

dr Bartosz Kosma Kwaśniewski
Zakład Analizy, Instytut Matematyki
Uniwersytet w Białymstoku
Ciołkowskiego 1M
15-245 Białystok
e-mail: bartoszk@math.uwb.edu.pl
WWW: math.uwb.edu.pl/~zaf/kwasniewski

Autoreferat do wniosku habilitacyjnego

I) Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

DOKTOR NAUK MATEMATYCZNYCH: rozprawa doktorska *Analiza spektralna operatorów generujących nieodwracalne układy dynamiczne*, napisana pod kierunkiem prof. dr. hab. A. V. Lebedeva, obroniona z wyróżnieniem w Instytucie Matematycznym PAN, Warszawa, styczeń 2009.

MAGISTER MATEMATYKI: praca *Spektralne i algebraiczne własności operatorów nielokalnych*, napisana pod kierunkiem prof. dr. hab. A. V. Lebedeva, obroniona z wyróżnieniem na Wydziale Matematyczno-Fizycznym Uniwersytetu w Białymstoku, czerwiec 2003.

LICENCJAT Z MATEMATYKI FINANSOWEJ: praca *O istnieniu procesu stochastycznego - twierdzenie Kołmogorowa*, napisana pod kierunkiem dr. J. Kotowicza, obroniona na Wydziale Matematyczno-Fizycznym Uniwersytetu w Białymstoku, lipiec 2002.

II) Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu

10/2014 – 9/2016: staż podoktorski w ramach indywidualnego stypendium (7PR) UE, Department of Mathematics and Computer Science University of Southern Denmark, Odense, Dania

10/2013 – 9/2014: adiunkt, Samodzielna Pracownia Geometrii Nieprzemiennej, Instytut Matematyczny PAN, Warszawa

10/2009 – nadal: adiunkt, Zakład Analizy, Instytut Matematyki, UwB

10/2003 – 9/2009: asystent, Zakład Analizy Funkcjonalnej, Instytut Matematyki, UwB

10/2002 – 7/2003: asystent stażysta, Instytut Matematyki, UwB

III) Wskazanie osiągnięcia habilitacyjnego

Na wskazane osiągnięcie habilitacyjne składa się cykl 9 prac zatytułowany

Struktury C^* -algebr zadanych przez relacje typu dynamicznego

Lista prac zawierających osiągnięcie

1. [KL13] B. K. Kwaśniewski, A. V. Lebedev *Crossed products by endomorphisms and reduction of relations in relative Cuntz-Pimsner algebras* J. Funct. Anal., 264 (2013), 1806–1847.
2. [Kwa13] B. K. Kwaśniewski, *C^* -algebras generalizing both relative Cuntz-Pimsner and Doplicher-Roberts algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 365 (2013), no. 4, 1809–1873.
3. [Kwa14] B. K. Kwaśniewski, *Topological freeness for Hilbert bimodules* Israel J. Math. 199 (2014), no. 2, 641–650.
4. [Kwa14'] B. K. Kwaśniewski, *Crossed products for interactions and graph algebras* Integr. Equ. Oper. Theory 80 (2014), no. 3, 415–451.
5. [Kwa15] B. K. Kwaśniewski, *Ideal structure of crossed products by endomorphisms via reversible extensions of C^* -dynamical systems* Int. J. Math. 26 (2015), no. 3, 1550022 [45 pages].
6. [Kwa16] B. K. Kwaśniewski, *Crossed products by endomorphisms of $C_0(X)$ -algebras* J. Funct. Anal., 270 (2016), 2268–2335.
7. [KS16] B. K. Kwaśniewski, W. Szymański, *Topological aperiodicity for product systems over semigroups of Ore type*, J. Funct. Anal. 270 (2016), no. 9, 3453–3504.
8. [KS17] B. K. Kwaśniewski, W. Szymański, *Pure infiniteness and ideal structure of C^* -algebras associated to Fell bundles*, J. Math. Anal. Appl. 445 (2017), no. 1, 898–943.
9. [Kwa17] B. K. Kwaśniewski, *Exel's crossed products and crossed products by completely positive maps*, Praca przyjęta do druku w Houston Journal of Mathematics (w dniu 15-08-2014, listy w załączeniu). Praca dostępna w arXiv:1404.4929.

W przypadku pracy [KL13] wkład współautorów należy uznać za następujący: B. K. Kwaśniewski 70%, A. V. Lebedev 30%. W przypadku prac [KS16], [KS17] wkład współautorów jest odpowiednio następujący: B. K. Kwaśniewski 65%, 70%, W. Szymański 35%, 30%. Odpowiednie oświadczenia zostały dołączone do wniosku.

1 Wstęp i omówienie zagadnienia

Produkty krzyżowe W^* -algebr przez działania grup dyskretnych rozważał już John von Neumann. W [Neu40] posłużyły one jako narzędzie do konstrukcji pierwszych przykładów faktorów typu III, tzw. faktorów czysto nieskończonych. C^* -algebraiczne odpowiedniki produktów krzyżowych pojawiały się następnie m.in. w pracach Segala, a formalną definicję jako pierwszy najprawdopodobniej podał Turumaru [Tur58]. Do końca lat 70-tych ubiegłego wieku teoria produktów krzyżowych C^* -algebr przez działania grupowe, w podstawowym zakresie, została ukonstytuowana, patrz np. [Ped79], [Gre78]. Jednak do dnia dzisiejszego jest ona rozwijana i wciąż znajduje nowe nietrywialne zastosowania nie tylko w teorii C^* -algebr i analizie harmonicznej, por. [Wil07], lecz także np. w geometrii nieprzemiennej [NSS08] i teorii równań funkcjonalno-różniczkowych [AL94], [AL98]. W istocie wiele struktur pełniących fundamentalną rolę w fizyce matematycznej i współczesnej teorii algebr operatorowych jest modelowana przez dynamikę nieodwracalną zadaną przez obiekty znacznie bardziej ogólne niż automorfizmy. Publikacje wchodzące do listy osiągnięcia habilitacyjnego stanowią wkład w teorię uogólnionych produktów krzyżowych C^* -algebr, w tym: produktów krzyżowych przez endomorfizmy, półgrupowe działania C^* -korespondencji (systemy produktowe) i grupowe działania przez hilbertowskie bimoduły (wiązki Fella).

Pojęcie produktu krzyżowego C^* -algebry przez endomorfizm pojawiło się, w sposób nieformalny, w przełomowej pracy Cuntza [Cu77], gdzie zostało również wprowadzone pojęcie *prostej C^* -algebry czysto nieskończonej* (C^* -algebraicznego analogonu W^* -faktora typu III) oraz słynne *algebry Cuntza* $\mathcal{O}_n$. Pierwsze konstrukcje produktów krzyżowych przez endomorfizmy badane były przez konkretne reprezentacje, gdzie rozpatrywany endomorfizm był injektywny i działał na C^* -algebrze z jedyneką [Cu77], [Pas80], [Cun82], [Rør95], [Mur96]. Ich zasadniczym celem była konstrukcja prostych C^* -algebr o ciekawych własnościach. W szczególności pierwszy kompletny zestaw modeli dla algebr Kirchberga (ośrodkowych i nuklearnych, prostych algebr czysto nieskończonych), spełniających UCT, został otrzymany jako produkty krzyżowe przez endomorfizmy [Rør95], [ER95]. Przypomnijmy, iż algebry Kirchberga, spełniające UCT, są całkowicie sklasyfikowane przez swoją K -teorię [Kir00], [Phi00].

Uniwersalną definicję produktu krzyżowego dla “dowolnego” endomorfizmu zaproponował Stacey [Sta93], jednakże jak zauważono w [Adj95] definicja ta wymaga dodatkowego założenia, że rozpatrywany endomorfizm jest rozszerzalny na algebrę mnożników. Co więcej, jeśli rozpatrywany endomorfizm nie jest injektywny, to produkt krzyżowy Stacey’a się degeneruje i może być np. algebrą zerową. Dlatego w [LR04] zaproponowano kolejną definicję, która ma z kolei wadę, iż nie jest uogólnieniem klasycznego produktu krzyżowego przez automorfizmy. W międzyczasie Exel [Exe03] zaproponował jeszcze inną definicję produktu krzyżowego przez endomorfizm, która wymaga dodatkowego składnika, jakim jest operator przejścia. Definicję tę zmodyfikowano, m.in. w [ER07]. Łącząc prace wielu autorów, tę mnogość różnych wariantów i konstrukcji można “zunifikować” na gruncie względnych algebr Cuntza-Pimsnera $\mathcal{O}(X, J)$ [Pim97], [MS98]. Różne konstrukcje wiążą się jednak z różnymi C^* -korespondencjami X i różnymi ideałami J . Zatem takie ogólne podejście nie daje pełnego, spójnego obrazu – nie wyjaśnia związków między różnymi konstrukcjami na poziomie generatorów i relacji.

Ważną częścią osiągnięcia habilitacyjnego jest opracowanie kanonicznych konstrukcji, uporządkowanie i rozwinięcie ogólnej teorii produktów krzyżowych C^* -algebr przez pojedyncze odwzorowania. Uzyskano to poprzez wprowadzenie pojęcia (względego) produktu krzyżowego przez odwzorowanie całkowicie dodatnie [Kwa17], eliminację zbędnych założeń i relacji występujących w literaturze [KL13], [Kwa16], [Kwa17], uzyskanie silnych rezultatów strukturalnych dotyczących kraty ideałów, czystej nieskończoności czy K -teorii produktów krzyżowych przez endomorfizmy [Kwa15], [Kwa16] oraz dogłębną analizę ważnych przykładów [Kwa14'], [Kwa17]. Ponadto w [Kwa13] zunifikowano teorię względnych algebr Cuntza-Pimsnera i algebr Doplichera-Roberts, otrzymując silne narzędzia do badania ogólnej struktury C^* -algebr zadanych przez szeroko i abstrakcyjnie pojętą dynamikę pojedynczo generowaną (prawie tensorowanie na C^* -prekategorii z obiektami tworzącymi półgrupę N).

Kolejną częścią osiągnięcia habilitacyjnego jest wkład w teorię półgrupowych produktów krzyżowych i ich uogólnień. Półgrupowe wersje wyżej wymienionych produktów krzyżowych przez endomorfizmy były badane m. in. w związku z algebrami Toeplitza półgrup izometrii [ALNR94], [LR96], C^* -algebrami Hecke typu Bost-Connesa związanymi z ciałami liczbowymi [LR99], [ALR97], przejściami fazowymi [Lac98], krótkimi ciągami dokładnymi i iloczynami tensorowymi [Lar00], oraz grafami wyższych rzędów [Bro12]. Mimo wielu osiągnięć w tej dziedzinie, na dzień dzisiejszy jej status jest daleki od statusu teorii w pełni rozwiniętej. Wkładem habilitanta jest dogłębna analiza i opis struktury półgrupowej wersji algebry Pimsnera $\mathcal{O}_X$ [Fow02] w przypadku, gdy X jest regularnym systemem produktowym nad półgrupą P typu Ore [KS16]. Analiza ta zainspirowana jest przez wyniki prac [Kwa13], [Kwa14]. Prowadzi ona do silnych narzędzi takich jak: twierdzenie o jednoznaczności dla $\mathcal{O}_X$, kryterium prostoty $\mathcal{O}_X$ i opis dylatacji systemu produktowego X nad P do wiązki Fella $\mathcal{B}_X$ nad grupą $G(P)$, który pozwala badać $\mathcal{O}_X$ jako algebrę cięć $C^*(\mathcal{B}_X)$ tej wiązki. Rezultaty te pozwalają m.in. zdefiniować zredukowaną wersję $\mathcal{O}_X^r$ algebry $\mathcal{O}_X$ i pokazują, że przy powyższych założeniach algebra $\mathcal{O}_X$ jest właściwym obiektem badań; w szczególności we właściwy sposób modeluje odpowiednie produkty krzyżowe, patrz [KS16].

Dopełnieniem powyższych wyników jest analiza zredukowanej C^* -algebry cięć $C_r^*(\mathcal{B})$ wiązki Fella $\mathcal{B}$ nad grupą dyskretną G [KS17]. Do głównych rezultatów należą opis struktury ideałów, w tym przestrzeni ideałów prymitywnych, oraz ustalenie efektywnych kryteriów czystej nieskończoności dla $C_r^*(\mathcal{B})$. Rezultaty te mają bezpośrednie zastosowanie do grupowych produktów przez działania częściowe, których teoria jest dobrze rozwinięta, por. [Exel], oraz pośrednio, przez otrzymane wcześniej dylatacje systemów produktowych do wiązek Fella, również do algebr typu $\mathcal{O}_X$. Otrzymane kryteria czystej nieskończoności nie tylko uogólniają, ale też wzmacniają i unifikują analogiczne wyniki otrzymane w kontekście produktów krzyżowych przez następujących autorów: Laca, Spielberg [LS96]; Jolissaint, Robertson [JR00]; Sierakowski, Rørdam [RS12]; Giordano, Sierakowski [GS14] oraz Ortega, Pardo [OP14]. Jak wykazano, rezultaty [KS17] są optymalne w zastosowaniu do algebr grafowych. Zastosowano je również do pewnej klasy półgrupowych produktów krzyżowych typu Exela [Lar10], [KL09].

Bardziej szczegółowy opis zagadnienia zaczynamy od obiektów mniej zaawansowanych tak, by przechodząc po kolejnych szczeblach abstrakcji dojść do obiektów bardziej

ogólnych. W rozdziale 2 omawiamy produkty krzyżowe C^* -algebr przez endomorfizm. W rozdziale 3 przedstawimy ogólniejszą strukturę – względne produkty krzyżowe przez odwzorowania całkowicie dodatnie. Rozdział 4 jest poświęcony ogólnej teorii unifikującej względne algebry Cuntz-Pimsnera oraz algebry Doplichera-Roberts. W rozdziale 5 konstrukcję typu Doplichera-Roberts rozszerzamy na półgrupy typu Ore otrzymując efektywny opis półgrupowej wersji algebry Pimsnera $\mathcal{O}_X$. Omawiamy tu też pojęcie topologicznej wolności dla hilbertowskich bimodulów, systemów produktowych i wiązek Fella. W rozdziale 6 przedstawiamy rezultaty dotyczące struktury ideałów oraz kryteria czystej nieskończoności C^* -algebr związanych z wiązkami Fella nad grupami dyskretnymi.

Spis treści

1	Wstęp i omówienie zagadnienia	3
1.1	Notacja i pojęcia wstępne	6
2	Produkty krzyżowe przez endomorfizmy	8
2.1	Podstawowe definicje i fakty	9
2.2	Struktura produktów krzyżowych przez endomorfizmy	12
2.3	Produkty krzyżowe przez endomorfizmy $C_0(X)$ -algebr	15
3	Produkty krzyżowe przez odwzorowania całkowicie dodatnie	18
3.1	Podstawowe definicje i fakty	18
3.2	Produkty krzyżowe Exela	20
3.3	Produkty krzyżowe przez interakcje	23
4	Unifikacja względnych algebr Cuntza-Pimsnera i algebr Doplichera-Roberts	26
4.1	Podstawowe definicje i fakty	27
4.2	Konstrukcja $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J})$	29
4.3	Struktura ideałów $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J})$	31
4.4	Zanurzenia algebr Cuntza-Pimsnera w algebry Doplichera-Roberts	33
5	Algebry Cuntza-Pimsnera dla systemów produktowych nad półgrupami Ore	33
5.1	Konstrukcja algebry $\mathcal{O}_X$ w duchu Doplichera-Roberts	34
5.2	Topologiczna wolność dla systemów produktowych	36
5.3	Zastosowania i przykłady	38
6	Struktura ideałów i czysta nieskończoność algebr związanych z wiązkami Fella	40
6.1	Struktura ideałów $C_r^*(\mathcal{B})$	41
6.2	Czysta nieskończoność $C_r^*(\mathcal{B})$	43

1.1 Notacja i pojęcia wstępne

Przez ideał w C^* -algebrze rozumiemy domknięty ideał dwustronny. Jeśli I jest ideałem w C^* -algebrze A piszemy $I \triangleleft A$. *Anihilator ideału* I w C^* -algebrze A oznaczamy przez $I^\perp := \{a \in A : aI = 0\}$ (jest to największy ideał w A taki, że $I \cap I^\perp = \{0\}$). Wszystkie homomorfizmy między C^* -algebrami z definicji zachowują involucję. Dla operacji $\gamma : C \times D \rightarrow E$ takich jak mnożenie, formy półtoraliniowe, etc., używamy notacji:

$$\gamma(C, D) = \overline{\text{span}}\{\gamma(c, d) : c \in C, d \in D\}.$$

Jeśli A działa w sposób niezdegenerowany na przestrzeni Hilberta H , tj. gdy $A \subseteq \mathcal{B}(H)$ oraz $AH = H$, to algebrę lewych, prawych i obustronnych mnożników można zdefiniować jak następuje: $M_\ell(A) := \{x \in \mathcal{B}(H) : xA \subseteq A\}$, $M_r(A) := M_\ell(A)^*$ i $M(A) := M_\ell(A) \cap M_r(A)$. Można te algebry również zdefiniować abstrakcyjnie jako algebry pewnych operatorów na A , albo podalgebry obwiedniej algebry von Neumanna A^{**} , [Ped79]. Algebra $M(A)$ jest C^* -algebrą (z jedyneką 1), którą można zdefiniować również jako uzupełnienie A w *topologii strict*, tzn. topologii zadanej przez półnormy $m \mapsto \|ma\|$, $m \mapsto \|am\|$ dla $a \in A$.

(Prawą) C^* -korespondencją nad C^* -algebrą A nazywamy prawy hilbertowski A -moduł X wraz z lewym działaniem A na X zadany przez homomorfizm $\phi : A \rightarrow \mathcal{L}(X)$, gdzie $\mathcal{L}(X)$ jest C^* -algebrą wszystkich sprzężalnych (ang. *adjointable*) operatorów na X , por. [Lan94], [RW98]. Piszemy wtedy $a \cdot x = \phi(a)x$, $a \in A$, $x \in X$. Analogicznie możemy zdefiniować lewą korespondencję jako lewy moduł hilbertowski. Każdej (prawej) C^* -korespondencji X odpowiada “odwrotna” lewa C^* -korespondencja $\tilde{X}$. *Hilbertowskim A -bimodułem* nazywamy przestrzeń X , która jest jednocześnie prawą i lewą C^* -korespondencją, gdzie prawa $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ oraz lewa ${}_A \langle \cdot, \cdot \rangle$ A -wartościowa forma półtoraliniowa są takie, że $x \cdot \langle y, z \rangle_A = {}_A \langle x, y \rangle \cdot z$, dla każdego $x, y, z \in X$. W szczególności hilbertowski A -bimoduł jest modułem równoważności Mority-Rieffela między ideałami $\langle X, X \rangle_A$ oraz ${}_A \langle X, X \rangle$ w A , patrz np. [RW98]. Zatem hilbertowskie bimoduły możemy traktować jako częściowe równoważności.

Reprezentacją C^* -korespondencji X nazywamy parę (π, π_X) , gdzie $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(H)$ jest reprezentacją C^* -algebry A na przestrzeni Hilberta H , a $\pi_X : X \rightarrow \mathcal{B}(H)$ jest odwzorowaniem liniowym takim, że

$$\pi_X(a \cdot x) = \pi(a)\pi_X(x), \quad \pi_X(x \cdot b) = \pi_X(x)\pi(b), \quad \pi_X(x)^*\pi_X(y) = \pi(\langle x, y \rangle_A),$$

dla $a, b \in A$, $x \in X$. C^* -algebrę $C^*(\pi(A) \cup \pi_X(X))$ generowaną przez $\pi(A)$ oraz $\pi_X(X)$ nazywamy C^* -algebrą generowaną przez (π, π_X) . Zbiór $\mathcal{K}(X)$ *uogólnionych operatorów zwartych* na X z definicji jest domknięciem otoczki liniowej rozpiętej przez operatory $\Theta_{x,y}$, gdzie $\Theta_{x,y}(z) = x \cdot \langle y, z \rangle_A$ dla $x, y, z \in X$. W szczególności $\mathcal{K}(X)$ jest ideałem w C^* -algebrze $\mathcal{L}(X)$. Każda reprezentacja (π, π_X) C^* -korespondencji X indukuje homomorfizm $(\pi, \pi_X)^{(1)} : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{B}(H)$, który spełnia

$$(\pi, \pi_X)^{(1)}(\Theta_{x,y}) = \pi_X(x)\pi_X(y)^*,$$

dla $x, y \in X$. Niech $J(X) := \phi^{-1}(\mathcal{K}(X))$ będzie ideałem w A składającym się z elementów, które działają na X z lewej strony jak uogólnione operatory zwarte. Dla dowolnej reprezentacji (π, π_X) C^* -korespondencji X obcięcia $(\pi, \pi_X)^{(1)} \circ \phi|_{J(X)}$ oraz $\pi|_{J(X)}$

zadają dwie reprezentacje $J(X) \triangleleft A$. Dla każdego ideału J w $J(X)$ powiemy, że reprezentacja (π, π_X) jest J -kowariantna, gdy $(\pi, \pi_X)^{(1)} \circ \phi|_J = \pi|_J$. Względną algebrę Cuntza-Pimsnera $\mathcal{O}(J, X)$ [MS98, Definicja 2.18] można zdefiniować jako C^* -algebrę generowaną przez uniwersalną J -kowariantną reprezentację (i_A, i_X) C^* -korespondencji X , por. [FMR03]. Wtedy $\mathcal{O}(J(X), X)$ jest algebrą rozważaną przez Pimsnera [Pim97], a $\mathcal{O}_X := \mathcal{O}(J_X, X)$, gdzie $J_X := (\ker \phi)^\perp \cap J(X)$, jest (bezwzględną) algebrą Cuntza-Pimsnera rozpowszechnioną przez Katsurę [Kat03, Definition 2.6]. Algebra $\mathcal{O}(J, X)$ jest wyposażona w działanie γ okręgu $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, gdzie $\gamma_z(a) = a$ i $\gamma_z(x) = zx$, $a \in A$, $x \in X$.

Na systemy produktowe możemy patrzeć jak na półgrupowe działania C^* -korespondencji na C^* -algebrach, gdzie składaniu morfizmów odpowiada wewnętrzny iloczyn tensorowy C^* -korespondencji. Na przykład, jeśli X jest C^* -korespondencją nad A , to wewnętrzny iloczyn tensorowy zadaje na rodzinie potęg tensorowych $\{X^{\otimes n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie $X^{\otimes 0} := A$ jest bimodułem trywialnym, strukturę półgrupy. Ogólniej [Fow02], jeśli P jest półgrupą z jedynką e i $\{X_p\}_{p \in P}$ jest rodziną C^* -korespondencji nad A , to mówimy, że $X = \bigsqcup_{p \in P} X_p$ jest *systemem produktowym* jeżeli $X_e = A$ jest bimodułem trywialnym, oraz X jest półgrupą, gdzie działanie półgrupowe zadaje izomorfizm $X_p \otimes_A X_q \cong X_{pq}$ dla $p, q \in P \setminus \{e\}$ oraz pokrywa się z prawym i lewym działaniem $X_e = A$ na X_p . *Reprezentacją systemu produktowego* X w C^* -algebrze B nazywamy półgrupowy homomorfizm $\psi : X \rightarrow B$ taki, że

$$(\psi|_A, \psi|_{X_p}) \text{ jest reprezentacją } C^*\text{-korespondencji } X_p, \text{ dla każdego } p \in P.$$

Fowler [Fow02] zdefiniował C^* -algebrę Pimsnera $\mathcal{O}_X$ związaną z systemem produktowym X jako C^* -algebrę generowaną przez uniwersalną reprezentację ι systemu produktowego X taką, że $(\iota|_A, \iota|_{X_p})$ jest reprezentacją $J(X)$ -kowariantną C^* -korespondencji X_p , dla każdego $p \in P$.

Na wiązki Fella można patrzeć jak na grupowe działania przez częściowe równoważności - bimoduły hilbertowskie. Na przykład, gdy $P = G$ jest grupą, systemy produktowe nad P pokrywają się z wysyconymi wiązkami Fella nad G - działaniem grupowym bimodułów równoważności Morita-Rieffela. Ogólnie *wiązkę Fella nad grupą dyskretną* G można zdefiniować jako rodzinę $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g \in G}$ domkniętych podprzestrzeni C^* -algebry B takich, że $B_g^* = B_{g^{-1}}$ oraz $B_g B_h \subseteq B_{gh}$ dla każdego $g, h \in G$. Aksjomatyczna definicja, patrz np. [Exel, Definicja 16.1], mówi, że $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g \in G}$ jest rodziną przestrzeni Banacha wyposażoną w biliniowe odwzorowania mnożenia $B_g \times B_h \rightarrow B_{gh}$ oraz antylińowe involucje $B_g \rightarrow B_{g^{-1}}$, $g, h \in G$, spełniające pewną listę postulatów; w szczególności, $A := B_e$ jest C^* -algebrą i każde włókno B_g jest hilbertowskim A -bimodułem takim, że mnożenie zadaje izomorfizm $B_g \otimes_A B_h \cong B_g B_h \subseteq B_{gh}$, $g, h \in G$. Mówimy, że wiązka Fella $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g \in G}$ jest *wysycona*, gdy $B_g B_h = B_{gh}$, dla każdego $g, h \in G$. Wiazka Fella $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ jest *półwysycona*, gdy $B_n B_1 = B_{n+1}$, dla każdego $n > 0$.

Jeśli $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g \in G}$ jest wiązką Fella, to suma prosta $\bigoplus_{g \in G} B_g$ jest w naturalny sposób wyposażona w strukturę $*$ -algebry, na której istnieje maksymalna C^* -norma $\|\cdot\|_{max}$ oraz minimalna C^* -norma $\|\cdot\|_r$ spełniająca nierówność

$$\|a_e\| \leq \left\| \sum_{t \in G} a_t \right\|_r, \quad \text{dla każdego } \sum_{t \in G} a_t \in \bigoplus_{t \in G} B_t, \quad a_t \in B_t, \quad t \in G, \quad (1)$$

Uzupełnienie $*$ -algebry $\bigoplus_{g \in G} B_g$ w normie $\|\cdot\|_{\max}$ oznaczamy przez $C^*(\mathcal{B})$ i nazywamy pełną C^* -algebrą cięć wiązki $\mathcal{B}$. Uzupełnienie w normie $\|\cdot\|_r$ oznaczamy przez $C_r^*(\mathcal{B})$ i nazywamy zredukowaną C^* -algebrą cięć wiązki $\mathcal{B}$. Równoważnie, $C_r^*(\mathcal{B})$ jest C^* -uzupełnieniem $\bigoplus_{g \in G} B_g$ takim, że odwzorowanie $\bigoplus_{t \in G} B_t \ni \sum_{t \in G} a_t \rightarrow a_e \in B_e$ przedłuża się do warunkowej wartości oczekiwanej $E : C_r^*(\mathcal{B}) \rightarrow B_e$, która jest *wierna*, tj. $E(a^*a) = 0$ implikuje $a = 0$ dla każdego $a \in C_r^*(\mathcal{B})$.

Jeśli X jest hilbertowskim bimodulem nad A , to kładąc $X_n := X^{\otimes n}$ i $X_{-n} := \tilde{X}^{\otimes n}$, dla $n \in \mathbb{N}$, rodzina $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ jest wyposażona w naturalny sposób w strukturę wiązki Fella oraz C^* -algebry $\mathcal{O}_X$ i $C^*(\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}})$ są naturalnie izomorficzne z produktem krzyżowym $A \rtimes_X \mathbb{Z}$ zdefiniowanym w [AEE98]. Wiązka $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ jest półwysycona i każda półwysycona wiązka Fella jest tej postaci.

Cuntz [Cu77] zdefiniował *prostą C^* -algebrę czysto nieskończoną* jako prostą C^* -algebrę, w której każda niezerowa dziedziczna C^* -podalgebra zawiera rzut nieskończony. Pojęcie czystej nieskończoności zostało uogólnione na dowolne C^* -algebry przez Kirchberga i Rørdama w [KR00] w następujący sposób. Jeśli $a, b \in A$ są elementami C^* -algebry A oraz $\varepsilon > 0$ piszemy $a \approx_\varepsilon b$, gdy $\|a - b\| < \varepsilon$. Przypomnijmy, iż element $a \in A^+$ “leży”, w sensie Cuntza, pod elementem $b \in A^+$, co zapisujemy $a \lesssim b$, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $x \in A$ taki, że $xbx^* \approx_\varepsilon a$ (“z dokładnością do epsilon możemy b skompresować do a ”).

Definicja 1.1. Niech A będzie C^* -algebrą. Element $a \in A^+$ jest *nieskończony*, jeśli istnieje $b \in A^+ \setminus \{0\}$ taki, że $a \oplus b \lesssim a \oplus 0$ w algebrze macierzowej $M_2(A)$. Element $a \in A^+ \setminus \{0\}$ nazywany *właściwie nieskończony*, jeśli $a \oplus a \lesssim a \oplus 0$. Powiemy, że C^* -algebra A jest *czysto nieskończona*, jeśli każdy element $a \in A^+ \setminus \{0\}$ jest właściwie nieskończony.

Uwaga 1.2. Właściwą nieskończoność elementu dodatniego można traktować jako *resydualną nieskończoność* [KR00, Stwierdzenie 3.14]. Mianowicie, $a \in A^+ \setminus \{0\}$ jest właściwie nieskończony w A , wtedy i tylko wtedy, gdy element $a + I$ jest nieskończony w A/I dla każdego ideału I w A , gdzie $a \notin I$.

