jednak wyniki częściowe, które można podzielić na dwa rodzaje:

- Dowody prawdziwości hipotezy dla pewnych klas układów dynamicznych;

lub

- Dowody **stwierdzeń o uniwersalności**, tzn. twierdzeń postaci „Jeśli $(\mathbb{Z},X) \in \mathscr{C}$, $\mathrm{mdim}(\mathbb{Z},X) < c_1 d$ i $\mathrm{perdim}(\mathbb{Z},X) < c_2 d$, to $\mathrm{edim}(\mathbb{Z},X) \leq d+k$" dla pewnej klasy topologicznych układów dynamicznych $\mathscr{C}$ oraz stałych c_1, c_2, k zależnych tylko od $\mathscr{C}$.

Wyniki te wymagają rożnych technik, które zostaną omówione dalej. Przedstawmy podsumowanie otrzymanych wyników:

We wspólnej pracy autora i Masaki Tsukamoto udowodniono następujące wyniki:

Twierdzenie 1.3. *([HAB1, WNIOSEK 1.8]) Niech* $d \in \mathbb{N}$*. Niech* $(\mathbb{Z},X)$ *będzie rozszerzeniem aperiodycznego podukładu* $\left(\{1,2,\ldots,l\}^{\mathbb{Z}}, \mathrm{shift}\right)$*. Jeśli* $\mathrm{mdim}(\mathbb{Z},X) < \frac{d}{2}$*, to układ* $(\mathbb{Z},X)$ *można zanurzyć w układzie* $\left(\left([0,1]^d\right)^{\mathbb{Z}}, \mathrm{shift}\right)$*. Oznacza to, że hipoteza Lindenstraussa-Tsukamoto jest prawdziwa przy tych założeniach.*

Twierdzenie 1.4. *([HAB1, WNIOSEK 1.7]) Niech* $d \in \mathbb{N}$*. Niech* $(\mathbb{Z},X)$ *będzie rozszerzeniem aperiodycznego układu zerowymiarowego. Jeśli* $\mathrm{mdim}(\mathbb{Z},X) < d/2$*, to układ* $(\mathbb{Z},X)$ *można zanurzyć w układzie* $\left(\left([0,1]^{d+1}\right)^{\mathbb{Z}}, \mathrm{shift}\right)$*.*

W pracy [HAB2] udowodniono następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.5. *([HAB2, TWIERDZENIE 8.1]) Niech* $d \in \mathbb{N}$*. Jeśli przestrzeń* X *jest skończenie wymiarowa i* $\mathrm{perdim}(\mathbb{Z},X) < \frac{d}{2}$*, to układ* $(\mathbb{Z},X)$ *można zanurzyć w układzie* $(([0,1]^d)^{\mathbb{Z}}, \mathrm{shift})$*. Oznacza to, że hipoteza Lindenstraussa-Tsukamoto jest prawdziwa przy tych założeniach*[5]*.*

[5] Skończony wymiar X oznacza, że $\mathrm{mdim}(\mathbb{Z},X) = 0$ ([LW00]).

Twierdzenie 1.6. *([HAB2, TWIERDZENIE 9.1]) Niech $d \in \mathbb{N}$. Niech $(\mathbb{Z},X)$ będzie rozszerzeniem aperiodycznego, skończenie wymiarowego topologicznego układu dynamicznego. Jeśli* $\mathrm{mdim}(\mathbb{Z},X) < \frac{d}{16}$*, to układ $(\mathbb{Z},X)$ można zanurzyć w układzie* $(([0,1]^{d+1})^{\mathbb{Z}}, \mathrm{shift})$.

Niech (G,X) i (G,Y) będą topologicznymi układami dynamicznymi. Niech $R \subset X$ będzie podzbiorem G-niezmienniczym (niekoniecznie domkniętym). Odwzorowanie ciągłe $\varphi : R \to Y$ zgodne z dynamiką G nazywa się **immersją**, jeśli jest różnowartościowe. Należy zauważyć, że φ nie musi być zanurzeniem topologicznym. W pracy [HAB2] udowodniono twierdzenie, które można nazwać „połową" hipotezy Lindenstraussa-Tsukamoto (patrz też sekcja 1.6 niżej):

Twierdzenie 1.7. *([Gut15, twierdzenie 4.1]) Załóżmy, że* $\mathrm{perdim}(\mathbb{Z},X) < \frac{d}{2}$ *dla pewnego $d \in \mathbb{N}$ i niech $P(X)$ będzie zbiorem punktów okresowych. Zbiór odwzorowań ciągłych $f : X \to [0,1]^d$, dla których* $I_f = (f(T^k(x)))_{k\in\mathbb{Z}} : (P(X),T) \hookrightarrow (([0,1]^d)^{\mathbb{Z}}, \mathrm{shift})$ *nie jest immersją, jest zbiorem pierwszej kategorii w* $C(X,[0,1]^d)$.

W [HAB5] udowodniono następujący wynik:

Twierdzenie 1.8. *([HAB5, TWIERDZENIE 7.1]) Niech $d \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że $(\mathbb{Z},X)$ jest rozszerzeniem aperiodycznego topologicznego układu dynamicznego, który jest skończenie wymiarowy lub ma przeliczalnie wiele minimalnych podukładów. Jeśli* $\mathrm{mdim}(\mathbb{Z},X) < \frac{d}{36}$*, to układ $(\mathbb{Z},X)$ można zanurzyć w układzie* $(([0,1]^d)^{\mathbb{Z}}, \mathrm{shift})$.

Niech $(\mathbb{Z},X)$ będzie topologicznym układem dynamicznym. Punkt $x \in X$ nazywamy **niewędrującym**, jeśli dla każdego zbioru otwartego $x \in U$ i każdego $N \geq 1$ istnieje $k \geq N$, takie że $U \cap T^{-k}U \neq \emptyset$. **Zbiór niewędrujący** $\Omega(X)$ to zbiór wszystkich punktów niewędrujących. Zauważmy, że $\Omega(X)$ jest zbiorem niepustym, domkniętym i $\mathbb{Z}$-niezmienniczym.

Twierdzenie 1.9. *([HAB5, TWIERDZENIE 7.3]) Niech $(\mathbb{Z},X)$ będzie topologicznym układem dynamicznym, takim że zbiór $\Omega(X)$ jest skończenie wymiarowy, zbiór punktów okresowych $P(X)$ jest domknięty i perdim$(\mathbb{Z},X) < \frac{d}{2}$. Wówczas układ $(\mathbb{Z},X)$ można zanurzyć w układzie* $(([0,1]^d)^{\mathbb{Z}}, \mathrm{shift})$. *Oznacza to, że hipoteza Lindenstraussa-Tsukamoto jest prawdziwa przy tych założeniach*[6].

Wreszcie w niedawnej pracy napisanej wspólnie z Masaki Tsukamoto i dostępnej jako preprint zamieszczono odpowiedź na pytanie 1.1:

Twierdzenie 1.10. *([GT15, twierdzenie 1.4]) Niech $d \in \mathbb{N}$. Niech $(\mathbb{Z},X)$ będzie rozszerzeniem aperiodycznego układu minimalnego. Jeśli* $\mathrm{mdim}(\mathbb{Z},X) < d/2$*, to układ $(\mathbb{Z},X)$ można zanurzyć w układzie* $\left(([0,1]^d)^{\mathbb{Z}}, \mathrm{shift}\right)$. *Oznacza to, że hipoteza Lindenstraussa-Tsukamoto jest prawdziwa przy tych założeniach.*

1.6. **Maszyneria twierdzenia Baire'a o kategorii.**

Dowody wszystkich wyników wymienionych wyżej korzystały z twierdzenia Baire'a o kategorii. Ciągłe odwzorowanie $f : X \to [0,1]^d$ indukuje ciągłe odwzorowanie zgodne z dynamiką $\mathbb{Z}$: $I_f : (\mathbb{Z},X) \to (([0,1]^d)^{\mathbb{Z}}, \mathrm{shift})$ zadane wzorem $x \mapsto (f(T^k x))_{k\in\mathbb{Z}}$. Jest ono nazywane **odwzorowaniem orbitalnym**. Co więcej, każde ciągłe odwzorowanie faktorujące $\pi : (\mathbb{Z},X) \to (([0,1]^d)^{\mathbb{Z}}, \mathrm{shift})$ powstaje w ten sposób przy użyciu odwzorowania $\pi_0 : X \to [0,1]^d$, czyli rzutowania na zerową współrzędną. Oznacza to, że godna uwagi jest przestrzeń funkcji ciągłych $C(X,[0,1]^d)$. Przy odpowiednich założeniach zamiast jawnie konstruować funkcję $f \in C(X,[0,1]^d)$, dla której odwzorowanie $I_f : (\mathbb{Z},X) \hookrightarrow (([0,1]^d)^{\mathbb{Z}}, \mathrm{shift})$ jest zanurzeniem, pokazuje się, że własność „$I_f : (\mathbb{Z},X) \hookrightarrow (([0,1]^d)^{\mathbb{Z}}, \mathrm{shift})$ jest zanurzeniem" jest **typowa**[7] w $C(X,[0,1]^d)$ (ale bez wskazywania konkretnego zanurzenia). Dla większej precyzji wprowadźmy następującą definicję: Niech $f \in C(X,[0,1]^d)$ i niech $K \subset (X\times X)\setminus \triangle$ będzie zbiorem zwartym, gdzie $\triangle = \{(x,x) | x \in X\}$ oznacza *przekątną* $X \times X$. Mówimy, że odwzorowanie I_f jest ***K*-zgodne**, jeśli dla

[6] Można pokazać, że przy tych założeniach $\mathrm{mdim}(\mathbb{Z},X) = 0$.

[7] Zbiór w przestrzeni topologicznej nazywany jest *typowym*, jeśli jego dopełnienie jest *zbiorem pierwszej kategorii*, tzn. sumą przeliczalnej rodziny zbiorów nigdziegęstych.

każdych $(x,y) \in K$, $I_f(x) \neq I_f(y)$, lub równoważne jeśli dla każdych $(x,y) \in K$ istnieje takie $n \in \mathbb{Z}$, że $f(T^n x) \neq f(T^n y)$. Określmy

$$D_K = \{f \in C(X,[0,1]^d) | I_f \text{ jest K} - \text{zgodne}\}$$

Nietrudno pokazać, że D_K jest zbiorem otwartym w $(C(X,[0,1]^d), ||\cdot||_\infty)$, gdzie $||\cdot||_\infty$ oznacza metrykę supremum, $||f-g||_\infty \triangleq sup_{x\in X}||f(x)-g(x)||_\infty$ ([HAB2, LEMAT A.2]). Przy odpowiednich założeniach o $(\mathbb{Z},X)$ można pokazać, że dla każdych $(x,y) \in (X\times X)\setminus\triangle$ istnieje zbiór otwarty $U \subset \overline{U} \subset (X\times X)\setminus\triangle$, taki że $(x,y) \in U$, a zbiór $D_{\overline{U}}$ jest gęsty[8] w $(C(X,[0,1]^d), ||\cdot||_\infty)$. Przestrzeń $X\times X$ spełnia drugi aksjomat przeliczalności, więc każda jej podprzestrzeń ma własność Lindelöfa, czyli z każdego pokrycia otwartego można wybrać podpokrycie przeliczalne. Dzięki temu można pokryć zbiór $(X\times X)\setminus\triangle$ przeliczalną rodziną zbiorów domkniętych $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \ldots$, dla których $D_{\overline{U}_m}$ jest zbiorem otwartym i gęstym $(C(X,[0,1]^d), ||\cdot||_\infty)$ dla wszystkich m. Na mocy twierdzenia Baire'a o kategorii ([Kec95, twierdzenie 8.4]) przestrzeń $(C(X,[0,1]^d), ||\cdot||_\infty)$ jest **przestrzenią Baire'a**, czyli taką przestrzenią topologiczną, w której dopełnienia zbiorów pierwszej kategorii są zbiorami gęstymi. Oznacza to, że zbiór $\bigcap_{m=1}^\infty D_{\overline{U}_m}$ jest gęsty w $(C(X,[0,1]^d), ||\cdot||_\infty)$. Każda funkcja $f \in \bigcap_{m=1}^\infty D_{\overline{U}_m}$ jest $\overline{U}_m$-zgodna dla wszystkich m jednocześnie, a więc daje zanurzenie $I_f : (\mathbb{Z},X) \hookrightarrow (([0,1]^d)^{\mathbb{Z}}, \text{shift})$.

1.7. **Dowód twierdzenia Jaworskiego.**

Aby lepiej wyjaśnić sposoby dowodzenia wyników na temat zanurzeń, omówimy w skrócie najprostszy przypadek: dowód twierdzenia Jaworskiego ([Jaw74], patrz też [HAB2, STWIERDZENIE 8.2]). Zgodnie z tym twierdzeniem jeśli układ $(\mathbb{Z},X)$ jest skończenie wymiarowy i nie ma punktów okresowych, można go zanurzyć w układzie $[0,1]^{\mathbb{Z}}$ z działaniem shiftowym. Zgodnie z wcześniejszymi uwagami wystarczy pokazać, że dla każdej pary różnych punktów $x_1, x_2 \in X$ istnieją domknięte otoczenia $A_i \ni x_i$, takie że zbiór

$$\{f \in C(X,[0,1]) | I_f(A_1) \cap I_f(A_2) = \emptyset\} \tag{1.2}$$

jest gęsty w przestrzeni $(C(X,[0,1]), ||\cdot||_\infty)$.

Ustalmy liczbę naturalną $N > 2\dim(X)$. Ponieważ X nie ma punktów okresowych, możemy znaleźć $j_1 < j_2 < \cdots < j_N$, takie że wśród $2N$ punktów

$$T^{j_1}x_1, \ldots, T^{j_N}x_1, T^{j_1}x_2, \ldots, T^{j_N}x_2$$

żadne dwa nie pokrywają się (jeśli $x_2 = T^m x_1$ dla pewnego m, możemy przyjąć $0, m+1, 2(m+1), \ldots, (N-1)(m+1)$; w przeciwnym razie przyjmujemy $0,1,2,\ldots,N-1$.) Istnieją otoczenia U_i punktów x_i, takie że zbiory $T^{j_n}U_i$ $(1 \leq n \leq N, i = 1,2)$ są parami rozłączne. Przejdźmy teraz do domkniętych otoczeń $A_i \subset U_i$ punktów x_i. Niech $\varphi : X \to [0,1]$ będzie taką funkcją ciągłą, dla której $\varphi = 1$ na sumie $2N$ zbiorów postaci $T^{j_n}A_i$, i która jest równa zero poza sumą zbiorów $T^{j_n}U_i$. Rozważmy dowolną funkcję $f \in C(X,[0,1])$ i $\delta > 0$. Warunek $N > 2\dim X$ implikuje, że *tyopwe* odwzorowania ciągłe z X w $[0,1]^N$ są *zanurzeniami topologicznymi* ([HW41, twierdzenie V.2]). Możemy zatem znaleźć zanurzenie $F : X \to [0,1]^N$, takie że odległość w ℓ^∞ między ciągami $F(x)$ i $(f(T^{j_n}x))_{1\leq n\leq N}$ jest mniejsza niż δ dla wszystkich $x \in X$.

