

Autoreferat
Wersja polska

Dyskretne podgrupy grup Liego działające na
przestrzeniach jednorodnych: formy
Clifforda-Kleina

Maciej Bocheński

8 kwietnia 2019

Imię i nazwisko: Maciej Bocheński

Stopień naukowy: doktor nauk matematycznych (2014), UWM w Olsztynie

Tytuł rozprawy: Uogólnione, symplektyczne przestrzenie symetryczne.

promotor: prof. dr hab. Aleksy Tralle

Informacje o zatrudnieniu w jednostkach naukowych: Wydział Matematyki i Informatyki, UWM w Olsztynie (2014-2015: asystent; od 2015: adiunkt)

Spis treści

1	Opis osiągnięcia naukowego	4
1.1	Tytuł osiągnięcia naukowego oraz lista publikacji	4
1.2	Wprowadzenie	5
1.3	Notacja i podstawowe przykłady	6
2	Szczegółowy opis wyników	11
2.1	Rząd α -hiperboliczny - praca [O1]	11
2.2	Przestrzeń silnie regularna - praca [O2]	14
2.3	Rozwiązalne, zwarte formy Clifforda-Kleina - praca [O3]	17
2.4	Metody komputerowe w badaniu zwartych form Clifforda-Kleina - praca [O4]	18
3	Pozostałe publikacje i omówienie wyników w nich zawartych	20
3.1	Właściwe działania na przestrzeniach jednorodnych - prace [P4], [P5] i [P1]	21
3.2	Grube wektory - prace [P2, P3, P6, P7]	22
3.3	Uogólnione symplektyczne przestrzenie symetryczne - praca [P8]	25

MB

1 Opis osiągnięcia naukowego

1.1 Tytuł osiągnięcia naukowego oraz lista publikacji

Osiągnięcie naukowe: Cykl czterech prac o strukturze dyskretnych podgrup grup Liego działających na przestrzeniach jednorodnych i związanych z tymi działaniami niezmiennikach.

Na osiągnięcie naukowe składają się następujące prace:

- ([O1]) M. Bocheński, A. Tralle, *Clifford-Klein forms and a-hyperbolic rank*, Int. Math. Res. Notices 2015, no. 5, 6267-6285.
- ([O2]) M. Bocheński, *Proper Actions on Strongly Regular Homogeneous Spaces*, Asian J. Math., Vol. 21, no. 6 (2017), 1121-1134.
- ([O3]) M. Bocheński, A. Tralle, *On solvable compact Clifford-Klein forms*, P. Am. Math. Soc. 145 (2017), 1819-1832.
- ([O4]) M. Bocheński, P. Jastrzębski, A. Szczepkowska, A. Tralle, A. Wokike, *Semisimple subalgebras in simple Lie algebras and a computational approach to the compact Clifford-Klein forms problem*, Experimental Mathematics (2019) DOI:10.1080/10586458.2018.1492475.

W cyklu prac [O1, O2, O3, O4] znacząco poszerzono wiedzę o strukturze algebraicznej dyskretnych podgrup Liego Γ półprostej grupy Liego G działających właściwie na niezwartej przestrzeni jednorodnej typu reduktywnego G/H . W szczególności zbadano jakie ograniczenia na G/H niesie za sobą istnienie "dużej", dyskretnej podgrupy $\Gamma \subset G$ (np. takiej, która nie jest wirtualnie abelowa; rozwiązalnej i uzwarcającej), która działa w sposób właściwy na przestrzeń G/H . Wprowadzono nowy niezmiennik (rzęd a-hiperboliczny reduktywnej grupy Liego) służący do badania takich działań oraz uzyskano nowe klasy przykładów przestrzeni G/H dopuszczających i niedopuszczających właściwe działania dyskretnych podgrup o danej strukturze algebraicznej. Przy pomocy metod komputerowych znaleziono też nowe przykłady niezwartych przestrzeni jednorodnych G/H dla których nie istnieją formy zwarte Clifforda-Kleina. Jest to pierwszy wynik w teorii zwartych form Clifforda-Kleina uzyskany za pomocą metod komputerowych.

1.2 Wprowadzenie

Jednym z centralnych problemów w teorii grup Liego jest próba opisanie dyskretnej podgrup danej grupy $[GP, M1, R]$. Jeśli dyskretne podgrupy Γ w niezwartej, liniowej i półprostej grupie G jest wystarczająco "duża" to jej struktura jest ściśle związana ze strukturą grupy G . Na przykład: założmy, że G oraz G' oznaczają dwie spójne, liniowe, proste i niezwarłe grupy Liego o trywialnych centrach oraz ani G , ani G' nie jest lokalnie izomorficzne z $SL(2, \mathbb{R})$. Wtedy zachodzi twierdzenie Mostowa o silnej sztywności:

Twierdzenie 1.1. *Założmy, że $\Gamma \subset G$ oraz $\Gamma' \subset G'$ są dyskretnymi podgrupami, takimi że przestrzenie jednorodnie G/Γ i G'/Γ' są zwarte. Wtedy dowolny izomorfizm z Γ na Γ' rozszerza się w sposób jednoznaczny do izomorfizmu z G na G' .*