2 Produkty krzyżowe przez endomorfizmy

W tym rozdziale przedstawimy ogólną konstrukcję względnych produktów krzyżowych $C^*(A, \alpha; J)$ przez endomorfizm $\alpha : A \rightarrow A$, gdzie ideały $J \triangleleft A$ pełnią rolę “parametrów” opisujących wszystkie możliwe produkty krzyżowe przez α . Omówimy tu m.in. związki skonstruowanych algebr z wcześniej badanymi konstrukcjami (por. Tabele 1, 2), strukturę ideałów algebr $C^*(A, \alpha; J)$ (Rysunek 1, Twierdzenia 2.11, 2.13, 2.14, 2.19), kryteria czystej nieskończoności i wierności reprezentacji produktów krzyżowych $C^*(A, \alpha; J)$ (Twierdzenia 2.19, 2.21), a także K -teorię ideałów i ilorazów (por. Twierdzenia 2.16, 2.24, 2.25).

Opisane wyniki są kulminacją badań opublikowanych w pracach [KL13], [Kwa15], [Kwa16]. W [KL13] badano przypadek, gdy A jest algebrą z jedyneką, a w [Kwa15], gdy endomorfizm α jest *rozszerzalny* (ang. *extendible*), tj. gdy istnieje jego rozszerzenie do endomorfizmu $\alpha : M(A) \rightarrow M(A)$ na algebrze mnożników $M(A)$, który jest ciągły w topologii strict. W pracy [Kwa16] rozważono dowolne endomorfizmy, przy czym w drugiej jej części skupiono się na przypadku, gdy A jest $C_0(X)$ -algebrą.

2.1 Podstawowe definicje i fakty

Niech $\alpha : A \rightarrow A$ będzie endomorfizmem C^* -algebry A .

Definicja 2.1 (Definicja 2.4 w [Kwa16]). *Reprezentacją* (π, U) endomorfizmu (A, α) na przestrzeni Hilberta H nazywamy parę (π, U) , gdzie $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(H)$ jest niezdegenerowaną reprezentacją algebry A i $U \in \mathcal{B}(H)$ jest operatorem takim, że

$$U\pi(a)U^* = \pi(\alpha(a)), \quad \text{dla każdego } a \in A. \quad (2)$$

Algebrę $C^*(\pi, U) := C^*(\pi(A) \cup U\pi(A))$ nazywamy *C^* -algebrą generowaną przez (π, U)* .

Uwaga 2.2. Dla dowolnej reprezentacji (π, U) mamy

$$C^*(\pi, U) = \overline{\text{span}}\{U^{*n}\pi(a)U^m : a \in \alpha^n(A)A\alpha^m(A)\}$$

oraz $U \in M_\ell(C^*(\pi, U))$ jest lewym mnożnikiem algebry $C^*(\pi, U)$. Jeśli α jest endomorfizmem rozszerzalnym, to $U \in M(C^*(\pi, U))$. Jeśli A jest algebrą z jedyneką, to $U \in C^*(\pi, U)$.

Z powyższej definicji (i multiplikatywności α) wynikają *automatycznie*, co często nie było zauważone w literaturze, por. [KL13, Uwaga 1.3], następujące zależności. Po pierwsze, U jest koniecznie częściową izometrią. Po drugie, zachodzi następująca relacja komutacji

$$U\pi(a) = \pi(\alpha(a))U \quad \text{dla każdego } a \in A. \quad (3)$$

Po trzecie, rzut U^*U należy do komutanta $\pi(A)'$ algebry $\pi(A)$. Stąd zbiór $\{a \in A : U^*U\pi(a) = \pi(a)\}$ jest w rzeczywistości ideałem w C^* -algebrze A . Ideał ten niesie ważną dodatkową informację o reprezentacji (π, U) . Istotnym jest jego położenie względem anihilatora $(\ker \alpha)^\perp$ jądra endomorfizmu α .

Definicja 2.3. Niech J będzie ideałem w A i niech (π, U) będzie reprezentacją endomorfizmu (A, α) . Powiemy, że reprezentacja (π, U) jest *J -kowariantna*, gdy $J \subseteq \{a \in A : U^*U\pi(a) = \pi(a)\}$. Mówimy, że (π, U) jest *reprezentacją kowariantną*, gdy (π, U) jest J -kowariantna dla $J = (\ker \alpha)^\perp$.

Uwaga 2.4. Nietrudno spostrzec, że jeśli α jest monomorfizmem, to reprezentacja (π, U) jest kowariantna wtedy i tylko wtedy, gdy U jest izometrią. Jeśli α jest automorfizmem, to reprezentacja (π, U) jest kowariantna wtedy i tylko wtedy, gdy U jest operatorem unitarnym i wtedy zachodzi również relacja $U^*\pi(a)U = \pi(\alpha^{-1}(a))$, dla $a \in A$.

Produkt krzyżowy związany z (A, α) oraz $J \triangleleft A$ zdefiniujemy jako algebrę generowaną przez uniwersalną reprezentację J -kowariantną. Kryteria istnienia reprezentacji uniwersalnych, czy też uniwersalnych C^* -algebr zadanych przez generatory i relacje są dobrze znane, por. [Kwa17, Sekcja 2.2].

W pracach [KL13], [Kwa15], [Kwa16] badano głównie przypadek, gdy $J \subseteq (\ker \alpha)^\perp$, gdyż tylko wtedy algebra A zanurza się w produkt krzyżowy. Co więcej, ogólną sytuację można sprowadzić do powyższej poprzez przejście do endomorfizmu ilorazowego, patrz uwagi poniżej. Dla pogładowości przedstawimy tu definicję produktu bez żadnych restrykcji na ideał J .

Definicja 2.5 (por. Definicja 2.7 w [Kwa16]). *Względny produkt krzyżowy* endomorfizmu (A, α) względem ideału J nazywamy trójkę $(C^*(A, \alpha; J), \iota_A, u)$, gdzie $C^*(A, \alpha; J)$ jest C^* -algebrą, $\iota_A : A \rightarrow C^*(A, \alpha; J)$ jest niezdegenerowanym homomorfizmem oraz $u \in M_\ell(C^*(A, \alpha; J))$ jest lewym mnożnikiem algebry $C^*(A, \alpha; J)$ takim, że

- i) $\iota_A(\alpha(a)) = u\iota_A(a)u^*$ dla każdego $a \in A$ oraz $J \subseteq \{a \in A : u^*u\iota_A(a) = \iota_A(a)\}$;
- ii) $C^*(A, \alpha; J)$ jest generowana przez $\iota_A(A) \cup u\iota_A(A)$;
- iii) dla każdej reprezentacji J -kowariantnej (π, U) endomorfizmu (A, α) istnieje reprezentacja $\pi \rtimes U$ algebry $C^*(A, \alpha; J)$ taka, że $(\pi \rtimes U)(\iota_A(a)) = \pi(a)$, dla $a \in A$ oraz $(\pi \rtimes U)(u) = U$.

Warunki (i), (ii), (iii) determinują algebrę $C^*(A, \alpha; J)$ z dokładnością do izomorfizmu. Poniżej względny produkt krzyżowy będziemy utożsamiać z tą algebrą. W przypadku, gdy $J = (\ker \alpha)^\perp$, piszemy $C^*(A, \alpha) := C^*(A, \alpha; (\ker \alpha)^\perp)$ i tę algebrę nazywamy (bezwzględnym) *produktem krzyżowym* A przez α .

Uwaga 2.6. W pracy [KL13] (gdy A posiada jedynekę) algebra $C^*(A, \alpha; J)$ została skonstruowana w sposób niemal jawny: poprzez opracowanie specjalnego ”rachunku macierzowego” [KL13, 2.1] i podanie konkretnych wzorów na normy elementów w przestrzeniach spektralnych [KL13, 2.2]. Jak wykazano w pracy [Kwa13] konstrukcja ta ma charakter bardzo ogólny: rozszerzono ją tak, by obejmowała zarówno względne algebry Cuntza-Pimsnera jak i algebry Doplichera-Roberts. Omówimy ją dokładniej w podrozdziale 4.2. Z konstrukcji tych wynika, że uniwersalny homomorfizm ι_A jest iniektywny wtedy i tylko wtedy, gdy $J \subseteq (\ker \alpha)^\perp$, patrz też [Kwa16, Lemat 2.5, Stwierdzenie 2.6].

Uwaga 2.7. Jak wykazano w [KL13, Wniosek 4.14] i zauważono ogólnie w [Kwa16, Appendix], patrz też [Kwa17, Sekcja 3.4], mamy naturalne izomorfizmy

$$C^*(A, \alpha; J) \cong \mathcal{O}(J, E_\alpha), \quad C^*(A, \alpha) \cong \mathcal{O}_{E_\alpha}, \quad (4)$$

gdzie E_α jest C^* -korespondencją zadaną przez endomorfizm α , tzn.

$$E_\alpha := \alpha(A)A, \quad \langle x, y \rangle_A := x^*y, \quad a \cdot x \cdot b := \alpha(a)xb, \quad x, y \in \alpha(A)A, \quad a, b \in A.$$

Dla tej C^* -korespondencji $J(E_\alpha) = A$. Dla ogólnych C^* -korespondencji X nad C^* -algebrą A wiadomo [Kat04], że algebra A zanurza się we względną algebrę Cuntz-Pimsnera $\mathcal{O}(J, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $J \subseteq J_X = J(X) \cap \ker \phi^\perp$. Poprzez wyznaczenie jądra homomorfizmu ι_A , w [KL13, 5.1], opracowano ogólną metodę redukcji C^* -korespondencji X do C^* -korespondencji ilorazowej X/XJ_∞ takiej, że

$$\mathcal{O}(J, X) \cong \mathcal{O}(q_{J_\infty}(J), X/XJ_\infty) \quad \text{oraz} \quad q_{J_\infty}(J) \subseteq J_{X/XJ_\infty}.$$

Metodę tę, nazwaną *redukcją relacji*, uogólniono w [Kwa13, Theorem 6.23] na przypadek algebr związanych z ideałami w prawo-tensorowych C^* -prekategoriami. Pozwala ona na sprowadzenie rozważań ogólnych do przypadku, gdy wyjściowa algebra A zanurza się w obiekt uniwersalny. Gdy $X = E_\alpha$ mamy $J_\infty = \{a \in A : \alpha^n(a) \in J \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N} \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n(a) = 0\}$. Zatem, przechodząc w razie potrzeby do endomorfizmu ilorazowego na A/J_∞ , możemy zawsze założyć, że $J \subseteq \ker \alpha^\perp$.

W pracach [KL13] oraz [Kwa17] ustalono szereg związków między względnymi produktami krzyżowymi innymi konstrukcjami tego typu. Szczególne przypadki (bezwzględnych) produktów krzyżowych rozpatrywanych na algebrach z jedyneką zestawione są w Tabeli 1, por. [KL13, Subsekcja 3.4].

N.	$\alpha : A \rightarrow A$	$C^*(A, \alpha)$	relacje
1.	automorfizm	klasyczny produkt krzyżowy [Tur58]	$UAU^* = A$ $UU^* = U^*U = 1$
2.	$\ker \alpha = \{0\}$, $\alpha(A)$ dziedziczny w A	Cuntz [Cu77] Paschke [Pas80]	$UAU^* \subseteq A$, $U^*AU \subseteq A$ $U^*U = 1$
3.	$\ker \alpha = \{0\}$	Cuntz [Cun82], Murphy [Mur96]	$UAU^* \subseteq A$, $U^*U = 1$
4.	$\ker \alpha \triangleleft A$ komplementarny, $\alpha(A)$ dziedziczny w A	Antonevich, Bakhtin, Lebedev [ABL11]	$UAU^* \subseteq A$, $U^*AU \subseteq A$ $U^*U \in A'$

Tabela 1: Szczególne przypadki produktów krzyżowych (A posiada jedynekę)

W pracy [ABL11] (patrz przypadek 4 w Tabeli 1), autorzy badali produkt krzyżowy endomorfizmu posiadającego tzw. zupełny operator przejścia. Jak zauważył habilitant, endomorfizm posiada takowy operator przejścia wtedy i tylko wtedy, gdy endomorfizm jest częściowo odwracalny w poniższym sensie.

Definicja 2.8 (Definicja 2.1 w [Kwa16]). Powiemy, że endomorfizm (A, α) jest (częściowo) *odwracalny*, gdy jądro $\ker \alpha$ jest ideałem komplementarnym w A (tj. $A = \ker \alpha \oplus (\ker \alpha)^\perp$), a obraz $\alpha(A)$ jest dziedziczną podalgebrą A (tj. $\alpha(A)A\alpha(A) = \alpha(A)$).

Uwaga 2.9. Na mocy [Kwa16, Stwierdzenie A.11] endomorfizm jest (częściowo) odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy C^* -korespondencja E_α jest bimodułem hilbertowskim.

Stacey zaproponował w [Sta93] uniwersalną definicję produktu krzyżowego dla "dowolnego" endomorfizmu α na dowolnej C^* -algebrze A . Jednakże założył on milcząco, że α rozszerza się do endomorfizmu na $M(A)$, co doprowadziło do wprowadzenia pojęcia endomorfizmu rozszerzalnego [Adj95]. Od tej pory założenie rozszerzalności stało się immanentnym elementem wszystkich rozważań dotyczących produktów krzyżowych przez endomorfizmy. Jednak, jak wykazał habilitant, założenie rozszerzalności nie tylko nie jest konieczne, lecz jest wręcz obstrukcją w rozwoju teorii produktów krzyżowych, gdyż uniemożliwia harmonijny opis ideałów takich struktur (obcięcie endomorfizmu rozszerzalnego do ideału niezmienniczego na ogół nie jest endomorfizmem rozszerzalnym).

Kolejnym mankamentem definicji Stacey'a jest fakt, iż algebra A zanurza się w jego produkt krzyżowy wtedy i tylko wtedy, gdy α jest injektywny. W szczególności gdy α jest *punktoowo quasi-nilpotentny*, tj. gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n(a) = 0$ dla każdego $a \in A$, produkt krzyżowy Stacey'a degeneruje się do $\{0\}$. Uwaga ta stała się motywacją do kolejnej bardzo popularnej definicji zaproponowanej przez Lindiarni i Raeburna [LR04]. Ta ostatnia jednak nie jest uogólnieniem klasycznego produktu krzyżowego – prowadzi do algebr typu Teoplitz. Obie konstrukcje objęte są przez omawiane algebry $C^*(A, \alpha; J)$ jak przedstawiono w Tabeli 2, patrz [Kwa17, Stwierdzenie 3.26].

N.	$J \triangleleft A$	$C^*(A, \alpha; J)$	relacje
1.	$J = A$	produkt krzyżowy Stacey’a [Sta93]	$UAU^* \subseteq A$ $U^*U = 1$
2.	$J = \{0\}$	częściowo-izometryczny produkt krzyżowy [LR04]	$UAU^* \subseteq A$, $(U^*U)^2 = U^*U \in A'$

Tabela 2: Przypadki względnych produktów krzyżowych (α jest rozszerzalny)

Rozważanie względnych produktów krzyżowych ma nie tylko tę zaletę, że obejmuje różne konstrukcje; de facto jest ono niezbędne w analizie struktury ideałów produktów bezwzględnych, por. [Kwa15, Uwaga 3.2].

2.2 Struktura produktów krzyżowych przez endomorfizmy

Niech α będzie endomorfizmem C^* -algebry A i niech $J \triangleleft (\ker \alpha)^\perp$. Wtedy algebra A zanurza się w $C^*(A, \alpha; J)$ i możemy traktować ją jako podalgebrę $C^*(A, \alpha; J)$. Produkt krzyżowy jest wyposażony w naturalne w działanie okręgu $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, przy którym izomorfizmy (4) stają się ekwiwantne. C^* -podalgebra $B \subseteq C^*(A, \alpha; J)$ składająca się z punktów niezmienniczych tego działania zawiera A i operator uniwersalny generuje na B endomorfizm $\beta : B \rightarrow B$ taki, że układ (B, β) jest (częściowo) odwracalny oraz

$$C^*(A, \alpha; J) \cong C^*(B, \beta).$$

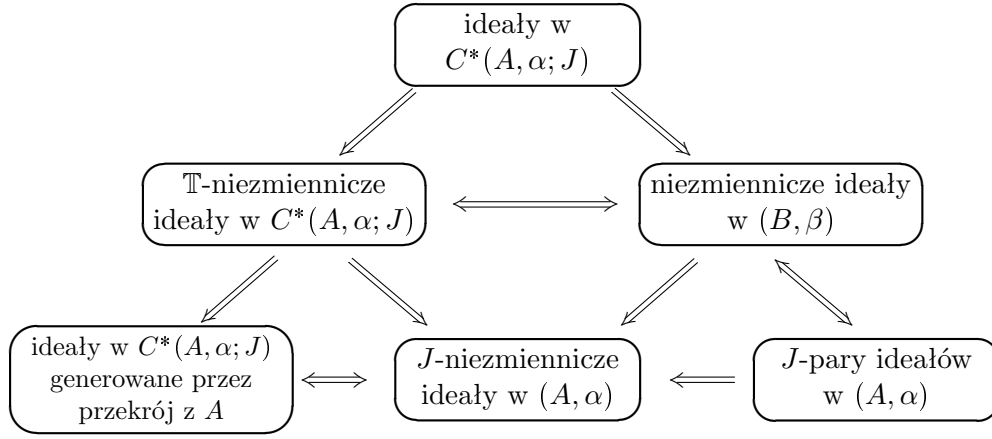
W [Kwa15, 3.1] oraz [Kwa16, 2.6]¹ przedstawiono jawną konstrukcję układu (B, β) w terminach układu (A, α, J) , która wykorzystuje operacje ilorazu, dziedzicznej podalgebry, sumy prostej i granicy induktywnej. Układ (B, β) nazwano (*uniwersalnym*) *odwracalnym* J -*rozszerzeniem* endomorfizmu α .

W pracy [Kwa15, 3.1] badano tę konstrukcję przy założeniu, że α jest rozszerzalny. Wtedy endomorfizm β jest również rozszerzalny (i posiada zupełny operator przejścia), oraz układ (B, β) jest obiektem uniwersalnym w kategorii C^* -algebr z morfizmami będącymi homomorfizmami rozszerzalnymi, patrz [Kwa15, Twierdzenie 3.1]. Poprzez bezpośrednią analizę ustalono szereg związków między różnymi ideałami, por. Twierdzenie 2.13 poniżej. Związki te w skrócie przedstawia Rysunek 1: wszystkie wymienione obiekty tworzą w naturalny sposób kraty; napis $A \implies B$ oznacza, że istnieje zachowująca porządek retrakcja z kraty A na kratę B (która na ogół nie jest izomorfizmem), natomiast $A \iff B$ oznacza, że A i B są izomorficzne.

Definicja 2.10 (Definicje 3.3 i 3.4 w [Kwa15]). Niech I, I', J będą ideałami w A . Powiemy, że I jest *ideałem* J -*niezmienniczym* w (A, α) jeśli $\alpha(I) \subseteq I$ oraz $J \cap \alpha^{-1}(I) \subseteq I$. Powiemy, że (I, I') jest J -*parą ideałów* w (A, α) jeśli $\alpha(I) \subseteq I$, $J \subseteq I'$ oraz $I' \cap \alpha^{-1}(I) = I$. Gdy $J = (\ker \alpha)^\perp$ opuszczamy prefix ‘ J ’.

Jak wynika z Rysunku 1 kluczowym problem jest wyznaczenie warunków na to, aby wszystkie ideały w $C^*(A, \alpha; J)$ były $\mathbb{T}$ -niezmiennicze. Warunki takie na poziomie układu częściowo odwracalnego (B, β) można uzyskać na bazie pracy [Kwa14], gdyż E_β jest

¹w przypadku, gdy A zawiera jędynkę, również w [Kwa15’]



Rysunek 1: Związki między kratami ideałów

bimodułem hilbertowskim, patrz Twierdzenia 5.4 i 3.15 poniżej. Analiza taka doprowadziła m.in. do charakteryzacji prostoty algebry $C^*(A, \alpha)$ w przypadku, gdy $A = C_0(X)$ jest przemieniana, w terminach dualnego topologicznego układu dynamicznego (X, φ) , [Kwa15, Twierdzenie 4.4]. W ogólnym przypadku otrzymano następujące kryterium prostoty (sformułowane w [Kwa15] przy założeniu rozszerzalności α , ale pozostające w mocy i bez tego założenia): mówimy, że α jest *minimalny*, gdy nie istnieją nietrywialne ideały niezmiennicze w (A, α) ; mówimy, że α jest *zewnątrzny*, jeżeli nie istnieje izometria $v \in M(A)$ taka, że $\alpha(a) = vav^*$, $a \in A$.

Twierdzenie 2.11 (Twierdzenie 4.2 w [Kwa15]). *Jeśli algebra $C^*(A, \alpha; J)$ jest prosta, to $J = (\ker \alpha)^\perp$, α jest minimalny oraz albo α jest punktowo quasi-nilpotentny albo α jest monomorfizmem i każda z potęg α^n , $n > 0$, jest zewnątrzna.*

Na odwrót, jeśli α jest minimalny to każdy z następujących warunków daje prostotę $C^(A, \alpha)$:*

- (i) α jest punktowo quasi-nilpotentny,
- (ii) α jest monomorfizmem, A posiada jedynekę, oraz każdy α^n , $n > 0$, jest zewnątrzna,
- (iii) α jest monomorfizmem z dziedzicznym obrazem, A jest ośrodkowa i każdy α^n , $n > 0$, jest zewnątrzny.

Uwaga 2.12. W świetle najnowszych rezultatów [KM, Twierdzenie 9.14], założenie ośrodkowości w punkcie (iii) jest zbędne.

Obcięcie endomorfizmu rozszerzalnego do ideału niezmienniczego na ogół nie jest rozszerzalne. Uwaga ta jest jednym z głównych powodów dlaczego w pracy [Kwa16] badano dowolne, *niekoniecznie rozszerzalne* endomorfizmy. Pozwoliło to opisać nie tylko ilorazy produktów krzyżowych przez ideały T-niezmiennicze, ale także wiązać same ideały T-niezmiennicze ze strukturą produktu krzyżowego. Poniżej utożsamiamy A z podalgebrą $\iota_A(A) \subseteq C^*(A, \alpha; J)$, co jest uprawnione przez nasze założenie, że $J \subseteq (\ker \alpha)^\perp$.

Twierdzenie 2.13 (Twierdzenie 2.19 w [Kwa16]). *Relacje $I = A \cap \mathcal{I}$, $I' = \{a \in A : (1 - u^*u)a \in \mathcal{I}\}$ ustalają bijektywną odpowiedniość między J -parami ideałów (I, I') dla (A, α) oraz $\mathbb{T}$ -niezmienniczymi ideałami $\mathcal{I}$ w $C^*(A, \alpha; J)$. Dla obiektów związanych tymi relacjami mamy*

$$C^*(A, \alpha; J)/\mathcal{I} \cong C^*(A/I, \alpha_I; q_I(I'))$$

oraz jeśli $I' = I + J$ (równoważnie $\mathcal{I}$ jest generowany przez A), wtedy $\mathcal{I}$ jest równoważny w sensie Mority-Rieffela z produktem krzyżowym $C^(I, \alpha|_I; I \cap J)$.*

W przypadku, gdy jądro $\ker \alpha$ jest ideałem komplementarnym w A i $J = (\ker \alpha)^\perp$, dla każdej J -pary ideałów w (A, α) mamy $I' = I + J$. Zatem powyższe twierdzenie znacznie się upraszcza:

Wniosek 2.14 (Wniosek 2.21 w [Kwa16]). *Jeśli $\ker \alpha$ jest ideałem komplementarnym w A , to relacje $I = A \cap \mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ jest generowany przez I ustalają bijektywną odpowiedniość między ideałami I niezmienniczymi w (A, α) oraz $\mathbb{T}$ -niezmienniczymi ideałami $\mathcal{I}$ w $C^*(A, \alpha)$, przy której $C^*(A, \alpha)/\mathcal{I} \cong C^*(A/I, \alpha_I)$ oraz $\mathcal{I}$ jest Morita-Rieffel równoważny $C^*(I, \alpha|_I)$.*

Uwaga 2.15. Dla dowolnego endomorfizmu α i dowolnego ideału $J \triangleleft (\ker \alpha)^\perp$, w [Kwa16, 2.4] przedstawiono kanoniczną konstrukcję endomorfizmu $\alpha^J : A^J \rightarrow A^J$ będącego rozszerzeniem α ($A \subseteq A^J$) taką, że $\ker \alpha^J$ jest komplementarny w A^J oraz $C^*(A, \alpha; J) \cong C^*(A^J, \alpha^J)$.² Zatem przechodząc od układu (A, α) do układu (A^J, α^J) możemy redukować sytuację z Twierdzenia 2.13 do sytuacji z Wniosku 2.14, patrz [Kwa16, Stwierdzenie 2.25].

Analiza w pracy [Kwa15] jest całkowicie niezależna od teorii C^* -korespondencji i algebr Cuntza-Pimsnera. W pracy [Kwa16] przeciwnie, ogólną analizę struktury algebr $C^*(A, \alpha; J)$ oparto na izomorfizmie (4) i ogólnych faktach teorii algebr Cuntza-Pimsnera [Kat04], [Kat07], rozwiniętych również przez habilitanta w [Kwa13], [Kwa16, Appendix]. Jednym z wyników jest następujące uogólnienie *ciągu dokładnego Pimsnera-Voiculescu*, znanego dla automorfizmów.

Twierdzenie 2.16 (Stwierdzenie 2.26 w [Kwa16]). *Dla dowolnego endomorfizmu α i ideału J w $(\ker \alpha)^\perp$ mamy następujący ciąg dokładny*

$$\begin{array}{ccccccc} K_0(J) & \xrightarrow{K_0(\iota) - K_0(\alpha|_J)} & K_0(A) & \xrightarrow{K_0(\iota)} & K_0(C^*(A, \alpha; J)) & , \\ \uparrow & & & & \downarrow & \\ K_1(C^*(A, \alpha; J)) & \xleftarrow{K_1(\iota)} & K_1(A) & \xleftarrow{K_1(\iota) - K_1(\alpha|_J)} & K_1(J) \end{array}$$

gdzie ι oznacza inkluzję.

W świetle Wniosku 2.14 oraz Uwagi 2.15, powyższe twierdzenie prowadzi do opisu ciągów dokładnych dla wszystkich ideałów $\mathbb{T}$ -niezmienniczych i odpowiadających im

²Konstrukcja ta, gdy A posiada jedynekę, pojawiła się już w [KL13] i wcześniejszych pracach habilitanta

ilorazów, patrz [Kwa16, Twierdzenie 2.27]. Jest to ważny rezultat, gdyż informacja dotycząca tychże ciągów ma fundamentalne znaczenie w klasyfikacji (nieprostych) C^* -algebr. W kontekście klasyfikacji ważne są również następujące fakty zachodzące dla dowolnego endomorfizmu α , patrz [Kwa16, Stwierdzenie 2.10]:

- (i) algebra A jest dokładna $\iff C^*(A, \alpha; J)$ jest dokładna.
- (ii) A jest nuklearna $\implies C^*(A, \alpha; J)$ jest nuklearna.
- (iii) Jeśli A jest ośrodkowa i nuklearna oraz A i J spełniają UCT, wtedy $C^*(A, \alpha; J)$ spełnia UCT.

Dla endomorfizmów (A, α) (częściowo) odwracalnych ustalono ogólne kryterium czystej nieskończoności algebry $C^*(A, \alpha)$, patrz [Kwa16, Stwierdzenie 2.46], a także naturalne warunki na to aby wszystkie ideały w $C^*(A, \alpha)$ były $\mathbb{T}$ -niezmiennicze [Kwa16, Stwierdzenie 2.35]. Kryteria te zostały uogólnione w [KS17] i będą omówione w podrozdziale 6 (por. Twierdzenie 6.6 poniżej).

Aby uzyskać bardziej dokładne i konkretne wyniki, w drugiej części pracy [Kwa16] zbadano przypadek endomorfizmów $C_0(X)$ -algebr.

2.3 Produkty krzyżowe przez endomorfizmy $C_0(X)$ -algebr

Niech X będzie lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa i niech A będzie $C_0(X)$ -algebrą, tzn. A jest C^* -algebrą wyposażoną w niezdegenerowany homomorfizm z $C_0(X)$ w centrum $Z(M(A))$ algebry mnożników $M(A)$ algebry A (A ma strukturę $C_0(X)$ -modułu). Równoważnie algebra A jest algebrą cięć pewnej półciągłej z góry wiązki C^* -algebr $\mathcal{A} = \bigsqcup_{x \in X} A(x)$. W [Kwa16, Definicja 3.1] zaproponowano definicję pojęcia morfizmu $C_0(X)$ -algebr, którą na mocy [Kwa16, Stwierdzenie 3.5] można równoważnie sformułować następująco.

Definicja 2.17 ([Kwa16]). Niech A będzie $C_0(X)$ -algebrą, a B $C_0(Y)$ -algebrą. Powiemy, że homomorfizm $\alpha : B \rightarrow A$ jest *indukowany przez morfizmem* wiązek jeśli istnieje homomorfizm $\Phi : C_0(Y) \rightarrow C_0(X)$ taki, że $\alpha(f \cdot b) = \Phi(f) \cdot \alpha(b)$, $f \in C_0(Y)$, $b \in B$.

Uwaga 2.18. Powyższa definicja znalazła zastosowanie w pracy [McC], gdzie autor rozpatruje obiekty uniwersalne w kategorii $C_0(X)$ -algebr z właśnie tak rozumianymi morfizmami $C_0(X)$ -algebr.