Zdefiniujmy ciągłe zaburzenie g funkcji f następująco: jeśli $x \in T^{j_n}U_i$ dla pewnych n oraz i, to

$$g(x) = (1-\varphi(x))f(x) + \varphi(x)F(T^{-j_n}x)_n.$$

W przeciwnym razie niech $g(x) = f(x)$. W ten sposób $|g(x) - f(x)| < \delta$, a dla $x \in A_1 \cup A_2$

$$(g(T^{j_1}x), \ldots, g(T^{j_N}x)) = F(x).$$

Tym samym warunek $I(y_1) = I(y_2)$ dla $y_1 \in A_1$ i $y_2 \in A_2$, implikuje $F(y_1) = F(y_2)$, co jest niemożliwe, gdy F jest zanurzeniem. Stąd wniosek, że g ma żądaną własność $I_g(A_1) \cap I_g(A_2) = \emptyset$. Daje to gęstość w (1.2), co kończy dowód.

Powyższy dowód składa się z trzech istotnych kroków:

(1) Znalezienie dobrych fragmentów $T^{j_1}x_1, \ldots, T^{j_N}x_1$ i $T^{j_1}x_2, \ldots, T^{j_N}x_2$ orbit punktów x_1 i x_2.

[8] Wykazanie gęstości jest zazwyczaj wysoce nietrywialne i stanowi główną trudność w dowodzie.

(2) Znalezienie zanurzenia F przybliżającego $I_f|_{\{j_1,\dots,j_N\}}$ dzięki warunkowi $N > 2\dim X$.
(3) Zdefiniowanie zaburzenia g funkcji f przez "wpisanie F na dobrych fragmentach orbit".

Dowody twierdzeń w sekcji 1.5 składają się z podobnych trzech kroków, głównie w przypadku układów nieskończenie wymiarowych. Krok (3) nie wymaga istotnych zmian. W kroku (2) zastępujemy „zanurzenie" „ε-zanurzeniem", które jest przybliżoną wersją zanurzenia. Warunek $N > 2\dim(X)$ zastąpiony jest warunkiem dotyczącym średniego wymiaru.

Główny problem stanowi krok (1). *Musimy w sposób ciągły podzielić każdą orbitę na dobre fragmenty, dla których kroki (2) i (3) będą dobrze działać.* Wzorując się na przełomowej pracy [Lin99], jako główne narzędzie wykorzystujemy *własność markerów*, którą omówimy w następnej sekcji.

1.8. **Własność markerów.**

W tej sekcji opiszemy sposób dowodzenia stwierdzeń o uniwersalności (patrz sekcja 1.5) za pomocą *własności markerów*, który wprowadzono w pracy [HAB2]. Zacznijmy od definicji:

Definicja 1.11. ([HAB2, DEFINICJA 5.1]) Niech $k \in \mathbb{N}$ i niech $F \subset \mathbb{Z}^k$ będzie zbiorem skończonym. Podzbiór $S \subset X$ topologicznego układu dynamicznego $(\mathbb{Z}^k, X)$ nazywamy F**-markerem**, jeśli:

(1) $S \cap gS = \emptyset$ dla wszystkich $g \in F \setminus \{\mathrm{Id}\}$.
(2) Zbiory $\{gS\}_{g\in\mathbb{Z}^k}$ pokrywają X.

Układ $(\mathbb{Z}^k, X)$ ma **własność markerów**, jeśli dla każdego zbioru skończonego $F \subset \mathbb{Z}^k$ istnieje *otwarty* F-marker.

Markery od dawna pojawiają się w dynamice symbolicznej. Odpowiednia „własność (otwarto-domkniętych) markerów" została po raz pierwszy formalnie zdefiniowana przez Downarowicza [Dow06a, definicja 2]. Jest to definicja identyczna z definicją 1.11, z tą ważną różnicą, że wymaga, by markery były otwarto-domknięte. Warunek ten w praktyce ogranicza korzystanie z tej definicji do przypadku układów zerowymiarowych (do których należą układy symboliczne). Ważnym wynikiem jest lemat Kriegera o markerach ([Kri82, Lemma 2]). Ten używany bardzo często w dynamice symbolicznej wynik mówi, że rozszerzenie aperiodycznego, zerowymiarowego topologicznego układu dynamicznego ma własność markerów otwarto-domkniętych. Następujące twierdzenie, które można łatwo wyprowadzić z [Lin99, twierdzenie 5.1], umożliwia dowodzenie stwierdzeń o uniwersalności za pomocą własności markerów.

Twierdzenie 1.12. *([HAB5, TWIERDZENIE 6.1]) Załóżmy, że $(\mathbb{Z}, X)$ ma własność markerów. Jeśli $\mathrm{mdim}(\mathbb{Z}, X) < \frac{d}{36}$, to układ $(\mathbb{Z}, X)$ można zanurzyć w układzie $\left(\left([0,1]^d\right)^{\mathbb{Z}}, \mathrm{shift}\right)$.*

W dalszej części mówimy istotę dowodu tego twierdzenia, najpierw jednak zobaczmy, jak wynika z niego twierdzenie 1.8. Jasnym jest, że po wykazaniu, że klasa $\mathscr{C}$ topologicznych układów dynamicznych ma własność markerów, otrzymamy wynik dotyczących zanurzeń dla układów z tej klasy.

W [HAB2] uzyskano następujący wynik dzięki uogólnieniu twierdzenia o Bonattiego-Crovisiera o wieżach ([BC04, twierdzenie 3.1]) :

Twierdzenie 1.13. *([HAB2, TWIERDZENIE 6.1]) Niech $(\mathbb{Z}, X)$ będzie aperiodycznym, skończenie wymiarowym topologicznym układem dynamicznym. Wówczas $(\mathbb{Z}, X)$ ma własność markerów.*

Twierdzenie to znalazło później zastosowania w teorii klasyfikacji C*-algebr pojawiających się w związku z układami dynamicznymi ([Sza15, HWZ15]).

W [HAB5] udowodniono następujące:

Twierdzenie 1.14. *([HAB5, TWIERDZENIE 3.5]; Downarowicz i Gutman) Jeśli $(\mathbb{Z}, X)$ jest rozszerzeniem aperiodycznego topologicznego układu dynamicznego o co najwyżej przeliczalnej liczbie podukładów minimalnych, to $(\mathbb{Z}, X)$ ma własność markerów.*

Niech $\mathscr{M}$ oznacza rodzinę wszystkich podprzestrzeni minimalnych układu $(\mathbb{Z}, X)$. Mówimy, że $(\mathbb{Z}, X)$ ma **zwarty selektor podukładów minimalnych**, jeśli istnieje zbiór zwarty L, taki że dla każdego $M \in \mathscr{M}$, $|L \cap M| = 1$ i $L \subset \bigcup \mathscr{M}$.

Twierdzenie 1.15. *([HAB5, TWIERDZENIE 3.9]; Downarowicz) Jeśli* $(\mathbb{Z},X)$ *jest rozszerzeniem aperiodycznego topologicznego układu dynamicznego ze zwartym selektorem podukładów minimalnych, to* $(\mathbb{Z},X)$ *ma własność markerów.*

Trywialną konsekwencją własności markerów jest aperiodyczność. Zwróćmy uwagę na następujące pytanie postawione w [HAB2], które nadal jest otwarte:

Pytanie 1.16. *Czy każdy układ aperiodyczny* $(\mathbb{Z},X)$ *ma własność markerów?*

W celu omówienia dowodu twierdzenia 1.12 wprowadzimy w kolejnej sekcji mocną topologiczną własność Rochlina.

1.9. **Mocna topologiczna własność Rochlina.**

Klasyczny lemat Rochlina mówi, że dla każdego aperiodycznego[9], odwracalnego układu zachowującego miarę $(X,\mathscr{B},T,\mu)$ i dowolnych $\varepsilon > 0$ oraz $n \in \mathbb{N}$ można znaleźć zbiór $A \subset X$, taki że zbiory $A, TA, \ldots, T^{n-1}A$ są parami rozłączne i $\mu\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} T^k A\right) > 1-\varepsilon$. Łatwo wynika stąd, że dla każdego aperiodycznego, odwracalnego układu zachowującego miarę $(X,\mathscr{B},T,\mu)$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ można znaleźć odwzorowanie mierzalne $f : X \to \{0,1,\ldots,n-1\}$, takie że jeśli zdefiniujemy *zbiór wyjątkowy* $E_f = \{x \in X \mid f(Tx) \neq f(x)+1\}$, to $\mu(E) < \varepsilon$. W pracy [HAB2, SECTION 7] wprowadzono odpowiedni (mocny) topologiczny odpowiednik tej własności: Mówimy, że układ $(\mathbb{Z},X)$ ma **mocną topologiczną własność Rochlina**, jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje funkcja ciągła $f : X \to \mathbb{R}$, taka że jeśli zdefiniujemy *zbiór wyjątkowy* $E_f = \{x \in X \mid f(Tx) \neq f(x)+1\}$, to zbiory $T^{-i}(E_f)$, $i = 0,1,\ldots,n-1$ są parami rozłączne. Okazuje się, że własność ta jest równoważna własności markerów:

Twierdzenie 1.17. *([HAB2, TWIERDZENIE 7.3]) Topologiczny układ dynamiczny* $(\mathbb{Z},X)$ *ma mocną topologiczną własność Rochlina wtedy i tylko wtedy gdy ma własność markerów.*

Możemy teraz przedstawić główny krok w dowodzie twierdzenia 1.12. Odpowiada on krokowi (1) w sekcji 1.7, czyli metodzie podziału orbit elementów X opartej na pracy [Lin99]. Ustalmy liczbę całkowitą M (która może być dowolnie duża). Mocna topologiczna własność Rochlina umożliwia znalezienie funkcji ciągłej $n : X \to \mathbb{R}$, której wartość bezwzględna jest mniejsza od pewnego $N \in \mathbb{N}$ (z uwagi na zwartość X), taką że warunki $n(T^{i_1+1}x) \neq n(T^{i_1}x)+1$ i $n(T^{i_2+1}x) \neq n(T^{i_2}x)+1$ dla $i_1 \neq i_2$ implikują $|i_1 - i_2| \geq M$. Dla ustalonego $x \in X$ „zaznaczamy” na orbicie x elementy $T^i x$, dla których $n(T^{i+1}x) \neq n(T^i x)+1$. Daje to podział orbity x na segmenty o długości większej niż M, ale mniejszej niż $2N$. Zauważmy, że w ogólnym przypadku podział ten nie jest ciągły jako funkcja $x \in X$, jednak korzystając jednocześnie z podziałów indukowanych przez $\lceil n \rceil$ i $\lfloor n \rfloor$ z odpowiednimi wagami, można pokonać tę trudność (patrz [Lin99, równanie 5.3]) i dalej postępować zgodnie z krokami (2) i (3) sekcji 1.7.

1.10. **Średni wymiar i problem zanurzenia dla działań $\mathbb{Z}^k$.**

Kwestia uogólnienia wyników dotyczących zanurzeń z działań $\mathbb{Z}$ na działania $\mathbb{Z}^k$ $(k \geq 2)$ była jednym z otwartych pytań postawionych w [Lin99]. Lindenstrauss zwrócił nawet uwagę, że nie jest to kwestia „czysto technicznego” uogólnienia teorii działań $\mathbb{Z}$. Są co najmniej dwa powody, dla których warto zainteresować się takim uogólnieniem. Po pierwsze w teorii ergodycznej i w teorii układów dynamicznych tradycją jest rozważanie działań grup bardziej ogólnych niż $\mathbb{Z}$. Ważnym przykładem takiego podejścia jest praca [OW87], w której duża część teorii ergodycznej działań $\mathbb{Z}$ została rozszerzona na przypadek działań grup ze średnia. Po drugie niektóre z najbardziej naturalnych i interesujących przykładów układów z nietrywialnym średnim wymiarem pojawiają się w kontekście działań $\mathbb{Z}^k$. W istocie pojęcie średniego wymiaru zostało wprowadzone przez Gromowa ([Gro99]) w celu badania układów dynamicznych w analizie geometrycznej, i w większości rozważanych przez niego układach działająca grupa była bardziej skomplikowana niż $\mathbb{Z}$. Na przykład w [Gro99, rodziזał 4] zajmuje się on układem dynamicznym złożonym z zespolonych podrozmaitości $\mathbb{C}^n$. W takim przypadku działającymi grupami są $\mathbb{C}^n$ i jej krata $\mathbb{Z}^{2n}$, a samo działanie jest przesunięciem.

[9]Odwracalny układ zachowujący miarę $(X,\mathscr{B},T,\mu)$ nazywamy *aperiodycznym*, jeśli orbita prawie każdego punktu jest nieskończona.

We wspólnej pracy autora, Elona Lindenstraussa i Masaki Tsukamoto [HAB3] udowodniono następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.18. *([HAB3, TWIERDZENIE 1.5]) Niech $k,d \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że $(\mathbb{Z}^k, X)$ ma własność markerów. Jeśli* $\mathrm{mdim}(\mathbb{Z}^k, X) < \frac{d}{2^{k+1}}$*, to układ $(\mathbb{Z}^k, X)$ można zanurzyć w układzie $([0,1]^{2d})^{\mathbb{Z}^k}$.*

Z przyczyn technicznych przydatne jest zanurzanie w układzie $([0,1]^{2d})^{\mathbb{Z}^k}$, a nie $([0,1]^{d})^{\mathbb{Z}^k}$. Zauważmy też, że stała w warunku $\mathrm{mdim}(\mathbb{Z}^k, X) < \frac{d}{2^{k+1}}$ jest prawdopodobnie daleka od wartości optymalnej. Podejrzewamy, że układ aperiodyczny z działaniem $\mathbb{Z}^k$, taki że $\mathrm{mdim}(\mathbb{Z}^k, X) < \frac{d}{2}$, można zanurzyć w układzie $([0,1]^{d})^{\mathbb{Z}^k}$. Udało się to pokazać w szczególnym przypadku będącym uogólnieniem twierdzenia 1.3:

Twierdzenie 1.19. *([HAB3, TWIERDZENIE 1.6]) Załóżmy, że $(\mathbb{Z}^k, X)$ ma aperiodyczny faktor symboliczny. Jeśli* $\mathrm{mdim}(\mathbb{Z}^k, X) < \frac{d}{2}$ *, to układ $(\mathbb{Z}^k, X)$ można zanurzyć w układzie $([0,1]^{d})^{\mathbb{Z}^k}$.*

W następnej sekcji omówimy kluczowe pomysły służące do udowodnienia tych dwóch twierdzeń.

