Recenzja osiągnięcia habilitacyjnego
'Struktury C*-algebr zadanych przez relacje typu dynamicznego'
przedstawionego przez dr Bartosza Kosmę Kwaśniewskiego we wniosku
złożonym w Instytucie Matematyki Polskiej Akademii Nauk

Osiągnięcie naukowe dr Bartosza Kosmy Kwaśniewskiego stanowiące podstawę wniosku habilitacyjnego składa się z dziewięciu prac opublikowanych w latach 2013-2017 (sześciu samodzielnych, trzech współautorskich z prof. Lebiediewem i prof. Szymańskim – zgodnie z oświadczeniami współautorów wkład habilitanta w powstanie wspólnych prac wynosił istotnie powyżej 50 procent). Prace te dotyczą przede wszystkim konstrukcji C*-algebr będących rozmaitego typu uogólnieniami iloczynu krzyżowego C*-algebry przez działanie pewnego automorfizmu, ich wielorakich opisów oraz charakteryzacji posiadanych przez nie własności.

'Zwykłe' iloczyny krzyżowe pojawiły się w teorii algebr operatorowych już na jej samym początku, najpierw w kontekście algebr von Neumanna, a później także dla C*-algebr. W najprostszej wersji danymi wejściowymi dla ich konstrukcji były pewna C*-algebra A oraz automorfizm $\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$; szybko zauważono, że można patrzeć na tę sytuację jako na działanie grupy $\mathbb{Z}$ na algebrze A, a następnie zastąpić $\mathbb{Z}$ przez dowolną grupę dyskretną (czy ogólniej lokalnie zwartą) G. Historię i wyczerpujący przegląd podstawowych wyników związanych z tak rozumianymi iloczynami krzyżowymi zawiera niedawna monografia [Wil07]; nie będzie przesadą stwierdzenie, że stanowią one jeden z centralnych tematów teorii C*-algebr, dostarczając wielu interesujących przykładów (w szczególności umożliwiając budowanie ciekawych nieprzemiennych C*-algebr z 'klasyczno-dynamicznych' danych wejściowych, czyli działań grup na przestrzeniach lokalnie zwartych przez homeomorfizmy), będąc źródłem naturalnej dualności, a także odgrywając istotną rolę w twierdzeniach klasyfikacyjnych.

Począwszy od lat siedemdziesiątych XX wieku stało się jasne, że w wielu sytuacjach konstrukcja oparta na działaniach przez automorfizmy jest niewystarczająca, a jednocześnie w naturalny sposób pojawiają się jej uogólnienia. Konkretnym impulsem do ich badania było z jednej strony zdefiniowanie przez Cuntza pod koniec lat siedemdziesiątych XX wieku C*-algebry O_N, generowanej przez N izometrii o ortogonalnych obrazach, którą można postrzegać jako produkt krzyżowy algebry UHF przez pewien endomorfizm, a z drugiej potrzeba budowy C*-algebr związanych z klasycznymi układami dynamicznymi, w których działanie nie odbywa się przez homeomorfizmy, a raczej przez (być może zdefiniowane tylko częściowo) ciągłe odwzorowania nieodwracalne. Szybko okazało się, że rezygnacja z założenia o działaniu przez automorfizmy prowadzi do dużo bogatszej klasy C*-algebr, ale też wiąże się z koniecznością rozwiązywania wielu nowych problemów koncepcyjnych i technicznych; w ciągu ostatnich dwudziestu lat pojawiło się wiele różnych konstrukcji takich uogólnionych iloczynów krzyżowych, a ich badanie stało się w naturalny sposób istotnym elementem głównego nurtu studiów nad algebrami operatorowymi. W ostatniej dekadzie dodatkowej motywacji do badania podobnych obiektów dostarczyły pewne zainicjowane znów przez Cuntza konstrukcje C*-algebr analogicznego typu ściśle związane z teorią liczb.

Podstawowy wkład habilitanta w dziedzinę polega na systematycznym uporządkowaniu wielu konstrukcji rozwiniętych we wspomnianym okresie, sięgającym daleko poza proste encyklopedyczne opanowanie istniejącej literatury i wymagającym głębokiego zrozumienia podstaw i natury rozważanych pojęć. Uogólniony iloczyn krzyżowy w podstawowej wersji to uniwersalna C*-algebra powiązana z parą (A, α), gdzie A jest C*-algebrą, a $\alpha : A \to A$ endomorfizmem (czy odwzorowaniem całkowicie dodatnim), zadana przez pewien homomorficzny obraz algebry A (który oznaczymy przez $\pi(A)$) oraz operator U 'implementujący' działanie α, w następującym sensie:

$$U\pi(a)U^* = \pi(\alpha(a)), \quad a \in A.$$

W rozmaitych pracach rozważano różne warunki, jakie muszą być spełnione przez parę (π, U), czy też dane wejściowe (A, α), czasami uwzględniając w konstrukcji dodatkowe czynniki (na przykład tak zwany operator transferu). Habilitant zdołał zidentyfikować te z nich, które prowadzą do optymalnej konstrukcji, pokazując w szczególności, że pewne z wcześniej przyjmowanych założeń są zbędne, pewne zachodzą automatycznie, a pewne nie wpływają w żadnym stopniu na otrzymywany obiekt.