Homomorfizm $\Phi : C_0(Y) \rightarrow C_0(X)$ jest zadany przez ciągle i właściwe (ang. proper) odwzorowanie $\varphi : \Delta \rightarrow Y$ zdefiniowane na zbiorze otwartym $\Delta \subseteq X$. Traktując A i B jako algebry cięć wiązek $\mathcal{A} = \bigsqcup_{x \in X} A(x)$ i $\mathcal{B} = \bigsqcup_{y \in Y} B(y)$, relacja $\alpha(f \cdot b) = \Phi(f) \cdot \alpha(b)$ implikuje istnienie homomorfizmów $\alpha_x : B(\varphi(x)) \rightarrow A(x)$, $x \in \Delta$ takich, że

$$\alpha(b)(x) = \begin{cases} \alpha_x(b(\varphi(x))), & x \in \Delta, \\ 0 & x \notin \Delta, \end{cases} \quad b \in B, \quad x \in X. \quad (5)$$

Parę $(\varphi, \{\alpha_x\}_{x \in \Delta})$ interpretujemy jako morfizm z $\mathcal{B}$ do $\mathcal{A}$, por. [Kwa16, Stwierdzenie 3.2]. Endomorfizm (A, α) nazywamy $C_0(X)$ -układem dynamicznym, jeżeli A jest $C_0(X)$ -algebrą, a $\alpha : A \rightarrow A$ jest indukowany przez morfizm, [Kwa16, Definicja 3.2].

Niech (A, α) będzie $C_0(X)$ -układem dynamicznym, indukowanym przez $(\varphi, \{\alpha_x\}_{x \in \Delta})$, oraz niech $J \triangleleft (\ker \alpha)^\perp$. W [Kwa16, Twierdzenie 4.9] wykazano, że odwracalne J -rozszerzenie (B, β) jest w naturalny sposób $C_0(\tilde{X})$ -układem dynamicznym indukowanym przez morfizm $(\tilde{\varphi}, \{\beta_{\tilde{x}}\}_{\tilde{x} \in \tilde{\Delta}})$, gdzie $(\tilde{X}, \tilde{\varphi})$ jest topologicznym uniwersalnym odwracalnym Y -rozszerzeniem topologicznego układu (X, φ) ($Y \subseteq X$ jest zadany przez J). Korzystając z tego opisu (częściowo) odwracalnego układu (B, β) i ogólnych twierdzeń dla takich układów otrzymano następujące rezultaty.

Mówimy, że C^* -algebra A posiada *własność (IP)*, z ang. *ideal property*, jeśli każdy ideał w A jest generowany (jako ideał) przez rzuty, które zawiera. Przemienna C^* -algebra $C_0(X)$ ma własność (IP) wtedy i tylko wtedy, gdy X jest przestrzenią totalnie niespójną.

Twierdzenie 2.19 (Twierdzenie 4.12 w [Kwa16]). *Niech φ będzie odwzorowaniem wolnym (nieposiadającym punktów statycznych). Wszystkie ideały w $C^*(A, \alpha; J)$ są $\mathbb{T}$ -niezmiennicze, a więc są w bijektywnej odpowiedniości z J -parami ideałów w (A, α) . Co więcej,*

- (i) *Jeśli A ma własność (IP) i jest czysto nieskończona, to to samo zachodzi dla $C^*(A, \alpha; J)$.*
- (ii) *Jeśli istnieje skończona ilość J -par ideałów w (A, α) i A jest czysto nieskończona, to $C^*(A, \alpha; J)$ jest czysto nieskończona.*

Dla uproszczenia prezentacji założymy od tej pory, że $\text{Prim}(A)$ jest przestrzenią Hausdorffa i że $X = \text{Prim}(A)$, por. [Kwa16, Przykład 3.8].

Definicja 2.20. Powiemy, że orbita okresowa $\mathcal{O} = \{x, \varphi(x), \dots, \varphi^{n-1}(x)\}$ punktu $x = \varphi^n(x)$ posiada wejście $y \in \Delta$ jeśli $y \notin \mathcal{O}$ oraz $\varphi(y) \in \mathcal{O}$. Mówimy, że φ jest *topologicznie wolne poza zbiorem* $Y \subseteq X$ jeżeli zbiór punktów okresowych, których orbity nie posiadają wejść i nie przecinają Y ma puste wnętrze [Kwa15, Definicje 4.7, 4.8], [Kwa16, Definicja 2.37].

Szczególny przypadek rezultatu [Kwa16, Twierdzenie 4.11] (por. [Kwa15, Stwierdzenie 4.8]) daje:

Twierdzenie 2.21 (Twierdzenie o jednoznaczności). *Założmy, że φ jest topologicznie wolne poza zbiorem $Y = \text{Prim}(A/J)$. Reprezentacja (π, U) endomorfizmu (A, α) daje wierną reprezentację $\pi \rtimes U : C^*(A, \alpha; J) \rightarrow C^*(\pi, U)$ wtedy i tylko wtedy, gdy π jest wierna oraz $J = \{a \in A : U^*U\pi(a) = \pi(a)\}$.*

Uwaga 2.22. Zauważmy, że jeżeli $J = \{0\}$, to $Y = \text{Prim}(A/J) = \text{Prim}(A) = X$ i każde odwzorowanie φ jest topologicznie wolne poza X . W szczególności Twierdzenie 2.21 zawiera klasyczne twierdzenie Coburna (o jednoznaczności C^* -algebry generowanej przez nieodwracalną izometrię).

Z założenia, że $X = \text{Prim}(A)$ wynika, iż ideały w A , a w szczególności ideały J -niezmiennicze i J -pary ideałów, można opisać przez zbiory otwarte (równoważnie domknięte) w X . W [Kwa15, Definicje 4.9], patrz też [Kwa16, Definicja 5.6], wprowadzono

pojęcie zbiorów Y -niezmienniczych i Y -par domkniętych podzbiorów X . Doprowadziło to do następujących rezultatów:

- Opis struktury ideałów w $C^*(A, \alpha; J)$ w terminach Y -pary zbiorów dla topologicznego układu (X, φ) , [Kwa16, Stwierdzenie 5.6];
- kryterium czystej nieskończoności $C^*(A, \alpha; J)$ (gdy A jest czysto nieskończona), [Kwa16, Stwierdzenie 5.8];
- charakteryzacja prostoty $C^*(A, \alpha)$, [Kwa16, Stwierdzenie 5.9];
- Warunki konieczne i wystarczające na to, by produkt krzyżowy $C^*(A, \alpha)$ był algebrą Kirchberga (przy założeniu, że A jest algebrą Kirchberga), [Kwa16, Wniosek 5.10].

Przy dodatkowym założeniu, że wiązka $\mathcal{A} = \bigsqcup_{x \in X} A(x)$ jest trywialna, A jest koniecznie postaci $A = C_0(X, D)$, gdzie D jest prostą C^* -algebrą. W tym przypadku, przy założeniu, że X jest przestrzenią totalnie niespójną, grupa $G = K_0(D)$ nie ma torsji i $K_1(D) = 0$ w [Kwa16, Podsekcja 5.3] podano jawne wzory na K -teorię wszystkich ideałów i ilorazów w $C^*(A, \alpha; J)$. Mianowicie, przy powyższych założeniach rozważmy następujące grupy:

Definicja 2.23 (Definicja 5.12 w [Kwa16]). Niech δ_α będzie homomorfizmem grup $\delta_\alpha : C_0(X, G) \rightarrow C_0(X, G)$ danym wzorem

$$\delta_\alpha(f)(x) = \begin{cases} f(x) - K_0(\alpha_x)(f(\varphi(x))), & x \in \Delta \\ 0 & x \notin \Delta. \end{cases}$$

Rozważmy obcięcie $\delta_\alpha^Y : C_0(X \setminus Y, G) \rightarrow C_0(X, G)$ homomorfizmu δ_α i połóżmy

$$K_0(X, \varphi, \{\alpha_x\}_{x \in \Delta}; Y) := \text{coker}(\delta_\alpha^Y), \quad K_1(X, \varphi, \{\alpha_x\}_{x \in \Delta}; Y) := \ker(\delta_\alpha^Y).$$

Twierdzenie 2.24 (Stwierdzenie 5.13 w [Kwa16]). *Przy powyższych założeniach, tj. gdy $A = C_0(X, D)$, gdzie D jest prostą C^* -algebrą taką, że $K_0(D)$ nie ma torsji i $K_1(D) = 0$, zachodzą naturalne izomorfizmy:*

$$K_i(C^*(A, \alpha; J)) \cong K_i(X, \varphi, \{\alpha_x\}_{x \in \Delta}; Y), \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Korzystając z powyższego twierdzenia i opisu struktury ideałów przez Y -pary zbiorów, w [Kwa16, Twierdzenie 5.14] podano wzory na K -teorię wszystkich ideałów i ilorazów w $C^*(A, \alpha; J)$. W szczególnym przypadku, gdy $\ker \alpha$ jest ideałem komplementarnym (równoważnie $\varphi(\Delta)$ jest zbiorem otwartym w X) twierdzenie to upraszcza się do następującego:

Twierdzenie 2.25 (Wniosek 5.15 w [Kwa16]). *Do powyższych założeń dołączmy jeszcze, że φ odwzorowaniem wolnym, którego obraz $\varphi(\Delta)$ jest otwarty w X . Dla dowolnego ideału $\mathcal{I}$ w $C^*(A, \alpha)$ mamy izomorfizmy $K_i(C^*(A, \alpha)/\mathcal{I}) \cong K_i(V, \varphi|_{\Delta \cap V}, \{\alpha_x\}_{x \in \Delta \cap V})$ oraz $K_i(\mathcal{I}) \cong K_i(X \setminus V, \varphi|_{\Delta \setminus \varphi^{-1}(V)}, \{\alpha_x\}_{x \in \Delta \setminus \varphi^{-1}(V)})$ gdzie $C_0(X \setminus V, D) = C_0(X, D) \cap \mathcal{I}$, $i = 1, 2$.*

Uwaga 2.26. Powyższe rezultaty stanowią kompletny zestaw narzędzi do konstrukcji i klasyfikacji bogatej klasy czysto nieskończonych algebr nieprostych. Struktura ideałów jest całkowicie kontrolowana przez topologiczny układ dynamiczny (X, φ) , natomiast pole endomorfizmów $\{\alpha_x\}_{x \in \Delta}$ ma wpływ na poszczególne K -grupy, por. [Kwa16, Przykłady 5.17, 5.18]. Przypomnijmy, że istnieje ogólna maszyna, opracowana przez Kirchberga [Kir00], klasyfikująca (ośrodkowe i nuklearne) algebry czysto nieskończone. Jednakże, niezmienniki używane przez Kirchberga (ang. *ideal related KK-theory*) są skomplikowane i wciąż prowadzone są intensywne badania nad klasyfikacją takich algebr przez inne, nowe, mniej złożone niezmienniki, por. np. [MN12], [Bon02], [Rør97]. Podstawową informacją, konieczną, a często wystarczającą, do klasyfikacji algebr czysto nieskończonych jest K -teoria ich wszystkich ideałów i ilorazów.

3 Produkty krzyżowe przez odwzorowania całkowicie dodatnie

W mechanice statystycznej i nieprzemiennej analizie harmonicznej ewolucja systemu często jest zadana przez odwzorowania całkowicie dodatnie niebędące endomorfizmami (np. przez operatory przejścia, czy interakcje). Ważną konstrukcją, której istotnym składnikiem oprócz endomorfizmu jest operator przejścia jest produkt krzyżowy Exela [Exe03]. Produkt ten wiąże bezpośrednio algebry Cuntza-Kriegera z łańcuchami Markowa.

W tym rozdziale opartym na rezultatach prac [Kwa17], [Kwa14'] przedstawimy nową konstrukcję produktów krzyżowych $C^*(A, \varrho; J)$ przez dowolne odwzorowanie całkowicie dodatnie $\varrho : A \rightarrow A$. Ta konstrukcja (Definicja 3.2, Twierdzenie 3.3) unifikuje produkty krzyżowe przez endomorfizmy (Twierdzenie 3.5) i produkty krzyżowe Exela, dla których daje nowy opis struktury wewnętrznej (Twierdzenie 3.9). W szczególności produkty krzyżowe Exela-Royera są całkowicie niezależne od wyboru endomorfizmu (Twierdzenie 3.11). Algebry $C^*(A, \varrho; J)$ pozwalają na jednolitą analizę i nowy wgląd w struktury takich obiektów jak: C^* -algebry związane z topologicznymi relacjami i operatorami Markowa (paragraf 3.1.1), algebry grafowe (Twierdzenie 3.12) oraz produkty krzyżowe przez interakcje (podrozdział 3.3). Dla interakcji narożnikowych otrzymano silne narzędzia do badania struktury ideałów i K -teorii związanych z nimi C^* -algebr (Twierdzenie 3.15). W zastosowaniu do odkrytej kanonicznej interakcji narożnikowej związanej grafem prowadzi to do opisu struktury ideałów i K -teorii algebr grafowych (paragraf 3.3.1).

3.1 Podstawowe definicje i fakty

W tym rozdziale $\varrho : A \rightarrow A$ oznacza całkowicie dodatnie odwzorowanie na C^* -algebrze A . Poniższa definicja produktów krzyżowych dla ϱ inspirowana jest przez konstrukcję Exela [Exe03]. Zwróćmy uwagę, że w przypadku, gdy ϱ jest endomorfizmem poniższa definicja reprezentacji pokrywa się z Definicją 2.1 kładąc $U = S^*$.

Definicja 3.1 (Definicja 3.1 w [Kwa17]). *Reprezentacją układu (A, ϱ) nazywamy parę (π, S) składającą się z niezdegenerowanej reprezentacji $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(H)$ oraz operatora $S \in \mathcal{B}(H)$ takiego, że*

$$S^* \pi(a) S = \pi(\varrho(a)) \quad \text{dla każdego } a \in A. \quad (7)$$

Oznaczamy, przez $C^*(\pi, S)$ C^* -algebrę generowaną przez $\pi(A) \cup \pi(A)S$. *Algebrę Toeplitza dla (A, ϱ)* definiujemy jako C^* -algebrę $\mathcal{T}(A, \varrho) := C^*(i_A(A), t)$, gdzie (i_A, t) jest uniwersalną reprezentacją (A, ϱ) .

Redundancją reprezentacji (π, S) układu (A, ϱ) nazywamy parę $(\pi(a), k)$, gdzie $a \in A$, $k \in \overline{\pi(A)S\pi(A)S^*\pi(A)}$ oraz $\pi(a)\pi(b)S = k\pi(b)S$ dla każdego $b \in A$, [Kwa17, Definicja 3.3]. Zauważmy, patrz [Kwa17, Stwierdzenie 2.2], że zbiór

$$N_\varrho := \{a \in A : \varrho((ab)^*ab) = 0 \text{ dla każdego } b \in A\} \quad (8)$$

jest największym ideałem w A zawartym w jądrze odwzorowania $\varrho : A \rightarrow A$.

Definicja 3.2 (Definicja 3.5 w [Kwa17]). Dla dowolnego ideału J w A definiujemy *względny produkt krzyżowy* $C^*(A, \varrho; J)$ jako iloraz algebry Toeplitza $\mathcal{T}(A, \varrho)$ przez ideał generowany przez zbiór

$$\{i_A(a) - k : a \in J \text{ oraz } (i_A(a), k) \text{ jest redundancją dla } (i_A, t)\}.$$

Oznaczamy przez (j_A, s) reprezentację układu (A, ϱ) , która generuje $C^*(A, \varrho; J)$. W przypadku, gdy $J = N_\varrho^\perp$ piszemy $C^*(A, \varrho) := C^*(A, \varrho; N_\varrho^\perp)$ i tę algebrę nazywamy (bezwzględnym) *produktem krzyżowym* A przez ϱ .

Z całkowicie dodatnim odwzorowaniem ϱ wiąże się w naturalny sposób C^* -korespondencję X_ϱ , nazywaną *GNS-korespondencją* [Pas73, section 5] lub *KSGNS-korespondencją* [Lan94] (od Kasparov, Stinespring, Gelfand, Naimark, Segal). Otrzymuje się ją jako hausdorffowskie uzupełnienie algebraicznego iloczynu tensorowego $A \odot A$ względem półnormy zadanej przez A -wartościową formę półtoraliniową $\langle a \odot b, c \odot d \rangle_\varrho := b^* \varrho(a^*c)d$, $a, b, c, d \in A$. Oznaczając przez $a \otimes b$ obraz tensora prostego $a \odot b$ w X_ϱ , prawe i lewe działanie A na X_ϱ zadane jest przez: $a \cdot (b \otimes c) = (ab) \otimes c$ oraz $(b \otimes c) \cdot a = b \otimes (ca)$ gdzie $a, b, c \in A$. Zasadniczym strukturalnym faktem jest:

Twierdzenie 3.3 (Twierdzenie 3.13 w [Kwa17]). *Niech X_ϱ będzie GNS-korespondencją odpowiadającą (A, ϱ) i J ideałem w A . Mamy naturalne izomorfizmy*

$$C^*(A, \varrho; J) = C^*(A, \varrho; J \cap J(X_\varrho)) \cong \mathcal{O}(J \cap J(X_\varrho), X_\varrho) \quad \text{ i } \quad C^*(A, \varrho) \cong \mathcal{O}_{X_\varrho}.$$

W szczególności homomorfizm $j_A : A \rightarrow C^(A, \varrho; J)$ jest iniektywny wtedy i tylko wtedy, gdy $J \cap J(X_\varrho) \subseteq N_\varrho^\perp$.*

Uwaga 3.4. Z [Kwa17, Stwierdzenie 3.10] prowadzącego do powyższego twierdzenia wynika, że dla dowolnej reprezentacji (π, S) układu (A, ϱ) operator $S \in M_r(C^*(\pi, S))$ jest prawym mnożnikiem algebry $C^*(\pi, S)$, a gdy ϱ jest *odwzorowaniem strict*, tzn. gdy $\{\varrho(\mu_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ jest zbieżne w topologii strict w $M(A)$ dla pewnej jedynek aproksymatywnej $\{\mu_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ w A , to $S \in M(C^*(\pi, S))$ (endomorfizm jest odwzorowaniem strict wtedy i tylko wtedy gdy jest rozszerzalny).

Na bazie Twierdzenia 3.3 wykazano w [Kwa17, Stwierdzenie 3.17], że produkt krzyżowy $C^*(A, \varrho; J)$ jest obiektem uniwersalnym dla odpowiednio zdefiniowanych reprezentacji *J-kowariantnych* [Kwa17, Definicja 3.16] oraz otrzymano wersję twierdzenia o

jednoznaczności [Kwa17, Stwierdzenie 3.18]. Jednakże wydaje się, że na ogół relacji służących do opisu $C^*(A, \varrho; J)$ jako algebry uniwersalnej nie da się sformułować bez użycia ideału $J(X_\varrho)$, tj. bez odniesienia do teorii C^* -korespondencji.

W przypadku, gdy $\varrho = \alpha$ jest endomorfizmem, C^* -korespondencje E_α i X_ϱ są izomorficzne [Kwa17, Lemat 3.25]. W szczególności $J(X_\varrho) = J(E_\alpha) = A$ oraz zachodzi:

Twierdzenie 3.5 (Stwierdzenie 3.26 w [Kwa17]). *Definicje 2.5 i 3.2 są konsystentne: Jeśli $\varrho = \alpha$ jest endomorfizmem A , to dla dowolnego ideału J w A , przyporządkowania $\iota_A(a) \mapsto j_A(a)$, $a \in A$, $u \mapsto s^*$ dają izomorfizm $C^*(A, \alpha; J) \cong C^*(A, \varrho; J)$.*

3.1.1 Algebry związane z topologicznymi relacjami i operatorami Markowa

W [Kwa17, Podrozdział 3.5] omówiono przypadek, gdy $A = C_0(\Omega)$ jest algebrą przemianą (Ω jest lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa). Jeśli A ma jedynkę i $\varrho(1) = 1$, to ϱ jest *operatorem Markowa* rozważanym w [IMV12]. Ogólnie odwzorowanie dodatnie $\varrho : C_0(\Omega) \rightarrow C_0(\Omega)$ można utożsamić ze strukturą $\mathcal{Q} = (E^0, E^1, r, s, \lambda)$ przypominającą graf topologiczny z systemem miar λ (ang. topological quiver) [MT05], por. [Kwa17, Definicja 3.29]. Tutaj $E^0 := \Omega$, $E^1 := \bar{R}$ jest domknięciem podzbioru $R \subseteq \Omega \times \Omega$:

$$(x, y) \in R \xLeftrightarrow{def} \left(\forall a \in C_0(\Omega)_+ \varrho(a)(x) = 0 \implies a(y) = 0 \right),$$

a odwzorowania $r, s : E^1 \rightarrow E^0$ są rzutami odpowiednio na drugą i pierwszą współrzędną. Jak wykazano, na ogół odwzorowanie $s(x, y) = x$, $x, y \in \Omega$, jest otwarte na R , ale nie na $\bar{R}$, [Kwa17, Lemat 3.30].

Jeśli $R = \bar{R}$, to $\mathcal{Q}$ jest topologicznym grafem i $C^*(A, \varrho) \cong C^*(\mathcal{Q})$, gdzie $C^*(\mathcal{Q})$ jest C^* -algebrą zbadaną w [MT05], natomiast $\mu = (R, \lambda)$ jest *relacją topologiczną* w sensie [Bre04] oraz $C^*(A, \varrho; A) \cong C^*(\mu)$, gdzie $C^*(\mu)$ jest C^* -algebrą rozważaną w [Bre04], patrz [Kwa17, Stwierdzenia 3.33, 3.34]. W szczególności $C^*(A, \varrho)$ pokrywa się z algebrą zadaną w [IMV12].

Jeśli odwzorowanie s nie jest otwarte na $\bar{R}$ ($R \neq \bar{R}$), to algebra $C^*(A, \varrho)$ nie jest modelowana przez grafy topologiczne w sensie [MT05] i badanie jej wymaga rozwinięcia (uogólnienia) teorii [MT05]. W szczególności wykryto i wyjaśniono błąd w pracy [IMV12], gdzie implicity założono, że $R = \bar{R}$, por. [Kwa17, Przykład 3.35 i Stwierdzenie 3.36].

3.2 Produkty krzyżowe Exela

W [Exe03] Exel zaproponował nową definicję produktu krzyżowego przez endomorfizm, którego istotnym nowym składnikiem jest operator przejścia. Exel rozważał algebry z jedynką. Jego formalizm został rozszerzony na przypadek, gdy wszystkie odwzorowania są rozszerzalne na algebrę mnożników w [BRV10], [Lar10]. Konstrukcję tę można jednak sformułować w sytuacji ogólnej jak następuje, [Kwa17, Podrozdział 2.4].

Definicja 3.6. Niech $\alpha : A \rightarrow A$ będzie endomorfizmem C^* -algebry A i niech $\mathcal{L} : A \rightarrow A$ będzie dodatnim odwzorowaniem takim, że

$$\mathcal{L}(a\alpha(b)) = \mathcal{L}(a)b, \quad \text{dla każdego } a, b \in A. \quad (9)$$

Wtedy $\mathcal{L}$ nazywamy *operatorem przejścia* dla α a trójkę $(A, \alpha, \mathcal{L})$ *układem Exela*.

Definicja 3.7. *Reprezentacją układu Exela $(A, \alpha, \mathcal{L})$ nazywamy parę (π, S) , gdzie $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(H)$ jest reprezentacją niezdegenerowaną a $S \in \mathcal{B}(H)$ jest operatorem takim, że*

$$S\pi(a) = \pi(\alpha(a))S \quad \text{oraz} \quad S^*\pi(a)S = \pi(\mathcal{L}(a)) \quad \text{dla każdego } a \in A. \quad (10)$$

Redundancją reprezentacji (π, S) nazywamy parę $(\pi(a), k)$, gdzie $a \in A, k \in \overline{\pi(A)SS^\pi(A)}$ są takie, że $\pi(a)\pi(b)S = k\pi(b)S$, dla każdego $b \in A$. Algebrą Toeplitza $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ układu $(A, \alpha, \mathcal{L})$ nazywamy C^* -algebrę generowaną przez $i_A(A) \cup i_A(A)t$, gdzie (i_A, t) jest reprezentacją uniwersalną układu $(A, \alpha, \mathcal{L})$. Produkt krzyżowy Exela $A \times_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$ jest ilorazem algebry $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ przez ideał generowany przez zbiór*

$$\{i_A(a) - k : a \in \overline{A\alpha(A)A} \text{ oraz } (i_A(a), k) \text{ jest redundancją reprezentacji } (i_A, t)\}. \quad (11)$$

Uwaga 3.8. Niech $(A, \alpha, \mathcal{L})$ będzie układem Exela. W [Kwa17] zauważono następujące trzy proste, ale ważne fakty:

- 1) Odwzorowanie $\mathcal{L}$ jest całkowicie dodatnie [Kwa17, Lemat 4.1].
- 2) Operator $\mathcal{L}$ zawsze rozszerza się do odwzorowania $\bar{\mathcal{L}} : M(A) \rightarrow M(A)$ ciągłego w topologii strict [Kwa17, Stwierdzenie 4.2]. Zatem założenie to, jak również jego weryfikacja w pracach [BRV10], [Lar10] i artykułach je cytujących (16 według MathSciNet) jest zbędna.
- 3) Relacja $S\pi(a) = \pi(\alpha(a))S$ w (10) wynika z pozostałych aksjomatów [Kwa17, Stwierdzenie 4.3]. Zatem relacja ta, jak również jej weryfikacja, w pracach [Exe03], [BRV10], [Lar10] i artykułach je cytujących (61 według MathSciNet) jest zbędna. W szczególności algebra Toeplitza $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ układu $(A, \alpha, \mathcal{L})$ jest w rzeczywistości algebrą Toeplitza $\mathcal{T}(A, \mathcal{L})$ odwzorowania $\mathcal{L}$.

Uwagi 1) i 3) sugerują, że produkt krzyżowy Exela $A \times_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$ nie jest produktem krzyżowym przez endomorfizm α , lecz przez całkowicie dodatni operator przejścia $\mathcal{L}$. Wybór ideału $\overline{A\alpha(A)A}$ w (11), zaproponowany w [Exe03], jest podyktowany tym, że w wielu naturalnych przykładach prowadzi on do właściwej konstrukcji. Na gruncie formalnym wyjaśnia to następujące twierdzenie, patrz [Kwa17, Twierdzenie 4.7, Stwierdzenie 4.9]:

Twierdzenie 3.9. *Dla dowolnego układu $(A, \alpha, \mathcal{L})$ mamy $A \times_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N} = C^*(A, \mathcal{L}; \overline{A\alpha(A)A})$. Jeśli operator $\mathcal{L}$ jest wierny³, a endomorfizm α rozszerzalny, to $A \times_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N} = C^*(A, \mathcal{L})$.*

Jak zauważono w [BR06], jeśli $\mathcal{L}$ nie jest operatorem wiernym, to na ogół algebra A nie zanurza się w produkt krzyżowy $A \times_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$. Rozważania w [BR06] doprowadziły w [ER07] do modyfikacji definicji produktu krzyżowego $A \times_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$ przez Exela i Royera. Mianowicie, z układem Exela $(A, \alpha, \mathcal{L})$ można związać C^* -korespondencję $M_{\mathcal{L}}$ powstałą przez hausdorffowskie uzupełnienie przestrzeni A ze względu na półnormę zadaną przez A -wartościową formę półtoraliniową $\langle m, n \rangle_{\mathcal{L}} := \mathcal{L}(m^*n)$, $m, n \in A$. Wtedy operacje $m \cdot a := m\alpha(a)$ i $a \cdot m := am$, $n, m, a \in A$, faktoryzują się do operacji na $M_{\mathcal{L}}$.

³ $\mathcal{L}(a^*a) = 0$ implikuje, że $a = 0$

Definicja 3.10 ([ER07]). *Produktem krzyżowym Exela-Royera $\mathcal{O}(A, \alpha, \mathcal{L})$ jest algebra ilorazowa algebry $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ przez ideał generowany przez zbiór*

$$\{i_A(a) - k : a \in J_{M_{\mathcal{L}}} \text{ i } (i_A(a), k) \text{ jest redundancją } (i_A, t)\},$$

gdzie $J_{M_{\mathcal{L}}}$ jest ideałem (Katsury) związanym z C^* -korespondencją $M_{\mathcal{L}}$.

C^* -korespondencja $M_{\mathcal{L}}$ jest izomorficzna z GNS-korespondencją $X_{\mathcal{L}}$ [Kwa17, Lemat 4.4] i jądro lewego działania w tych korespondencjach pokrywa się z ideałem $N_{\mathcal{L}}$. Prowadzi to do następującego wyniku.

Twierdzenie 3.11 (Twierdzenie 4.7 w [Kwa17]). *Dla dowolnego układu Exela $(A, \alpha, \mathcal{L})$ produkt krzyżowy Exela-Royera jest produktem krzyżowym przez $\mathcal{L}$ (nie zależy od α):*

$$C^*(A, \mathcal{L}) = \mathcal{O}(A, \alpha, \mathcal{L}) \cong \mathcal{O}_{M_{\mathcal{L}}} \cong \mathcal{O}_{X_{\mathcal{L}}}.$$

Co więcej $A \times_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N} \cong \mathcal{O}(X_{\mathcal{L}}, J \cap J(X_{\mathcal{L}})) \cong \mathcal{O}(M_{\mathcal{L}}, J \cap J(M_{\mathcal{L}}))$, gdzie $J := \overline{A\alpha(A)A}$. W szczególności, A zanurza się w $A \times_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$ wtedy i tylko wtedy gdy $\overline{A\alpha(A)A} \cap J(M_{\mathcal{L}}) \subseteq N_{\mathcal{L}}^{\perp}$.