1.11. **Diagramy Woronoja.**

Ogólna strategie przebiega zgodnie z zarysem nakreślonym w sekcji 1.7. Główna trudność ponownie dotyczy kroku (1). Technika opisana w sekcji 1.9 raczej nie nadaje się do uogólnienia, więc potrzebny jest nowy pomysł. Pierwszym kluczowym narzędziem są *diagramy Woronoja*. Pomysł ich zastosowania w kontekście średniego wymiaru pojawił się po raz pierwszy w [Gut11], gdzie udowodniono pierwowzór twierdzenia 1.19. Niech $A \subset \mathbb{Z}^k$ będzie dyskretnym podzbiorem $\mathbb{R}^k$. Dla każdego $a \in A$ określmy $V(a) = \{x \in \mathbb{R}^k | d(x,a) \leq d(x,A)\}$. Można łatwo pokazać, że $V(a)$ jest wypukłą wielokomórką. Tesellacja $\mathscr{V} = \mathscr{V}(A) = \{V(a)\}_{a\in A}$ nazywana jest **diagramem Woronoja** w $\mathbb{R}^k$ indukowanym przez A. Niech $(\mathbb{Z}^k, X)$ będzie topologicznym układem dynamicznym. Rozważmy mały zbiór otwarty $U \subset X$. Dla każdego $x \in X$ rozważmy teraz zbiór

$$C(x) = \{n \in \mathbb{Z}^k | T^n x \in U\},$$

i niech

$$\mathbb{R}^k = \bigcup_{n \in C(x)} V(x,n), \quad V(x,n) = \{u \in \mathbb{R}^k | \forall m \in C(x) : |u-n| \leq |u-m|\},$$

będzie diagramem Woronoja związanym z $C(x)$. Próbujemy użyć odpowiedniej komórki $V(x,n)$ (a właściwie punktów kratowych ze zbioru $V(x,n) \cap \mathbb{Z}^k$) w roli, którą pełniły indeksy $\{j_1, \ldots, j_N\}$ w dowodzie twierdzenia Jaworskiego. Pomysł ten działa doskonale, jeśli $(\mathbb{Z}^k, X)$ ma aperiodyczny faktor symboliczny — jest to kluczowy element dowodu twierdzenia 1.19.

Niestety w ogólnym przypadku komórki $V(x,n)$ nie zależą w sposób ciągły od $x \in X$, przez co nie można bezpośrednio zastosować powyższego sposobu, by udowodnić twierdzenie 1.18. Potrzebny jest drugi pomysł: *dodanie jednego wymiaru*. Niech $\phi : U \to [0,1]$ będzie funkcją o nośniku będącym podzbiorem otwartego zbioru U zastosowanego wyżej i rozważmy zbiór

$$\{(n, 1/\phi(T^n x)) | n \in \mathbb{Z}^k : \phi(T^n x) \neq 0\}.$$

Jest to dyskretny podzbiór $\mathbb{R}^{k+1}$, a więc *przeszliśmy o jeden wymiar wyżej*. Niech $\mathbb{R}^{k+1} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^k} V(x,n)$ będzie odpowiednim diagramem Woronoja. Teraz dla odpowiednio dużej liczby H niech $W(x,n) = V(x,n) \cap (\mathbb{R}^k \times \{-H\})$. W ten sposób otrzymujemy rozkład

$$\mathbb{R}^k \times \{-H\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^k} W(x,n).$$

Ten rozkład *zależy* już w sposób ciągły od $x \in X$, więc możemy użyć $W(x,n)$ w roli indeksów $\{j_1, \ldots, j_N\}$ w twierdzeniu Jaworskiego, co pozwala zrealizować krok (1). W dowodzie twierdzenia 1.19 kroki (2) i (3) przebiegają podobnie jak w dowodzie opisanym pod koniec sekcji 1.7, natomiast w przypadku twierdzenia 1.18 sytuacja jest nieco bardziej złożona i przedstawimy ogólny szkic postępowania. Podobnie jak opisano w sekcji 1.6 musimy zaburzyć odwzorowanie $f = (f_1, f_2) : X \to [0,1]^d \times [0,1]^d$ mające składowe f_1 i f_2. Najpierw konstruujemy zaburzenie g_1 funkcji f_1, a następnie zaburzenie g_2 funkcji f_2.

Funkcje g_1 i g_2 odgrywają różne role. Niech $x \in X$. Próbujemy *zakodować* rozbicie $\mathbb{R}^k = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^k} W(x,n)$ za pomocą wartości $I_{g_1}(x) = (g_1(T^n x))_{n\in\mathbb{Z}^k}$. Jeśli wszystkie (niepuste) komórki $W(x,n)$ są odpowiednio duże, kodowanie można przeprowadzić prawie bez błędów. Niestety jednak niektóre komórki naszego rozbicia są zbyt małe i nie można ich zakodować za pomocą $I_{g_1}(x)$, co jest główną trudnością w tym dowodzie. Można pokazać, że łączna objętość takich nieodpowiednich komórek jest asymptotycznie zaniedbywalna, co jednak w tym przypadku nie wystarcza. W związku z tym rezygnujemy z próby zakodowania wszystkich informacji o rozbiciu $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^k} W(x,n)$. Zamiast tego konstruujemy *"pseudorozbicie"* $\mathbb{R}^k$ na podstawie wartości $I_{g_1}(x)$: pseudorozbicie $\mathscr{W}$ składa się z funkcji w ℓ^∞: $\mathscr{W}_n \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^k)$. Gdy zbiór $W(x,n)$ jest odpowiednio duży funkcja $\mathscr{W}_n$ jest w przybliżeniu równa funkcji charakterystycznej zbioru $W(x,n)\cap\mathbb{Z}^k$. Następnie konstruujemy zaburzenie $g_2(x)$ funkcji $f_2(x)$, korzystając z pseudorozbicia związanego z x. W ten sposób otrzymujemy zaburzenie $g = (g_1, g_2) : X \to [0,1]^d \times [0,1]^d$ funkcji f. Załóżmy teraz, że dla dwóch punktów x i y w X zachodzi $(I_{g_1}(x), I_{g_2}(x)) = (I_{g_1}(y), I_{g_2}(y))$. Pierwsze równanie $I_{g_1}(x) = I_{g_1}(y)$ oznacza równość pseudorozbić związanych z x i y, a więc $I_{g_2}(x)$ oraz $I_{g_2}(y)$ powstają z tego samego pseudorozbicia. Korzystając z tej dodatkowej informacji, wnioskujemy, że $d(x,y) < \varepsilon$ na podstawie równania $I_{g_2}(x) = I_{g_2}(y)$. Pełne szczegóły znajdują się w pracy [HAB3, SEKCJA 7].

1.12. **Twierdzenie Takensa.**

Problem zanurzeń w przypadku układów skończenie wymiarowych jest blisko związany ze znanym twierdzeniem Takensa ([Tak81, twierdzenie 1]): Niech M będzie zwartą rozmaitością o wymiarze d. Wśród par (h,T), gdzie $T : M \to M$ jest dyfeomorfizmem klasy C^2, a $h : M \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^2, typową własnością jest, że odwzorowanie obserwacyjne z opóźnieniem $(2d+1)$, czyli $h_0^{2d} : M \to \mathbb{R}^{2d+1}$, zadane wzorem

$$x \mapsto \big(h(x), h(Tx), \ldots, h(T^{2d}x)\big) \tag{1.3}$$

jest zanurzeniem, czyli zbiór par (h,T) w $C^2(M,\mathbb{R}) \times C^2(M,M)$, dla których (1.3) *nie jest* zanurzeniem, jest zbiorem pierwszej kategorii w topologii Whitneya w C^2.

Aby zilustrować znaczenie twierdzenia Takensa w fizyce doświadczalnej, załóżmy, że pewien układ fizyczny, np. doświadczenie laboratoryjne, jest modelowany jako *układ dynamiczny* $(\mathbb{Z}, X)$, gdzie $T : X \to X$ reprezentuje stan układu po upływie określonego (dyskretnego) czasu. Możliwe wyniki wykonywanych pomiarów są modelowane przez ograniczone funkcje o wartościach rzeczywistych $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots K$ nazywanych *obserwablami*. Załóżmy bez straty ogólności, że $K = 1$, i niech $f = f_1$.[10] Rzeczywiste pomiary są wykonywane w czasie skończonym w dyskretnych chwilach $t = 0, 1, \ldots, N$, zaczynając od skończonego zbioru warunków początkowych $\{x_j\}_{j=1}^L$. Pomiary można zatem modelować jako skończone zbiory wektorów $(f(T^k x_j))_{k=0}^N$, $j = 1, \ldots, L$. Przed fizykiem stoi problem *odtworzenia* polegający na scharakteryzowaniu $(\mathbb{Z}, X)$ na podstawie tych danych. W ogólności tak sformułowany problem ten nie jest rozwiązalny, ponieważ uzyskane dane nie wystarczają do odtworzenia $(\mathbb{Z}, X)$. W związku z tym czynimy nierealistyczne założenie, że fizyk ma dostęp do wartości $(f(T^k x))_{k=0}^N$, $x \in X$. Innymi słowy, zakładamy, że fizyk może mierzyć obserwable w skończonym czasie w dyskretnych chwilach, zaczynając od *każdego* możliwego warunku początkowego. Założenie to jest zupełnie nierealistyczne, ale umożliwia w pewnych warunkach rozwiązanie problemu odtworzenia i daje teoretyczne uzasadnienie rzeczywistych (przybliżonych) procedur stosowanych przez fizyków doświadczalnych w prawdziwych eksperymentach ([KY90, HGLS05, SM90]).

Dziesięć lat po publikowaniu twierdzenia Takensa Sauer, Yorke i Casdagli uogólnili je w pracy [SYC91]. Uogólnienie jest mocniejsze pod kilkoma względami. W nowym twierdzeniu układ dynamiczny jest ustalony, a zanurzenie uzyskiwane jest dzięki zaburzeniu samych obserwabli. Zwiększa to możliwości teoretycznych zastosowań twierdzenia, ale wymaga pewnych założeń co do wielkości zbioru punktów okresowych. Co więcej, autorzy zwracają uwagę na fakt, że w wielu układach fizycznych osoba prowadząca doświadczenie chce scharakteryzować skończenie wymiarowy, fraktalny (w szczególności nieróżniczkowalny) atraktor, do którego system zbiega niezależnie od warunków początkowych (omówienie takich układów można znaleźć w pracach [Hal88, Lad91, Tem97]). Najważniejszą kwestią jest fakt, że

[10] Podobną teorię można rozwinąć dla $K > 1$.

chociaż atraktor może mieć niski wymiar fraktalny, np. d, jest on zanurzony w przestrzeni fazowej na rozmaitości dużo wyższego wymiaru, np. $n >> d$. Ponieważ twierdzenie Takensa zakłada, że przestrzeń fazowa jest rozmaitością, daje ono znacznie zawyżoną liczbę wymaganych pomiarów $2n+1$ zamiast bardziej rozsądnie brzmiącej liczby $2d+1$. Istotnie, w pracy [SYC91] wykazano, że dla danego dyfeomorfizmu klasy C^1 $T : U \to U$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^k$ jest zbiorem otwartym, i danego zbioru zwartego $A \subset U$, którego *dolny wymiar pudełkowy* wynosi d, $\underline{\dim}_{box}(A) = d$, przy pewnych założeniach technicznych związanych ze zbiorem punktów o niskim okresie, powszechną[11] właściwością $h \in C^1(U,\mathbb{R})$ jest to, że odwzorowanie obserwacyjne z opóźnieniem $(2d+1)$, $h_0^{2d} : U \to \mathbb{R}^{2d+1}$, ograniczone do zbioru A jest zanurzeniem topologicznym.

W [HAB4] pokazujemy, że jeśli dopuścimy korzystanie z ciągłej (zwykle nieróżniczkowalnej) obserwabli, to w typowej sytuacji liczba pomiarów potrzebnych do odtworzenia oryginalnego układu dynamicznego jest jeszcze niższa niż wymieniona wcześniej. Można to osiągnąć dzięki zastosowaniu wymiaru pokryciowego Lebesgue'a zamiast wymiaru pudełkowego. Osłabiamy również założenie odwracalności, zastępując je bardziej realistycznym założeniem różnowartościowości (patrz dyskusja w [Tem97, III.6.2]):

Twierdzenie 1.20. *([HAB4, TWIERDZENIE 1.1]) Niech X będzie zwartą przestrzenią metryczną i niech $T : X \to X$ będzie różnowartościowym odwzorowaniem ciągłym. Załóżmy, że $\dim(X) = d$ i $\dim(P_n) < \frac{1}{2}n$ dla wszystkich $n \le 2d$, gdzie $\dim(\cdot)$ oznacza wymiar pokryciowy Lebesgue'a, a P_n oznacza zbiór punktów okresowych o okresie $\le n$. Wówczas typową właściwością jest, że odwzorowanie obserwacyjne z opóźnieniem $(2d+1)$, $h_0^{2d} : X \to [0,1]^{2d+1}$, zadane wzorem*

$$x \mapsto \big(h(x), h(Tx), \dots, h(T^{2d}x)\big) \tag{1.4}$$

jest zanurzeniem, tzn. zbiór tych funkcji w $C(X,[0,1])$, dla których (1.4) nie jest zanurzeniem, jest zbiorem pierwszej kategorii w topologii supremum.

Wymiar pokryciowy Lebesgue'a zwartej przestrzeni metrycznej nigdy nie przekracza dolnego wymiaru pudełkowego (patrz [Rob11, równanie 9.1]) i nietrudno wskazać przykłady zwartych przestrzeni metrycznych, dla których wymiar pokryciowy jest ostro mniejszy od (dolnego) wymiaru pudełkowego, np. jeśli C jest zbiorem Cantora, to wymiar pudełkowy zbioru $C^{\mathbb{N}}$ jest nieskończony, a wymiar pokryciowy wynosi zero. Z teoretycznego punktu widzenia możemy zatem odtwarzać (zwykle za pomocą nieróżniczkowalnej obserwabli) układy dynamiczne, dysponując mniejszą liczbą pomiarów niż wskazywały na to wcześniejsze wyniki. Co więcej, można korzystać z tego twierdzenia, gdy celem eksperymentu jest obliczenie niezmiennika topologicznego, np. *entropii topologicznej.*

1.13. **Równania Naviera-Stokesa w dwóch wymiarach dla lepkiego płynu nieściśliwego.**

Twierdzenie 1.9 jest blisko związane z sytuacją, która pojawia się w badaniu układów dynamicznych pochodzących z zagadnień fizycznych — istnieniem skończenie wymiarowego atraktora globalnego ([Hal88, Lad91, Tem97]). W pracy [HAB5] udowodniono twierdzenie o zanurzaniu dla modelu równań Naviera-Stokesa dla dwuwymiarowego przepływu lepkiego płynu nieściśliwego [Rob11, Rob13] zadanego równaniem ewolucji[12] w przestrzeni Hilberta H:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + \nu A u(t) + B(u(t), u(t)) = f, \text{ dla } t > 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

gdzie A jest pewnym operatorem liniowym, B jest pewną formą dwuliniową, $\nu > 0$ jest stałą, a $f \in H$. Można pokazać, że dla danego $u_0 \in H$ istnieje jedyne rozwiązanie $u = u_{u_0}(t) \in C^0([0,\infty), H)$. Definiujemy **półgrupę operatorów rozwiązań** (zwaną też *monoidem transformacji*), $\mathbb{S} = \{S(t)\}_{t \ge 0}$ jako $S(t) : H \to H$ dla $t \ge 0$ wzorem:

[11] Jest to inne pojęcie niż typowość w pracy [SYC91].