Wspomniana wcześniej definicja algebry Cuntza zainspirowała późniejszą podaną przez Pimsnera konstrukcję C*-algebr powiązanych z C*-korespondencją X nad 'algebrą współczynników' A, nazwanych później algebrami Cuntza-Pimsnera. Uogólnienia algebr Cuntza-Pimsnera były badane przez wielu matematyków, w szczególności przez Katsurę. Jednym z podstawowych narzędzi zaobserwowanych i wykorzystywanych następnie przez habilitanta jest utożsamienie opisanego w poprzednim akapicie iloczynu krzyżowego przez odwzorowanie całkowicie dodatnie na A z pewną algebrą typu Cuntza-Pimsnera, a więc w szczególności identyfikacja właściwej C*-korespondencji nad A. Cała konstrukcja została przeprowadzona przy bardzo ogólnych założeniach (między innymi także dla algebr bez jedynki) i z uwzględnieniem dodatkowego parametru będącego ideałem J w algebrze A; obiekty powstające w wyniku tej ostatniej modyfikacji nazywa się względnymi iloczynami krzyżowymi czy względnymi algebrami Cuntza-Pimsnera.

Oprócz identyfikacji 'odpowiednich' C*-algebr habilitant podał daleko idące uogólnienia klasycznych kryteriów łączących 'minimalność' układu dynamicznego (A, α) (przy uwzględnieniu ideału J) z prostotą otrzymywanego iloczynu krzyżowego $C^*(A, \alpha, J)$ oraz 'aperiodyczność' czy 'topologiczną wolność' układu (A, α) z czystą nieskończonością $C^*(A, \alpha, J)$. Odpowiednim pojęciom dla pary (A, α) należało po pierwsze zapewnić odpowiednie interpretacje; i tym razem wyniki uzyskane przez habilitanta organizują, uogólniają i optymalizują wszystkie wcześniejsze rezultaty. Metody związane z wykazywaniem prostoty pozwalają również badać w bardzo ogólnym kontekście ideały w iloczynie krzyżowym, co z kolei prowadzi do ciekawych wniosków dotyczących K-teorii. Warto tu także wspomnieć o tym, że habilitant systematycznie zbadał kwestię iniektywności odwzorowania π, czyli zagadnienie tego, kiedy 'początkowa' algebra A jest w istocie podalgebrą iloczynu krzyżowego, a także uzyskał pewne twierdzenia o charakterze dylatacyjnym, podające realizację algebry $C^*(A, \alpha, J)$ jako narożnika pewnego 'klasycznego' iloczynu krzyżowego. W przypadku, gdy algebra A jest algebrą przemienną habilitant podał liczne konkretne dynamiczne interpretacje ogólnych abstrakcyjnych twierdzeń – wyliczając na przykład K-teorię otrzymanej algebry w terminach pojęć bezpośrednio związanych z wyjściowym układem dynamicznym.

Na uwagę zasługuje również przeprowadzone przez habilitanta dogłębne badanie algebr typu Doplichera-Robertsa, innych uogólnień iloczynów krzyżowych, powiązanych z C*-prekategorią wyposażoną w prawe tensorowanie nad $\mathbb{N}$. W pracy [Kwa13] podany został konkretny 'macierzowy' model odpowiedniej algebry, przywodzący w naturalny sposób na myśl działanie klasycznych Hilbertowskich operatorów Toeplitza, a jej względne wersje zostały zidentyfikowane z pewnymi względnymi algebrami Cuntza-Pimsnera. Otrzymano również pewne wyniki dotyczące kraty ideałów związanych z algebrami typu Doplichera-Robertsa.

Opisany wyżej kontekst (para (A, α), gdzie $\alpha : A \to A$ jest pewnym odwzorowaniem całkowicie dodatnim czy endomorfizmem) można łatwo zinterpretować jako studiowanie działania półgrupy $\mathbb{N}$ na A; takie przeformułowanie w naturalny sposób prowadzi do badania działań ogólniejszych półgrup dyskretnych P. Szczególnie satysfakcjonujące wyniki uzyskuje się w przypadku, gdy P jest tak zwaną półgrupą Ore; przy dodatkowym założeniu o zachodzeniu prawa skracania można myśleć o takiej półgrupie jako o zanurzonej w grupie G tak, że $PP^{-1} = G$. Habilitant badał naturalne uogólnienia algebr typu Doplichera-Robertsa czy Cuntza-Pimsnera dla układów produktowych (czy C*-prekategorii z prawym tensorowaniem) nad półgrupami Ore. Te drugie okazały się posiadać naturalne realizacje jako C*-algebry powiązane z wiązkami Fella (czyli jeszcze inne uogólnienia iloczynów krzyżowych), co pozwoliło habilitantowi podać i tu pewne kryteria dotyczące prostoty czy czystej nieskończoności badanych algebr, sformułować i udowodnić silne rezultaty dotyczące skręconych iloczynów krzyżowych przez działania półgrup Ore czy otrzymać interesujące interpretacje badanych struktur w języku uogólnień algebr grafów (topologicznych) wyższego rzędu. Podejście wykorzystujące jednocześnie C*-prekategorie związane z pewną klasą półgrup jest tematyką obecnych badań habilitanta, w szczególności wymienionego w autoreferacie preprintu [KL] oraz jego kontynuacji. W badaniach tych coraz istotniejszą rolę odgrywa spojrzenie na każdy bimoduł nad C*-algebrą A jako na pewnego rodzaju 'częściowy układ dynamiczny' skojarzony z A.