W literaturze rozważa się najczęściej układy Exela $(A, \alpha, \mathcal{L})$ przy dodatkowym założeniu, że odwzorowanie $E = \alpha \circ \mathcal{L}$ jest warunkową wartością oczekiwaną z A na algebrę $\alpha(A)$. Układy takie i odpowiadające im operatory $\mathcal{L}$ nazywamy *regularnymi* [Kwa17, Definicja 4.1]. W [Kwa17, Podrozdział 4.2] wyjaśniono strukturę takich operatorów. Wykazano, że przy ustalonym endomorfizmie α regularne układy Exela $(A, \alpha, \mathcal{L})$ są parametryzowane przez wartości oczekiwane z A na $\alpha(A)$. Natomiast przy ustalonym operatorze $\mathcal{L}$ układy takie są parametryzowane przez podalgebry *dziedziny multiplikatywnej*:

$$MD(\mathcal{L}) := \{a \in A : \mathcal{L}(ab) = \mathcal{L}(a)\mathcal{L}(b) \text{ i } \mathcal{L}(ba) = \mathcal{L}(b)\mathcal{L}(a) \text{ dla każdego } b \in A\} \quad (12)$$

operatora $\mathcal{L}$ [Kwa17, Stwierdzenia 4.15, 4.16]. Dla regularnego układu Exela $(A, \alpha, \mathcal{L})$ takiego, że (A, α) jest (częściowo) odwracalny, $\mathcal{L}$ i α determinują się wzajemnie w sposób jednoznaczny oraz

$$A \times_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N} = C^*(A, \mathcal{L}) \cong C^*(A, \alpha),$$

patrz [Kwa17, Twierdzenie 4.22].

3.2.1 Algebry grafowe jako produkt krzyżowy przez operator Perrona Frobeniusa

Motywacją Exela [Exe03] było wyrażenie algebr Cuntza-Kriegera jako produktów krzyżowych przez układ $(A, \alpha, \mathcal{L})$ odpowiadający topologicznemu łańcuchowi Markowa. Jego wynik był następnie uogólniony przez Brownlowe, Raebrun, Vittadello [BRV10] na przypadek algebr grafowych $C^*(E)$, gdzie graf $E = (E^0, E^1, r, s)$ jest *lokalnie skończony* (zbiory $r^{-1}(v)$ i $s^{-1}(v)$ są skończone dla każdego wierzchołka $v \in E^0$) oraz każdy wierzchołek jest emiterem, tzn. $s(E^1) = E^0$. W [Kwa17, Sekcja 5] rozważono ogólne (dyskretne, przeliczalne) grafy $E = (E^0, E^1, r, s)$.

Przypomnijmy, iż C^* -algebra grafowa $C^*(E)$ jest generowana przez uniwersalną rodzinę częściowych izometrii $\{s_e : e \in E^1\}$ oraz parami ortogonalnych rzutów $\{p_v : v \in E^1\}$

takich, że $s_e^* s_e = p_{s(e)}$, $s_e s_e^* \leq p_{r(e)}$ oraz $p_v = \sum_{r(e)=v} s_e s_e^*$ jeśli tylko suma ta jest skończona (tzn. v jest *skończonym odbiorcą*). Rzuty $s_\mu s_\mu^*$ odpowiadające ścieżkom w grafie E generują przemienną podalgebrę $\mathcal{D}_E$ w $C^*(E)$. Gdy E nie posiada nieskończonych emiterów, wtedy wzór

$$\Phi_E(a) = \sum_{e \in E^1} s_e a s_e^*$$

definiuje całkowicie dodatnie odwzorowanie $\Phi_E : C^*(E) \rightarrow C^*(E)$, które obcina się do endomorfizmu na $\mathcal{D}_E$, por. [Kwa17, Stwierdzenie 5.3]. Na widmie $\mathcal{D}_E$, utożsamionym z przestrzenią ścieżek, Φ_E jest dane przez przesunięcie. Dlatego odwzorowanie Φ_E nazywa się *nieprzemiennym przesunięciem Markowa*.

Dla dowolnego grafu E można znaleźć liczby $\lambda_e > 0$, $e \in E^1$, takie, że wzór $\mathcal{L}_\lambda(a) := \sum_{e,f \in E^1} \sqrt{\lambda_e \lambda_f} s_e^* a s_f$ definiuje całkowicie dodatnie odwzorowanie $\mathcal{L}_\lambda : C^*(E) \rightarrow C^*(E)$. Obcina się ono do całkowicie dodatniego odwzorowania $\mathcal{L}_\lambda : \mathcal{D}_E \rightarrow \mathcal{D}_E$ danego wzorem

$$\mathcal{L}_\lambda(a) := \sum_{e \in E^1} \lambda_e s_e^* a s_e.$$

W [Kwa17, Stwierdzenie 5.4] wyznaczono warunki konieczne i dostateczne na to, by wagi $\lambda := \{\lambda_e\}_{e \in E^1}$ zadawały operator $\mathcal{L}_\lambda$. Operatory $\mathcal{L}_\lambda$ nazwano w [Kwa17] *nieprzemiennymi operatorami Perrona-Frobeniusa*. Gdy E jest lokalnie skończony oraz $s(E^1) = E^0$, to można położyć $\lambda_e := |s^{-1}(s(e))|^{-1}$, $e \in E^1$. Wtedy $(\mathcal{D}_E, \Phi_E, \mathcal{L}_\lambda)$ jest regularnym układem Exela rozważanym w [BRV10] i utożsamiając $\mathcal{D}_E$ z algebrą funkcji na przestrzeni ścieżek nieskończonych operator $\mathcal{L}_\lambda$ jest klasycznym operatorem Perrona-Frobeniusa dla jednostronnego przesunięcia.

Poniższe twierdzenie mówi, że każda algebra grafowa jest produktem krzyżowym przez operator Perrona-Frobeniusa, a nie przez endomorfizm - przesunięcie Markowa. Co więcej, na ogół nawet nie istnieje endomorfizm, dla którego operator Perrona-Frobeniusa mógłby być operatorem przejścia.

Twierdzenie 3.12 (Twierdzenie 5.6 w [Kwa17]). *Niech $E = (E^0, E^1, s, r)$ będzie dowolnym grafem skierowanym i $\mathcal{L}_\lambda$ dowolnym odpowiadającym mu (nieprzemiennym) operatorem Perrona-Frobeniusa. Wtedy*

$$C^*(E) \cong C^*(\mathcal{D}_E, \mathcal{L}_\lambda).$$

- i) *Jeśli E nie posiada nieskończonych emiterów, to $(\mathcal{D}_E, \Phi_E, \mathcal{L}_\lambda)$ jest układem Exela oraz $C^*(\mathcal{D}_E, \mathcal{L}_\lambda) = \mathcal{D}_E \rtimes_{\Phi_E, \mathcal{L}_\lambda} \mathbb{N}$.*
- ii) *Jeśli E posiada nieskończone emitery, ale nie posiada nieskończonych odbiorców (ang. infinite receivers), to nie istnieje endomorfizm α taki, że $(\mathcal{D}_E, \alpha, \mathcal{L}_\lambda)$ układem Exela.*

3.3 Produkty krzyżowe przez interakcje

W [Exe07] Exel zdefiniował pojęcie *interakcji* na C^* -algebrze A . Jest to para $(\mathcal{V}, \mathcal{H})$ dodatnich odwzorowań $\mathcal{V}, \mathcal{H} : A \rightarrow A$ takich, że

$$\mathcal{V}\mathcal{H}\mathcal{V} = \mathcal{V}, \quad \mathcal{H}\mathcal{V}\mathcal{H} = \mathcal{H}, \quad \mathcal{V}(A) \subseteq MD(\mathcal{H}), \quad \mathcal{H}(A) \subseteq MD(\mathcal{V}),$$

gdzie $MD(\mathcal{H})$ i $MD(\mathcal{V})$ są dziedzinami multiplikatywnymi odpowiednio $\mathcal{H}$ i $\mathcal{V}$, por. (12). Wtedy $\mathcal{V}$ oraz $\mathcal{H}$ są automatycznie odwzorowaniami całkowicie dodatnimi oraz $\mathcal{H}(A)$ i $\mathcal{V}(A)$ są podalgebrami A . Exel [Exe07] związał z $(\mathcal{V}, \mathcal{H})$ uogólnioną korespondencję $\mathfrak{X}$ oraz uogólnioną algebrę Cuntza-Pimsnera $C^*(A, \mathfrak{X})$. Jak pokazano w [Kwa17] dla każdego regularnego układu Exela $(A, \alpha, \mathcal{L})$ para $(\alpha, \mathcal{L})$ jest przykładem interakcji. W [Exe07] nie podano przykładów interakcji niebędących tego typu. Celem pracy [Kwa14'], którą tu omówimy, było podanie kanonicznego przykładu interakcji $(\mathcal{V}, \mathcal{H})$, gdzie żadne z odwzorowań nie jest multiplikatywne, oraz dogłębna analiza algebr grafowych jako produkt krzyżowy interakcji.

Niech A będzie C^* -algebrą z jedyneką i $(\mathcal{V}, \mathcal{H})$ interakcją na A (dla wielu poniższych rezultatów założenie, że A ma jedynekę nie jest istotne). Załóżmy dodatkowo, że podalgebry $\mathcal{H}(A)$ i $\mathcal{V}(A)$ są dziedziczne w A . Taką interakcję nazwano w [Kwa14'] *narożnikową* (ang. *corner interaction*). Dla regularnego układu Exela $(A, \alpha, \mathcal{L})$ takiego, że (A, α) jest (częściowo) odwracalny, para $(\alpha, \mathcal{L})$ jest przykładem interakcji narożnikowej.

Definicja 3.13 ([Kwa14']). *Reprezentacją kowariantną interakcji narożnikowej $(\mathcal{V}, \mathcal{H})$ jest para (π, S) , gdzie $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(H)$ jest niezdegenerowaną reprezentacją, a $S \in \mathcal{B}(H)$ jest operatorem (koniecznie częściową izometrią) oraz*

$$S\pi(a)S^* = \pi(\mathcal{V}(a)) \quad \text{ i } \quad S^*\pi(a)S = \pi(\mathcal{H}(a)) \quad \text{ dla każdego } a \in A.$$

Produktem krzyżowym interakcji $(\mathcal{V}, \mathcal{H})$ jest C^ -algebra $C^*(A, \mathcal{V}, \mathcal{H})$ generowana przez $i_A(A)$ oraz s gdzie (i_A, s) jest uniwersalną reprezentacją kowariantną $(\mathcal{V}, \mathcal{H})$.*

W [Kwa14', Podsekcja 2.2] pokazano, że GNS-korespondencje $X_{\mathcal{V}}$ i $X_{\mathcal{H}}$ są (wzajemnie odwrotnymi) hilbertowskimi bimodułami oraz (uogólniona) korespondencja $\mathfrak{X}$ jest izomorficzna z $X_{\mathcal{H}}$. Prowadzi to do szeregu izomorfizmów C^* -algebr:

$$C^*(A, \mathcal{V}, \mathcal{H}) \cong C^*(A, \mathcal{H}) \cong C^*(A, \mathcal{V}) \cong C^*(A, \mathfrak{X}) \cong A \rtimes_{X_{\mathcal{H}}} \mathbb{Z} \cong A \rtimes_{X_{\mathcal{V}}} \mathbb{Z}.$$

Odwozorowania $\mathcal{H} : \mathcal{V}(A) \rightarrow \mathcal{H}(A)$ i $\mathcal{V} : \mathcal{H}(A) \rightarrow \mathcal{V}(A)$ są wzajemnie odwrotnymi izomorfizmami. Utożsamiając widma dziedzicznych algebr $\mathcal{V}(A)$ i $\mathcal{H}(A)$ z otwartymi podzbiorami widma $\hat{A}$ algebry A otrzymujemy częściowy homeomorfizm $\hat{\mathcal{H}} : \widehat{\mathcal{H}(A)} \rightarrow \widehat{\mathcal{V}(A)}$ przestrzeni $\hat{A}$, gdzie $\hat{\mathcal{H}}([\pi]) = [\pi \circ \mathcal{H}]$.

Poniższa definicja jest spójna z Definicją 2.20.

Definicja 3.14 ([Kwa14]). Częściowy homeomorfizm φ przestrzeni topologicznej Ω , tzn. homeomorfizm, którego dziedzina Δ i obraz $\varphi(\Delta)$ są otwartymi podzbiorami Ω , jest *topologicznie wolny*, gdy dla każdego $n > 0$ zbiór punktów stałych odwzorowania φ^n (na jego naturalnej dziedzinie) ma puste wnętrze. Zbiór V jest φ -*niezmienniczy* jeśli $\varphi(V \cap \Delta) = V \cap \varphi(\Delta)$. Gdy nie ma nietrywialnych domkniętych φ -niezmienniczych podzbiorów M , to φ nazywamy *minimalnym*. Powiemy, że φ jest odwzorowaniem *wolnym* (lub *rezydualnie topologicznie wolnym*), jeśli topologicznie wolne jest każde jego obcięcie do domkniętego zbioru niezmienniczego (gdy M jest przestrzenią Hausdorffa jest to równoważne z warunkiem, że φ nie ma punktów okresowych).

Bazując na wynikach [Kwa14], patrz Twierdzenie 5.4 poniżej, oraz ogólnych K -teoretycznych rozważaniach w [Kat04] otrzymano następujący wynik [Kwa14', Twierdzenia 2.20, 2.24]:

Twierdzenie 3.15 ([Kwa14']). Niech $(\mathcal{V}, \mathcal{H})$ będzie interakcją narożnikową.

- i) Jeśli odwzorowanie $\hat{\mathcal{H}}$ jest topologicznie wolne, to każda reprezentacja $C^*(A, \mathcal{V}, \mathcal{H})$, która jest wierna na $i_A(A)$ jest wierna na $C^*(A, \mathcal{V}, \mathcal{H})$. Jeśli dodatkowo, $\hat{\mathcal{H}}$ jest minimalny, równoważnie nie ma w A nietrywialnych ideałów I takich, że $\mathcal{H}(I) = \mathcal{H}(1)I\mathcal{H}(1)$, to $C^*(A, \mathcal{V}, \mathcal{H})$ jest prosta.
- ii) Jeśli odwzorowanie $\hat{\mathcal{H}}$ jest wolne, to $J \mapsto \widehat{J \cap A}$ jest izomorfizmem kraty ideałów w $C^*(A, \mathcal{V}, \mathcal{H})$ na kratę otwartych podzbiorów $\hat{\mathcal{H}}$ -niezmienniczych w $\hat{A}$.
- iv) Następujący ciąg jest dokładny:

$$\begin{array}{ccccccc} K_0(\mathcal{V}(A)) & \xrightarrow{K_0(\iota) - K_0(\mathcal{H})} & K_0(A) & \xrightarrow{K_0(i_A)} & K_0(C^*(A, \mathcal{V}, \mathcal{H})) & & (13) \\ \uparrow & & & & \downarrow & & \\ K_1(C^*(A, \mathcal{V}, \mathcal{H})) & \xleftarrow{K_0(i_A)^*} & K_1(A) & \xleftarrow{K_0(\iota) - K_0(\mathcal{H})} & K_1(\mathcal{V}(A)) & & \end{array}$$

3.3.1 Algebry grafowe jako produkt krzyżowy przez interakcje narożnikowe

Niech $E = (E^0, E^1, r, s)$ będzie grafem skończonym, tzn. E^0 i E^1 są zbiorami skończonymi. Niech $\{s_e : e \in E^1\}$ oraz $\{p_v : v \in E^1\}$ będą generatorami C^* -algebry $C^*(E)$, jak w paragrafie 3.2.1. W pracy [Kwa14'] stosowano inną (starszą) konwencję dotyczącą grafów - odwzorowania r i s są zamienione rolami w stosunku do konwencji użytej w [Kwa17]. Dla spójności prezentacji będziemy się tu trzymać (nowszej) konwencji z pracy [Kwa17]. Skończoność E^0 implikuje, że algebra $C^*(E)$ posiada jedynekę. Rozważmy operator

$$s := \sum_{e \in E^1} \frac{1}{\sqrt{|s^{-1}(s(e))|}} s_e.$$

Operator s jest częściową izometrią, która zadaje wzorami $\mathcal{V}(a) = sas^*$, $\mathcal{H}(a) = s^*as$ interakcję narożnikową na $C^*(E)$. Zauważmy, że $\mathcal{H}$ jest nieprzemiennym operatorem Perrona-Frobeniusa $\mathcal{L}_\lambda$, gdzie $\lambda_e := |s^{-1}(s(e))|^{-1}$, $e \in E^1$. Para $(\mathcal{V}, \mathcal{H})$ nie obcina się do interakcji na algebrze $\mathcal{D}_E$ jako, że $\mathcal{V}$ nie zachowuje $\mathcal{D}_E$. W zasadzie, patrz [Kwa14', Uwaga 3.10], najmniejszą algebrą zawierającą $\mathcal{D}_E$ i niezmienniczą ze względu na odwzorowanie $\mathcal{V}$ jest algebra $\mathcal{F}_E$ składająca się z punktów stałych ze względu na kanoniczne działanie okręgu $\mathbb{T}$. Para $(\mathcal{V}, \mathcal{H})$ jest interakcją narożnikową na $\mathcal{F}_E$ oraz

$$C^*(E) \cong C^*(\mathcal{F}_E, \mathcal{V}, \mathcal{H}),$$

[Kwa14', Stwierdzenie 3.2]. W zależności od grafu E , własności s oraz pary $(\mathcal{V}, \mathcal{H})$ zostały opisane w [Kwa14', Stwierdzenie 3.5, 3.7, Wniosek 3.6]. Na ogół żadne z odwzorowań $\mathcal{V}$, $\mathcal{H}$ nie jest moltiplikatywne. W [Kwa14', Twierdzenie 3.9] opisano (częściowy) homeomorfizm dualny do układu $(\mathcal{F}_E, \mathcal{V}, \mathcal{H})$: przestrzeń $\widehat{\mathcal{F}}_E$ jest ilorazem przestrzeni ścieżek, na której $\hat{\mathcal{V}} = \hat{\mathcal{H}}^{-1}$ działa jak lewe przesunięcie Markowa. Z tego opisu można stosunkowo łatwo, patrz [Kwa14', Twierdzenie 3.19], wynioskować, że

- i) $\hat{\mathcal{H}}$ jest topologicznie wolne $\iff$ każdy cykl w E ma wejście (E spełnia warunek (L) [KPRR97]),

ii) $\hat{\mathcal{H}}$ jest odwzorowaniem wolnym $\iff$ graf E spełnia warunek (K) [KPRR97].

W szczególności punkt (i) w Twierdzeniu 3.15 w zastosowaniu do interakcji pochodzącej od grafu E jest równoważny twierdzeniu Cuntza-Kriegera o jednoznaczności (*Cuntz-Krieger uniqueness theorem*).

Izomorfizm $\mathcal{H} : \mathcal{V}(A) \rightarrow \mathcal{H}(A)$ indukuje izomorfizm $K_0(\mathcal{H})$ między podgrupami $K_0(\mathcal{V}(\mathcal{F}_E))$, $K_0(\mathcal{H}(\mathcal{F}_E))$ grupy $K_0(\mathcal{F}_E)$, który opisano w [Kwa14', Stwierdzenie 3.22]. Jako że algebra $\mathcal{F}_E$ jest skończenie aproksymatywna, mamy $K_1(\mathcal{F}_E) = K_1(\mathcal{V}(\mathcal{F}_E)) = 0$ i ciąg dokładny (13) daje izomorfizmy $K_1(C^*(E)) \cong \ker(K_0(\iota) - K_0(\mathcal{H}))$, $K_0(C^*(E)) \cong K_0(\mathcal{F}_E)/\text{im}(K_0(\iota) - K_0(\mathcal{H}))$. Na tej podstawie otrzymano w nowy sposób (podkreślający rolę przesunięcia Markowa) wzory na K -teorię algebr grafowych [Kwa14', Wniosek 3.22], otrzymane pierwotnie w [RS04].

4 Unifikacja względnych algebr Cuntza-Pimsnera i algebr Doplichera-Robertsza

W pracach [DPZ98], [FMR03] zauważono, że z C^* -korespondencją X (z injektywnym lewym działaniem) oprócz algebry Pimsnera $\mathcal{O}_X$ można również związać w naturalny sposób C^* -algebrę *Doplichera-Robertsza* $\mathcal{DR}(X)$. Algebra $\mathcal{DR}(X)$ jest szczególnym przypadkiem konstrukcji $\mathcal{DR}(\mathcal{T})$ rozważanej w [DR89] w kontekście abstrakcyjnych C^* -kategorii $\mathcal{T}$ z tensorowaniem (takie obiekty pojawiają się w naturalny sposób m.in. w teorii dualności grup nieprzemiennych i kwantowej teorii pola). Mówiąc obrazowo, algebry $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{DR}(X)$ i $\mathcal{DR}(\mathcal{T})$ są zbudowane odpowiednio z przestrzeni operatorów "zwartych", operatorów sprzężalnych i morfizmów abstrakcyjnych:

$$\mathcal{K}(X^{\otimes m}, X^{\otimes n}), \quad \mathcal{L}(X^{\otimes m}, X^{\otimes n}), \quad \mathcal{T}(n, m), \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Przestrzenie te powiązane są ze sobą za pomocą "tensorowania z prawej strony przez operatory identycznościowe" - tzw. prawe tensorowanie. W pracy [Kwa13] podjęto się systematycznej analizy związków między tymi konstrukcjami. Na bazie wprowadzonej nowej konstrukcji algebr $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J})$ opracowano ogólną teorię unifikującą teorię względnych algebr Cuntza-Pimsnera oraz konstrukcje typu Doplichera-Robertsza. Wyniki [Kwa13], które tu omówimy, nie tylko stanowią ogólne ramy dla konstrukcji omawianych wcześniej produktów, ale też rzucają nowe światło na strukturę samych algebr Cuntz-Pimsnera i obejmują istotnie szerszą klasę C^* -algebr.

W tym rozdziale przedstawimy uniwersalną definicję C^* -algebry $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J})$ (Definicja 4.6) i jej związek z względnymi algebrami Cuntza-Pimsnera $\mathcal{O}(X, J)$ (Przykład 4.8). Podamy jawną konstrukcję algebry $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J})$ na bazie opracowanego "rachunku macierzowego" (Twierdzenie 4.11). Wyjaśnimy związek algebr $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J})$ z algebrami Doplichera-Robertsza (Uwaga 4.10, Twierdzenie 4.12). Opiszemy strukturę $\mathbb{T}$ -niezmienniczych ideałów algebry $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J})$ (Twierdzenia 4.16, 4.19). Rezultaty te nie tylko uogólniają, ale też i wzmacniają analogiczne wyniki dla algebr Cuntza-Pimsnera (por. Uwaga 4.17). W podrozdziale 4.4 omówimy rezultaty dotyczące zanurzenia algebr względnych Cuntza-Pimsnera we względne algebry Doplichera-Robertsza i przedłużania ich wiernych reprezentacji.

4.1 Podstawowe definicje i fakty

C^* -kategorią, por. [GLR85], nazywamy małą kategorię $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}(\sigma, \rho)\}_{\sigma, \rho \in \text{Ob}(\mathcal{T})}$, w której zbiory morfizmów $\mathcal{T}(\sigma, \rho)$ są zespolonymi przestrzeniami Banacha takimi, że $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$, dla $a \in \mathcal{T}(\tau, \sigma)$, $b \in \mathcal{T}(\sigma, \rho)$, wyposażoną w antyliniowy inwolucyjny kontrawariantny funktor $*$: $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ taki, że jeśli $a \in \mathcal{T}(\tau, \sigma)$, to $a^* \in \mathcal{T}(\sigma, \tau)$ oraz $\|a^*a\| = \|a\|^2$. Wtedy $\mathcal{T}(\sigma, \sigma)$ jest C^* -algebrą i wymagamy, by dla $a \in \mathcal{T}(\tau, \sigma)$ element a^*a był dodatni w $\mathcal{T}(\sigma, \sigma)$. W [Kwa13] rozważamy ogólniejsze pojęcie nazywane C^* -prekategorią, którego definicja różni się od C^* -kategorii tylko tym, że nie wymagamy istnienia morfizmów identycznościowych. Zatem C^* -kategorie są kategorialnym uogólnieniem C^* -algebr z jedyneką, a C^* -prekategorie są uogólnieniem dowolnych C^* -algebr (niekoniecznie z jedyneką). W szczególności C^* -algebry można traktować jako C^* -prekategorie z dokładnie jednym obiektem. Pojęcie C^* -prekategorii jest w pewnym sensie nieuniknione, gdy rozważa się ideały w C^* -kategoriach.

Definicja 4.1 (Definicja 2.4 w [Kwa13]). Ideałem w C^* -prekategorii $\mathcal{T}$ nazywamy rodzinę $\mathcal{K} = \{\mathcal{K}(\sigma, \rho)\}_{\sigma, \rho \in \text{Ob}(\mathcal{T})}$, gdzie $\mathcal{K}(\sigma, \rho) \subseteq \mathcal{T}(\sigma, \rho)$ jest domkniętą podprzestrzenią liniową oraz

$$\mathcal{T}(\tau, \sigma)\mathcal{K}(\sigma, \rho) \subseteq \mathcal{K}(\tau, \rho) \text{ i } \mathcal{K}(\tau, \sigma)\mathcal{T}(\sigma, \rho) \subseteq \mathcal{K}(\tau, \rho) \text{ dla } \sigma, \rho, \tau \in \text{Ob}(\mathcal{T}).$$

Wtedy $\mathcal{K}$ jest automatycznie C^* -prekategorią.

Jeśli $\mathcal{K}$ jest ideałem w $\mathcal{T}$, to $\mathcal{K}(\sigma, \sigma)$ jest ideałem w $\mathcal{T}(\sigma, \sigma)$ dla każdego $\sigma \in \text{Ob}(\mathcal{T})$. Ideały $\mathcal{K}(\sigma, \sigma)$ wyznaczają $\mathcal{K}$ jednoznacznie na mocy [Kwa13, Twierdzenie 2.6]. Dla każdego ideału $\mathcal{K}$ istnieje jego *anihilator*, to jest ideał $\mathcal{K}^\perp$ taki, że $\mathcal{K}^\perp(\sigma, \sigma) = \mathcal{K}(\sigma, \sigma)^\perp$ dla każdego $\sigma \in \text{Ob}(\mathcal{T})$ [Kwa13, Stwierdzenie 2.7]. Istnieje C^* -prekategoria ilorazowa $\mathcal{T}/\mathcal{K}$ gdzie $\mathcal{T}/\mathcal{K}(\sigma, \rho) := \mathcal{T}(\sigma, \rho)/\mathcal{K}(\sigma, \rho)$ dla każdego $\sigma, \rho \in \text{Ob}(\mathcal{T})$ [Kwa13, Stwierdzenie 2.10]. *Homomorfizmem* między dwoma C^* -prekategoriami nazywamy kowariantny “funktor” zachowujący inwolucję i strukturę liniową przestrzeni morfizmów [Kwa13, Definicja 2.8]. *Reprezentacją C^* -prekategorii $\mathcal{T}$ w C^* -algebrze B* nazywamy rodzinę $\{\pi_{\sigma, \rho}\}_{\sigma, \rho \in \text{Ob}(\mathcal{T})}$ operatorów liniowych $\pi_{\sigma, \rho} : \mathcal{T}(\sigma, \rho) \rightarrow B$ takich, że $\pi_{\sigma, \rho}(a)^* = \pi_{\rho, \sigma}(a^*)$ oraz $\pi_{\sigma, \tau}(ab) = \pi_{\sigma, \rho}(a)\pi_{\rho, \tau}(b)$, $a \in \mathcal{T}(\sigma, \rho)$, $b \in \mathcal{T}(\rho, \tau)$ [Kwa13, Definicja 2.11].

Podstawowym obiektem w [Kwa13] jest C^* -prekategoria z prawym tensorowaniem nad półgrupą $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Definicja 4.2 (Definicja 3.1 w [Kwa13]). C^* -prekategorią z prawym tensorowaniem (prawo-tensorową C^* -prekategorią) nazywamy C^* -prekategorię $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}(n, m)\}_{n, m \in \mathbb{N}}$ wyposażoną w endomorfizm $\otimes 1 : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ odwzorowujący n na $n + 1$:

$$\otimes 1 : \mathcal{T}(n, m) \rightarrow \mathcal{T}(n + 1, m + 1), \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

W miejsce $\otimes 1(a)$ piszemy $a \otimes 1$, $a \in \mathcal{T}(n, m)$. Iterując $\otimes 1$ otrzymujemy półgrupę $\{\otimes 1^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ endomorfizmów $\otimes 1^k : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$, gdzie $\otimes 1^k : \mathcal{T}(n, m) \rightarrow \mathcal{T}(n + k, m + k)$. Z definicji $\otimes 1^0 := id$.

Definicja 4.3 (Definicja 3.6 w [Kwa13]). Niech $\mathcal{K}$ będzie ideałem w C^* -prekategorii $\mathcal{T}$ z prawym tensorowaniem. Reprezentację $\{\pi_{n, m}\}_{n, m \in \mathbb{N}}$ C^* -prekategorii $\mathcal{K}$ nazywamy *prawo-tensorową reprezentacją* gdy zachodzi

$$\pi_{n, m}(a)\pi_{m+k, l}(b) = \pi_{n+k, l}((a \otimes 1^k)b) \quad (14)$$

dla każdego $a \in \mathcal{K}(n, m)$ oraz $b \in \mathcal{K}(m + k, l)$, $k, l, m, n \in \mathbb{N}$. Zwróćmy uwagę, iż prawa strona (14) ma sens, gdyż $\mathcal{K}$ jest ideałem (prawe tensorowanie nie musi zachowywać $\mathcal{K}$).