[12] Wyprowadzenie tego równania znajduje się w [Rob11, sekcja 10.4]

$$S(t)u_0 = u_{u_0}(t)$$

Jedną z ważnych własności $\mathbb{S}$ jest istnienie skończenie wymiarowego atraktora globalnego zgodnie z poniższą definicją:

Definicja 1.21. $A \subset H$ nazywamy **atraktorem globalnym** dla $\mathbb{S}$, jeśli:

(1) A jest zbiorem zwartym.
(2) Dla każdego $t \geq 0$, $S(t)(A) = A$
(3) A przyciąga zbiory ograniczone, tzn. dla każdego ograniczonego zbioru $B \subset H$ zachodzi $\lim_{r\to\infty} \operatorname{dist}(S(r)(B), A) = 0$, gdzie $\operatorname{dist}(C,D) = \sup_{c\in C} \inf_{d\in D} \|c-d\|$ jest semimetryką Hausdorffa.

Zauważmy, że jeśli istnieje atraktor globalny, to jest on jedyny. W pracy [Rob11, sekcja 11.4] dowodzi się istnienia atraktora globalnego przez wykazanie w pierwszej kolejności istnienia *zwartego* zbioru pochłaniającego dla $\mathbb{S}$ zgodnie z poniższą definicją:

Definicja 1.22. Zbiór X nazywamy **pochłaniającym** dla $\mathbb{S}$, jeśli dla każdego zwartego zbioru $B \subset E$

$$\forall t \geq t_B \; S(t)B \subset X \tag{1.6}$$

Dowodzi się też, że jeśli $B = \overline{B}_M(0)$ (kula domknięta o środku w zerze i promieniu M), to wystarczy przyjąć $t_B = \max\{0, -\log \frac{\|f\|^2}{M^2}\} + 1$, aby zagwarantować własność (1.6). Oznacza to, że w praktyce (w rzeczywistym doświadczeniu) można zagwarantować, że po pewnym obliczalnym czasie układ znajdzie się w pochłaniającym zbiorze zwartym.

W pracy [HAB5] pokazano, że wersję potoku $\mathbb{S}$ z czasem dyskretnym ograniczoną do zbioru pochłaniającego można zanurzyć w przesunięciu na kostce, przy założeniu pewnych warunków dotyczących punktów okresowych.

Twierdzenie 1.23. *([HAB5, TWIERDZENIE 8.10]) Niech $\mathbb{S}$ będzie półgrupą operatorów rozwiązań związaną z równaniem (1.5) ze zwartym zbiorem pochłaniającym X i skończenie wymiarowym atraktorem globalnym A. Niech $t > 0$ i niech $T = S(t)$[13]. Jeśli perdim$(A,T) < \frac{d}{2}$ dla pewnego $d \in \mathbb{N}$, to rodzina funkcji ciągłych $f : X \to [0,1]^d$, dla których $I_f : (X,T) \hookrightarrow (([0,1]^d)^{\mathbb{N}}, \mathbb{N}-\text{shift})$ nie jest zanurzeniem, jest zbiorem pierwszej kategorii w $C(X,[0,1]^d)$.*

1.14. **Własność małych brzegów.**

Własność małych brzegów (ang. small boundary property, SBP) pojawiła się w pracy [LW00, definicja 5.2]. Niech $(\mathbb{Z}^k, X)$ będzie topologicznym układem dynamicznym. W [SW91] zbiór $E \subset X$ nazywany jest **małym**, jeśli jego **pojemność orbitalna** $\operatorname{ocap}(E)$ wynosi zero, gdzie

$$\operatorname{ocap}(E) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^k} \sup_{x\in X} \sum_{n\in[N]^k} 1_E(T^n x)$$

We wzorze tym 1_E oznacza funkcję charakterystyczną zbioru E i można pokazać, że granica istnieje. W przypadku zbiorów domkniętych własność ta ma prostą interpretację: zbiór domknięty $E \subset X$ jest mały wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej miary $\mathbb{Z}^k$-niezmienniczej μ na X mamy $\mu(E) = 0$. Jeśli w X istnieje baza topologii złożona ze zbiorów otwartych o małych brzegach, mówi się, że $(X, \mathbb{Z}^k)$ ma **własność małych brzegów (własność SBP)**. Z definicji przestrzeń zerowymiarowa ma bazę złożoną ze zbiorów o pustych brzegach, można zatem zinterpretować własność małych brzegów jako dynamiczny odpowiednik zerowymiarowości[14]. Własność małych brzegów znalazła zastosowania w teorii ergodycznej i dynamice topologicznej (patrz np. [Dow06b, Dow08, QS16]), a zwłaszcza w teorii rozszerzeń symbolicznych omówionej w sekcji 2.5. W [LW00] wykazano, że układ o własności małych brzegów ma średni wymiar zero, a w [Lin99] Lindenstrauss udowodnił częściowy wynik odwrotny: układ dynamiczny z działaniem $\mathbb{Z}$, który ma średni wymiar zero oraz aperiodyczny faktor minimalny, ma własnosć małych brzegów.

[13] Zgodnie z [Rob13, sekcja 2.5] T jest odwzorowaniem różnowartościowym.

[14] Relacja z innym odpowiednikiem, czyli zerowym średnim wymiarem, omówiona jest niżej.

Po uzyskaniu kilku wyników częściowych ([Gut11, twierdzenie 1.11.1], [HAB5, TWIERDZENIE A.3]) udowodniono w [HAB3] następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.24. *([HAB3, WNIOSEK 5.4]) Niech $k \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że ukłąd $(\mathbb{Z}^k, X)$ ma własność markerów*[15]*. Wówczas* $\mathrm{mdim}(\mathbb{Z}, X) = 0$ *wtedy i tylko wtedy gdy $(\mathbb{Z}, X)$ ma własność małych brzegów.*

1.15. **Granice wsteczne układów o skończonej entropii.**

Interesującym pytaniem jest, kiedy można aproksymować układ dynamiczny z dowolną dokładnością za pomocą układów o skończonej entropii topologicznej. Ściślej mówiąc: kiedy topologiczny układ dynamiczny jest granicą wsteczną ciągu układów o skończonej entropii topologicznej? Zauważmy, że granica wsteczna ciągu układów o skończonej entropii ma zerowy średni wymiar ([Lin99, stwierdzenie 6.11]). We wspólnej pracy z Lindenstraussem i Tsukamoto [HAB3] udowodniono następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.25. *([HAB3, TWIERDZENIE 1.3]) Załóżmy, że układ $(\mathbb{Z}^k, X)$ ma własność markerów. Wówczas* $\mathrm{mdim}(\mathbb{Z}^k, X) = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy układ X jest izomorficzny z granicą wsteczną ciągu układów o skończonej entropii topologicznej.*

Twierdzenie to zostało wcześniej ([Lin99, stwierdzenie 6.14]) udowodnione w wersji dla układów z działaniem $\mathbb{Z}$ mających aperiodyczny faktor minimalny. Twierdzenie 1.25 wynika z twierdzenia 1.24 oraz następującego twierdzenia udowodnionego przez Lindenstraussa w [Lin95, twierdzenie 4.6] w oparciu o [SW91]:

Twierdzenie 1.26. *Załóżmy, że układ $(\mathbb{Z}^k, X)$ ma własność małych brzegów. Wówczas dla każdego $\varepsilon > 0$ i każdej pary różnych punktów $x, y \in X$ istnieje odwzorowanie faktorujące $\pi : (\mathbb{Z}^k, X) \to (\mathbb{Z}^k, Y)$, takie że $\pi(x) \neq \pi(y)$ i $h_{\mathrm{top}}(Y) < \varepsilon$.*

W [HAB3] postawiono następującą hipotezę:

Hipoteza 1.27. *(Gutman, Lindenstrauss i Tsukamoto) Niech Γ będzie dyskretną grupą ze średnią (na przykład $\Gamma = \mathbb{Z}^k$). Układ (Γ, X) z działaniem Γ jest granicą wsteczną ciągu układów o skończonej entropii wtedy i tylko wtedy, gdy jego średni wymiar wynosi zero.*

1.16. **Metryczny średni wymiar.**

Pojęcie metrycznego średniego wymiaru zostało wprowadzone przez Lindenstraussa i Weissa w [LW00] jako dynamiczny odpowiednik wymiaru pudełkowego w geometrii fraktalnej ([Fal04]). Można go interpretować jako miarę wykładniczego wzrostu entropii topologicznej wraz ze wzrostem rozdzielczości. Przedstawimy definicję dla topologicznego układu dynamicznego $(\mathbb{Z}^k, X)$ z metryką d. Niech $\mathrm{mesh}(\alpha, d)$ oznacza supremum wielkości $\mathrm{diam}\, U$ dla wszystkich $U \in \alpha$. Dla $\varepsilon > 0$ określmy $A(X, \varepsilon, d)$ jako minimalną liczność pokrycia otwartego α przestrzeni X o własności $\mathrm{mesh}(\alpha, d) < \varepsilon$. Nietrudno wykazać że istnienie następującej granicy (rzypomnijmy o równaniu (1.1)):

$$S(X, \varepsilon, d) \triangleq \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^k} \log A(X, \varepsilon, d_{[N]^k}) = \inf_{N \geq 1} \frac{1}{N^k} \log A(X, \varepsilon, d_{[N]^k}).$$

Entropia topologiczna $h_{\mathrm{top}}(X)$ jest granicą $S(X, \varepsilon, d)$, gdy $\varepsilon \to 0$. W odróżnieniu od $S(X, \varepsilon, d)$, granica ta nie zależy od wyboru metryki d. Gdy $h_{\mathrm{top}}(X) = \infty$, interesuje nas tempo wzrostu, i jak wspomniano wcześniej, jest to jedna z motywacji do wprowadzenia **metrycznego średniego wymiaru** $\mathrm{mmdim}(\mathbb{Z}^k, X, d)$:

$$\mathrm{mmdim}(\mathbb{Z}^k, X, d) = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{S(X, \varepsilon, d)}{|\log \varepsilon|}.$$

Lindenstrauss i Weiss udowodnili, że $\mathrm{mmdim}(\mathbb{Z}^k, X, d) \geq \mathrm{mdim}(\mathbb{Z}^k, X)$ dla każdej zgodnej metryki d ([LW00, twierdzenie 4.2]). W [Lin99, twierdzenie 4.3] Lindenstrauss udowodnił, że jeśli układ z działaniem $\mathbb{Z}$ ma aperiodyczny faktor minimalny, to istnieje zgodna metryka d, dla której $\mathrm{mmdim}(\mathbb{Z}, X, d) = \mathrm{mdim}(\mathbb{Z}, X)$. Uogólnienie tego faktu znalazło się we wspólnej pracy z Lindenstraussem i Tsukamoto [HAB3]:

[15] Wyniki sekcji 1.8 dotyczące klas układów mających własność markerów można uogólnić na przypadek $\mathbb{Z}^k$.

Twierdzenie 1.28. *([HAB3, TWIERDZENIE 1.4]) Niech $k \in \mathbb{N}$. Jeśli układ $(\mathbb{Z}^k, X)$ ma własność markerów, to istnieje zgodna z topologią metryka d na X, taka że*

$$\mathrm{mmdim}(\mathbb{Z}^k, X, d) = \mathrm{mdim}(\mathbb{Z}^k, X).$$

2. INNE WYNIKI

2.1. **Uniwersalne przestrzenie minimalne.**

Przy danej grupie topologicznej G naturalnym przedmiotem zainteresowania jest opis wszystkich minimalnych przestrzeni z działaniem G, z dokładnością do izomorfizmu. Opisu takiego dostarcza następująca konstrukcja: Można pokazać, że istnieje minimalna przestrzeń z U_G z działaniem G o tej uniwersalnej właściwości, że każda przestrzeń minimalna X z działaniem G jest faktorem U_G. Każda taka przestrzeń z działaniem G jest nazywana **uniwersalną G-przestrzenią minimalną**, można jednak pokazać, że jest ona jedyna z dokładnością do izomorfizmu[16]. Istnienie uniwersalnej G-przestrzeni minimalnej nie jest trudne do wykazania, trudności nastręcza natomiast dowód jej jedyności.

Hanfeng Li oraz autor w [GL13] dali nowy dowód jedyności uniwersalnej przestrzeni minimalnej, który jest znacznie krótszy od wszystkich wcześniej znanych dowodów ([Ell69, Aus88, Usp00]).

Zwarta, zerowymiarowa przestrzeń topologiczna Hausdorffa X nazywana jest **h-jednorodną**, jeśli każdy niepusty, otwarto-domknięty podzbiór X jest homeomorficzny z całą przestrzenią X. Rodzina $C \subset 2^X$, złożona z niepustych otwarto-domkniętych podzbiorów X jest **łańcuchem** w 2^X, jeśli dla każdych zbiorów $E, F \in C$ albo $E \subset F$, albo $F \subset E$. Łańcuch nazywamy **maksymalnym**, jeśli jest maksymalny ze względu na relację inkluzji.

We wspólnej pracy z Eli Glasnerem [GG12] pokazano, że uniwersalną przestrzenią minimalną $U_{\mathrm{Homeo}(X)}$ grupy topologicznej Homeo(X) z topologią zwarto-otwartą, gdy X jest h-jednorodną, zerowymiarową, zwartą przestrzenią Hausdorffa, jest $\Phi \subset 2^{2^X}$, przestrzeń łańcuchów maksymalnych w 2^X, z topologią Vietorisa. Przykładami takich przestrzeni X są zbiór Cantora (ten wynik był już podany w pracy [GW03]), uogólniony zbiór Cantora $X = \{0,1\}^\kappa$ dla nieprzeliczalnych liczb kardynalnych κ oraz *korona* lub *reszta* ω, $X = \beta\omega \setminus \omega$, gdzie $\beta\omega$ oznacza uzwarcenie Čecha-Stone'a zbioru liczb naturalnych. Uzupełnieniem tego wyniku była inna wspólna praca z Eli Glasnerem [GG13], w której uzyskano kompletną listę minimalnych podukładów zwartego układu dynamicznego $(\mathrm{Homeo}(X), 2^{2^X})$

We wspólnej pracy z Lionelem Nguyenem Van Thé [GNVT15] wprowadzono i badano własność *względnej ekstremalnej średniowalności* i podano nowe warunki umożliwiające scharakteryzowanie uniwersalnych przestrzeni minimalnych grup automorfizmów struktur Fraïsségo, w ramach teorii zapoczątkowanej przełomowym artykułem [KPT05].