Struktura autoreferatu jest jasna i czytelna, a jego lektura pozwala docenić głębokie zrozumienie przez habilitanta formalnych i intuicyjnych zależności między rozmaitymi rozważanymi konstrukcjami, wspominane już wcześniej w recenzji. Prace składające się na osiągnięcie są również napisane dobrze, zawierają kompletne prezentacje dowodów, a jednocześnie nie są przegadane. Jednocześnie należy odnotować zdecydowanie zbyt dużą liczbę drobnych błędów typograficznych czy gramatycznych występujących w autoreferacie oraz nie zawsze szczęśliwie wybrane polskie odpowiedniki angielskich terminów ('zakręcone' zamiast ‘skręcone’, ‘skończenie aproksymatywna’ zamiast ‘aproksymatywnie skończona’). W autoreferacie zdarzają się też drobne omyłki o charakterze matematycznym (choćby błędna definicja na początku podrozdziału 6.1).

Pozostały dorobek i aktywność naukową dr Kwaśniewskiego oceniam jako satysfakcjonujące. Oprócz prac zawartych w osiągnięciu habilitacyjnym jest on również autorem bądź współautorem kilkunastu innych artykułów, z których ponad dziesięć zostało już opublikowanych bądź przyjętych do druku. Nie licząc pierwszych dwóch artykułów, powstałych jeszcze na studiach magisterskich, wszystkie kolejne są pośrednio bądź bezpośrednio związane z tematyką rozprawy habilitacyjnej. W szczególności rozprawa doktorska habilitanta, obroniona w IMPAN w 2009 roku i nagrodzona Nagrodą Wacławka, dotyczyła pewnych operatorów związanych z nieodwracalnymi czy częściowymi układami dynamicznymi, których analiza stanowi czytelną inspirację do rozważań powiązanych z uogólnionymi produktami krzyżowymi.

Dr Kwaśniewski w ostatnich kilku latach publikuje dużo i w dobrych czasopismach, widać wyraźny wpływ na jego rozwój naukowy rocznego pobytu w IMPAN, a zwłaszcza wyjazdu podoktorskiego do Odense. Habilitant rozpoczynał karierę naukową w pewnej izolacji, co z jednej strony sprawiło, że jego prace stosunkowo późno uzyskały szerszy odzew na świecie, z drugiej poniekąd paradoksalnie umożliwiło mu spojrzenie świeżym, krytycznym okiem na rozważane zagadnienia. Biorąc pod uwagę etap kariery dr Kwaśniewskiego, jego liczba cytowań (64 cytowania według bazy MathSciNet w dniu pisania recenzji) jest satysfakcjonująca, i będzie zapewne systematycznie rosnąć. Prowadził liczne i urozmaicone zajęcia dydaktyczne, kierował grantem Narodowego Centrum Nauki, współorganizował konferencję naukową oraz recenzował prace dla przyzwoitych czasopism o zasięgu międzynarodowym.

Kompetencje i osiągnięcia habilitanta zostały już docenione w gronie światowych ekspertów zajmujących się C*-algebrami grafowymi czy rozmaitymi uogólnieniami produktów krzyżowych. Świadczą o tym zaproszenia na międzynarodowe konferencje związane z tą tematyką, a także choćby zaproszenie na dwutygodniową wizytę do Brazylii u najsłynniejszego specjalisty w dziedzinie uogólnień produktów krzyżowych, Ruya Exela. Kryterium współpracy międzynarodowej wypełnia też choćby wspomniany już pobyt habilitanta w Danii na stypendium podoktorskim Marie Curie; nawiązane tam kontakty zaowocowały wspólną aktywnością badawczą prowadzoną nie tylko z matematykami z ośrodka, w którym dr Kwaśniewski przebywał, ale także choćby z Oslo i z Getyngi.

KONKLUZJA

Biorąc pod uwagę wszystkie powyższe fakty, uważam że **osiągnięcie habilitacyjne dr Bartosza Kosmy Kwaśniewskiego oraz jego pozostały dorobek oraz aktywność naukowa spełniają wszystkie ustawowe wymogi stawiane kandydatom do habilitacji i rekomenduję nadanie dr Kwaśniewskiemu stopnia doktora habilitowanego**.

Adam Skalski

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

Warszawa, 6 listopada 2017 roku