Przykład 4.4 (Prawo-tensorowa C^* -prekategoria $\mathcal{T}_X$ związana z C^* -korespondencją X). Z C^* -korespondencją X wiążemy C^* -prekategorię $\mathcal{T}_X$, gdzie

$$\mathcal{T}_X(n, m) := \begin{cases} \mathcal{K}(X^{\otimes m}, X^{\otimes n}), & \text{jeśli } n = 0 \text{ lub } m = 0, \\ \mathcal{L}(X^{\otimes m}, X^{\otimes n}), & \text{jeśli } n, m \geq 1. \end{cases}$$

Tutaj $X^{\otimes n} := X \otimes_A \cdots \otimes_A X$ jest n -tą potęgą (wewnętrzną) tensorową i $X^{\otimes 0} := A$. Na $\mathcal{T}_X$ mamy naturalnie określone prawe tensorowanie. Dla $n > 0, m > 0$, kładziemy

$$\mathcal{L}(X^{\otimes m}, X^{\otimes n}) \ni a \longmapsto a \otimes 1 := a \otimes 1_X \in \mathcal{L}(X^{\otimes(m+1)}, X^{\otimes(n+1)}),$$

gdzie 1_X jest identycznością w $\mathcal{L}(X)$. Jeśli $n = 0$ lub $m = 0$, to prawe tensorowanie określamy używając utożsamień $\mathcal{K}(A, X^{\otimes k}) = X^{\otimes k}$, $\mathcal{K}(X^{\otimes k}, A) = \tilde{X}^{\otimes k}$, $k \in \mathbb{N}$, patrz [Kwa13, Przykład 3.2]. Wtedy

$$\mathcal{K}_X := \{\mathcal{K}(X^{\otimes m}, X^{\otimes n})\}_{m, n \in \mathbb{N}}$$

jest ideałem w $\mathcal{T}_X$ oraz: każdy ideał w $\mathcal{K}_X$ jest postaci $\mathcal{K}_X(J) := \{\mathcal{K}(X^{\otimes m}, X^{\otimes n}J)\}_{n, m \in \mathbb{N}}$, gdzie J jest ideałem w A , [Kwa13, Stwierdzenie 2.17]; relacje $\pi_{0,0} = \pi$, $\pi_{1,0} = t$ zadają bijektywną odpowiedniość między reprezentacjami (π, t) C^* -korespondencji (A, X) oraz prawo-tensorowymi reprezentacjami $\{\pi_{n,m}\}_{m, n \in \mathbb{N}}$ ideału $\mathcal{K}_X$ [Kwa13, Stwierdzenie 3.13].

Przykład 4.5 (Prawo-tensorowa C^* -prekategoria związana z endomorfizmem α). Niech $\alpha : A \rightarrow A$ będzie endomorfizmem. Wtedy rodzina $\mathcal{T}_\alpha = \{\alpha^n(A)A\alpha^m(A)\}_{n, m \in \mathbb{N}}$ wraz z naturalnymi działaniami odziedziczonymi z A jest C^* -prekategorią, którą wyposażamy w prawe tensorowanie $\alpha^n(A)A\alpha^m(A) \ni a \longmapsto a \otimes 1 = \alpha(a) \in \alpha^{n+1}(A)A\alpha^{m+1}(A)$. Wtedy $\mathcal{T}_\alpha$ jest prawo-tensorową C^* -prekategorią izomorficzną z prawo-tensorową C^* -prekategorią $\mathcal{T}_{E_\alpha} = \mathcal{K}_{E_\alpha}$ związaną z C^* -korespondencją E_α . W szczególności $\mathcal{T}_{E_\alpha} = \mathcal{K}_{E_\alpha}$ i każdy ideał w $\mathcal{T}_\alpha$ jest postaci $\mathcal{J} = \{\alpha^n(A)J\alpha^m(A)\}_{n, m \in \mathbb{N}}$ dla pewnego ideału J w A .

Przykład 4.4 i teoria względnych algebr Cuntza-Pimsnera motywuje następujące definicje, patrz [Kwa13, Subsekcja 3.2]. Przeciwobraz i jądro funktora $\otimes 1$ definiuje się w naturalny sposób, patrz [Kwa13, Sekcja 2].

Definicja 4.6 ([Kwa13]). Niech $\mathcal{K}$ będzie ideałem w C^* -prekategorii $\mathcal{T}$ z prawym tensorowaniem. Niech $\mathcal{J}$ będzie ideałem w $\mathcal{J}(\mathcal{K}) := (\otimes 1)^{-1}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{K}$. Powiemy, że prawo-tensorowa reprezentacja $\{\pi_{n,m}\}_{n, m \in \mathbb{N}}$ jest $\mathcal{J}$ -kowariantna (koizometryczna na $\mathcal{J}$) gdy zachodzi

$$\pi_{n,m}(a) = \pi_{n+1, m+1}(a \otimes 1), \quad \text{dla każdego } a \in \mathcal{J}(n, m), \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

C^* -algebrę generowaną przez uniwersalną $\mathcal{J}$ -kowariantną prawo-tensorową reprezentację $\iota = \{\iota_{n,m}\}_{n, m \in \mathbb{N}}$ ideału $\mathcal{K}$ oznaczamy przez

$$\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J}) := C^*(\{\iota_{n,m}(\mathcal{K}(n, m))\}_{n, m \in \mathbb{N}}).$$

Algebrę $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J})$ nazywamy C^* -algebrą ideału $\mathcal{K}$ względem ideału $\mathcal{J}$.

Uwaga 4.7. Algebra $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J})$ jest wyposażona w działanie $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J}))$ dane wzorem $\gamma_z(\iota_{n,m}(a)) = z^{n-m}\iota_{n,m}(a)$, $a \in \mathcal{K}(n, m)$, $z \in \mathbb{T}$. Przykład przed [Kwa13, Twierdzenie 5.3] pokazuje, że każde działanie okręgu na dowolnej C^* -algebrze realizuje się w ten sposób. Dokładniej, dla dowolnej wiązki Fella $\{B_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ mamy w naturalny sposób stowarzyszoną C^* -prekategorię $\mathcal{T}$ oraz $\mathbb{T}$ -ekwiwariantny izomorfizm $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}) \cong C^*(\mathcal{B})$.

Przykład 4.8. Niech X będzie C^* -korespondencją. Wtedy $\mathcal{J}(\mathcal{K}_X) := (\otimes 1)^{-1}(\mathcal{K}_X) \cap \mathcal{K}_X = \mathcal{K}_X(J(X)) = \{\mathcal{K}(X^{\otimes m}, X^{\otimes n}J(X))\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ i dla każdego $J \triangleleft J(X)$ mamy

$$\mathcal{O}(J, X) \cong \mathcal{O}_{\mathcal{T}_X}(\mathcal{K}_X, \mathcal{J}),$$

gdzie $\mathcal{J} = \mathcal{K}_X(J) = \{\mathcal{K}(X^{\otimes m}, X^{\otimes n}J)\}_{n,m \in \mathbb{N}}$. Motywuje to następującą definicję [Kwa13, Definicja 8.7]: dla dowolnego ideału J w A , *względą algebrą Doplichera-Robertsą związaną z X względem J* nazywamy C^* -algebrę

$$\mathcal{DR}(J, X) := \mathcal{O}_{\mathcal{T}_X}(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_X(J)),$$

gdzie $\mathcal{T}_X(J) := \{\mathcal{L}_J(X^{\otimes m}, X^{\otimes n})\}_{n,m \in \mathbb{N}} \cap \mathcal{T}_X^4$. W tej notacji algebrą rozważaną w [FMR03], [DPZ98] jest $\mathcal{DR}(A, X)$.

Uwaga 4.9. Izomorfizm $\mathcal{O}(J, X) \cong \mathcal{O}_{\mathcal{T}_X}(\mathcal{K}_X, \mathcal{J})$ jest ekwiwariantny ze względu na naturalne działanie okręgu $\mathbb{T}$ na obu algebrach. Jak wiadomo, działanie dualne okręgu na algebrach Cuntza-Pimsnera jest zawsze półwysycone (wiązka Fella przestrzeni spektralnych jest półwysycona). W świetle uwagi 4.7 omawiany formalizm unifikuje algebry Cuntz-Pimsnera i C^* -algebry związane z dowolnymi wiązkami Fella nad $\mathbb{Z}$.

Uwaga 4.10. Algebrę Doplichera-Robertsą $\mathcal{DR}(\mathcal{T})$ prawo-tensorowej C^* -prekategorii $\mathcal{T}$ definiujemy jako uzupełnienie algebraicznej sumy prostej $\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{DR}^{(k)}(\mathcal{T})$ przestrzeni danych przez granice induktywne

$$\mathcal{DR}^{(k)}(\mathcal{T}) := \varinjlim \mathcal{T}(r + k, r),$$

z operacjami algebraicznymi indukowanymi z $\mathcal{T}$, w C^* -normie dla której działanie okręgu $\mathbb{T}$ zadane przez gradację jest izometryczne, por. [DR89, p. 179]. Jak wynika z konstrukcji, którą przedstawimy poniżej $\mathcal{DR}(\mathcal{T}) \cong \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}, \mathcal{T})$.

4.2 Konstrukcja $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J})$

Ustalmy prawo-tensorową C^* -prekategorię $\mathcal{T}$, ideał $\mathcal{K}$ w $\mathcal{T}$ oraz ideał $\mathcal{J}$ w $\mathcal{J}(\mathcal{K})$. Przestrzenie spektralne działania okręgu na $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J})$ tworzą wiązkę Fella $\{\mathcal{O}_{\mathcal{T}}^{(k)}(\mathcal{K}, \mathcal{J})\}_{k \in \mathbb{Z}}$ i $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J}) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathcal{T}}^{(k)}(\mathcal{K}, \mathcal{J})$. W [Kwa13, Subsekcja 4.2] skonstruowano w sposób jawny $*$ -algebrę $\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathcal{T}}^{(k)}(\mathcal{K}, \mathcal{J})$ oraz podano wzory na normę w przestrzeniach $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}^{(k)}(\mathcal{K}, \mathcal{J})$.

⁴ $\mathcal{L}_I(X, Y)$ oznacza przestrzeń elementów $a \in \mathcal{L}(X, Y)$ spełniających równoważne warunki $a(X) \subset YI$ oraz $a^*(Y) \subset XI$

Mianowicie, niech $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ będzie zbiorem wszystkich macierzy $\{a_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$, gdzie $a_{n,m} \in \mathcal{T}(n, m)$. Oznaczmy przez $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K})$ podzbiór $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ składający się z macierzy $\{a_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ takich, że

$$a_{n,m} \in \mathcal{K}(n, m), \quad n, m \in \mathbb{N},$$

oraz co najwyżej skończona ilość elementów $a_{n,m}$ jest różna od zera. Dodawanie, mnożenie przez skalary i inwolucję na $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K})$ definiujemy w naturalny sposób: dla $a = \{a_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ oraz $b = \{b_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ kładziemy

$$(a + b)_{n,m} := a_{n,m} + b_{n,m}, \quad (15)$$

$$(\lambda a)_{n,m} := \lambda a_{n,m}, \quad (16)$$

$$(a^*)_{n,m} := a_{m,n}^*. \quad (17)$$

Mnożenie $\star$ na $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K})$ jest bardziej skomplikowane. Kładziemy

$$a \star b := a \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(b) + \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda^k(a) \cdot b \quad (18)$$

gdzie $\cdot$ oznacza standardowe mnożenie macierzowe, a $\Lambda : \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ jest odwzorowaniem zdefiniowanym wzorem

$$\Lambda(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_{0,0} \otimes 1 & a_{0,1} \otimes 1 & a_{0,2} \otimes 1 & \cdots \\ 0 & a_{1,0} \otimes 1 & a_{1,1} \otimes 1 & a_{1,2} \otimes 1 & \cdots \\ 0 & a_{2,0} \otimes 1 & a_{2,1} \otimes 1 & a_{2,2} \otimes 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (19)$$

tzn. $\Lambda(a)_{n,m} = a_{n-1,m-1} \otimes 1$, dla $n, m > 1$, oraz $\Lambda(a)_{n,m} = 0$ w przeciwnym razie. Oznaczmy przez $q_{\mathcal{J}} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}/\mathcal{J}$ homomorfizm ilorazowy. Łącząc [Kwa13, Stwierdzenie 4.10 i Twierdzenie 4.12] otrzymujemy:

Twierdzenie 4.11 ([Kwa13]). *Zbiór $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K})$ z operacjami (15), (16), (17), (18) tworzy algebrę z inwolucją. Wzór*

$$\|a\|_{\mathcal{J}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lim_{r \rightarrow \infty} \max \left\{ \max_{s=0, \dots, r-1} \left\{ \|q_{\mathcal{J}} \left(\sum_{\substack{i=0, \\ i+k \geq 0}}^s a_{i+k,i} \otimes 1^{s-i} \right)\| \right\}, \right. \\ \left. \left\| \sum_{\substack{i=0, \\ i+k \geq 0}}^r (a_{i+k,i} \otimes 1^{r-i}) \right\| \right\}$$

zadaje podmultiplikatywną $\ast$ -półnormę on $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K})$ taką, że dla obwiedniej C^ -algebry ilorazowej $\ast$ -algebry $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K})/\|\cdot\|_{\mathcal{J}}$ mamy naturalny izomorfizm*

$$\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J}) \cong \overline{\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K})/\|\cdot\|_{\mathcal{J}}}.$$

Aby otrzymać alternatywny opis $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J})$ w stylu Doplichera-Roberts'a, rozważmy następujące podprzestrzenie $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K})$. Dla $r \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, $r + k \geq 0$, kładziemy

$$\mathcal{M}(r + k, r) := \{ \{a_{n,m}\}_{m,n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}) : a_{n,m} \neq 0 \implies n - m = k, m \leq r \}.$$

Zatem element $a \in \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K})$ jest w $\mathcal{M}(r + k, r)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci

$$\begin{cases} k \\ r+1 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc} & & 0 \\ & a_{k,0} & \ddots \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & a_{r+k,r} \end{array} \right), \text{ gdy } k \geq 0, \text{ lub } \begin{cases} -k & r+k+1 \\ & \end{cases} \left(\begin{array}{ccc} & & 0 \\ & a_{0,-k} & \ddots \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & a_{r+k,r} \end{array} \right), \text{ gdy } k < 0.$$

Łącząc [Kwa13, Twierdzenie 4.11 i Stwierdzenie 5.1] otrzymujemy:

Twierdzenie 4.12 ([Kwa13]). *Dla każdego $r \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, $r + k \geq 0$, wzór*

$$\|a\|_{r+k,r}^{\mathcal{J}} := \max \left\{ \max_{s=0,\dots,r-1} \left\{ \|q_{\mathcal{J}} \left(\sum_{\substack{i=0, \\ i+k \geq 0}}^s a_{i+k,i} \otimes 1^{s-i} \right)\| \right\}, \left\| \sum_{\substack{i=0, \\ i+k \geq 0}}^r (a_{i+k,i} \otimes 1^{r-i}) \right\| \right\}$$

zadaje półnormę na $\mathcal{M}(r + k, r)$ taką, że rodzina przestrzeni ilorazowych

$$\mathcal{K}_{\mathcal{J}} := \{ \mathcal{M}(n, m) / \| \cdot \|_{n,m}^{\mathcal{J}} \}_{n,m \in \mathbb{N}}$$

wraz z operacjami odziedziczonymi z $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K})$ tworzy prawo-tensorową C^* -prekategorię z prawym tensorowaniem $\otimes_{\mathcal{J}} 1$ indukowanym przez inkluzje $\mathcal{M}(n, m) \subset \mathcal{M}(n + 1, m + 1)$, $m, n \in \mathbb{N}$. Co więcej,

$$\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J}) \cong \mathcal{DR}(\mathcal{K}_{\mathcal{J}}).$$

Uwaga 4.13. Powyższa konstrukcja $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J})$ ma szereg bezpośrednich konsekwencji. Na przykład, daje konkretne wzory na normę elementów w podprzestrzeniach spektralnych $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}^{(k)}(\mathcal{K}, \mathcal{J})$ [Kwa13, Twierdzenie 4.10] i na jądro uniwersalne reprezentacji $\iota = \{\iota_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ ideału $\mathcal{K}$ w $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J})$. W szczególności ι jest iniektywna wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{J} \subset (\ker \otimes 1)^{\perp}$ [Kwa13, Wniosek 4.15].

4.3 Struktura ideałów $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J})$

Omówimy po krótku wyniki sekcji 6 i 7 w [Kwa13].

Definicja 4.14 (Definicje 6.1, 6.6 w [Kwa13]). Powiemy, że ideał $\mathcal{N}$ w prawo-tensorowej C^* -prekategorii $\mathcal{T}$ jest *niezmienniczy* jeśli $\mathcal{N} \otimes 1 \subseteq \mathcal{N}$. Wtedy ilorazowa C^* -prekategoria $\mathcal{T}/\mathcal{N}$ jest w naturalny sposób *ilorazową prawo-tensorową C^* -prekategorią*. Ogólniej, jeśli $\mathcal{K}$ jest ideałem w $\mathcal{T}$ powiemy, że ideał $\mathcal{N}$ jest $\mathcal{K}$ -*niezmienniczy* jeśli

$$(\mathcal{N}(n, m) \otimes 1) \mathcal{K}(m + 1, l) \subseteq \mathcal{N}(n + 1, l), \quad n, m, l \in \mathbb{N}.$$

Jeśli $\mathcal{J}$ jest ideałem w $\mathcal{T}$, powiemy, że $\mathcal{N}$ jest $\mathcal{J}$ -*wysycony* jeśli $\mathcal{J} \cap \otimes 1^{-1}(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$. Ogólnie przez $\mathcal{S}_{\mathcal{J}}(\mathcal{N})$ oznaczamy najmniejszy $\mathcal{J}$ -wysycony ideał zawierający $\mathcal{N}$ i nazywamy go $\mathcal{J}$ -*wysyceniem* ideału $\mathcal{N}$.

Przykład 4.15. Jeśli $\mathcal{T}_\alpha = \{\alpha^n(A)A\alpha^m(A)\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ jest prawo-tensorową C^* -prekategorią związaną z endomorfizmem $\alpha : A \rightarrow A$ i $\mathcal{J} = \{\alpha^n(A)J\alpha^m(A)\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ ideałem w $\mathcal{T}_\alpha$, patrz przykład 4.5, to $\mathcal{J}$ -wysycone ideały niezmiennicze w $\mathcal{T}_\alpha$ odpowiadają J -niezmienniczemu ideałom w (A, α) , patrz Definicja 2.10.

Twierdzenie 4.16 (Twierdzenie strukturalne [Kwa13]). *Niech $\mathcal{K}$, $\mathcal{J}$ oraz $\mathcal{N}$ będą ideałami w prawo-tensorowej C^* -prekategorii $\mathcal{T}$ takimi, że $\mathcal{J} \subseteq J(\mathcal{K})$ oraz $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{K}$ jest $\mathcal{K}$ -niezmienniczy. Podprzestrzeń*

$$\mathcal{O}(\mathcal{N}) = \overline{\text{span}}\{\iota_{n,m}(a) : a \in \mathcal{N}(n, m), n, m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J})$$

jest $\mathbb{T}$ -niezmiennicznym ideałem w $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J})$ oraz mamy naturalne izomorfizmy

$$\mathcal{O}(\mathcal{N}) \cong \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{N}, \mathcal{J} \cap \mathcal{N}), \quad \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J})/\mathcal{O}(\mathcal{N}) \cong \mathcal{O}_{\mathcal{T}/\tilde{\mathcal{N}}}(\mathcal{K}/\tilde{\mathcal{N}}, \mathcal{J}/\tilde{\mathcal{N}}), \quad (20)$$

gdzie $\tilde{\mathcal{N}}$ jest dowolnym niezmiennicznym ideałem w $\mathcal{T}$ takim, że $\mathcal{N} = \tilde{\mathcal{N}} \cap \mathcal{K}$. Ponadto, $\mathcal{S}_{\mathcal{J}}(\mathcal{N}) = \iota^{-1}(\mathcal{O}(\mathcal{N}))$ i zatem po prawych stronach (20) ideały $\mathcal{N}$ oraz $\tilde{\mathcal{N}}$ można zastąpić ich $\mathcal{J}$ -wysyceniami $\mathcal{S}_{\mathcal{J}}(\mathcal{N})$ oraz $\mathcal{S}_{\mathcal{J}}(\tilde{\mathcal{N}})$.

Uwaga 4.17. Twierdzenie 4.16 w zastosowaniu do obiektów z przykładu 4.4 daje następujący wynik [Kwa13, Twierdzenie 6.20]: Niech X będzie C^* -korepondencją nad A . Niech $I \triangleleft A$ będzie ideałem X -niezmiennicznym, i.e. $IX \subseteq XI$ i niech J będzie ideałem w $J(X)$. Dla ideału $\mathcal{O}(I)$ w $\mathcal{O}(J, X)$ generowanego przez obraz ideału I mamy naturalne izomorfizmy

$$\mathcal{O}(I) \cong \mathcal{O}_X(I, J \cap I), \quad \mathcal{O}(J, X)/\mathcal{O}(I) \cong \mathcal{O}(J/I, X/XI).$$

gdzie

$$\mathcal{O}_X(I, J) := \mathcal{O}_{\mathcal{T}_X}(\mathcal{K}_X(I), \mathcal{K}_X(J))$$

jest uogólnieniem względnej algebry Cuntza-Pimsnera [Kwa13, Definicja 6.17]. Ponadto algebry $\mathcal{O}_X(I, J)$ i $\mathcal{O}(J \cap I, XI)$ są Morita-Rieffel równoważne. Na ogół jednak, jeśli $IX \neq XI$, nie są one izomorficzne. Zatem w zastosowaniu do C^* -korespondencji Twierdzenie 4.16 daje nie tylko uogólnienie analogicznych wyników [FMR03], [Kat07], ale też dokładniejszy opis ideałów $\mathbb{T}$ -niezmiennicznych.

Uwaga 4.18. Stosując Twierdzenie 4.16 do ideału $\mathcal{N} = \{0\}$ otrzymujemy, że jądro $\mathcal{R}_{\mathcal{J}} := \ker \iota$ uniwersalnej reprezentacji $\iota : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J})$ jest niezmiennicznym $\mathcal{J}$ -wysyceniem ideału zerowego oraz że przechodząc do C^* -prekategorii ilorazowej $\mathcal{T}/\mathcal{R}_{\mathcal{J}}$ możemy zawsze założyć, że reprezentacja uniwersalna ι jest iniektywna (równoważnie, że $\mathcal{J} \subseteq (\ker \otimes 1)^\perp$), [Kwa13, Twierdzenie 6.11].

Niech $\text{Ideal}_{\mathcal{J}}(\mathcal{K})$ oznacza kratę $\mathcal{K}$ -niezmiennicznych i $\mathcal{J}$ -wysyconych ideałów w $\mathcal{K}$, natomiast $\text{Ideal}^{\mathbb{T}}(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J}))$ kratę $\mathbb{T}$ -niezmiennicznych ideałów w $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J})$. Na mocy powyższego twierdzenia mamy naturalne zanurzenie

$$\text{Ideal}_{\mathcal{J}}(\mathcal{K}) \hookrightarrow \text{Ideal}^{\mathbb{T}}(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J})).$$

Na ogół (jak pokazuje już przykład produktów krzyżowych przez endomorfizmy) zanurzenie to nie jest bijektywne. Aby otrzymać pełny opis kraty $\text{Ideal}^{\mathbb{T}}(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J}))$ możemy skorzystać z opisu $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J})$ jako algebry Doplichera-Robertsza $\mathcal{DR}(\mathcal{K}_{\mathcal{J}})$ dla C^* -prekategorii $\mathcal{K}_{\mathcal{J}}$, por. Twierdzenie 4.12. Korzystając z utożsamienia $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J}) = \mathcal{DR}(\mathcal{K}_{\mathcal{J}})$ w [Kwa13, Twierdzenie 7.1] otrzymano szereg równoważnych warunków na to, aby reprezentacja $\mathcal{J}$ -kowariantna π ideału $\mathcal{K}$ generowała C^* -algebrę izomorficzną z $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J})$. Natomiast, w [Kwa13, Twierdzenie 7.6] otrzymano między innymi izomorfizm

$$\text{Ideal}_{\mathcal{K}_{\mathcal{J}}}(\mathcal{K}_{\mathcal{J}}) \cong \text{Ideal}^{\mathbb{T}}(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J})).$$

Stosując powyższy izomorfizm do względnych algebr Cuntza-Pimsnera $\mathcal{O}(J, X)$, otrzymano w [Kwa13, Twierdzenie 7.6] opis ideałów $\mathbb{T}$ -niezmienniczych w $\mathcal{O}(J, X)$ za pomocą par ideałów w A , dając nowy wgląd w analogiczne wyniki [Kat07]. W ogólnej sytuacji otrzymano też następujące twierdzenie [Kwa13, Twierdzenie 7.8]:

Twierdzenie 4.19. *Jeśli $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{J} + \ker \otimes 1$, to $\text{Ideal}_{\mathcal{J}}(\mathcal{K}) \cong \text{Ideal}^{\mathbb{T}}(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}, \mathcal{J}))$.*

4.4 Zanurzenia algebr Cuntza-Pimsnera w algebry Doplichera-Robertsza

Związek między algebrą Pimsnera $\mathcal{O}_X$ i algebrą Doplichera-Robertsza $\mathcal{DR}(X)$ związaną z C^* -korespondencją X (przy założeniu, że lewe działanie na X jest injektywne) był badany w [DPZ98], [FMR03]. Zauważono, że zachodzą naturalne zanurzenia $\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{DR}(X) \subseteq \mathcal{O}_X^{**}$, por. [DPZ98, Stwierdzenie 3.9], oraz że przy pewnych warunkach reprezentacje C^* -korespondencji X integrują się w sposób zachowujący wierność nie tylko do reprezentacji algebry $\mathcal{O}_X$, ale też do większej algebry $\mathcal{DR}(X)$, por. [FMR03, Twierdzenie 6.6].

W [Kwa13, Sekcja 8] zbadano warunki konieczne i dostateczne na to, aby przy ustalonej prawo-tensorowej C^* -prekategorii $\mathcal{T}$ algebra postaci $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}_1, \mathcal{J}_1)$ zanurzała się w algebrę postaci $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(\mathcal{K}_2, \mathcal{J}_2)$. Na przykład względna algebra Cuntza-Pimsnera $\mathcal{O}(J \cap J(X), X)$ zanurza się we względną algebrę Doplichera-Robertsza $\mathcal{DR}(J, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $R_J = R_{J \cap J(X)}$, co zachodzi automatycznie, gdy lewe działanie na X jest injektywne, [Kwa13, Wniosek 8.8]. W [Kwa13, Twierdzenie 9.4] podano warunki, kiedy reprezentacja X przedłuża się nie tylko do reprezentacji $\mathcal{O}(J \cap J(X), X)$, ale też do reprezentacji $\mathcal{DR}(J, X)$ oraz wierność jednej z tych reprezentacji implikuje wierność drugiej. Jest to daleko idące uogólnienie [FMR03, Twierdzenie 6.6].

5 Algebry Cuntza-Pimsnera dla systemów produktowych nad półgrupami Ore

Niech P będzie półgrupą z jedyneką $e \in P$ oraz z lewostronnym skracaniem (tj. $rp = rq$ implikuje $p = q$ dla $p, q, r \in P$). Fowler [Fow02] podążając ściśle ścieżką wytyczoną przez Pimsnera [Pim97] zdefiniował algebrę $\mathcal{O}_X$ dla dowolnego systemu produktowego C^* -korespondencji $X = \bigsqcup_{p \in P} X_p$ nad P . Jedną z wad tej definicji jest, tak jak w przypadku algebry Pimsnera, że może się zdarzyć, iż $\mathcal{O}_X = \{0\}$ mimo, że system X jest nietrywialny.

Kolejną wadą jest, że definicja ta nie uwzględnia dodatkowych relacji, które zachodzą dla reprezentacji Focka. Dlatego Sims i Yeend zaproponowali w [SY10] konstrukcję nowej algebry $\mathcal{NO}_X$. Jest ona zdefiniowana jedynie w przypadku, gdy P jest stożkiem dodatnim w quasi-kratowo uporządkowanej grupie (G, P) (ang. *quasi-lattice ordered group* [Nic92]). W zasadzie wszystkie badania dotyczące systemów produktowych skupiły się na algebrze $\mathcal{NO}_X$. Jednakże jak wykazano w [CLSV11] algebra ta nie zawsze posiada pożądane własności. Ponadto założenie, że P jest stożkiem dodatnim wyklucza m.in. przypadek, gdy P jest grupą. Zatem teoria algebr $\mathcal{NO}_X$ nie unifikuje działań półgrupowych i grupowych. Problem ogólnej definicji algebry Cuntza-Pimsnera dla systemów produktowych wydaje się być bardzo trudny.

Ważnym wynikiem pracy [KS16], którą tu omówimy, jest wykazanie, że przy pewnych naturalnych założeniach algebra $\mathcal{O}_X$ Fowlera jest właściwym obiektem, który modeluje szereg interesujących przykładów i którego strukturę można badać za pomocą konstrukcji typu Doplichera-Roberts’a i wiązek Fella (Twierdzenie 5.1, podrozdział 5.3). Jak wiadomo [AS93], [AL94] (por. Twierdzenia 2.21, 3.15) topologiczna wolność jest fundamentalną dynamiczną własnością, dzięki której możemy otrzymać twierdzenia o jednoznaczności i w konsekwencji kryteria prostoty oraz opis kraty ideałów. Dlatego istotnym problemem jest znalezienie odpowiedniej własności dla systemów produktowych. Dla produktów krzyżowych przez pojedyncze bimoduły hilbertowskie została ona opracowana w [Kwa14] (Twierdzenie 5.4). Dalsze uogólnienie tego pojęcia na systemy produktowe otrzymane w [KS16] przedstawia Definicja 5.8. Prowadzi to do ogólnego twierdzenia o jednoznaczności (Twierdzenie 5.10) i kryterium prostoty (Twierdzenie 5.11). Rezultaty te dają nietrywialne zastosowanie np. do wiązek Fella, zakręconych grupowych i półgrupowych produktów krzyżowych, topologicznych P -grafów, półgrupowych wersji produktów krzyżowych Exel’a i nowej algebry Cuntza $\mathcal{Q}_{\mathbb{N}}$ rozszerzającej algebrę Bosta-Connesa przez jeden generator (podrozdział 5.3).