2.2. **Różne wyniki z teorii ergodycznej.**

We wspólnych pracach z Lewisem Bowenem [BG14, BG13] uogólniono klasyczne *twierdzenie Juźwińskiego o dodawaniu* ([Juz65]) na przypadek działań skończenie generowanych grup wolnych na produktach ze zwartymi, całkowicie niespójnymi grupami lub zwartymi grupami Liego. Rozszerzono też klasyczny *wzór Abramowa-Rochlina* ([AR62]) na przypadek działań skończenie generowanych grup wolnych i poprawiono błędy we wcześniejszym artykule Lewisa Bowena ([Bow10]).

We wspólnej pracy z Tomaszem Downarowiczem i Dawidem Huczkiem [DGH14] wykazano, że funkcja rangi na sympleksie miar niezmienniczych topologicznego układu dynamicznego z działaniem $\mathbb{Z}$ (zgodnie z oryginalną definicją w [ORW82]) należy do klasy Younga LU, czyli jest granicą rosnącego ciągu funkcji górnie półciągłych.

2.3. **Teoria nilprzestrzeni.**

Nilrozmaitością stopnia k, $X = G/\Gamma$, nazywamy przestrzeń ilorazową groupy Liego L (nilpotentnej stopnia k) względem dyskretnej, kozwartej podgrupy $\Gamma \subset L$. *Nilprzestrzenią* nazywamy zwartą przestrzeń X wraz z domkniętymi rodzinami *kostek* $C^n(X) \subseteq X^{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$ spełniającymi pewne naturalne

[16] Zauważmy, że z [KPT05, dodatek 2] wynika, że przestrzeń U_G nie jest metryzowalna, jeśli G jest grupą lokalnie zwartą, ale nie zwartą.

aksjomaty. Pojęcie to zostało wprowadzone przez Antolína Camarenę i Szegedy'ego w [ACS12] jako pewne uogólnienie *struktur równoległościanowych* Hosta i Kry ([HK08]). Stanowi ono podstawę podejścia Szegedy'ego [Sze12] do udowodnienia twierdzenia odwrotnego do norm Gowersa (inne podejście zastosowali Green, Tao i Ziegler w [GTZ12]), które jest kluczowym składnikiem w dowodzie ważnych wyników [GT10] na temat rozwiązań równań liniowych w zbiorze liczb pierwszych. W serii wspólnych prac z Freddiem Mannersem i Péterem Varjú [GMV16a, GMV16b, GMV16c], rozszerzono teorię strukturalną nilprzestrzeni otrzymaną w [ACS12], i przedstawiono nowe dowody znanych wyników.

Pierwszy główny wynik mówi, że przy technicznym założeniu, że $C^n(X)$ jest przestrzenią spójną dla wszystkich n, nilprzestrzeń jest izomorficzna (w mocnym sensie) z granicą wsteczną ciągu nilrozmaitości. Jest o bezpośrednie i niewielkie uogólnienie głównego wyniku Antolína Camareny i Szegedy'ego.

Nilukładem stopnia k nazywamy topologiczny układ dynamiczny (G,X), gdzie $X = G/\Gamma$ jest nilrozmaitością stopnia k, a G działa na X przez ciągły homomorfizm grup $\phi : G \to L$. Układ (G,X) jest nazywany *pronilukładem* stopnia k, jeśli jest granicą wsteczną ciągu nilukładów stopnia k. Faktor $(G,X) \to (G,Y)$ nazywany jest *pronilfaktorem* stopnia k, jeśli (G,Y) jest pronilukładem stopnia k. Jest też nazywany *maksymalnym pronilfaktorem* stopnia k, jeśli każdy iny pronilfaktor stopnia k układu (G,X) można zrealizować z pośrednim przejściem przez (G,Y). Drugi główny wynik [GMV16a, GMV16b, GMV16c] mówi, że jeśli G jest grupą (i spełnione są pewne bardzo łagodne warunki topologiczne), a (G,X) jest minimalnym układem dynamicznym, to maksymalny pronilfaktor stopnia k układu X jest zadany przez jawną relację równoważności, którą definiujemy. Jest to uogólnienie przypadku $G = \mathbb{Z}$, dla którego wynik ten jest znanym twierdzeniem Hosta, Kry i Maassa [HKM10], aczkolwiek również dla tego przypadku nasz dowód istotnie różni się od oryginalnego.

2.4. **Wyniki składające się na rozprawę doktorską.**

Rozprarwa doktorska zatytułowana „Universals and Invariants in Dynamics" („Własności uniwersalne i niezmienniki w dynamice") została napsiana pod kierunkiem prof Benjamina Weissa na uniwersytecie hebrajskim w Jerozolimie i obroniona w 2009 r. Praca składała się z dwóch artykułów ([Gut08, GH08]) i jednego preprintu przyjętego do druku i opublikowanego już po obronie pracy ([Gut11]).

Głównym wynikiem pracy [Gut08] było ulepszenie wyniku Uspieńskiego z pracy [Usp00]. Topologiczny układ dynamiczny (G,X) nazywany jest k-**tranzytywnym**, jeśli dla każdych dwóch k-krotek $(a_1,\ldots,a_k)$ i $(b_1,\ldots,b_k)$ różnych punktów w X istnieje $g \in G$ o własności $g(a_i) = b_i$ dla $i = 1,\ldots,k$. W [Gut08] pokazano, że jeśli X jest domkniętą rozmaitością o wymiarze 2 lub wyższym bądź kostką Hilberta, działanie grupy $\mathrm{Homeo}(X)$ na przestrzeni $M \subset 2^{2^X}$ złożonej z maksymalnych łańcuchów kontinuów[17] jest minimalne, ale nie jest 1-tranzytywne. Implikuje to, że działanie $\mathrm{Homeo}(X)$ na $U_{\mathrm{Homeo}(X)}$, uniwersalnej przestrzeni minimalnej dla $\mathrm{Homeo}(X)$, nie jest 1-tranzytywne. Uspieński pokazał wcześniej, że nie jest ono 3-tranzytywne.

Funkcja J zdefiniowana na rodzinie $\mathscr{C}$ procesów stacjonarnych nazywana jest **skończenie obserwowalną**, jeśli istnieje ciąg funkcji s_n, taki że $s_n(x_1,\ldots,x_n) \to J(\mathscr{X})$ według prawdopodobieństwa dla każdego procesu $\mathscr{X} = (x_n) \in \mathscr{C}$. Ornstein i Weiss udowodnili zaskakujący wynik mówiący, że jeśli $\mathscr{C}$ jest klasą aperiodycznych, ergodycznych procesów stacjonarnych mających skończenie wiele wartości, to jedynym skończenie obserwowalnym niezmiennikiem izomorfizmu zdefiniowanym na $\mathscr{C}$ jest entropia ([OW07]). We wspólnej pracy z Michalem Hochmanem [GH08] wykazano, że jeśli $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ jest niezwiększającym entropii rozszerzeniem układu ergodycznego o skończonej entropii, a $\mathscr{C}$ jest rodziną procesów pochodzących od rozbić generujących $\mathscr{X}$ i $\mathscr{Y}$, to każda skończenie obserwowalna funkcja na $\mathscr{C}$ jest stała. Wynik ten implikuje przytoczone wyżej twierdzenie Ornsteina i Weissa, a ponadto można go rozszerzyć na wiele innych rodzin procesów: wynika z niego na przykład, że nie istnieją nietrywialne, skończenie obserwowalne niezmienniki izomorfizmu dla procesów pochodzących od klasy układów Kroneckera, układów łagodnie mieszających o entropii zero lub układów mocno mieszających o entropii zero[18].

---

[17] *Kontinuum* to niepusta, zwarta i spójna przestrzeń metryczna.

[18] Twierdzenie z [GH08] implikuje również ten sam wynik (udowodniony już w ([OW07]) dla klasy układów słabo mieszających o entropii zero.

Wyniki pracy [Gut11] są ściśle związane z tematyką niniejszego autoreferatu. Pierwszy główny wynik jest pierwowzorem twierdzeń 1.18 i 1.24: Jeśli układ $(\mathbb{Z}^k, X)$ ma aperiodyczny faktor zerowymiarowy, można go zanurzyć w układzie $([0,1]^d)^{\mathbb{Z}^k}$, gdzie $d = \lfloor C(k)\,\mathrm{mdim}(X, \mathbb{Z}^k)\rfloor + 1$ dla pewnej uniwersalnej stałej $C(k)$, a ponadto przy tych samych założeniach jeśli $\mathrm{mdim}(\mathbb{Z}^k, X) = 0$, to $(\mathbb{Z}^k, X)$ ma własność małych brzegów.

Drugi główny wynik, uogólnienie twierdzenia Boyle'a-Downarowicza o entropii rozszerzeń symbolicznych na przypadek działań $\mathbb{Z}^k$, omówiono w następnej sekcji.

2.5. **Twierdzenie o entropii rozszerzeń symbolicznych dla działań $\mathbb{Z}^k$.**

Większość informacji jest współcześnie przechowywanych w postaci cyfrowej, naturalne jest więc pytanie o możliwość aproksymowania ogólnych układów dynamicznych układami symbolicznymi. **Układem symbolicznym z działaniem** $\mathbb{Z}^k-$ nazywamy podukład ukłądu shiftowego $(\{1,\dots,\ell\}^{\mathbb{Z}^k}, \mathrm{shift})$ nad pewnym *skończonym* alfabetem $\mathscr{A} = \{1,\dots,\ell\}$. Zwróćmy uwagę, że każdy układ symboliczny jest ekspansywny[19], zerowymiarowy i ma skończoną entropię, co oznacza, że większości topologicznych układów dynamicznych nie można zanurzyć w układach symbolicznych. Interesujące i nietrywialne jest jednak pytanie o to, które układy o skończonej entropii mają rozszerzenia symboliczne, a w szczególności o to, które układy mają rozszerzenia symboliczne niezwiększające entropii topologicznej. Skończona entropia jest koniecznym warunkiem istnienia rozszerzenia symbolicznego, nie jest to jednak warunek wystarczający ([BFF02, sekcja 3]). Głębszym pytaniem jest ustalenie infimum entropii topologicznej rozszerzeń symbolicznych układu, który ma co najmniej jedno takie rozszerzenie. Znany jest wynik, że każde odwzorowanie klasy C^∞ na zwartej rozmaitości Riemannowskiej ma rozszerzenie symboliczne niezwiększające entropii (wynika to z [Buz97, BFF02]). Teoria rozwinęła się, gdy w pracy [BD04] Boyle i Downarowicz wprowadzili pojęcie *struktury entropijinej* i udowodnili *twierdzenie o entropii rozszerzeń symbolicznych* dla działań $\mathbb{Z}$. W [Dow05] Downarowicz zmienił definicję struktury entropijnej, aby uczynić ją niezmiennikiem topologicznym. W [Gut11, Section 5] uogólniono tę nową definicję struktury entropijnej i udowodniono twierdzenie o rozszerzeniach symbolicznych na przypadek działań $\mathbb{Z}^k$. Aby sformułować twierdzenie, wprowadźmy następujące definicje:

Niech $\mathscr{S}$ będzie rodziną rozszerzeń symbolicznych $(\mathbb{Z}^k, Y) \to (\mathbb{Z}^k, X)$. **Entropia rozszerzeń symbolicznych** zadana jest wzorem

$$\mathbf{h}_{se} = \mathbf{h}_{se}(\mathbb{Z}^k, X) = \inf_{(\mathbb{Z}^k, Y)\in\mathscr{S}} \mathbf{h}_{top}(\mathbb{Z}^k, Y)$$

Niech f będzie funkcją ograniczoną. Podobnie jak w [Dow05, sekcja 2.1] zdefiniujmy **otoczkę górnie półciągłą** f:

$$\tilde{f}(x) = \max\{f(x), \limsup_{x'\to x} f(x')\}.$$

Określmy teraz **defekt górnej półciągłości**:

$$\dddot{f} = \tilde{f} - f.$$

Niech $\mathscr{P}_{\mathbb{Z}^k}(X)$ oznacza zbiór miar niezmienniczych układu $(\mathbb{Z}^k, X)$. **Strukturą entropijną**[20] układu $(X, \mathbb{Z}^k)$ o skończonej entropii nazywamy (rosnący) ciąg funkcji entropii $\mathscr{H} = (h_k : \mathscr{P}_{\mathbb{Z}^k}(X) \to \mathbb{R}_{\geq 0})$ względem rozdrabniającego ciągu rozbić X mających małe brzegi (patrz sekcja 1.14). Jeśli nie można znaleźć takiego ciągu, korzysta się z rozdrabniającego ciągu rozbić $X \times Y$ mających małe brzegi, dla pewnego (ustalonego) aperiodycznego układu minimalnego $(\mathbb{Z}^k, Y)$ o zerowej entropii. Istnienie takiego ciągu jest zagwarantowane dzięki twierdzeniu 1.24 (oraz [Gut11, twierdzenie 1.11.1]). Zauważmy, że zawsze $\lim_{k\to\infty} h_k(\mu) = h(\mu)$, gdzie $h(\mu)$ jest entropią Kołmogorowa–Sinaja miary μ. Funkcję E :

[19]Topologiczny układ dynamiczny $(\mathbb{Z}^k, X)$ ze zgodną metryką d nazywamy *ekspansywnym*, jeśli istnieje stała $\varepsilon > 0$, taka że dla każdej pary punktów $x \neq y$ istnieje element $g \in \mathbb{Z}^k$, taki że $d(gx, gy) \geq \varepsilon$. Można pokazać, że definicja ta nie zależy od metryki.

[20]Dla większej przejrzystości korzystamy tu z prostszej definicji struktury entropijnej podanej w [BD04]. Wyniki pozostają prawdziwe przy zastosowaniu bardziej skomplikowanej wersji struktury entropijnej zdefiniowanej w [Dow05, sekcja 5], patrz też [Gut11, definicja 5.2.1].

$\mathscr{P}_{\mathbb{Z}^k}(X) \to \mathbb{R}$ nazywamy **superotoczką** $\mathscr{H}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $E \geq h$ i dla każdej miary $\mu \in \mathscr{P}_{\mathbb{Z}^k}(X)$ zachodzi zbieżność

$$\lim_{k\to\infty} \overline{E - h_k} = 0$$

Jako superotoczkę $\mathscr{H}$ dopuszczamy również funkcję stale równą ∞. Niech $E\mathscr{H}$ będzie infimum wszystkich superotoczek $\mathscr{H}$. Łatwo zauważyć, że $E\mathscr{H}$ również jest superotoczką $\mathscr{H}$ ([Dow05, lemat 2.1.5]). Dla danego układu symbolicznego $\pi : (\mathbb{Z}^k, Y) \to (\mathbb{Z}^k, X)$ zdefiniujmy:

$$h^{\pi}_{ext}(\mu) = \sup_{\nu\in\pi^{-1}(\mu)} h(\nu)$$

Znane twierdzenie o entropii rozszerzeń symbolicznych Boyle'a i Downarowicza ([BD04, twierdzenie 5.5]) daje charakteryzację istnienia rozszerzeń symbolicznych układów z działaniem $\mathbb{Z}$ w języku struktury entropijnej. W [Gut11] uogólniono to twierdzenie na przypadek działań $\mathbb{Z}^k$:

Twierdzenie 2.1. *(Twierdzenie o entropii rozszerzeń symbolicznych działań $\mathbb{Z}^k$, [Gut11, twierdzenie 1.12.4]) Niech $(\mathbb{Z}^k, X)$ będzie topologicznym układem dynamicznym o skończonej entropii topologicznej i o strukturze entropijnej $\mathscr{H}$. Funkcja $E : \mathscr{P}_{\mathbb{Z}^k}(X) \to \mathbb{R}$ jest równa h^{π}_{ext} dla pewnego rozszerzenia symbolicznego π układu $(X, \mathbb{Z}^k)$ wtedy i tylko wtedy, gdy E jest ograniczoną superotoczką afiniczną $\mathscr{H}$. Ponadto $\mathbf{h}_{se}(X, \mathbb{Z}^k) = \sup_{\mu\in\mathscr{P}_{\mathbb{Z}^k}(X)} E\mathscr{H}(\mu)$.*

Zwróćmy uwagę, że uogólnienie jest nietrywialne i korzysta z teorii własności małych brzegów (jak nadmieniono wyżej).

2.6. Granty.

- Grant Maestro Narodowego Centrum Nauki
  Miary niezmiennicze, entropia i inne parametry wzrostu w klasycznych i nieklasycznych układach dynamicznych.
  Kierownik grantu: prof. Tomasz Downarowicz
  Czas trwania grantu: 2013-2018
  Stanowisko w grancie: wykonawca, członek zespołu badawczego.

- EU Marie Skłodowska-Curie Career Integration Grant (CIG)
  Universality in Topological Dynamics (*Uniwersalność w dynamice topologicznej*)
  Kierownik grantu: dr. Yonatan Gutman
  Czas trwania grantu: 2013-2017
  Stanowisko w grancie: kierownik

2.7. Nagrody i wyróżnienia.

- Stypendium Chateaubriand — Ambasada Francji w Izraelu, 2011.

- Stypendium doktoranckie - Uniwersytet Hebrajski w Jerozolimie, 2004-2008.

- Nagroda im. prof. Kleina za osiąnięcia dydaktyczne (przyznawana czterem studentom Wydziału Matematyki na Uniwersytecie Hebrajskim w Jerozolimie), 2006.

- Nagroda im. prof. Zochowickiego za osiągnięcia naukowe (przyznawana dwóm studentom Wydziału Matematyki na Uniwersytecie Hebrajskim w Jerozolimie), 2005.

- Stypendium magisterskie (M.Sc) na Uniwersytecie Stanforda.

- Druga najwyższa średnia ocen (salutatorian) wśród absolwentów uniwersytetu Technion w 2001.

- Udział w programie „Technion's Excellence Program" (Program osiągnięć Instytutu Technologii Technion), 1999 - 2001.

- Nagroda rektora Instytutu Technologii Technion za znakomite wyniki w każdym semestrze nauki, 1998 – 2001.

- Nagroda „Fund for Promotion of Excellence" (Fundusz wspierania wyjątkowych osiągnięć) Wydziału Matematyki Instytutu Technologii Technion, 2002.

- Nagroda im. Yuval Levy (przyznawana najlepszym studentom Wydziału Matematyki Instytutu Technologii Technion), 2001.

- Nagroda Prezesa Komisji ds. Edukacji i Kultury Knesetu (Izraelskiego parlamentu) przyznawana najlepszym 0,1% studentów uniwersytetów w Izraelu, 2000.

- Nagroda im. prof. Merkina (przyznawana dwóm studentom Wydziału Matematyki na Instytucie Technologii Technion), 2000.

- Nagroda rektora Instytutu Technologii Technion (przyznawana nowym studentom przyjętym z najlepszymi wynikami), 1999.

- Drugie miejsce w Izraelu w międzynarodowym konkursie matematycznym „Tournament of the Towns", 1998.

- Nagroda im. Avraham Medzini za ukończenie z z najwyższą pochwałą (summa cum laude) liceum Reali w Hajfie 1998 r.

- Wyróżnienie w Izraelu w międzynarodowym konkursie matematycznym „Tournament of the Towns" w 1997.

- Drugie miejsce w Izraelu i wyróżnienie na etapie międzynarodowym w konkursie matematycznym „Tournament of the Towns" w 1995.

- Wyróżnienie na olimpiadzie matematycznej Zuta organizowanej przez Instytut Naukowy Weizmanna, 1995.

2.8. **Kursy specjalne.**

- Kurs zaawansowany: „The Camarena-Szegedy Theory of Nilspaces" („Teoria nilprzestrzeni Camareny-Szegedy'ego"), University of Cambridge, październik-grudzień (Michaelmas term) 2012, styczeń- marzec (Lent term), kwiecień-czerwiec (Easter term) 2013.

- Minikurs: „Nilspaces and their applications" („Nilprzestrzenie i ich zastosowania"), Universidad de Chile (Uniwersytet Chile), grudzień 2016.

Konferencje i seminaria

2.9. **Wykłady na konferencjach (na zaproszenie).**

- School on Information and Randomness, Universidad de Chile, grudzień 2016. Tytuł: „Higher order regionally proximal equivalence relations for general group actions through cubespaces"

(„Regionalnie proksymalne relacje równoważności wyższego rzędu dla ogólnych działań grup przez przestrzenie kostkowe").

- New developments around the x2 x3 conjecture and other classical problems in ergodic theory, Cieplice, maj 2016 (2 wykłady). Tytuł I: „Free ergodic $\mathbb{Z}^k$ -systems and complexity after Cyr and Kra" („Wolne ergodyczne układy $\mathbb{Z}^k$ i złożoność według Cyra i Kry"). Tytuł II: „Higher order regionally proximal equivalence relations for general group actions" („Regionalnie proksymalne relacje równoważności wyższego rzędu dla ogólnych działań grup").

- Wandering Seminar, A mini-conference on Ergodic Theory and Dynamical Systems, Wydział Matematyki, Politechnika Wrocławska, kwiecień 2015. Tytuł: „Structure theorems for Host-Kra factors of finitely generated abelian actions" („Twierdzenia strukturalne dla faktorów Hosta-Kry w przypadku działań skończenie generowanych grup abelowych").

- Wspólne posiedzenie Niemieckiego Towarzystwa Matematycznego (DMV) i Polskiego Towarzystwa Matematycznego (PTM), Poznań, 2014. Tytuł: „On higher order regional proximality for arbitrary group actions" („Regionalna proksymalność wyższego rzędu dla ogólnych działań grup").

- Maryland-Penn State Dynamical Systems and Related Topics Workshop, USA, 2014. Tytuł: „Dynamical Embedding in Cubical Shifts with a View Towards Physics" („Dynamiczne zanurzenia w przesunięciach na kostce z fizycznymi perspektywami").

- Brazilian-Polish Topology Workshop, Polska Akademia Nauk, Warszawa, 2012. Tytuł: „Mean dimension and a sharp embedding theorem: extensions of aperiodic subshifts" („Średni wymiar i twierdzenie o ostrym zanurzaniu: rozszerzenia aperiodycznych układów shiftowych").

- Laminations and symbolic dynamics, CIRM, Marsylia, 2012. Tytuł: „Topological dynamical embedding and Jaworski-type theorems" („Dynamiczne zanurzenia topologiczne i twierdzenia typu Jaworskiego").

- Israeli-Polish Mathematical Meeting, Łódź, 2011. Tytuł: „The universal minimal space for homeomorphism groups of h-homogeneous spaces" („Uniwersalna przestrzeń minimalna dla grup homeomorfizmów przestrzeni h-jednorodnych").

- Doroczne posiedzenie Izraelskiego Towarzystwa Matematycznego, Bar-Ilan University, Ramat-Gan, Izrael, 2011. Tytuł: „Universal minimal spaces" („Uniwersalne przestrzenie minimalne").

- Workshop on the Concentration Phenomenon, Transformation Groups and Ramsey Theory, Fields Institute, Toronto, 2010. Tytuł: „Minimal hyperspace actions of Homeo$(\beta\omega \setminus \omega)$" („Minimalne działania Homeo$(\beta\omega \setminus \omega)$ na hiperprzestrzeniach").

- Dynamical Systems Meeting, Trzebieszowice, 2010. Tytuł: „Juzvinskii addition theorems for amenable groups and free groups" („Twierdzenia o dodawaniu typu Juźwińskiego dla grup ze średnią i grup wolnych").

- Workshop on the Urysohn Space, Uniwersytet Ben-Guriona, Beer Szewa, Izrael, 2006. Tytuł: „Minimal actions of homeomorphism groups" („Działania minimalne grup homeomorfizmów").

2.10. **Wykłady na konferencjach.**

- Ergodic Theory of Dynamical Systems. Będlewo, listopad 2015. Tytuł: „Optimal embedding of minimal systems into shifts on Hilbert cubes" („Optymalne zanurzenia układów minimalnych w przesunięciach na kostkach Hilberta”).

- Combinatorics Meets Ergodic Theory Workshop, Banff, Kanada, lipiec 2015. Tytuł: „Characterization of Host-Kra factors through a structural theorem for dynamical nilspaces” („Charakteryzacja faktorów Hosta-Kry przez twierdzenie strukturalne dla dynamicznych nilprzestrzeni”).

- Ergodic Theorems and Applications in Probability, Eilat, Izrael, maj 2015. Tytuł: „Structure theorems for Host-Kra factors of finitely generated abelian actions” („Twierdzenia strukturalne dla faktorów Hosta-Kry w przypadku działań skończenie generowanych grup abelowych”).

- Ergodic Theory and Dynamical Systems, Toruń, maj 2014. Tytuł: „On the representability by inverse limits of nilsystems” („Możliwości reprezentacji za pomocą granic wstecznych nilukładów”).

- Ergodic Theory and Dynamical Systems, University of North Carolina, USA, kwiecień 2014. Tytuł: „Dynamical Embedding in Cubical Shifts with a View Towards Physics” („Dynamiczne zanurzenia w przesunięciach na kostce z fizycznymi perspektywami”).

- 5th Visegrad Conference on Dynamical Systems, Olsztyn, wrzesień 2013. Tytuł: „Sharp embedding theorems for topological dynamical systems” („Twierdzenia o ostrym zanurzaniu w topologicznych układach dynamicznych”).

- Arbeitsgemeinschaft „Limits of structures”, Oberwolfach, Niemcy, 2013. Tytuł: „Nilspaces and nilmanifolds” („Nilprzestrzenie i nilrozmaitości”).

- Ergodic Methods in Dynamics, Będlewo, 2012. Tytuł: „Topological dynamical embedding and Jaworski-type theorems” („Dynamiczne zanurzenie topologiczne i twierdzenia typu Jaworskiego”).

- Conformal Structures and Dynamics (CODY) Third Year Conference, Będlewo, 2009. Tytuł: „Embedding $\mathbb{Z}^k$-actions in cubical shifts and $\mathbb{Z}^k$-symbolic extensions” („Zanurzanie działań $\mathbb{Z}^k$ w przesunięciach na kostkach i rozszerzenia symboliczne działań $\mathbb{Z}^k$”).

- 5th Annual International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering / 4th International Kyiv Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, Instytut Matematyczny Ukraińskiej Akademii Nauk, Kijów, 2008. Tytuł: „Embedding $\mathbb{Z}^k$-Actions in Continuous Shifts and $\mathbb{Z}^k$-Symbolic Extensions” („Zanurzanie działań $\mathbb{Z}^k$ w ciągłych przesunieciach i rozszerzenia symboliczne działań $\mathbb{Z}^k$”).

- 22nd Summer Conference on Topology and its Applications, Universidad Jaume I, Castellón de la Plana, Hiszpania, 2007. Tytuł: „Embedding Results through Mean Dimension for $\mathbb{Z}^k$- Actions” („Wyniki dotyczące zanurzeń uzyskane za pomocą wymiaru średniego dla działań $\mathbb{Z}^k$”).

- 9th Rencontres Mathématiques de Rouen, Francja, 2007. Tytuł: „On processes which cannot be distinguished by finite observations” („Procesy nierozróżnialne za pomocą skończonych obserwacji”).

- Workshop on Ergodic Theory and Dynamical Systems, Szklarska Poręba, 2006. Tytuł: „Minimal Actions of Homeomorphism Groups” („Działania minimalne grup homeomorfizmów”).

2.11. **Wykłady na seminariach (na zaproszenie).**

- Seminarium z układów dynamicznych, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, maj 2016. Tytuł: „Higher order regionally proximal equivalence relations for general group actions" („Regionalnie proksymalne relacje równoważności wyższego rzędu dla ogólnych działań grup").

- Seminarium z geometrii, Technische Universität Dresden, luty 2016. Tytuł: „Optimal embedding of minimal systems into shifts on Hilbert cubes" („Optymalne zanurzenia układów minimalnych w przesunięciach na kostkach Hilberta").

- Seminarium z układów dynamicznych, Uniwersytet Hebrajski w Jerozolimie, Izrael, styczeń 2016. Tytuł: „Optimal embedding of minimal systems into shifts on Hilbert cubes" („Optymalne zanurzenia układów minimalnych w przesunięciach na kostkach Hilberta").

- Seminarium z geometrycznej teroii grup, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, grudzień 2015. Tytuł: „:The embedding problem in topological dynamics" („Problem zanurzania w dynamice topologicznej").

- Seminarium z układów dynamicznych, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, listopad 2015. Tytuł: „Optimal embedding of minimal systems into shifts on Hilbert cubes" („Optymalne zanurzenia układów minimalnych w przesunięciach na kostkach Hilberta").

- Seminarium z układów dynamicznych, Wu Laboratory, Chiński Uniwersytet Naukowo-Technologiczny (University of Science and Technology of China), Hefei, 30 września 2015. Tytuł: „Higher order regional proximality and characterization of Host-Kra factors through a structural theorem for dynamical nilspaces" („Relacje regionalnej proksymalności wyższego rzędu i charakteryzacja faktorów Hosta-Kry przez twierdzenie strukturalne dla dynamicznych nilprzestrzeni").

- Seminarium z układów dynamicznych, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, kwiecień 2015. Tytuł: „Structure theorems for Host-Kra factors - Introduction" („Wprowadzenie do twierdzeń strukturalnych dla faktorów Hosta-Kry").