5.1 Konstrukcja algebry $\mathcal{O}_X$ w duchu Doplichera-Roberts’a

W [KS16] pracujemy, przy założeniu, że P jest *półgrupą (typu) Ore*, tzn. $sP \cap tP \neq \emptyset$ dla każdego $s, t \in P$. Założenie to jest równoważne stwierdzeniu, że P wraz z naturalnym quasi-porządkiem:

$$p \leq q \stackrel{\text{def}}{\iff} pr = q \quad \text{dla pewnego } r \in P$$

jest zbiorem skierowanym. Wtedy istnieje homomorfizm $\iota : P \rightarrow G(P)$, gdzie $G(P)$ jest *grupą obwiednią* P , taki, że $G(P) = \iota(P)\iota(P)^{-1}$. Homomorfizm ten jest injektywny wtedy i tylko wtedy, gdy P jest półgrupą ze skracaniem, [KS16, Stwierdzenie 2.2]. Do przykładów półgrup Ore należą między innymi wszystkie półgrupy przemienne (z lewym skracaniem) oraz wszystkie grupy. Założenie o lewostronnej skracalności pozwala nam na pisanie $p^{-1}q := r$, gdy $pr = q$ (równość ta wyznacza r jednoznacznie).

Niech $X = \bigsqcup_{p \in P} X_p$ będzie systemem produktowym nad P . Zakładamy, że X jest *regularny*, tzn. dla każdego $p \in P$ lewe działanie algebry $A = X_e$ na C^* -korespondencji X_p jest injektywne i przez operatory “zwarte” [KS16, Definicja 3.1]. Rodzina

$$\mathcal{K}_X := \{\mathcal{K}(X_q, X_p)\}_{p, q \in P}$$

tworzy w naturalny sposób C^* -prekategorię. Założenie regularności implikuje, że $\mathcal{K}_X$ ma również naturalną strukturę “prawego-tensorowania”. Mianowicie, dla dowolnego $r \in P$ mamy odwzorowania liniowe $\otimes 1_r : \mathcal{K}(X_q, X_p) \rightarrow \mathcal{K}(X_{qr}, X_{pr})$, $p, q \in P$, gdzie

$$(T \otimes 1_r)(xy) := (Tx)y \quad x \in X_q, y \in X_r, T \in \mathcal{K}(X_q, X_p)$$

gdy $q \neq e$. Dla $q = e$, $\otimes 1_r$ definiuje się korzystając z utożsamienia $\mathcal{K}(X_q, X_p) = X_p$. Wtedy zachodzą relacje

$$\begin{aligned} (T \otimes 1_r)^* &= (T^*) \otimes 1_r, & (T \otimes 1_r) \otimes 1_s &= T \otimes 1_{rs}, \\ (T \otimes 1_r)(S \otimes 1_r) &= (TS) \otimes 1_r, & T \in \mathcal{K}(X_p, X_q), S &\in \mathcal{K}(X_s, X_p). \end{aligned}$$

Para $(\mathcal{K}_X, \{\otimes 1_r\}_{r \in P})$ jest prawo-tensorową C^* -prekategorią, cf. [KS16, Definicja 3.4].

Twierdzenie 5.1 (Twierdzenie 3.8 w [KS16]). *Niech X będzie systemem produktowym na półgrupę typu Ore P i niech $G(P)$ będzie jej grupą obwiednią. Dla każdego $\iota(p)\iota(q)^{-1} \in G(P)$ rozważmy przestrzeń Banacha*

$$B_{\iota(p)\iota(q)^{-1}} := \varinjlim \mathcal{K}(X_{qr}, X_{pr})$$

będącą granicą induktywną układu skierowanego $(\{\mathcal{K}(X_{qr}, X_{pr})\}_{r \in P}, \{\otimes 1_s\}_{s \in P})$. Rodzina $\mathcal{B}_X = \{B_g\}_{g \in G(P)}$ z działaniami odziedziczonymi z $\mathcal{K}_X$ tworzy wiązkę Fella nad grupą $G(P)$ oraz mamy kanoniczny izomorfizm

$$\mathcal{O}_X \cong C^*(\mathcal{B}_X) = C^*(\{B_g\}_{g \in G(P)})$$

z algebry Cuntza-Pimsnera $\mathcal{O}_X$ na C^* -algebrę cięć $C^*(\mathcal{B}_X)$. Ponadto,

i) reprezentacja uniwersalna $j_X : X \rightarrow \mathcal{O}_X$ jest iniektywna;

ii) $\mathcal{O}_X$ ma naturalną gradację $\{(\mathcal{O}_X)_g\}_{g \in G(P)}$ nad $G(P)$, gdzie

$$(\mathcal{O}_X)_g = \overline{\text{span}}\{j_X(x)j_X(y)^* : x \in X_p, y \in X_q, \iota(p)\iota(q)^{-1} = g\}; \quad (21)$$

iii) dla dowolnej iniektywnej reprezentacji kowariantnej ψ of X , zintegrowana reprezentacja Π_ψ of $\mathcal{O}_X$ jest izometryczna na każdej z przestrzeni $(\mathcal{O}_X)_g$, $g \in G(P)$, a więc jest izomorfizmem na C^* -podalgebrze $(\mathcal{O}_X)_e$ algebry $\mathcal{O}_X$.

Uwaga 5.2. Praca [KS16] została złożona w arXiv w 2013 roku (arXiv:1312.7472). W roku 2015 (arXiv:1502.07768) została złożona praca [AM15], w której w sposób niezależny otrzymano podobny opis algebry $\mathcal{O}_X$ przy dodatkowym założeniu, że homomorfizmy zadające lewe działania na włóknach X_p są niezdegenerowane.

Powyższe twierdzenie daje silne narzędzia do badania struktury algebry $\mathcal{O}_X$. Pozwala ono również na zdefiniowanie zredukowanej wersji algebry $\mathcal{O}_X$, patrz [KS16, Uwaga 3.9].

Definicja 5.3 ([KS16]). *Zredukowaną algebrą Cuntza-Pimsnera regularnego systemu produktowego X nazywamy zredukowaną algebrę cięć*

$$\mathcal{O}_X^r := C_r^*(\mathcal{B}_X)$$

wiązki Fella $\mathcal{B}_X = \{B_g\}_{g \in G(P)}$ skonstruowanej w Twierdzeniu 5.1.

5.2 Topologiczna wolność dla systemów produktowych

Inspiracją do zdefiniowania pojęcia topologicznej wolności dla systemu produktowego, były wyniki [Kwa14] dotyczące produktów krzyżowych przez pojedyncze bimoduły hilbertowskie.

Przypomnijmy, iż Rieffel wykazał, że jeżeli X jest A - B -bimodem równoważności Mority-Rieffela, to funktor reprezentacji indukowanej faktoryzuje się do homeomorfizmu $[X\text{-Ind}] : \hat{B} \rightarrow \hat{A}$ między widmami algebr A i B , patrz np. [RW98]. Jeśli X jest dowolnym hilbertowskim bimodem nad A , to przestrzenie $\langle X, X \rangle_A$ i ${}_A\langle X, X \rangle$ są ideałami w A i możemy traktować X jako $\langle X, X \rangle_{A-A}\langle X, X \rangle$ bimoduł równoważności. Zatem $[X\text{-Ind}] : \widehat{\langle X, X \rangle_A} \rightarrow {}_A\widehat{\langle X, X \rangle}$ możemy traktować jako częściowy homeomorfizm przestrzeni $\hat{A}$. Wyniki [Kwa14] podsumowuje następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.4 ([Kwa14]). *Niech X będzie bimodem hilbertowskim nad A i niech $[X\text{-Ind}]$ będzie dualnym częściowym homeomorfizmem $\hat{A}$.*

- i) *Jeśli $[X\text{-Ind}]$ jest topologicznie wolny, to każdy niezerowy ideał I w $A \rtimes_X \mathbb{Z}$ ma niezerowe przecięcie z A (A wykrywa ideały w $A \rtimes_X \mathbb{Z}$).*
- ii) *Jeśli $[X\text{-Ind}]$ jest wolny, to $J \mapsto \widehat{J \cap A}$ jest izomorfizmem krat między ideałami w $A \rtimes_X \mathbb{Z}$ i otwartymi $[X\text{-Ind}]$ -niezmienniczymi podzbiorami $\hat{A}$ (A separuje ideały w $A \rtimes_X \mathbb{Z}$, równoważnie każdy ideał w $A \rtimes_X \mathbb{Z}$ jest $\mathbb{T}$ -niezmienniczy).*
- iii) *Jeśli $X\text{-Ind}$ jest topologicznie wolny i minimalny, to algebra $A \rtimes_X \mathbb{Z}$ jest prosta.*

Uwaga 5.5. W świetle najnowszych rezultatów [KM, Twierdzenie 9.11], jeśli A jest ośrodkowa lub posiada istotny ideał Typu I, to A wykrywa ideały w $A \rtimes_X \mathbb{Z}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[X\text{-Ind}]$ jest topologicznie wolny.

Dowód Twierdzenia 5.4, patrz [Kwa14], jest wyrażony w języku wiązek Fella (nad $\mathbb{Z}$) i stosunkowo nietrudno go uogólnić na przypadek wiązek Fella nad dowolną dyskretną grupą G , co zostało zrobione w pracy [AA]. W [KS16] podjęto się bardziej ambitnego zadania, którego celem jest analogiczne twierdzenie dla systemów produktowych nad półgrupami.

Podstawowym problemem jest już sama definicja obiektu dualnego do pojedynczej C^* -korespondencji. W [KS16] rozwiązano go wprowadzając pojęcie multifunkcji dualnej do homomorfizmu. Niech $\alpha : A \rightarrow B$ będzie homomorfizmem C^* -algebr. *Multifunkcją dualną* do homomorfizmu α [KS16, Definicja 4.1] nazywamy multifunkcję $\hat{\alpha} : \hat{B} \rightarrow \hat{A}$ daną wzorem

$$\hat{\alpha}([\pi_B]) := \{[\pi_A] \in \hat{A} : \pi_A \leq \pi_B \circ \alpha\}, \quad \pi_B \in \text{Irr}(B). \quad (22)$$

Jeśli X jest regularną C^* -korespondencją nad A , tj. taką, że lewe mnożenie zadane jest przez injektywny homomorfizm $\phi : A \rightarrow \mathcal{K}(X)$, to traktując X jako $\mathcal{K}(X)$ - $\langle X, X \rangle_A$ -bimoduł równoważności mamy homeomorfizm $[X\text{-Ind}] : \widehat{\langle X, X \rangle_A} \rightarrow \widehat{\mathcal{K}(X)}$ oraz multifunkcję $\hat{\phi} : \widehat{\mathcal{K}(X)} \rightarrow \hat{A}$. *Multifunkcją $\hat{X}$ dualną do C^* -korespondencji X* [KS16, Definicja 4.4] nazywamy złożenie (multifunkcji)

$$\hat{X} := \hat{\phi} \circ [X\text{-Ind}].$$

Uwaga 5.6. Definicję obiektu dualnego do homomorfizmu $\alpha : A \rightarrow B$ można ulepszyć biorąc w (22) pod uwagę krotności podreprezentacji π_A reprezentacji $\pi_B \circ \alpha$. Prowadzi to do pojęcia grafu dualnego (w miejsce multifunkcji). Obecnie habilitant wraz z Eduardem Ortęgą i Toke Carlsenem pracuje nad opracowaniem teorii takich grafów dualnych dla pojedynczych C^* -korespondencji. Niemniej jednak już pojęcie multifunkcji daje ostre rezultaty w wielu przykładach, takich jak produkty krzyżowe przez operatory przejścia lub układy (częściowo) odwracalne. Ponadto dla systemów produktowych warunek, który mamy zamiar wprowadzić jest już wystarczająco skomplikowany dla multifunkcji.

Niech $X = \bigsqcup_{p \in P} X_p$ będzie systemem produktowym nad P .

Definicja 5.7 (Definicja 4.8 w [KS16]). Rodzinę $\hat{X} := \{\hat{X}_p\}_{p \in P}$ multifunkcji dualnych do C^* -korespondencji X_p , $p \in P$, nazywamy *półgrupą dualną* do regularnego systemu produktowego X (rodzina ta rzeczywiście tworzy półgrupę wraz ze składaniem multifunkcji).

Tylko ze względu na uwagę 5.6, poniższe pojęcie “topologicznej wolności” dla X nazywamy topologiczną aperiodycznością.

Definicja 5.8 (Definicja 5.3 w [KS16]). Powiemy, że regularny system produktowy X lub też że półgrupa dualna $\{\hat{X}_p\}_{p \in P}$ jest *topologicznie aperiodyczna* jeśli dla każdego otwartego i niepustego zbioru $U \subseteq \hat{A}$ i każdego zbioru skończonego $F \subseteq P$ oraz elementu $q \in P$ takiego, że $\iota(q) \neq \iota(p)$ dla $p \in F$, istnieje $[\pi] \in U$ takie, że dla pewnego indeksowania elementów $F = \{p_1, \dots, p_n\}$ oraz pewnych elementów $s_1, \dots, s_n \in P$ takich, że $q \leq s_1 \leq \dots \leq s_n$ oraz $p_i \leq s_i$ mamy

$$[\pi] \notin \hat{X}_{q^{-1}s_i}(\hat{X}_{p_i^{-1}s_i}^{-1}([\pi])) \quad \text{for all } i = 1, \dots, n. \quad (23)$$

Uwaga 5.9. W szczególnych przypadkach pojęcie topologicznej aperiodyczności się upraszcza, patrz [KS16, Stwierdzenie 5.5]. Na przykład, jeśli $\{X^{\otimes n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest systemem produktowym powstałym przez “iterację” pojedynczej regularnej C^* -korespondencji X , to topologiczna aperiodyczność jest równoważna warunkowi, że dla każdego $n > 0$ zbiór

$$F_n = \{[\pi] \in \hat{A} : \pi \in \hat{X}^n([\pi])\}$$

ma puste wnętrze w $\hat{A}$.

Twierdzenie 5.10 (Twierdzenie 5.6 w [KS16]). Niech X będzie regularnym systemem produktowym i niech $\Lambda : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^r$ będzie kanonicznym epimorfizmem (reprezentacją regularną). Jeśli X jest topologicznie aperiodyczny, to dla dowolnej injektywnej reprezentacji kowariantnej ψ systemu X istnieje epimorfizm $\pi_\psi : C^*(\psi(X)) \rightarrow \mathcal{O}_X^r$ takie, że diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X & \longrightarrow & C^*(\psi(X)) \xrightarrow{\pi_\psi} \mathcal{O}_X^r \\ & \searrow \Lambda & \nearrow \end{array} \quad (24)$$

jest przemienny. W szczególności jeśli Λ jest izomorfizmem, co zachodzi automatycznie, gdy $G(P)$ jest grupą średniowalną (ang. amenable group), to

$$\mathcal{O}_X \cong C^*(\psi(X))$$

dla dowolnej injektywnej reprezentacji kowariantnej ψ systemu X .

Twierdzenie 5.11 (Twierdzenie 5.10 w [KS16]). *Niech X będzie topologicznie aperiodycznym regularnym systemem produktowym. Algebra $\mathcal{O}_X^r$ jest prosta wtedy i tylko wtedy, gdy X jest minimalny w sensie, że dla każdego $J \triangleleft A$ zachodzi*

$$\forall_{p \in P} \{a \in A : \langle X_p, aX_p \rangle_p \subseteq J\} = J \implies J = \{0\} \text{ lub } J = A.$$

5.3 Zastosowania i przykłady

Niech $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g \in G}$ będzie wiązką Fella nad dowolną dyskretną grupą G . Załóżmy, że $\mathcal{B}$ jest *wysyconą*, tzn. $B_g B_{g^{-1}} = B_e$ dla każdego $g \in G$. Wtedy każde włókno B_g jest w naturalny sposób bimodułem równoważności nad $A = B_e$. Możemy zatem traktować $\mathcal{B}$ jako system produktowy nad półgrupą Ore $P := G$. Półgrupa dualna do tak rozumianego systemu pokrywa się z grupą dualną $\hat{\mathcal{B}} = \{\hat{B}_g\}_{g \in G}$ homeomorfizmów na $\hat{A}$ indukowanych przez bimoduły B_g : $\hat{B}_g = [B_g\text{-Ind}]$, $g \in G$. Topologiczna aperiodyczność $\mathcal{B}$ pokrywa się z *topologiczną wolnością* $\hat{\mathcal{B}}$. Przypomnijmy, że *działanie $\hat{\mathcal{B}}$ jest topologicznie wolne*, gdy dla dowolnej skończonego zbioru $F \subseteq G \setminus \{e\}$ suma punktów stałych dla $\hat{B}_g$, $g \in F$, ma puste wnętrze, por. [AS93]. Daje to następujący wynik, por. [KS16, Wniosek 6.5].

Twierdzenie 5.12. *Niech $\{B_g\}_{g \in G}$ będzie wysyconą wiązką Fella nad dyskretną grupą G i niech $\Lambda : C^*(\mathcal{B}) \rightarrow C_r^*(\mathcal{B})$ będzie kanonicznym epimorfizmem (reprezentacją regularną).*

- i) *Jeśli działanie $\{\hat{B}_g\}_{g \in G}$ jest topologicznie wolne, to dla każdego ideału I w $C^*(\mathcal{B})$ takiego, że $I \cap B_e \neq \{0\}$ mamy $I \subseteq \ker \Lambda$.*
- ii) *Jeśli działanie $\{\hat{B}_g\}_{g \in G}$ jest topologicznie wolne i nie posiada nietrywialnych otwartych zbiorów niezmienniczych, to C^* -algebra $C_r^*(\{B_g\}_{g \in G})$ jest prosta.*

Uwaga 5.13. Jeśli $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(A)$ jest działaniem grupowym, to dla wiązki Fella $\mathcal{B}_\alpha := \{E_{\alpha_{g^{-1}}}\}_{g \in G}$ mamy $C^*(\mathcal{B}_\alpha) \cong A \rtimes_\alpha G$ i $C_r^*(\mathcal{B}_\alpha) = A \rtimes_\alpha^r G$. Zatem z Twierdzenia 5.12 wynikają rezultaty Archbolda i Spielberga [AS93] dla klasycznych produktów krzyżowych. Zakręcając produkt na $\mathcal{B}_\alpha$ możemy zastosować Twierdzenie 5.12 do zakręconych produktów krzyżowych, co już daje nowe zastosowanie.

Uwaga 5.14. Ogólniej rozważmy regularny systemem produktowy $X = \bigsqcup_{p \in P} X_p$ nad półgrupą (typu) Ore P , taki że każde włókno X_p , $p \in P$, jest hilbertowskim bimodułem nad $A := X_e$. Niech $\mathcal{B}_X = \{B_g\}_{g \in G(P)}$ będzie stowarzyszoną wiązką Fella skonstruowaną w Twierdzeniu 5.1. W [KS16, Stwierdzenie 6.4] opisano dualne (częściowe) działanie $\{\hat{B}_g\}_{g \in G(P)}$ na $\hat{A} = \hat{B}_e$ i wykazano, że topologiczna wolność $\{\hat{B}_g\}_{g \in G(P)}$ implikuje topologiczną aperiodyczność X . Zatem (przynajmniej formalnie) topologiczna aperiodyczność jest w tym przypadku słabszym pojęciem.

5.3.1 Zakręcone produkty krzyżowe przez półgrupy endomorfizmów

Niech $\alpha : P \rightarrow \text{End}(A)$ będzie działaniem półgrupy P przez rozszerzalne endomorfizmy A i niech ω będzie $\mathbb{T}$ -wartościowym kocyklem nad P , tzn. $\omega : P \times P \rightarrow \mathbb{T}$ jest takie, że $\omega(p, q)\omega(pq, r) = \omega(p, qr)\omega(q, r)$ dla $p, q, r \in P$. Dla czwórki (A, α, P, ω) Fowler zdefiniował w [Fow02, Definicja 3.1] *zakręcony półgrupowy produkt krzyżowy* $A \rtimes_{\alpha, \omega} P$ jako

uniwersalną C^* -algebrę generowaną przez $\{i_A(a)i_P(s) : a \in A, s \in P\}$, gdzie (i_A, i_P) jest uniwersalną reprezentacją (A, P, α, ω) , tzn. $i_A : A \rightarrow A \rtimes_{\alpha, \omega} P$ jest homomorfizmem oraz $\{i_P(p) : p \in P\}$ są izometriami w $M(A \rtimes_{\alpha, \omega} P)$ takimi, że

$$i_P(p)i_P(q) = \omega(p, q)i_P(pq) \quad \text{i} \quad i_P(p)i_A(a)i_P(p)^* = i_A(\alpha_p(a)),$$

dla $p, q \in P$ oraz $a \in A$. Rodzina C^* -korespondencji $\{E_{\alpha_p}\}_{p \in P}$ tworzy w naturalny sposób system produktowy nad półgrupą P^{op} przeciwną do P . Jak wykazał Fowler [Fow02, Stwierdzenie 3.4] zakręcając iloczyn w tym produkcie kocyklem ω otrzymujemy system produktowy $X = \bigsqcup_{p \in P^{op}} X_p$ taki, że

$$A \rtimes_{\alpha, \omega} P \cong \mathcal{O}_X$$

System X jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy endomorfizm α_p jest injektywny (jest to również warunek konieczny na to, aby homomorfizm i_A był injektywny). Załóżmy, że każdy z endomorfizmów α_p jest injektywny oraz że P^{op} jest półgrupą Ore. Wtedy z rezultatów [KS16] wynika, że $A \rtimes_{\alpha, \omega} P$ jest właściwym kandydatem na produkt krzyżowy. W szczególności A zanurza się w $A \rtimes_{\alpha, \omega} P$ i możemy zdefiniować zredukowany zakręcony półgrupowy produkt krzyżowy $A \times_{\alpha, \omega}^r P$:

$$A \times_{\alpha, \omega}^r P := \mathcal{O}_X^r.$$

Utożsamiając półgrupę dualną $\widehat{X} = \{\widehat{X}_p\}_{p \in P^{op}}$ z półgrupą multifunkcji $\{\widehat{\alpha}_p\}_{p \in P^{op}}$ dualnych do endomorfizmów α_p , $p \in P$, por. [KS16, Lemat 6.7], Twierdzenie 5.10 daje nam *całkowicie nowe wyniki dla półgrupowych produktów krzyżowych przez endomorfizmy*, por. [KS16, Stwierdzenie 6.9].

5.3.2 Topologiczne P -grafy

W [KS16, Definicja 6.14] wprowadzono pojęcie topologicznego P -grafu uogólniającego pojęcie topologicznego grafu wyższego rzędu [Yee07]. Mianowicie, zamiast półgrupy $\mathbb{N}^k$ rozważamy dowolną półgrupę (typu Ore) P . Przez *topologiczny P -graf* rozmiemy parę (Λ, d) , gdzie “przestrzeń ścieżek” Λ tworzy małą kategorię wyposażoną w topologię lokalnie zwartej przestrzeni Hausdorffa, przy której działanie składania morfizmów jest ciągle i otwarte, odwzorowanie “target” r jest ciągle, a odwzorowanie “source” s jest lokalnym homeomorfizmem. Ciągły funktor $d : \Lambda \rightarrow P$ określa “długość” ścieżki (i spełnia pewną własność faktoryzacji ścieżek). W [KS16, Podsekcja 6.4] związano z (Λ, d) naturalny system produktowy $X = \bigsqcup_{p \in P} X_p$ i określono warunki, przy których X jest regularny, co prowadzi do pojęcia regularnego topologicznego grafu (Λ, d) . Dla takich (Λ, d) zdefiniowano algebry $C^*(\Lambda, d)$ oraz $C_r^*(\Lambda, d)$ jako $\mathcal{O}_X$ oraz $\mathcal{O}_X^r$, odpowiednio. Gdy $P = \mathbb{N}^k$, algebra $C^*(\Lambda, d)$ pokrywa się z C^* -algebrą topologicznego grafu wyższego rzędu [Yee07]. W [KS16, Stwierdzenie 6.17] scharakteryzowano topologiczną aperiodyczność i minimalność X w terminach (Λ, d) .

W przypadku, gdy $P = \mathbb{N}^k$ topologiczna aperiodyczność (Λ, d) jest warunkiem łatwiejszym do weryfikacji, ale też i silniejszym niż aperiodyczność rozważana w [Yee07], co tłumaczy Uwaga 5.6. W przypadku, gdy odwzorowanie “target” r jest injektywne,

oba warunki się pokrywają. W tym przypadku C^* -algebrę $C^*(\Lambda, d)$ można interpretować jako półgrupowy produkt krzyżowy przez operatory przejścia. W szczególności, gdy $P = \mathbb{N}$ i $r = id$, to $C^*(\Lambda, d)$ pokrywa się z produktem krzyżowym Exela, gdzie operator przejścia jest zadany przez lokalny homeomorfizm s . Wtedy topologiczna aperiodyczność jest równoważna topologicznej wolności odwzorowania s [KS16, Przykład 6.13].

5.3.3 Algebra Cuntza $\mathcal{Q}_{\mathbb{N}}$

Tak zwaną „nową” algebrę Cuntza $\mathcal{Q}_{\mathbb{N}}$ związaną z „ $ax + b$ ”-półgrupą nad $\mathbb{N}$, patrz [Cun08], można zrealizować jako półgrupowy produkt krzyżowy typu Exela, gdzie $P = \mathbb{N}^{\times}$ jest półgrupą moltiplikatywną i algebrą współczynników jest $C(\mathbb{T})$, [HLS12]. Poprzez bezpośrednią analizę Cuntz wykazał, że algebra $\mathcal{Q}_{\mathbb{N}}$ jest prosta i czysto nieskończona. Twierdzenie 5.11 daje prostotę algebry $\mathcal{Q}_{\mathbb{N}}$ w naturalny i szybki sposób. W pracy [HSS] wykorzystano Wniosek 5.11 do wykazania prostoty zakreślonej wersji algebry $\mathcal{Q}_{\mathbb{N}}$.

6 Struktura ideałów i czysta nieskończoność algebr związanych z wiązkami Fella

Klasyfikacja Kirchberga-Philipsa [Kir00], [Phi00] prostych algebr czysto nieskończonych dała silny impuls do rozwoju programu klasyfikacji C^* -algebr oraz badań nad niekończącymi prostymi C^* -algebrami czysto nieskończonymi. Dodatkowy impuls dały odkrycia związków czystej nieskończoności z działaniami brzegowymi i paradoksalnymi [LS96], [JR00], [RS12]. W tym rozdziale, opartym na wynikach [KS17], wyjaśnimy te związki i przedstawimy kryteria czystej nieskończoności, które mają zastosowanie do C^* -algebr rozważanych w rozdziałach poprzednich.

Mianowicie, metoda dylatacji obiektów półgrupowych - systemów produktowych, do obiektów grupowych - wiązek Fella, opisana w Twierdzeniu 5.1, daje silne narzędzie do badania półgrupowych wersji algebr Cuntza-Pimsnera za pomocą algebr cięć wiązek Fella. Jest to ważne, gdyż teoria wiązek Fella nad grupami dyskretnymi jest dobrze rozwinięta [Exel]. Przypomnijmy, iż C^* -algebry związane z wiązkami Fella nad grupami modelują w bezpośredni sposób nie tylko zakreślone wersje klasycznych produktów krzyżowych, por. subsekcja 5.3, ale też ich wersje dla działań częściowych. W tym rozdziale uzupełnimy tę teorię o ogólne twierdzenia opisujące strukturę ideałów, w tym przestrzeń ideałów prymitywnych (Twierdzenie 6.4) i kryteriów czystej nieskończoności (Twierdzenia 6.6, 6.10) zredukowanych algebr cięć wiązek Fella. Daje to pełen zestaw narzędzi do badania również algebr związanych z systemami produkowymi. Należy tu podkreślić, że już dla klasycznych produktów krzyżowych przez działania grupowe związki między znanymi kryteriami czystej nieskończoności [LS96], [JR00], [RS12] nie były do tej pory do końca jasne. Ważnym osiągnięciem tu jest nie tylko uogólnienie, ale też unifikacja i ulepszenie (osłabienie) tych kryteriów (por. Uwagi 6.8, 6.11). W szczególności otrzymane rezultaty są optymalne np. w zastosowaniu do algebr grafowych (Uwagi 6.5, 6.12) oraz prowadzą do całkowicie nowych wyników dla półgrupowych produktów krzyżowych (podrozdział 6.2.1).