- Seminarium z układów dynamicznych, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, styczeń 2015. Tytuł: „On the Host-Kra construction of characteristic factors" („Konstrukcja faktorow charakterystycznych Hosta-Kry").

- Seminarium z topologii, Polska Akademia Nauk, grudzień 2014. Tytuł: „Zanurzanie układów dynamicznych w przesunieciach kostkowych — Stare wyzwania a nowy rozwój".

- Seminarium z układów dynamicznych, Uniwersytet Warszawski, listopad 2014. Tytuł: „Wymiar średni, małe faktory entropii i twierdzenie o zanurzaniu dla działań grupy wyższej rangi" („Mean dimension, small entropy factors and an embedding theorem for higher rank group actions").

- Seminarium dla doktorantów, Uniwersytet Warszawski, maj 2014. Tytuł: „Takens embedding theorem with a continuous observable" („Twierdzenie Takensa o zanurzaniu z ciągłą zmienną obserwowalną").

- Oberseminar, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Niemcy, grudzień 2013. Tytuł: „Sharp embedding theorems for topological dynamical systems" („Twierdzenia o ostrym zanurzaniu w topologicznych układach dynamicznych").

- Seminarium z układów dynamicznych, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, listopad 2013. Tytuł: „Nilspaces and structure theorems for topological dynamical systems" („Nilprzestrzenie i twierdzenia strukturalne dla topologicznych układów dynamicznych").

- Universality and Homogeneity Trimester Program Special Lecture Series, Hausdorff Institute for Mathematics (HIM), Bonn, listopad 2013. Tytuł: „Nilspaces and structure theorems for topological dynamical systems" („Nilprzestrzenie i twierdzenia strukturalne dla topologicznych układów dynamicznych").

- Séminaire de l'Équipe Topologie Dynamique, Université Paris-Sud, listopad 2013. Tytuł: "Nilespaces et théorèmes de structure pour les systèmes dynamiques topologiques" („Nilprzestrzenie i twierdzenia strukturalne dla topologicznych układów dynamicznych").

- Seminarium z układów dynamicznych, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, kwiecień 2013. Tytuł: „Nilspaces and nilmanifolds" („Nilprzestrzenie i nilrozmaitości").

- Seminarium z teorii ergodycznej, University of Bristol, styczeń 2013. Tytuł: „Sharp embedding theorems for topological dynamical systems" („Twierdzenia o ostrym zanurzaniu w topologicznych układach dynamicznych").

- Seminarium z topologii, Uniwersytet Warszawski, 2012. Tytuł: „An introduction to mean dimension and its applications" („Wprowadzenie do średniego wymiaru i jego zastosowań").

- Seminarium z teorii ergodycznej i układów dynamicznych, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, 2012 . Tytuł: „Topological dynamical embedding and Jaworski-type theorems" („Dynamiczne zanurzenia topologiczne i twierdzenia typu Jaworskiego").

- Seminarium z układów dynamicznych, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 2012. Tytuł: „The structure of cubespaces attached to minimal distal dynamical systems" („Struktura przestrzeni kostkowych powiązanych z minimalnymi dystalnymi układami dynamicznymi").

- Seminarium z teorii ergodycznej, Politechnika Wrocławska, 2012. Tytuł: „Topological dynamical embedding and Jaworski-type theorems" („Dynamiczne zanurzenia topologiczne i twierdzenia typu Jaworskiego").

- Seminarium z kombinatoryki, Cambridge University, 2012. Tytuł: „The structure of cubespaces attached to minimal distal dynamical systems" („Struktura przestrzeni kostkowych powiązanych z minimalnymi dystalnymi układami dynamicznymi").

- Seminarium z układów dynamicznych,Universiteit van Amsterdam, 2012. Tytuł: „The structure of cubespaces attached to minimal distal dynamical systems" („Struktura przestrzeni kostkowych powiązanych z minimalnymi dystalnymi układami dynamicznymi").

- Wykład-kolokwium, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 2012. Tytuł: „Topological Dynamical Embedding and Jaworski-type Theorems" („Dynamiczne zanurzenia topologiczne i twierdzenia typu Jaworskiego").

- Wykład-kolokwium, Uniwersytet Hajfy, Izrael, 2011. Tytuł: „A Juzvinskii addition theorem for finitely generated free group actions" („Twierdzenia o dodawaniu typu Juźwińskiego dla grup ze średnią i grup wolnych").

- Seminarium z dynamiki i rachunku prawdopodobieństwa, Uniwersytet Hebrajski w Jerozolimie, Izrael, 2011. Tytuł: „The structure of cubespaces attached to a minimal distal dynamical system" („Struktura przestrzeni kostkowych powiązanych z minimalnymi dystalnymi układami dynamicznymi").

- Seminarium z teorii ergodycznej, Uniwersytet Ben-Guriona, Beer Szewa, Izrael, 2011. Tytuł: „A Juzvinskii addition theorem for finitely generated free group actions” („Twierdzenia o dodawaniu typu Juźwińskiego dla grup ze średnią i grup wolnych”).

- Seminarium grupy roboczej z dziedziny teorii ergodycznej i układów dynamicznych, Université Paris-Sud 11, 2011. Tytuł: „Plongement des actions par $\mathbb{Z}^k$ dans des shifts cubiques et des extensions $\mathbb{Z}^k$ symboliques” („Zanurzanie działań $\mathbb{Z}^k$ w ciągłych układach shiftowych i rozszerzenia symboliczne $\mathbb{Z}^k$”).

- Seminarium z dynamiki, arytmetyki i kombinatoryki (Ernest), Institut de Mathématiques de Luminy, Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2011. Tytuł: „Plongement des actions par $\mathbb{Z}^k$ dans des shifts cubiques et des extensions $\mathbb{Z}^k$ symboliques” („Zanurzanie działań $\mathbb{Z}^k$ w ciągłych układach shiftowych i rozszerzenia symboliczne $\mathbb{Z}^k$”).

- Seminarium z algebry, dynamiki i topologii, Université de Provence - Aix-Marseille I and Université Paul Cézanne - Aix-Marseille III, 2011. Tytuł: „Un théorème d’addition de Juzvinskii pour les actions des groupes libres” („Twierdzenie Juźwińskiego dla działań grup wolnych”).

- Seminarium z teorii ergodycznej, Politechnika Wrocławska, 2011. Tytuł: „On relative extreme amenability” („Względna ekstremalna średniowalność”).

- Seminarium z teorii ergodycznej, Politechnika Wrocławska, 2010. Tytuł: „Minimal actions of Homeo(ω^*) on hyperspaces of ω^*” („Minimalne działania grupy Homeo(ω^*) na hiperprzestrzeniach ω^*”).

- Seminarium z teorii grup i dynamiki, Texas A&M University,College Station, USA, 2010. Tytuł: „Minimal actions of Homeo(ω^*) on hyperspaces of ω^*” („Minimalne działania grupy Homeo(ω^*) na hiperprzestrzeniach ω^*”).

- Seminarium z analizy, University at Buffalo, New York, USA, 2010. Tytuł: „Minimal actions of Homeo(ω^*) on hyperspaces of ω^*” („Minimalne działania grupy Homeo(ω^*) na hiperprzestrzeniach ω^*”).

- Seminarium dla młodych naukowców, program dotyczący asymptotycznej analizy geometrycznej, Fields Institute (Instytut Fieldsa), Toronto, 2010. Tytuł: „Universal minimal spaces” („Uniwersalne przestrzenie minimalne”).

- Action Now Seminar, Technion, Haifa, Izrael, 2008. Tytuł: „Embedding $\mathbb{Z}^k$-actions in continuous shifts and the $\mathbb{Z}^k$-symbolic extension entropy theorem” („Zanurzanie działań $\mathbb{Z}^k$ w przesunięciach na kostkach i twierdzenie o entropii dla rozszerzeń symbolicznych działań $\mathbb{Z}^k$”).

- Seminarium z dynamiki, The Hebrew University of Jerusalem, 2007. Tytuł: „Embedding $\mathbb{Z}^k$-actions in continuous shifts and the $\mathbb{Z}^k$-symbolic extension entropy theorem” („Zanurzanie działań $\mathbb{Z}^k$ w przesunięciach na kostkach i twierdzenie o entropii dla rozszerzeń symbolicznych działań $\mathbb{Z}^k$”).

- Seminarium z analizy harmonicznej, Università degli Studi di Roma Ła Sapienza", 2006. Tytuł: „Minimal Actions of Homeomorphism Groups” („Działania minimalne grup homeomorfizmów”).

- Seminarium z dynamiki, Uniwersytet Hebrajski w Jerozolimie, Izrael, 2005. Tytuł: „Minimal actions of homeomorphism groups” („Działania minimalne grup homeomorfizmów”).

2.12. **Wykłady na seminariach.**

- Seminarium z analizy dyskretnej, University of Cambridge, 2012. Tytuł: „The structure of cubespaces attached to minimal distal dynamical systems" („Struktura przestrzeni kostkowych powiązanych z minimalnymi dystalnymi układami dynamicznymi").
- Seminarium z dynamiki i rachunku prawdopodobieństwa, Uniwersytet Hebrajski w Jerozolimie, Izrael, 2012. Tytuł: „Mean dimension & Jaworski-type theorems" („Średni wymiar i twierdzenia typu Jaworskiego").
- Seminarium z układów dynamicznych, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 2012. Tytuł: „Topological dynamical embedding and Jaworski-type theorems" („Dynamiczne zanurzenia topologiczne i twierdzenia typu Jaworskiego").
- Seminarium grupy roboczej z dziedziny teorii ergodycznej i układów dynamicznych, Université Paris-Sud 11, 2012. Tytuł: „Plongement topologique dynamique et des théorèmes de type Jaworski" („Dynamiczne zanurzenia topologiczne i twierdzenia typu Jaworskiego").
- Seminarium z logiki, Institut Camille Jordan, Université Lyon 1, 2012. Tytuł: „Topological dynamical embedding and Jaworski-type theorems" („Dynamiczne zanurzenia topologiczne i twierdzenia typu Jaworskiego").
- Seminarium z układów dynamicznych, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 2011. Tytuł: „Minimal hyperspace actions of homeomorphism groups of h-homogeneous spaces" („Minimalne działania hiperprzestrzeni grup homeomorfizmów przestrzeni h-jednorodnych").
- Seminarium z teorii ergodycznej i układów dynamicznych, Université Paris 13, 2011. Tytuł: „L'espace universel minimal des groupes d'homéomorphismes des espaces h-homogènes" („Uniwersalna przestrzeń minimalna dla grupy homeomorfizmów przestrzeni h-jednorodnych").
- Seminarium z teorii ergodycznej Jussieu/Chevaleret, Universités Paris 6 & 7, 2011. Tytuł: „Sur la Moyennabilité Extrême Relative" („O względnej ekstremalnej średniowalności").
- Horowitz Seminar, Uniwersytet Telawiwski, Izrael, 2010. Tytuł: „Juzvinskii addition theorems for amenable groups and gree groups") („Twierdzenia o dodawaniu typu Juźwińskiego dla grup ze średnią i grup wolnych").
- Seminarium specjalne, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, 2009. Tytuł: „Embedding $\mathbb{Z}^k$-actions in cubcial shifts and $\mathbb{Z}^k$ symbolic extensions" („Zanurzanie działań $\mathbb{Z}^k$ w przesunięciach na kostkach i rozszerzenia symboliczne działań $\mathbb{Z}^k$").
- Seminarium specjalne, Politechnika Wrocławska, 2009. Tytuł: „Embedding $\mathbb{Z}^k$-actions in cubical shifts and $\mathbb{Z}^k$-symbolic extensions" („Zanurzanie działań $\mathbb{Z}^k$ w przesunięciach na kostkach i rozszerzenia symboliczne działań $\mathbb{Z}^k$").
- Students Probability Day, Instytut Nauki Weizmanna, Rechowot, Izrael, 2007. Tytuł: „On processes which cannot be distinguished by finite observations" („Procesy nierozróżnialne za pomocą skończonych obserwacji").
- Horowitz Seminar, Uniwersytet Telawiwski, Izrael, 2007. Tytuł: „On processes which cannot be distinguished by finite observations" („Procesy nierozróżnialne za pomocą skończonych obserwacji").

2.13. **Wyjazdy długoterminowe.**

- Universidad de Chile. Gospodarze: Alejandro maass, Sebastián Donoso, grudzień 2016.
- Chiński Uniwersytet Naukowo-Technologiczny (University of Science and Technology of China), Hefei. Gospodarz: XiangDong Ye, październik 2015.
- Program trymestralny dotyczący uniwersalności i jednorodności, Hausdorff Institute for Mathematics (Instytut Matematyczny Hausdorffa), Bonn, Niemcy, listopad 2013.
- Politechnika Wrocławska. Gospodarz: Tomasz Downarowicz, maj 2012.
- Politechnika Wrocławska. Gospodarz: Tomasz Downarowicz, grudzień 2010 – styczeń 2011.
- University at Buffalo, New York, USA. Gospodarz: Hanfeng Li, listopad 2010.
- Program tematyczny na temat asymptotycznej analizy geometrycznej, Instytut Fieldsa, Toronto, październik 2010.

2.14. **Wyjazdy krótkoterminowe (do dwóch tygodni).**

- Uniwersytet Hebrajski w Jerozolimie, Izrael. Gospodarz: Masaki Tsukamoto, lipiec 2016.
- Technische Universität Dresden. Gospodarz: Antoine Gournay, luty 2016.
- Uniwersytet Hebrajski w Jerozolimie, Izrael. Gospodarz: Elon Lindenstrauss, styczeń 2016.
- Uniwersytet Kioto, Japonia. Gospodarz: Masaki Tsukamoto, październik 2015.
- University of Maryland, USA. Gospodarz: Joe Auslander, kwiecień 2014.
- Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Niemcy. Gospodarz: Wilhelm Winter i Gábor Szabó, grudzień 2013.
- Université Paris-Sud. Gospodarz: Jérôme Buzzi i Sylvien Crovisier, listopad 2013.
- Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu. Gospodarz: Mariusz Lemańczyk, czerwiec 2012.
- Politechnika Wrocławska. Gospodarz: Tomasz Downarowicz, maj 2012.
- Politechnika Wrocławska. Gospodarz: Tomasz Downarowicz, grudzień 2011.
- Université Paul Cézanne - Aix-Marseille III. Gospodarz: Lionel Nguyen Van Thé, listopad 2011.
- Uniwersytet Hebrajski w Jerozolimie, Izrael. Gospodarz: Benjamin Weiss, czerwiec 2011.
- Politechnika Wrocławska. Gospodarz: Tomasz Downarowicz, marzec 2011.
- Texas A&M University. Gospodarz: Lewis Bowen, listopad 2010.

2.15. **Recenzje dla czasopism.**

- Inventiones mathematicae

- Advances in Mathematics.
- Journal of the London Mathematical Society
- Israel Journal of Mathematics.
- Ergodic Theory and Dynamical Systems.
- Studia Mathematica
- Monatshefte für mathematik
- Mathematical Reviews (MathSciNet).
- Springer.

2.16. **Recenzje dla fundacji naukowych.**

- Israel Science Foundation (Izraelska Fundacja Naukowa, ISF)
- Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung (FWF,Austriacki Fundusz Nauki)

2.17. **Działalność organizacyjna.**

- Współorganizator (z Michael Bateman, Ben Green, Bob Hough i Péter Varjú) seminarium z analizy dyskretnej w University of Cambridge, 2013.
- Pomysłodawca, autor programu i współorganizato (z Michałem Ramsem i Adamem Skalskim) zaawansowanego seminarium na temat problemu mieszania wielokrotnego Rochlina w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk. Wygłosiłem tam też serię wykładów pt. „Host's Theorem: A mixing system of singular type is mixing of all orders" („Twierdzenie Hosta: układ mieszający typu singularnego jest układem mieszającym każdego rzędu"). Luty–czerwiec 2015.
- Współorganizator (z Alexanderem Bufetovem, Krzysztofem Frączkem, Joanną Kułagą-Przymus i Mariuszem Lemańczykem) warsztatów Simons Semester „Ergodic Theory of Dynamical Systems", „Translation Surfaces and Dynamics", Będlewo, 22-28 listopada 2015.
- Współorganizator (z Feliksem Przytyckim i Michałem Ramsem) seminarium z układów dynamicznych w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk, 2016-
- Współorganizator (z Piotrem Oprochą i Arturem Siemaszkem) sesji poświęconej dynamice topologicznej i teorii ergodycznej na konferencji „7th Forum of Polish Mathematicians with the participation of Ukrainian mathematicians", Olsztyn, 12-17 września 2016.
- Współorganizator (z Elon Lindenstruass i Masaki Tsukamoto) warsztatów BIRS „Mean Dimension and Sofic Entropy Meet Dynamical Systems, Geometric Analysis and Information Theory" Banff, Kanada, 23–28 lipca 2017.

2.18. **Członek Polskiego Towarzystwa Matematycznego.**

LITERATURA

[ACS12] Omar Antolín Camarena and Balazs Szegedy. Nilspaces, nilmanifolds and their morphisms. Preprint. http://arxiv.org/abs/1009.3825, 2012.

[AR62] LM Abramov and VA Rohlin. Entropy of a skew product of mappings with invariant measure. *Vestnik Leningrad. Univ*, 17(7):5–13, 1962.

[Aus88] Joseph Auslander. *Minimal flows and their extensions*, volume 153 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 122.

[BC04] Christian Bonatti and Sylvain Crovisier. Récurrence et généricité. *Invent. Math.*, 158(1):33–104, 2004.

[BD04] Mike Boyle and Tomasz Downarowicz. The entropy theory of symbolic extensions. *Invent. Math.*, 156(1):119–161, 2004.

[BFF02] Mike Boyle, Doris Fiebig, and Ulf Fiebig. Residual entropy, conditional entropy and subshift covers. *Forum Math.*, 14(5):713–757, 2002.

[BG13] Lewis Bowen and Yonatan Gutman. Nonabelian free group actions: Markov processes, the abramov–rohlin formula and yuzvinskii's formula–corrigendum. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 33(02):643–645, 2013.

[BG14] Lewis Bowen and Yonatan Gutman. A juzvinskii addition theorem for finitely generated free group actions. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 34(01):95–109, 2014.

[Bow10] Lewis Bowen. Non-abelian free group actions: Markov processes, the Abramov-Rohlin formula and Yuzvinskii's formula. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 30(6):1629–1663, 2010.

[Buz97] Jérôme Buzzi. Intrinsic ergodicity of smooth interval maps. *Israel J. Math.*, 100:125–161, 1997.

[Coo05] Michel Coornaert. *Dimension topologique et systèmes dynamiques*, volume 14 of *Cours Spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2005.

[Coo15] Michel Coornaert. *Topological dimension and dynamical systems*. Springer, 2015.

[CSC10] Tullio Ceccherini-Silberstein and Michel Coornaert. *Cellular automata and groups*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[DGH14] Tomasz Downarowicz, Yonatan Gutman, and Dawid Huczek. Rank as a function of measure. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 34:2741–2750, 2014.

[Dow05] Tomasz Downarowicz. Entropy structure. *J. Anal. Math.*, 96:57–116, 2005.

[Dow06a] Tomasz Downarowicz. Minimal models for noninvertible and not uniquely ergodic systems. *Israel J. Math.*, 156:93–110, 2006.

[Dow06b] Tomasz Downarowicz. Minimal models for noninvertible and not uniquely ergodic systems. *Israel Journal of Mathematics*, 156(1):93–110, 2006.

[Dow08] Tomasz Downarowicz. Faces of simplexes of invariant measures. *Israel Journal of Mathematics*, 165(1):189–210, 2008.

[Ell69] Robert Ellis. *Lectures on topological dynamics*. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.

[EN14] George A Elliott and Zhuang Niu. The C*-algebra of a minimal homeomorphism of zero mean dimension. *arXiv:1406.2382*, 2014.

[Fal04] Kenneth Falconer. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons, 2004.

[Flo35] A. Flores. Über n-dimensionale Komplexe, die im $\mathbb{R}_{2n+1}$ absolut selbstverschlungen sind. *Erg. Math. Kolloqu.*, 6:4–7, 1935.

[GG12] Eli Glasner and Yonatan Gutman. The universal minimal space for groups of homeomorphisms of h-homogeneous spaces. In *Dynamical Systems and Group Actions*, volume 567 of *Contemp. Math.*, pages 105–118. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.

[GG13] Eli Glasner and Yonatan Gutman. Minimal hyperspace actions of homeomorphism groups of h-homogeneous spaces. *Journal d'Analyse Mathématique*, 119(1):305–332, 2013.

[GH08] Yonatan Gutman and Michael Hochman. On processes which cannot be distinguished by finite observation. *Israel J. Math.*, 164:265–284, 2008.

[GL13] Yonatan Gutman and Hanfeng Li. A new short proof for the uniqueness of the universal minimal space. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 141(1):265–267, 2013.

[GLT16] Yonatan Gutman, Elon Lindenstrauss, and Masaki Tsukamoto. Mean dimension of $\mathbb{Z}^k$-actions. *Geom. Funct. Anal.*, 26(3):778–817, 2016.

[GMV16a] Yonatan Gutman, Freddie Manners, and Péter P. Varjú. The structure theory of nilspaces I. Praca w recenzji. arxiv.org/abs/1605.08945, 2016.

[GMV16b] Yonatan Gutman, Freddie Manners, and Péter P. Varjú. The structure theory of nilspaces II: Representation as nilmanifolds. Praca w recenzji. arxiv.org/abs/1605.08948, 2016.

[GMV16c] Yonatan Gutman, Freddie Manners, and Péter P. Varjú. The structure theory of nilspaces III: Inverse limit representations and topological dynamics. Praca w recenzji. arxiv.org/abs/1605.08950, 2016.

[GNVT15] Yonatan Gutman and Lionel Nguyen Van Thé. On relative extreme amenability. *Sci. Math. Jpn.*, 28:133–141, 2015.

[Gou08] A. Gournay. *Dimension moyenne et espaces d'applications pseudo-holomorphes*. PhD thesis, 2008.

[Gro99] Misha Gromov. Topological invariants of dynamical systems and spaces of holomorphic maps. I. *Math. Phys. Anal. Geom.*, 2(4):323–415, 1999.

[GT10] Ben Green and Terence Tao. Linear equations in primes. *Ann. of Math. (2)*, 171(3):1753–1850, 2010.

[GT14] Yonatan Gutman and Masaki Tsukamoto. Mean dimension and a sharp embedding theorem: extensions of aperiodic subshifts. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 34:1888–1896, 2014.

[GT15] Yonatan Gutman and Masaki Tsukamoto. Embedding minimal dynamical systems into hilbert cubes. Praca w recenzji. http://arxiv.org/abs/1511.01802, 2015.

[GTZ12] Ben Green, Terence Tao, and Tamar Ziegler. An inverse theorem for the Gowers $U^{s+1}[N]$-norm. *Ann. of Math. (2)*, 176(2):1231–1372, 2012.

[Gut] Yonatan Gutman. Embedding topological dynamical systems with periodic points in cubical shifts. 27 stron. *Praca przyjęta do druku w Ergodic Theory Dynam. Systems* (2017). doi: 10.1017/etds.2015.40.

[Gut08] Yonatan Gutman. Minimal actions of homeomorphism groups. *Fund. Math.*, 198(3):191–215, 2008.

[Gut11] Yonatan Gutman. Embedding $\mathbb{Z}^k$-actions in cubical shifts and $\mathbb{Z}^k$-symbolic extensions. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 31(2):383–403, 2011.

[Gut15] Yonatan Gutman. Mean dimension and Jaworski-type theorems. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 111(4):831–850, 2015.

[Gut16] Yonatan Gutman. Takens embedding theorem with a continuous observable. In *Ergodic theory - Advances in dynamical systems.*, pages 134–141. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2016.

[GW03] E. Glasner and B. Weiss. The universal minimal system for the group of homeomorphisms of the Cantor set. *Fund. Math.*, 176(3):277–289, 2003.

[Hal88] Jack K. Hale. *Asymptotic behavior of dissipative systems*, volume 25 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.

[HGLS05] Chih-hao Hsieh, Sarah M Glaser, Andrew J Lucas, and George Sugihara. Distinguishing random environmental fluctuations from ecological catastrophes for the north pacific ocean. *Nature*, 435(7040):336–340, 2005.

[HK08] Bernard Host and Bryna Kra. Parallelepipeds, nilpotent groups and Gowers norms. *Bull. Soc. Math. France*, 136(3):405–437, 2008.

[HKM10] Bernard Host, Bryna Kra, and Alejandro Maass. Nilsequences and a structure theorem for topological dynamical systems. *Adv. Math.*, 224(1):103–129, 2010.

[HW41] Witold Hurewicz and Henry Wallman. *Dimension Theory*. Princeton Mathematical Series, v. 4. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941.

[HWZ15] Ilan Hirshberg, Wilhelm Winter, and Joachim Zacharias. Rokhlin dimension and C*-dynamics. *Comm. Math. Phys.*, 335:637–670, 2015.

[Jaw74] A. Jaworski. *The Kakutani-Beboutov theorem for groups*. Ph.D. dissertation. University of Maryland, 1974.

[Juz65] S. A. Juzvinskiĭ. Metric properties of the endomorphisms of compact groups. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 29:1295–1328, 1965.

[Kak68] Shizuo Kakutani. A proof of Beboutov's theorem. *J. Differential Equations*, 4:194–201, 1968.

[Kec95] Alexander S. Kechris. *Classical descriptive set theory*, volume 156 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[KPT05] A. S. Kechris, V. G. Pestov, and S. Todorcevic. Fraïssé limits, Ramsey theory, and topological dynamics of automorphism groups. *Geom. Funct. Anal.*, 15(1):106–189, 2005.

[Kri70] Wolfgang Krieger. On entropy and generators of measure-preserving transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 149:453–464, 1970.

[Kri82] Wolfgang Krieger. On the subsystems of topological Markov chains. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 2(2):195–202, 1982.

[KY90] Eric J Kostelich and James A Yorke. Noise reduction: Finding the simplest dynamical system consistent with the data. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 41(2):183–196, 1990.

[Lad91] Olga Ladyzhenskaya. *Attractors for semigroups and evolution equations*. Lezioni Lincee. [Lincei Lectures]. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[Li13] Hanfeng Li. Sofic mean dimension. *Adv. Math.*, 244:570–604, 2013.

[Lin95] Elon Lindenstrauss. Lowering topological entropy. *J. Anal. Math.*, 67:231–267, 1995.

[Lin99] Elon Lindenstrauss. Mean dimension, small entropy factors and an embedding theorem. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 89(1):227–262, 1999.

[Lip09] Stephen Leon Lipscomb. The quest for universal spaces in dimension theory. *Notices Amer. Math. Soc.*, 56(11):1418–1424, 2009.

[LT14] Elon Lindenstrauss and Masaki Tsukamoto. Mean dimension and an embedding problem: an example. *Israel J. Math.*, 199:573–584, 2014.

[LW00] Elon Lindenstrauss and Benjamin Weiss. Mean topological dimension. *Israel J. Math.*, 115:1–24, 2000.

[MT11] Shinichiroh Matsuo and Masaki Tsukamoto. Instanton approximation, periodic ASD connections, and mean dimension. *J. Funct. Anal.*, 260(5):1369–1427, 2011.

[MT15] Shinichiroh Matsuo and Masaki Tsukamoto. Brody curves and mean dimension. *Journal of the American Mathematical Society*, 28(1):159–182, 2015.

[ORW82] Donald S. Ornstein, Daniel J. Rudolph, and Benjamin Weiss. Equivalence of measure preserving transformations. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 37(262):xii+116, 1982.

[OW87] Donald S. Ornstein and Benjamin Weiss. Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups. *J. Analyse Math.*, 48:1–141, 1987.

[OW07] Donald Ornstein and Benjamin Weiss. Entropy is the only finitely observable invariant. *J. Mod. Dyn.*, 1(1):93–105, 2007.

[Phi16] N Christopher Phillips. The C*-algebra of a minimal homeomorphism with finite mean dimension has finite radius of comparison. *arXiv:1605.07976*, 2016.

[QS16] Anthony Quas and Terry Soo. Ergodic universality of some topological dynamical systems. *Transactions of the American Mathematical Society*, 368(6):4137–4170, 2016.

[Rob11] James C. Robinson. *Dimensions, embeddings, and attractors*, volume 186 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[Rob13] James C. Robinson. Attractors and finite-dimensional behaviour in the 2D Navier-Stokes equations. *ISRN Math. Anal.*, pages 1–29, 2013.

[SM90] George Sugihara and R Mayf. Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series, 1990.

[SW91] M. Shub and B. Weiss. Can one always lower topological entropy? *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 11(3):535–546, 1991.

[SYC91] Tim Sauer, James A. Yorke, and Martin Casdagli. Embedology. *J. Statist. Phys.*, 65(3-4):579–616, 1991.

[Sza15] Gábor Szabó. The Rokhlin dimension of topological $\mathbb{Z}^m$-actions. *Proc. London Math. Soc.*, 110 (3):673–694, 2015.

[Sze12] Balazs Szegedy. On higher order fourier analysis. Preprint. http://arxiv.org/abs/1203.2260, 2012.

[Tak81] Floris Takens. Detecting strange attractors in turbulence. In *Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980 (Coventry, 1979/1980)*, volume 898 of *Lecture Notes in Math.*, pages 366–381. Springer, Berlin-New York, 1981.

[Tem97] Roger Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, volume 68 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.

[Usp00] Vladimir Uspenskij. On universal minimal compact G-spaces. In *Proceedings of the 2000 Topology and Dynamics Conference (San Antonio, TX)*, volume 25, pages 301–308, 2000.