6.1 Struktura ideałów $C_r^*(\mathcal{B})$

Niech $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g \in G}$ będzie wiązką Fella nad dyskretną grupą G . *Ideałem w wiązce Fella* $\mathcal{B}$ nazywamy każdą rodzinę $\mathcal{J} = \{J_g\}_{g \in G}$, gdzie J_g jest domkniętą przestrzenią liniową B_g oraz $J_g B_g \subseteq J_g$ i $B_g J_g \subseteq J_g$ dla każdego $g \in G$. Niech

$$\text{Ideal}^{\mathcal{B}}(B_e) := \{I \triangleleft B_e : B_g I B_{g^{-1}} \subseteq I, g \in G\}$$

będzie kratą $\mathcal{B}$ -*niezmienniczych ideałów* w B_e . Jeśli $\mathcal{J} = \{J_g\}_{g \in G}$ jest ideałem w wiązce Fella $\mathcal{B}$, to $J_e \in \text{Ideal}^{\mathcal{B}}(B_e)$. Na odwrót, jeśli $I \in \text{Ideal}^{\mathcal{B}}(B_e)$, to kładąc $J_g = B_g I$, dla $g \in G$, rodzina $\mathcal{J} := \{J_g\}_{g \in G}$ jest ideałem w $\mathcal{B}$. Ponadto, wtedy $J = \overline{\bigoplus_{g \in G} J_g} \cong C_r^*(\mathcal{J})$ jest ideałem w $C_r^*(\mathcal{B})$ generowanym przez I oraz $I = A \cap J$ (ideał J nazywamy wtedy *ideałem z gradacją*). Mamy zatem zanurzenie

$$\text{Ideal}^{\mathcal{B}}(B_e) \hookrightarrow \text{Ideal}(C_r^*(\mathcal{B})),$$

które jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy B_e separuje ideały w $C_r^*(\mathcal{B})$ (równoważnie każdy ideał w $C_r^*(\mathcal{B})$ jest ideałem z gradacją). Uogólniając pracę Sierakowskiego [Sie10] dla klasycznych produktów krzyżowych mamy również następującą równoważność, patrz [AA, Theorem 3.19], [KS17, Theorem 3.12] (manuskrypt [AA], arXiv:1503.07094, ukazał się w arXiv tuż przed zakończeniem pracy [KS17], arXiv:1505.05202, z niezależnie otrzymanymi identycznymi wstępnymi wynikami, co spowodowało przeformułowanie rozdziału 3 w [KS17]):

$$\begin{aligned} B_e \text{ separuje ideały w } C_r^*(\mathcal{B}) \\ (\text{Ideal}^{\mathcal{B}}(B_e) \cong \text{Ideal}(C_r^*(\mathcal{B}))) \end{aligned} \iff \begin{aligned} \mathcal{B} \text{ jest dokładna i ma rezydualną} \\ \text{własność przecinania} \end{aligned}$$

Mówimy, że $\mathcal{B}$ posiada *własność przecinania*, gdy B_e wykrywa ideały w $C_r^*(\mathcal{B})$, tj. gdy każdy niezerowy ideał w $C_r^*(\mathcal{B})$ ma niezerowe przecięcie z B_e . Powiemy, że $\mathcal{B}$ ma *rezydualną własność przecinania*, gdy wiązka ilorazowa $\mathcal{B}/\mathcal{J}$ ma własność przecinania dla każdego ideału $\mathcal{J}$ w $\mathcal{B}$. Dla każdego ideału $\mathcal{J}$ w $\mathcal{B}$ mamy następujący ciąg

$$0 \longrightarrow C_r^*(\mathcal{J}) \xrightarrow{\iota_r} C_r^*(\mathcal{B}) \xrightarrow{\kappa_r} C_r^*(\mathcal{B}/\mathcal{J}) \longrightarrow 0.$$

Mówimy, że wiązka $\mathcal{B}$ jest *dokładna* (ang. *exact*), jeśli dla każdego ideału $\mathcal{J}$ w $\mathcal{B}$ powyższy ciąg jest dokładny. Każda wiązka $\mathcal{B}$ nad grupą dokładną G jest automatycznie dokładna. Wyznaczenie kryterium dokładności $\mathcal{B}$ wymaga dalszych badań. W [KS17, Stwierdzenie 3.7] pokazano, że $\mathcal{B}$ jest dokładna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy Fourierowski⁵ ideał J w $C_r^*(\mathcal{B})$ jest ideałem z gradacją. Oczywiście $\mathcal{B}$ jest dokładna, jeśli jest “średniowalna” (ang. *amenable*), tzn. gdy $C^*(\mathcal{B}) = C_r^*(\mathcal{B})$.

Przejdźmy do omówienia warunków implikujących (rezydualną) własność przecinania.

W przypadku, gdy $\mathcal{B}$ jest wysycona, z Twierdzenia 5.12 wynika, że $\mathcal{B}$ posiada własność przecinania jeśli dualny topologiczny układ $\{\hat{B}_g\}_{g \in G}$ dynamiczny na $\widehat{B_e}$ jest topologicznie wolny. Wynik ten dla dowolnych wiązek Fella uogólniono w [AA]. Prowadzi to do dynamicznego opisu ideałów $C_r^*(\mathcal{B})$ przy założeniu, że $\{\hat{B}_g\}_{g \in G}$ jest *rezydualnie*

⁵tj. zachowywany przez naturalne rzuty z $C_r^*(\mathcal{B})$ na podprzestrzenie B_g , $g \in G$

topologicznie wolny, tzn. każde jego obcięcie do domkniętego zbioru niezmienniczego jest topologicznie wolne, por. [KS17, Wniosek 3.23].

W pracy [KS17] zaproponowano inny warunek, który nie tylko gwarantuje własność przecinania, ale również daje pewną kontrolę nad dodatnimi elementami $C_r^*(\mathcal{B})$, co jest istotne przy badaniu czystej nieskończoności. Dla działań grupowych analogiczny warunek pojawia się w pracach Kishimoto [Kis81], Olesen i Pedersena [OP82], a w kontekście C^* -korespondencji w [MS00, Definicja 5.1].

Definicja 6.1 (Definicja 4.1 w [KS17]). Wiązka Fella $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g \in G}$ jest *aperiodyczna* jeśli dla każdego $b_g \in B_g$, $g \in G \setminus \{e\}$, oraz każdej dziedzicznej podalgebry D algebry B_e ,

$$\inf\{\|ab_ga\| : a \in D^+, \|a\| = 1\} = 0. \quad (25)$$

Powiemy, że $\mathcal{B}$ jest *rezydualnie aperiodyczna*, jeśli wiązka ilorazowa $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ jest aperiodyczna dla każdego ideału $\mathcal{I}$ w $\mathcal{B}$.

Uwaga 6.2. Dla autorów pracy [KS17] związek między aperiodycznością i topologiczną wolnością dla wiązek Fella nie był do końca jasny. Wyniki Olesen i Pedersena [OP82] sugerują, że pojęcia te powinny być równoważne, przynajmniej w przypadku ośrodkowym. Problem ten stał się punktem wyjściowym artykułu [KM], gdzie przeprowadzano dogłębną analizę związków między różnymi warunkami nietrywialności wiązek Fella. W [KM] wykazano m.in., że jeżeli B_e jest ośrodkowa, lub posiada istotny ideał Typu I, to

wiązka $\mathcal{B}$ jest aperiodyczna $\iff$ układ dualny $\{\hat{B}_g\}_{g \in G}$ jest topologicznie wolny

oraz warunki te są równoważne z własnością przecinania dla $\mathcal{B}$, gdy $G = \mathbb{Z}$ lub $G = \mathbb{Z}_n$, gdy n jest liczbą bezkwadratową.

Uwaga 6.3. Gdy B_e jest algebrą nieprzemianną, aperiodyczność jest często łatwiejsza do weryfikacji niż topologiczna wolność, por. [KS17, Stwierdzenie 7.3]. Ponadto zachodzi następująca implikacja, por. [KS17, Wniosek 4.4], [Kwa16, Stwierdzenie 2.42]:

$$\mathcal{B} \text{ jest aperiodyczna} \implies \begin{array}{l} \text{dla każdego } b \in C_r^*(\mathcal{B})^+ \setminus \{0\} \text{ istnieje } a \in B_e^+ \setminus \{0\} \\ \text{takie, że } a \lesssim b \text{ (} a \text{ "leży pod" } b \text{ w sensie Cuntza).} \end{array} \quad (26)$$

Następnik powyższej implikacji pociąga za sobą, że $\mathcal{B}$ ma własność przecinania.

Niech $\mathcal{B}$ będzie wiązką Fella. Układ dualny $\{\hat{B}_g\}_{g \in G}$ jest częściowym układem dynamicznym (składa się z częściowych homomorfizmów), który poprzez rzut $\widehat{B}_e \ni [\pi] \rightarrow \ker \pi \in \text{Prim}(B_e)$ zadaje również częściowy układ dynamiczny $\{\check{B}_g\}_{g \in G}$ na przestrzeni ideałów prymitywnych $\text{Prim}(B_e)$, por. [KS17, Stwierdzenie 3.16]. Orbitę Gx punktu $x \in \text{Prim}(B_e)$ względem częściowego układu dynamicznego $\{\check{B}_g\}_{g \in G}$ definiujemy w naturalny sposób, por. [KS17, Definicja 2.4]. *Quasi-orbitę* $\mathcal{O}(x)$ nazywamy klasę równoważności x relacji $\sim$ danej wzorem

$$x \sim y \iff \overline{Gx} = \overline{Gy}.$$

Przez $\mathcal{O}(\text{Prim}(B_e))$ oznaczamy *przestrzeń quasi-orbit* $\Omega/\sim$ wyposażoną w topologię ilorazową. Następujący opis przestrzeni ideałów prymitywnych jest uogólnieniem klasycznych rezultatów dla produktów krzyżowych, por. [Gre78, Sekcja 5].

Twierdzenie 6.4 (Twierdzenie 6.8 w [KS17]). *Niech $\mathcal{B}$ będzie dokładną wiązką Fella. Załóżmy, że $\mathcal{B}$ posiada rezydualną własność przecinania, co zachodzi na przykład, gdy spełniony jest jeden z następujących warunków:*

- (i) układ $(\{\hat{D}_g\}_{g \in G}, \{\hat{h}_g\}_{g \in G})$ dualny do $\mathcal{B}$ jest rezydualnie topologicznie wolny,
- (ii) wiązka $\mathcal{B}$ jest rezydualnie aperiodyczna.

Wtedy $\text{Ideal}(C_r^(\mathcal{B})) \ni J \rightarrow J \cap B_e \in \text{Ideal}^B(B_e)$ jest izomorfizmem krat. Jeśli wiązka $\mathcal{B}$ jest ośrodkowa, to izomorfizm $\text{Ideal}^B(B_e) \cong \text{Ideal}(C_r^*(\mathcal{B}))$ indukuje homeomorfizm*

$$\text{Prim}(C_r^*(\mathcal{B})) \cong \mathcal{O}(\text{Prim}(B_e)).$$

Uwaga 6.5. Jako jedno z zastosowań powyższego twierdzenia w [KS17, Wniosek 7.8] otrzymano opis przestrzeni ideałów prymitywnych $\text{Prim}(C^*(E))$ algebry grafowej dla grafu E spełniającego warunek (K) . Opis taki otrzymano pierwotnie innymi metodami, por. [BHRS02].

6.2 Czysta nieskończoność $C_r^*(\mathcal{B})$

Na mocy (26) aperiodyczność wiązki Fella $\mathcal{B}$ daje to pewną kontrolę nad elementami $C_r^*(\mathcal{B})^+ \setminus \{0\}$, nie mniej jednak na ogół może się zdarzyć tak, że $a \lesssim b$, gdzie a jest właściwie nieskończony, a mimo to b jest skończony. Taka sytuacja nie może mieć miejsca np., gdy a jest rzutem lub gdy $C_r^*(\mathcal{B})$ jest algebrą prostą. Dlatego w poniższym twierdzeniu potrzebujemy założeń implikujących, że “stosunek ilości ideałów do ilości rzutów w $C_r^*(\mathcal{B})$ jest mały”. Jednym z warunków, który to gwarantuje jest własność (IP), patrz strona 16.

Następujące kryterium czystej nieskończoności jest uogólnieniem analogicznego rezultatu dla częściowo odwracalnych endomorfizmów [Kwa16, Stwierdzenie 2.46].

Twierdzenie 6.6 (Twierdzenie 4.10 w [KS17]). *Niech $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g \in G}$ będzie dokładną i rezydualnie aperiodyczną wiązką Fella. Załóżmy, że albo B_e ma własność (IP) lub że zbiór $\text{Ideal}^B(B_e)$ jest skończony. Następujące warunki są równoważne:*

- (i) *Każdy element w $B_e^+ \setminus \{0\}$ jest właściwie nieskończony w $C_r^*(\mathcal{B})$.*
- (ii) *Algebra $C_r^*(\mathcal{B})$ jest czysto nieskończona.*

Jeśli B_e jest rzeczywistego wymiaru zerowego (ang. real rank zero), to powyższe warunki są równoważne następującemu:

- (i') *Każdy niezerowy rzut w B_e jest właściwie nieskończony w $C_r^*(\mathcal{B})$.*

W świetle Twierdzenia 6.6, aby otrzymać kryterium czystej nieskończoności $C_r^*(\mathcal{B})$ wystarczy wyznaczyć warunki zapewniające, że elementy w $B_e^+ \setminus \{0\}$ są właściwie nieskończone w $C_r^*(\mathcal{B})$. Analogony elementów (czysto lub rezydualnie) nieskończonych dla wiązek Fella zostały wprowadzone w [KS17, Definicja 5.1].

Definicja 6.7 ([KS17]). Niech $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g \in G}$ będzie wiązką Fella.

1. Powiemy, że $a \in B_e^+ \setminus \{0\}$ jest $\mathcal{B}$ -nieskończony, jeśli istnieje $b \in A^+ \setminus \{0\}$ takie, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją $n, m \in \mathbb{N}$ oraz $t_i \in G$, $a_i \in aB_{t_i}$ dla $i = 1, \dots, n+m$ takich, że

$$a \approx_\varepsilon \sum_{i=1}^n a_i^* a_i, \quad b \approx_\varepsilon \sum_{i=n+1}^{n+m} a_i^* a_i \quad \text{oraz} \quad a_i^* a_j \approx_{\varepsilon/\max\{n^2, m^2\}} 0 \quad \text{dla } i \neq j. \quad (27)$$

Powiemy, że $a \in B_e^+ \setminus \{0\}$ jest *rezydualnie* $\mathcal{B}$ -nieskończony, jeśli $a + J_e$ jest $\mathcal{B}/\mathcal{J}$ -nieskończony dla każdego ideału $\mathcal{J} = \{J_g\}_{g \in G}$ w $\mathcal{B}$ takiego, że $a \notin J_e$.

2. Powiemy, że $a \in B_e^+ \setminus \{0\}$ jest $\mathcal{B}$ -paradoksalny (lub *właściwie* $\mathcal{B}$ -nieskończony), jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją $n, m \in \mathbb{N}$ oraz $a_i \in aB_{t_i}$, $t_i \in G$, $i = 1, \dots, n+m$ takie, że

$$a \approx_\varepsilon \sum_{i=1}^n a_i^* a_i, \quad a \approx_\varepsilon \sum_{i=n+1}^{n+m} a_i^* a_i \quad \text{and} \quad a_i^* a_j \approx_{\varepsilon/\max\{n^2, m^2\}} 0 \quad \text{dla } i \neq j. \quad (28)$$

Powiemy, że $a \in B_e^+ \setminus \{0\}$ jest *ściśle* $\mathcal{B}$ -nieskończony (odp. *ściśle* $\mathcal{B}$ -paradoksalny) gdy warunek (27) (odp. (28)) zachodzi dla $\varepsilon = 0$.

Uwaga 6.8. Niech $B = \overline{\bigoplus_{g \in G} B_g}$ będzie dowolną C^* -algebrą z gradacją zadaną przez wiązkę Fella $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g \in G}$. Można wykazać, patrz [KS17, Stwierdzenie 5.3], że jeśli element $a \in B_e^+ \setminus \{0\}$ jest $\mathcal{B}$ -nieskończony, to jest on nieskończony w B , a jeśli a jest $\mathcal{B}$ -paradoksalny, to jest właściwie nieskończony w B . Na mocy Uwagi 1.2, jeśli dodatkowo, B_e separuje ideały w B , to każdy rezydualnie $\mathcal{B}$ -nieskończony element jest właściwie nieskończony w B . Zatem zarówno paradoksykalność jak i rezydualna nieskończoność mogą być użyte do badania właściwej nieskończoności elementów w algebrach z gradacją. Jednakże paradoksalność jest mocniejszym warunkiem, niż rezydualna $\mathcal{B}$ -nieskończoność:

$$a \text{ jest } \mathcal{B}\text{-paradoksalny} \implies a \text{ jest rezydualnie } \mathcal{B}\text{-nieskończony}, \quad (29)$$

i ten drugi warunek na ogół jest znacznie łatwiejszy do sprawdzenia.

Przykład 6.9. Niech $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(A)$ będzie działaniem grupy G na przemiennej C^* -algebrze $A = C_0(\Omega)$. Niech $\mathcal{B}_\alpha := \{E_{\alpha_{g^{-1}}}\}_{g \in G}$ będzie stowarzyszoną wiązką Fella, a $\theta = \{\theta_g\}_{g \in G} : G \rightarrow \text{Homeo}(\Omega)$ działaniem dualnym do α . Element $a \in A^+ \setminus \{0\}$ jest ściśle $\mathcal{B}_\alpha$ -paradoksalny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór

$$V = \{x \in \Omega : a(x) > 0\}$$

jest *paradoksalny* ze względu na działanie θ , [BT24], [RS12], tj. istnieją zbiory otwarte $V_1, \dots, V_{n+m}$ oraz elementy $t_1, \dots, t_{n+m} \in G$, takie, że

$$V = \bigcup_{i=1}^n V_i = \bigcup_{i=n+1}^{n+m} V_i, \quad \theta_{t_i}(V_i) \subseteq V \quad \text{oraz} \quad \theta_{t_i}(V_{t_i}) \cap \theta_{t_j}(V_{t_j}) = \emptyset \quad \text{dla każdego } i \neq j.$$

Element a jest ściśle $\mathcal{B}_\alpha$ -nieskończony wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $V = \{x \in \Omega : a(x) > 0\}$ jest θ -nieskończony w sensie, że istnieją otwarte zbiory $V_1, \dots, V_n$ i elementy $t_1, \dots, t_n \in G$, $n \geq 1$, takie, że

$$V = \bigcup_{i=1}^n V_i, \quad \overline{\bigcup_{i=1}^n \theta_{t_i}(V_i)} \subsetneq V \quad \text{oraz} \quad \theta_{t_i}(V_{t_i}) \cap \theta_{t_j}(V_{t_j}) = \emptyset \quad \text{dla każdego } i \neq j.$$

W poniższym twierdzeniu przez równoważność elementów dodatnich w $C_r^*(\mathcal{B})$ rozumiemy równoważność w sensie Cuntza: elementy $a, b \in C_r^*(\mathcal{B})^+$ są *równoważne*, gdy $a \lesssim b$ oraz $b \lesssim a$ w $C_r^*(\mathcal{B})$.

Twierdzenie 6.10 (Twierdzenie 5.13 w [KS17]). *Niech $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g \in G}$ będzie dokładną, rezydualnie aperiodyczną wiązką Fella. Załóżmy, że zachodzi jeden z następujących warunków:*

- (i) B_e ma własność (IP) oraz każdy element w $B_e^+ \setminus \{0\}$ jest równoważny z elementem rezydualnie $\mathcal{B}$ -nieskończonym.
- (i') B_e ma rzeczywisty wymiar zero oraz każdy niezerowy rzut w B_e jest równoważny z elementem rezydualnie $\mathcal{B}$ -nieskończonym.
- (ii) $|\text{Ideal}^{\mathcal{B}}(B_e)| < \infty$ oraz każdy element w $B_e^+ \setminus \{0\}$ jest równoważny z elementem rezydualnie $\mathcal{B}$ -nieskończonym.
- (ii') $\mathcal{B}$ jest minimalna, i.e. $|\text{Ideal}^{\mathcal{B}}(B_e)| = 2$, oraz każdy element w $B_e^+ \setminus \{0\}$ jest równoważny z elementem $\mathcal{B}$ -nieskończonym.

Wtedy algebra $C_r^*(\mathcal{B})$ jest czysto nieskończona i posiada własność (IP).

Uwaga 6.11. W [RS12] autorzy rozpatrywali paradoksalne działania grupowe na totalnie niespójnej lokalnie zwartej przestrzeni Hausdorffa. Dla takich działań zastosowanie ma podpunkt (i') Twierdzenia 6.10, który w świetle (29) daje formalnie silniejszy wynik niż [RS12, Wniosek 4.4]. W [JR00] wprowadzono pojęcie działania *n-wypełniającego* (ang. *n-filling*) na niekoniecznie przemiennej C^* -algebrze A z jedyneką. Takie działanie α jest automatycznie minimalne i każdy element w $A^+ \setminus \{0\}$ jest rezydualnie $\mathcal{B}_\alpha$ -nieskończony, patrz [KS17, Lemat 5.12]. Zatem [JR00, Twierdzenie 1.2] oraz [LS96, Twierdzenie 5] wynikają z podpunktu (ii') Twierdzenia 6.10.

Uwaga 6.12. W [KS17, Twierdzenie 7.9] wykazano, że w zastosowaniu do algebr grafowych $C^*(E)$ Twierdzenie 6.10 jest "ostre" tzn. algebra $C^*(E)$ jest czysto nieskończona, wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadająca jej wiązka $\mathcal{B}_E = \{B_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ jest rezydualnie aperiodyczna i spełniony jest warunek (i') Twierdzenia 6.10.

6.2.1 Zastosowanie do półgrupowych produktów krzyżowych

W [KS17, Sekcja 8] zastosowano otrzymane wyniki do produktów krzyżowych związanych z półgrupowym układem (A, G^+, α, L) , gdzie G^+ jest stożkiem dodatnim w przemiennej liniowo uporządkowanej grupie G i dla każdego $t \in G^+$, (A, α_t, L_t) jest regularnym układem Exela, gdzie $\alpha_t(A)$ jest narożnikiem w A . Jak pokazano w [KS17, Stwierdzenia 8.3, 8.5] na taki układ można w równoważny sposób patrzeć jako na półgrupę endomorfizmów α , półgrupę operatorów przejścia L , albo grupę interakcji $\mathcal{V}$. Z układem tym związane pewną wiązkę Fella nad G i pokazano, że algebra cięć tej wiązki oznaczana przez $A \rtimes_{\alpha, L} G^+$ jest uniwersalna, ze względu na odpowiednie reprezentacje półgrupy endomorfizmów α , półgrupy operatorów przejścia L lub grupy interakcji $\mathcal{V}$, patrz [KS17, Twierdzenie 8.10]. Zatem algebra $A \rtimes_{\alpha, L} G^+$ może być rozpatrywana jako produkt krzyżowy związany z każdą z wymienionych struktur. W szczególności $A \rtimes_{\alpha, L} G^+$ pokrywa się

z półgrupową wersją produktu krzyżowego typu Exela rozważaną przez Larsen w [Lar10], patrz [KS17, Wniosek 8.12], a w przypadku, gdy A posiada jedynekę z C^* -algebrą badaną w [KL09]. Jak wykazano w [KS17, Twierdzenia 8.17, 8.22], Twierdzenia 6.4 i 6.10 tłumaczą się w naturalny sposób na język układu (A, α_t, L_t) . Otrzymane kryterium czystej nieskończoności dla produktów krzyżowych przez endomorfizmy implikuje główny rezultat [OP14], patrz [KS17, Uwaga 8.23].

IV) Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

Lista pozostałych prac naukowych habilitanta:

1. [KK01] A. K. Kwaśniewski, B. K. Kwaśniewski, *On q -difference equations and $\mathbb{Z}_n$ -decompositions of $\exp_q$ function*, Adv. Appl. Clifford Algebras, **11** (2001), 39–61.
2. [KK02] A. K. Kwaśniewski, B. K. Kwaśniewski, *On trigonometric-like decompositions of functions with respect to the cyclic group of order n* , J. of Applied Analysis, **8** (2002), no. 1, 111–127.
3. [Kwa05] B. K. Kwaśniewski, *Covariance algebra of a partial dynamical system*, Cent. Eur. J. Math., **3** (2005), pp. 718–765.
4. [Kwa05'] B. K. Kwaśniewski, *Inverse limit systems associated with $\mathcal{F}_{2^n}$ zero schwartzian unimodal mappings*, Bulletin de la Societe des Sciences et des Lettres de Lodz, **55** (2005), 83–109.
5. [KL08] B. K. Kwaśniewski, A. V. Lebedev, *Reversible extensions of irreversible dynamical systems: C^* -method*, Mat. Sb. 199 (2008), no. 11, 45–74.
6. [Kwa09] B. K. Kwaśniewski, *Analiza spektralna operatorów generujących nieodwracalne układy dynamiczne*, rozprawa doktorska, IM PAN, 2009, Warszawa.
7. [KL09] B. K. Kwaśniewski, A. V. Lebedev, *Crossed Product of a C^* -algebra by a semigroup of endomorphisms generated by partial isometries* Integr. Equ. Oper. Theory 63 (2009), 403–425.
8. [Kwa12] B. K. Kwaśniewski, *On transfer operators for C^* -dynamical systems*, Rocky J. Math. **42**, No 3 (2012), 919–938.
9. [Kwa12'] B. K. Kwaśniewski, *C^* -algebras associated with reversible extensions of logistic maps* Mat. Sb. 203, No 10 (2012), 1448–1489.
10. [Kwa12''] B. K. Kwaśniewski, *Uniqueness property for C^* -algebras given by relations with circular symmetry* Geometric methods in physics, 303–310, Trends Math., Birkhäuser-Springer, Basel, 2013.
11. [Kwa14''] B. K. Kwaśniewski *Crossed product of a C^* -algebra by a semigroup of interactions* Demonstr. Math. **47** (2014), no. 2, 350–370.

12. [Kwa15'] B. K. Kwaśniewski *Extensions of C^* -dynamical systems to systems with complete transfer operators* Math. Notes **98** (2015), 419–428.
13. [KM] B. K. Kwaśniewski, R. Meyer, *Aperiodicity, topological freeness and more: from group actions to Fell bundles* po pozytywnej recenzji w Studia Math., arXiv:1611.06954.
14. [KL] B. K. Kwaśniewski, N. S. Larsen, *Nica-Toeplitz algebras associated with right tensor C^* -precategories over right LCM semigroups: Part I Uniqueness results*, wysłana do publikacji w J. Operator Theory, arXiv:1611.08525.

Pierwsze prace - funkcje specjalne

Jeszcze jako student habilitant został współautorem prac [KK01], [KK02] dotyczących q -rozszerzonych wersji wielomianów specjalnych i funkcji hiperbolicznych. W [KK01] badano rozkłady funkcji i szeregów formalnych za pomocą rodziny α -projekcji $\{\Pi_k^\alpha\}_{k \in \mathbb{Z}_n}$. W zastosowaniu do funkcji eksponencjalnej rozkład taki prowadzi do funkcji α -hiperbolicznych wyższego rzędu i uogólnionych wzorów de Moivre'a. Analiza funkcji $\{h_{q,k}^\alpha\}_{k \in \mathbb{Z}_n}$ tworzących rozkład q -rozszerzenia $\exp_q$ funkcji eksponencjalnej doprowadziła do uogólnienia szeregu formuł o charakterze kombinatorycznym. Praca [KK02] dotyczy bardziej szczegółowej analizy, również z punktu widzenia równań q -różnicowych, funkcji $\{h_{q,k}^\alpha\}_{k \in \mathbb{Z}_n}$ w przypadku, gdy $\alpha = 1$.

Doktorat - analiza spektralna operatorów funkcjonalnych

W rozprawie doktorskiej [Kwa09] habilitant badał pewne klasy operatorów funkcjonalnych, w tym *ważonych operatorów kompozycji*, tj. operatorów postaci

$$aTf(x) = a(x)f(\varphi(x)), \quad f \in F(X), \quad (30)$$

gdzie $F(X)$ jest przestrzenią funkcji $\varphi : X \rightarrow X$ jest odwzorowaniem oraz $a(x)$ jest funkcją przyjmującą wartości liczbowe. Jeśli np. $F(X) = L^p(X)$, gdzie X jest zwartą przestrzenią Hausdorffa z miarą probabilistyczną, $a \in A := C(X)$, a φ jest homeomorfizmem zachowującym miarę, to T jest odwracalną izometrią taką, że $TAT^{-1} = A$, tj. odwzorowanie $a \mapsto TaT^{-1}$ jest automorfizmem algebry Banacha A . Widmo operatorów spełniających te ostatnie relacje opisuje ogólna teoria [AL94]. Jako przedłużenie tych badań, w [Kwa09] opracowano teorię *abstrakcyjnych operatorów ważonego przesunięcia* aT działających na (abstrakcyjnej) zespolonej przestrzeni Banacha E , gdzie

- 1) $T \in \mathcal{B}(E)$ jest *częściową izometrią* w sensie [Mbe04], tj. T jest kontrakcją, dla której istnieje kontrakcja S taka, że $TST = T$ oraz $STS = S$;⁶
- 2) a jest elementem przemiennej algebry Banacha $A \subseteq \mathcal{B}(E)$ zawierającej $1 \in \mathcal{B}(E)$;
- 3) zachodzą relacje $TAS \subseteq A$ oraz $ST \in A'$.

⁶jeśli E jest przestrzenią Hilberta to automatycznie $S = T^*$, na ogół S nie jest wyznaczone jednoznacznie przez T

Powyższe aksjomaty implikują, że odwzorowanie $a \mapsto TaS$ jest endomorfizmem algebry Banacha A . Endomorfizm α indukuje dualne częściowe odwzorowanie φ na (przestrzeni ideałów maskymalnych) widmie Gelfanda X algebry A . W rozprawie [Kwa09] opisano własności spektralne operatorów aT , $a \in A$, w terminach ergodycznych własności częściowego *nieodwracalnego układu dynamicznego* (X, φ) . Wykazano, że jeśli A jest algebrą funkcyjną, tj. transformata Gelfanda jest iniektywna na A , to promień spektralny $r(aT)$ wyraża się za pomocą zasady wariacyjnej - maksimum po średnich geometrycznych funkcji $|a|$ względem miar ergodycznych dla (X, φ) . Przy założeniu, że $A \cong C(X)$ zbiór $|\sigma(aT)| = \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(aT)\}$ modułów wartości spektralnych, można opisać za pomocą zasad wariacyjnych na φ -niezmienniczych domkniętych podzbiorach X . Jeśli dodatkowo, φ jest odwzorowaniem topologicznie wolnym i albo E jest przestrzenią Hilberta, lub aT działa na przestrzeniach L^p , to widmo $\sigma(aT)$ ma kołową symetrię względem zera. Prowadzi to do pełnego opisu widma $\sigma(aT)$ w terminach (X, φ) . Co więcej, jeśli X nie ma punktów izolowanych, to widmo $\sigma(aT)$ pokrywa się z widmem istotnym $\sigma_{ess}(aT)$. Jako konkretne przykłady omówiono m.in. widmo operatorów generujących rodzinę odwzorowań logistycznych, przesunięcia Markowa, ekspansywne endomorfizmy okręgu i homeomorfizmy okręgu. Rezultaty te, do tej pory, nie zostały opublikowane w formie artykułów.

Istotnym nowym narzędziem w rozprawie [Kwa09] jest konstrukcja odwracalnego rozszerzenia $(\tilde{X}, \tilde{\varphi})$ wyjściowego nieodwracalnego układu (X, φ) . Rozszerzony układ $(\tilde{X}, \tilde{\varphi})$, który można traktować jako uogólnioną granicę odwrotną, otrzymano za pomocą opisu widma Gelfanda (najmniejszej) przemiennej algebry Banacha $B := \overline{\text{span}}\{S^n a T^n : a \in A\}$, która zawiera A oraz spełnia relacje

$$TBS \subseteq B, \quad SBT \subseteq B.$$

W [Kwa09] opisano wiele konkretnych przykładów, gdzie $\tilde{X}$ zawiera ważne dynamiczne obiekty takie jak atraktory hiperboliczne, continua nieprzywiedlne oraz przestrzenie związane z kafelkowaniem. W przypadku, gdy A jest C^* -algebrą działającą na przestrzeni Hilberta wyniki te zostały opisane w [Kwa12], gdzie skupiono się na przykładach pochodzących od rodziny odwzorowań logistycznych oraz homeomorfizmów okręgu. Układ $(\tilde{X}, \tilde{\varphi})$ w przypadku, gdy φ jest unimodalnym odwzorowaniem z zerowym schwarzianem i skończoną ilością punktów stałych został opisany w [Kwa05].

Wyniki uogólnione w osiągnięciu habilitacyjnym

W pracy [KL08] opisano widmo $\tilde{X}$ C^* -algebry $B = \overline{\text{span}}\{U^{*n}aU^n : a \in A\}$ przy założeniu, że $A \cong C(X)$ jest przemiennej C^* -algebrą działającą na przestrzeni Hilberta i U jest częściową izometrią taką, że

$$UAU^* \subseteq A, \quad U^*U \in Z(A) = A \cap A'.$$

Założenie $U^*U \in A$, implikuje, że obraz φ jest otwarty w X (jądro endomorfizmu $\alpha(a) = UaU^*$ jest komplementarne w A). Przy tym założeniu korzystając z opisu układu $(\tilde{X}, \tilde{\varphi})$ w [Kwa05] zdefiniowano C^* -algebrę $C^*(X, \varphi)$ jako częściowy produkt krzyżowy [Exel94] związany z częściowym homeomorfizmem $(\tilde{X}, \tilde{\varphi})$. Jednym z głównych rezultatów [Kwa05] jest twierdzenie o izomorfizmie, które znalazło zastosowanie w rozprawie

[Kwa09]. Algebra $C^*(X, \varphi)$ jest szczególnym przypadkiem produktu krzyżowego w sensie Definicji 2.5, a Twierdzenie 2.21 jest daleko idącym uogólnieniem głównego rezultatu [Kwa05].

Uniwersalne odwracalne J -roszerzenie (B, β) endomorfizmu $\alpha : A \rightarrow A$, o którym mowa na stronie 12, jest ogólnym nieprzemiennym odpowiednikiem układu $(\tilde{X}, \tilde{\varphi})$. W przypadku, gdy A ma jedynkę układ (B, β) został opisany w [Kwa15']. Opis ten doprowadził do definicji produktu krzyżowego w [KL13].

W pracy [KL09] przedstawiono półgrupową wersję $A \rtimes_{\alpha, L} G^+$ produktu krzyżowego $A \rtimes_{\alpha, L} \mathbb{N}^+$ opisaną w pracy [ABL11]. Jednymi z ważniejszych rezultatów [KL09] jest jawna konstrukcja $*$ -algebry Banacha $\ell^1(G, \alpha, A)$, której obwiednią C^* -algebrą jest $A \rtimes_{\alpha, L} G^+$ oraz konstrukcja reprezentacji regularnej. W [KS17] uogólniono konstrukcję $A \rtimes_{\alpha, L} G^+$ na przypadek, gdy A nie ma jedynki oraz zauważono, że struktura $*$ -algebry $\ell^1(G, \alpha, A)$ pochodzi de facto od wiązki Fella, por. strona 45.

W [Kwa12''] omówiono ogólny schemat dla twierdzeń o jednoznaczności C^* -algebr uniwersalnych zadanych przez generatory i relacje. Wykorzystując symetrię w relacjach można sprowadzić takie twierdzenie do twierdzenia o jednoznaczności dla produktów krzyżowych przez hilbertowskie bimoduły udowodnionego w [Kwa14], patrz Twierdzenie 5.4. Pokazano, że twierdzenie o jednoznaczności Cuntz-Kriegera [CK80] dla algebr Cuntz-Kriegera $\mathcal{O}_A$ jest równoważne twierdzeniu o jednoznaczności dla odpowiadającego mu bimodułu. Wynik ten został uogólniony na algebry grafowe w [Kwa14'], por. strona 25.

Pozostałe badania

Pozostałe badania są również związane z osiągnięciem habilitacyjnym.

Struktura operatorów przejścia: W [Kwa12] opisano ogólną strukturę operatorów przejścia dla endomorfizmów na C^* -algebrze z jedynką. Wykazano, że endomorfizm posiada zupełny operator przejścia wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker \alpha$ jest ideałem komplementarnym w A , a $\alpha(A)$ jest dziedziczną podalgebrą A , por. Definicja 2.8. W przypadku, gdy A jest algebrą przemienną scharakteryzowano wszystkie operatory przejścia, a także podano warunki konieczne i dostateczne na to, by dla danego endomorfizmu istniał niezerowy lub regularny operator przejścia. Dla dowolnego endomorfizmu $\alpha : B(H) \rightarrow B(H)$ opisano wszystkie normalne operatory przejścia i omówiono strukturę operatorów przejścia będących odwzorowaniami osobliwymi (endomorfizm α posiada osobliwe operatory przejścia tylko, gdy jego indeks Powersa wynosi ∞).

Półgrupowe produkty krzyżowe przez interakcje: W pracy [Kwa14''] rozważano produkt krzyżowy $A \rtimes_{\mathcal{V}, \mathcal{H}} G^+$, będący uogólnieniem produktu krzyżowego $A \rtimes_{\alpha, L} G^+$ [KL09] na przypadek, gdzie para $(\mathcal{V}_t, \mathcal{H}_t)$, dla każdego $t \in G^+$, jest interakcją narożnikową, tj. żadne z odwzorowań $\mathcal{V}, \mathcal{H}$ nie musi być multiplikatywne. W [Kwa14''] opisano warunki konieczne i dostateczne na to by reprezentacja $(\mathcal{V}, \mathcal{H})$ integrowała się do wiernej reprezentacji $A \rtimes_{\mathcal{V}, \mathcal{H}} G^+$. Wprowadzono również pojęcie topologicznej wolności dla pary $(\mathcal{V}, \mathcal{H})$ i wykazano twierdzenie o izomorfizmie dla produktu krzyżowego $A \rtimes_{\alpha, L} G^+$.

Warunki nietrywialności dla wiązek Fella: W pracy [KM] zebrano i ulepszono wiele silnych klasycznych twierdzeń udowodnionych przez Kishimoto, Olesen-Pedersena i Rieffela dla działań grup dyskretnych na C^* -algebrach. Dotyczą one głównie warunków koniecznych i dostatecznych na to, aby algebra A wykrywała lub separowała ideały

w zredukowanym produkcie krzyżowym $A \rtimes_{\alpha,r} G$. Zasadniczym wynikiem [KM] jest uogólnienie tych rezultatów na wiązki Fella i bimoduły hilbertowskie. W szczególności wprowadzono pojęcie widma Connes’a dla wiązek Fella nad grupami przemiennymi i wykazano szereg związków między takimi pojęciami jak aperiodyczność, topologiczna wolność, czysta zewnętrzność i widmo Connes’a właśnie. Część tych wyników została opisana w Uwadze 6.2. Dodatkowo za pomocą widma Connes’a scharakteryzowano aperiodyczność, własność przecinania oraz rezydualną własność przecinania dla wiązek Fella. Otrzymano warunki dostateczne i konieczne na prostotę zredukowanych algebr cięć na grupami $\mathbb{Z}$ oraz $\mathbb{Z}_p$ dla p bezkwadratowej. Podano również efektywne warunki implikujące silną czysto nieskończoność C^* -algebr $C_r^*(\mathcal{B})$.

Algebry Nica-Toeplitza dla C^* -prekategorii z prawym tensorowaniem: W pracy [KL] zainicjowano ogólną teorię C^* -algebr związanych z prawym tensorowaniem C^* -prekategoriami $\mathcal{L}$ nad dowolną półgrupą P (dla $P = \mathbb{N}$ patrz Definicja 4.2). Zdefiniowano algebrę Toeplitza i skonstruowano reprezentację Focka dla ideału $\mathcal{K}$ w $\mathcal{L}$. Przy założeniu, że półgrupa P jest *prawą LCM półgrupą*, tzn. każde dwa elementy w P , które mają wspólną (prawą) wielokrotność, mają również najmniejszą wspólną wielokrotność, sformułowano dodatkowe relacje, które zachodzą dla reprezentacji Focka. Prowadzi to do definicji *algebry Nica-Toeplitza* $\mathcal{NT}_{\mathcal{L}}(\mathcal{K})$ i *zredukowanej algebry Nica-Toeplitza* $\mathcal{NT}_{\mathcal{L}}^r(\mathcal{K})$. W [KL] przedstawiono warunki konieczne i dostateczne na to, aby algebry $\mathcal{NT}_{\mathcal{L}}(\mathcal{K})$ i $\mathcal{NT}_{\mathcal{L}}^r(\mathcal{K})$ pokrywały się. Głównym rezultatem [KL] jest twierdzenie o jednoznaczności w duchu klasycznego twierdzenia Coburn’a, uogólniające wszystkie znane autorom twierdzenia tego typu. W szczególności wyjaśniają one związki między twierdzeniami o jednoznaczności dla C^* -algebr związanych z pojedynczą C^* -korespondencją, stożkami dodatnimi w grupach quasi-kratowych, oraz produktach krzyżowych zakreślonych przez systemy produktowe, otrzymane przez Fowlera, Lacę i Raeburna.

Literatura

- [AA] B. Abadie, F. Abadie, *Ideals in cross sectional C^* -algebras of Fell bundles*, arXiv:1503.07094. przyjęta do publikacji w Rocky Mountain J. Math.
- [AEE98] B. Abadie, S. Eilers, R. Exel, *Morita equivalence for crossed products by Hilbert C^* -bimodules*. Trans. Amer. Math. Soc. **350**(8) (1998), 3043–3054.
- [Adj95] S. Adji, *Crossed products of C^* -algebras by semigroups of endomorphisms*, Ph.D. thesis, University of Newcastle, 1995.
- [ALNR94] S. Adji, M. Laca, M. Nilsen, I. Raeburn, *Crossed products by semigroups of endomorphisms and the Toeplitz algebras of ordered groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994) 1133–1141.
- [AM15] S. Albandik, R. Meyer, *Product Systems over Ore Monoids*, Doc. Math. **20** (2015), 1331–1402
- [ABL11] A. B. Antonevich, V. I. Bakhtin, A. V. Lebedev, *Crossed product of a C^* -algebra by an endomorphism, coefficient algebras and transfer operators*, Math. Sbor. **202**(9) (2011) 1253–1283.

- [AL94] A. B. Antonevich, A.V. Lebedev, *Functional differential equations: I. C^* -theory*, Longman Scientific & Technical, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 70, 1994.
- [AL98] A. B. Antonevich, A.V. Lebedev, *Functional Differential Equations. II. C^* -Applications. Parts 1, 2*. Longman, Harlow, 1998.
- [AS93] R. J. Archbold, J. S. Spielberg, *Topologically free actions and ideals in discrete C^* -dynamical systems*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **37** (1993), 119–124.
- [ALR97] J. Arledge, M. Laca, I. Raeburn, *Semigroup crossed products and Hecke algebras arising from number fields*, Doc. Math. **2** (1997) 115–138.
- [BT24] S. Banach, A. Tarski, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fundamenta Mathematicae 6 (1924), 244–277.
- [BHR02] T. Bates, J. H. Hong, I. Raeburn and W. Szymański, *The ideal structure of the C^* -algebras of infinite graphs*. Illinois J. Math. **46** (2002), 1159–1176.
- [Bon02] A. Bonkat, *Bivariate K-Theorie für Kategorien projektiver Systeme von C^* -Algebren*, Ph.D. Thesis, Westf. Wilhelms-Universität Münster, 2002.
- [Bre04] B. Brenken, *C^* -algebras associated with topological relations*, J. Ramanujan Math. Soc. **19.1** (2004), 35–55.
- [Bro12] N. Brownlowe, *Realising the C^* -algebra of a higher-rank graph as an Exel crossed product*, J. Operator Theory, 68 (2012), 101–130
- [BR06] N. Brownlowe, I. Raeburn, *Exel's crossed product and relative Cuntz-Pimsner algebras*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **141** (2006), 497–508.
- [BRV10] N. Brownlowe, I. Raeburn, S. T. Vittadello, *Exel's crossed product for non-unital C^* -algebras*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **149** (2010), 423–444.
- [CLSV11] T. M. Carlsen, N. S. Larsen, A. Sims and S. T. Vittadello, *Co-universal algebras associated to product systems, and gauge-invariant uniqueness theorems*, Proc. London Math. Soc. (3) **103** (2011), 563–600.
- [Cu77] J. Cuntz, *Simple C^* -algebras generated by isometries*, Comm. Math. Phys. **57** (1977), no. 2, 173–185.
- [Cun82] J. Cuntz, *The internal structure of simple C^* -algebras*, Proc. Sympos. Pure Math. **38** (1982) 85–115.
- [Cun08] J. Cuntz, *C^* -algebras associated with the $ax+b$ -semigroup over $\mathbb{N}$* , in *K-Theory and noncommutative geometry* (Valladolid, 2006), European Math. Soc., 2008, pp 201–215.
- [CK80] J. Cuntz, W. Krieger, *A class of C^* -algebras and topological Markov chains*, Inventiones Math. **56** (1980), 256–268.

- [CL10] J. Cuntz and X. Li, *The regular C^* -algebra of an integral domain*, Quanta of maths, 149—170, Clay Math. Proc., 11, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.
- [DR89] S. Doplicher, J. E. Roberts, *A new duality theory for compact groups*, Invent. Math. **98**, 157–218 (1989)
- [DPZ98] S. Doplicher, C. Pinzari, R. Zuccante, *The C^* -algebra of a Hilbert bimodule*, Boll Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. **1**, 263–281 (1998)
- [ER95] G. A. Elliot, M. Rørdam, *Classification of certain infinite simple C^* -algebras, II*, Comment. Math. Helv. **70** (1995), 615–638.
- [Exel94] R. Exel, *Circle actions on C^* -algebras, partial automorphisms and generalized Pimsner-Voiculescu exact sequence*, J. Funct. Analysis **122** (1994), 361–401.
- [Exe03] R. Exel, *A new look at the crossed-product of a C^* -algebra by an endomorphism*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **23** (2003), 1733–1750.
- [Exe07] R. Exel, *Interactions*, J. Funct. Analysis, 244 (2007), 26–62.
- [Exel] R. Exel, Partial dynamical systems, Fell bundles and applications, book available at: mtm.ufsc.br/~exel/papers/pdysysfellbun.pdf
- [ER07] R. Exel, D. Royer, *The crossed product by a partial endomorphism*, Bull. Braz. Math. Soc. **38** (2007), 219–261.
- [FMR03] N. J. Fowler, P. S. Muhly, I. Raeburn, *Representations of Cuntz-Pimsner algebras*, Indiana Univ. Math. J. **52**, 569–605 (2003)
- [Fow02] N. J. Fowler, *Discrete product systems of Hilbert bimodules*, Pacific J. Math. **204** (2002), 335–375.
- [GLR85] P. Ghez, R. Lima, J.E. Roberts, *W^* -categories*, Pac. J. Math. **120**, 79–109 (1985)
- [GS14] T. Giordano and A. Sierakowski, *Purely infinite partial crossed products*, J. Funct. Anal. **266** (2014), 5733–5764.
- [Gre78] P. Green, *The local structure of twisted covariance algebras*, Acta Math. **140** (1978), 191–250.
- [HLS12] J. H. Hong, N. S. Larsen and W. Szymański, *The Cuntz algebra $\mathcal{Q}_{\mathbb{N}}$ and C^* -algebras of product systems*, in ‘Progress in operator algebras, noncommutative geometry, and their applications’, Proceedings of the 4th annual meeting of the European Noncommutative Geometry Network (Bucharest, 2011), pp. 97–109, Theta, Bucharest, 2012.
- [HSS] J. H. Hong, M. J. Son, W. Szymański *On Cohomology for Product Systems* przyjęta do publikacji, Banach J. Math. Anal. 11 (2017), no. 2, 282–294, arXiv:1407.7264.

- [IMV12] M. Ionescu, P. Muhly and V. Vega, *Markov operators and C^* -algebras*, Houston J. Math. (3) **38** (2012), 775–798.
- [JR00] P. Jolissaint and G. Robertson, *Simple purely infinite C^* -algebras and n -filling actions*, J. Funct. Anal. **175** (2000), 197–213.
- [Kat03] T. Katsura, *A construction of C^* -algebras from C^* -correspondences*. Contemp. Math. vol. 335, pp. 173–182, Amer. Math. Soc., Providence (2003).
- [Kat04] T. Katsura, *On C^* -algebras associated with C^* -correspondences*, J. Funct. Anal., **217**(2) (2004), 366–401.
- [Kat07] T. Katsura, *Ideal structure of C^* -algebras associated with C^* -correspondences*, Pacific J. Math. **230** (2007), 107–145.
- [Kat04'] T. Katsura *A class of C^* -algebras generalizing both graph algebras and homeomorphism C^* -algebras I, fundamental results*. Trans. Amer. Math. Soc. **356**(11), 4287–4322 (2004)
- [Kir00] E. Kirchberg, *Das nicht-kommutative Michael-Auswahlprinzip und die Klassifikation nicht-einfacher Algebren, C^* -Algebras* (Munster, 1999), Springer, Berlin, 2000, 92–141.
- [KR00] E. Kirchberg and M. Rørdam, *Non-simple purely infinite C^* -algebras*, Amer. J. Math. **122** (2000), 637–666.
- [Kis81] A. Kishimoto, *Outer automorphisms and reduced crossed products of simple C^* -algebras* Commun. Math. Phys. **81** (1981), 429–435.
- [KPRR97] A. Kumjian, D. Pask, I. Raeburn, J. Renault, *Graphs, groupoids and Cuntz-Krieger algebras*. J. Funct. Anal. **144** (1997), 505–541.
- [KK01] A. K. Kwaśniewski, B. K. Kwaśniewski, *On q -difference equations and $\mathbb{Z}_n$ -decompositions of $\exp_q$ function*, Adv. Appl. Clifford Algebras, **11** (2001), 39–61.
- [KK02] A. K. Kwaśniewski, B. K. Kwaśniewski, *On trigonometric-like decompositions of functions with respect to the cyclic group of order n* , J. Appl. Anal., **8** (2002), no. 1, 111–127.
- [Kwa05] B. K. Kwaśniewski, *Covariance algebra of a partial dynamical system*, Cent. Eur. J. Math., **3** (2005), pp. 718–765.
- [Kwa05'] B. K. Kwaśniewski *Inverse limit systems associated with F_2^n zero schwarzian unimodal mappings*, Bulletin de la Societe des Sciences et des Lettres de Lodz, **55** (2005), 83–109.
- [Kwa09] B. K. Kwaśniewski, *Analiza spektralna operatorów generujących nieodwracalne układy dynamiczne*, rozprawa doktorska, IM PAN, 2009, Warszawa.
- [Kwa12] B.K. Kwaśniewski, *On transfer operators for C^* -dynamical systems*, Rocky J. Math. **42**, No 3 (2012), 919–938.

- [Kwa12'] B. K. Kwaśniewski *C^* -algebras associated with reversible extensions of logistic maps* Mat. Sb. 203, No 10 (2012), 1448–1489.
- [Kwa12''] B. K. Kwaśniewski, *Uniqueness property for C^* -algebras given by relations with circular symmetry* Geometric Methods in Physics, Trends in Mathematics, Birkhauser Verlag, Basel, 2012, pp. 303–312.
- [Kwa13] B. K. Kwaśniewski, *C^* -algebras generalizing both relative Cuntz-Pimsner and Doplicher-Roberts algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 365 (2013), no. 4, 1809–1873.
- [Kwa14] B. K. Kwaśniewski *Topological freeness for Hilbert bimodules* Israel J. Math. 199 (2014), no. 2, 641–650.
- [Kwa14'] B. K. Kwaśniewski *Crossed products for interactions and graph algebras* Integr. Equ. Oper. Theory 80 (2014), no. 3, 415–451.
- [Kwa14''] B. K. Kwaśniewski *Crossed product of a C^* -algebra by a semigroup of interactions* Demonstr. Math. **47** (2014), no. 2, 350–370.
- [Kwa15] B. K. Kwaśniewski *Ideal structure of crossed products by endomorphisms via reversible extensions of C^* -dynamical systems* Int. J. Math. 26 (2015), no. 3, 1550022 [45 pages].
- [Kwa15'] B. K. Kwaśniewski *Extensions of C^* -dynamical systems to systems with complete transfer operators* Math. Notes **98** (2015), 419–428.
- [Kwa16] B. K. Kwaśniewski *Crossed products by endomorphisms of $C_0(X)$ -algebras* J. Funct. Anal., 270 (2016), 2268–2335.
- [Kwa17] B. K. Kwaśniewski, *Exel's crossed products and crossed products by completely positive maps*, Praca przyjęta do druku w Houston Journal of Mathematics (w dniu 15–08–2014, list dołączony), praca dostępna w arXiv:1404.4929.
- [KL] B. K. Kwaśniewski, N. S. Larsen, *Nica-Toeplitz algebras associated with right tensor C^* -precategories over right LCM semigroups: Part I Uniqueness results*, praca wysłana do publikacji w J. Operator Theory, arXiv:1611.08525.
- [KL08] B. K. Kwaśniewski, A. V. Lebedev *Reversible extensions of irreversible dynamical systems: C^* -method*, Math. Sbor., V.199, No 11 (2008), 45–74.
- [KL09] B. K. Kwaśniewski, A. V. Lebedev *Crossed Product of a C^* -algebra by a semigroup of endomorphisms generated by partial isometries* Integr. Equ. Oper. Theory 63 (2009), 403–425.
- [KL13] B. K. Kwaśniewski, A. V. Lebedev *Crossed products by endomorphisms and reduction of relations in relative Cuntz-Pimsner algebras* J. Funct. Anal., 264 (2013), 1806–1847.

- [KM] B. K. Kwaśniewski, R. Meyer, *Aperiodicity, topological freeness and more: from group actions to Fell bundles* po pozytywnej recenzji w *Studia Math.*, arXiv:1611.06954.
- [KS16] B. K. Kwaśniewski, W. Szymański, *Topological aperiodicity for product systems over semigroups of Ore type*, *J. Funct. Anal.* **270** (2016), no. 9, 3453–3504.
- [KS17] B. K. Kwaśniewski, W. Szymański, *Pure infiniteness and ideal structure of C^* -algebras associated to Fell bundles*, *J. Math. Anal. Appl.* **445** (2017), no. 1, 898–943.
- [Lac98] M. Laca, *Semigroups of $*$ -endomorphisms, Dirichlet series and phase transitions*, *J. Funct. Anal.* **152** (1998) 330–378.
- [LR96] M. Laca, I. Raeburn, *Semigroup crossed products and the Toeplitz algebras of nonabelian groups*, *J. Funct. Anal.*, **139** (1996) 415–440.
- [LR99] M. Laca, I. Raeburn, *A semigroup crossed product arising in number theory*, *J. London Math. Soc.* **59** (1999) 330–344.
- [LS96] M. Laca and J. S. Spielberg, *Purely infinite C^* -algebras from boundary actions of discrete groups*, *J. reine angew. Math.* **480** (1996), 125–139.
- [Lan94] E. C. Lance. *Hilbert C^* -modules: A toolkit for operator algebraists*. London Math. Soc. Lecture Note Series. vol. 210. (Cambridge Univ. Press, 1994).
- [Lar00] N. S. Larsen, *Nonunital semigroup crossed products*, *Math. Proc. Roy. Irish. Acad.* **100A**(2) (2000) 205–218.
- [Lar10] N. Larsen, *Crossed products by abelian semigroups via transfer operators*, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **30** (2010), 1147–1164.
- [LR04] J. Lindiarni, I. Raeburn, *Partial-isometric crossed products by semigroups of endomorphisms*, *J. Operator Theory*, **52** (2004) 61–87.
- [McC] D. McConnell, *A Stone-Cech theorem for $C_0(X)$ -algebras*, praca przyjęta do *Journal of Operator Theory*, arXiv: 1604.02352
- [Mbe04] M. Mbekhta, *Partial isometries and generalized inverses*, *Acta Sci. Math.*, **V**. 70 (2004), p. 767–781.
- [MN12] R. Meyer, R. Nest, *C^* -algebras over topological spaces: filtrated K -theory*, *Canad. J. Math.* **64**(2) (2012), 368–408.
- [MS98] P. S. Muhly, B. Solel, *Tensor algebras over C^* -correspondences (representations, dilations, and C^* -envelopes)*, *J. Funct. Anal.* **158** (1998) 389–457.
- [MS00] P. Muhly and B. Solel, *On the Morita equivalence of tensor algebras*, *Proc. London Math Soc.* **81** (2000), 113–168.
- [MT05] P.S. Muhly, B. Tomforde *Topological quivers*, *Internat. J. Math.* **16** (2005) 693–756.

- [Mur96] G. J. Murphy, Crossed products of C^* -algebras by endomorphisms, *Inegr. Equ. Oper. Theory* **24**, (1996) 298–319.
- [NSS08] V. E. Nazaikinskii, A. Yu. Savin, B. Yu. Sternin, *Elliptic theory and noncommutative geometry*. Basel, Boston, Birkhäuser, 2008.
- [Nic92] A. Nica, *C^* -algebras generated by isometries and Wiener-Hopf operators*, *J. Operator Theory*, **27** (1992), 17–52.
- [Neu40] J. von Neumann, *On rings of operators III*, *Ann. Math.*, **41** (1940), 94–161.
- [OP82] D. Olesen and G. K. Pedersen, *Applications of the Connes spectrum to C^* -dynamical systems. III*, *J. Funct. Anal.* **45** (1982), 357–390.
- [OP14] E. Ortega and E. Pardo, *Purely infinite crossed products by endomorphisms*, *J. Math. Anal. Appl.* **412** (2014) 466–477.
- [Pas73] W. L. Paschke, *Inner product modules over B^* -algebras*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **182** (1973), 443–464.
- [Pas80] W. L. Paschke, *The crossed product of a C^* -algebra by an endomorphism*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **80**, No 1 (1980) 113–118.
- [Ped79] G. K. Pedersen, *C^* -algebras and their automorphism groups*, London Mathematical Society Monographs, vol. 14, Academic Press, London, 1979.
- [Pim97] M. V. Pimsner *A class of C^* -algebras generalizing both Cuntz-Krieger algebras and crossed products by $\mathbb{Z}$* , *Fields Inst. Comm.* **12**, 189–212 (1997).
- [Phi00] N. C. Phillips, *A Classification Theorem for Nuclear Purely Infinite Simple C^* -Algebras*, *Documenta Math.* no. 5 (2000), 49–114.
- [Rae05] I. Raeburn, *Graph Algebras*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 103, Amer. Math. Soc., Providence, 2005.
- [RS04] I. Raeburn, W. Szymański, *Cuntz-Krieger algebras of infinite graphs and matrices*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **356** (2004), 39–59.
- [RW98] I. Raeburn, D. P. Williams, *Morita equivalence and continuous-trace C^* -algebras*, Amer. Math. Soc., Providence, 1998.
- [Rør95] M. Rørdam, *Classification of certain infinite simple C^* -algebras*, *J. Funct. Anal.* **131** (1995), 415–458.
- [Rør97] M. Rørdam, *Classification of extensions of certain C^* -algebras by their six term exact sequences in K -theory*, *Math. Ann.* **308**(1) (1997), 93–117.
- [RS12] M. Rørdam and A. Sierakowski, *Purely infinite C^* -algebras arising from crossed products*, *Ergodic Theory Dynam. Syst.* **32** (2012), 273–293.

- [Sie10] A. Sierakowski, *The ideal structure of reduced crossed products*. Münster J. Math. **3** (2010), 237–262.
- [SY10] A. Sims and T. Yeend, *C^* -algebras associated to product systems of Hilbert bi-modules*, J. Operator Theory **64** (2010), 349–376.
- [Sta93] P. J. Stacey, *Crossed products of C^* -algebras by $*$ -endomorphisms*, J. Aust. Math. Soc. **54** (1993), 204–212.
- [Tur58] T. Turumaru, *Crossed product of operator algebra*, Tohoku Math. J. (2) **10**, (1958), 355–365.
- [Wil07] D. P. Williams: *Crossed products of C^* -algebras*, Mathematical Surveys and Monographs no. 134, American Mathematical Society, Providence RI, 2007.
- [Yee07] T. Yeend, *Groupoid models for the C^* -algebras of topological higher-rank graphs*, J. Operator Theory **57** (2007), 95–120.