Wniosek 1.1. *Założmy, że M oraz N są zupełnymi, zwartymi i nieredukowalnymi przestrzeniami lokalnie symetrycznymi o wymiarze $n, n \geq 3$. Każdy izomorfizm z $\pi_1(M)$ na $\pi_1(N)$ jest (jednoznacznie) indukowany przez izometrię z M na N .*

Mamy także następujące twierdzenie dotyczące struktury grupy Γ

Twierdzenie 1.2. *Założmy, że $\Gamma \subset G$ jest kratą w G (tj. G/Γ ma skończoną miarę). Wtedy G/Γ jest zwarte wtedy i tylko wtedy gdy Γ nie zawiera żadnych nietrywialnych unipotentów.*

Paradoksalnie jednak bardzo niewiele wiadomo na temat tego, do jakiego stopnia wyniki dotyczące krat w grupie Liego mogą być rozszerzone na przestrzenie jednorodne tejże grupy. Dokładniej: co można powiedzieć o dyskretnej podgrupie Γ w półprostej, niezwartej grupie Liego G jeśli Γ działa właściwie (poprzez mnożenie z lewej strony) i koźwarcie na pewnej niezwartej przestrzeni jednorodnej grupy G ? Jak pokazuje Wniosek 1.1 nie jest to jednak problem, który swoim zasięgiem ogranicza się tylko do teorii grup Liego. Opisane zagadnienie ma też ciekawą interpretację geometryczną.

W geometrii różniczkowej ważnym problemem jest odpowiedź na następujące pytanie: w jaki sposób lokalna struktura geometryczna wpływa na (globalne) własności danej rozmaitości? Jeśli za model lokalny rozmaitości przyjmujemy przestrzeń jednorodną G/H możemy pytać, jakie grupy podstawowe są realizowane przez rozmaitości lokalnie izomorficzne z G/H . Z taką sytuacją mamy do czynienia kiedy rozważamy rozmaitość gładką z daną strukturą geometryczną (M, J) . Oznaczmy przez $\tilde{M}$ uniwersalne nakrycie

rozmaitości M , $p : \tilde{M} \rightarrow M$ oraz ustalmy $\tilde{o} \in \tilde{M}$. Niech $G := \text{Aut}(\tilde{M}, J)$, $H := \{g \in G \mid g\tilde{o} = \tilde{o}\}$ oraz $\Gamma := \pi_1(M, o)$ dla $o := p(\tilde{o})$. Wtedy $\Gamma \subset G$ oraz

Twierdzenie 1.3 (por. rozdziały 2.3 i 2.4 w [K2]). *Założmy, że G jest grupą Liego i działa tranzytywnie na $\tilde{M}$. Wtedy M jest naturalnie dyfeomorficzne z $\Gamma \backslash G/H$:*

$$\begin{array}{ccc} G/H & \xrightarrow{\sim} & \tilde{M} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma \backslash G/H & \xrightarrow{\sim} & M \end{array} \quad \begin{array}{l} gH \mapsto g\tilde{o} \\ \Gamma gH \mapsto go. \end{array}$$

Na przykład grupa izometrii rozmaitości pseudo-riemannowskiej jest grupą Liego. Jeśli grupa izotropii H nie jest zwarta, to ograniczenia na grupę podstawową mogą być poważne. Na przykład zgodnie z twierdzeniem Calabi-Markusa każda n -wymiarowa ($n \geq 2$) rozmaitość Lorentza o dodatniej krzywiznie ma skończoną grupę podstawową (twierdzenie 1 w [CM]). W wyżej opisanym kontekście możemy napisać ogólniej: każda rozmaitość pseudo-riemannowska generowana przez $X = O(p+1, q)/O(p, q)$, $p \geq q > 0$ ma skończoną grupę podstawową ponieważ tylko skończone podgrupy dyskretne działają właściwie na X .

Badaniem istnienia grup uzwarzających daną przestrzeń reduktywną, zajmowali się między innymi T. Kobayashi [K3], Benoist [B], Margulis [M2] i Zimmer [Z, LMZ].

1.3 Notacja i podstawowe przykłady

Niech G będzie grupą Liego zaś $H \subset G$ domkniętą podgrupą. Przestrzeń ilorazową G/H nazywamy przestrzenią jednorodną grupy G . Przestrzeń ta posiada gładką strukturę rozmaitości, taką że naturalna projekcja:

$$\pi : G \rightarrow G/H$$

jest odwzorowaniem gładkim. Przypomnijmy następującą definicję

Definicja 1.2. *Niech X będzie przestrzenią topologiczną Hausdorffa i niech Γ będzie grupą topologiczną działającą na X . Mówimy, że działanie Γ na X jest właściwe jeśli dla dowolnego zwartego podzbioru $S \subset X$, zbiór*

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(S) \cap S \neq \emptyset\}$$

Handwritten signature

jest zwarty. Ponadto działanie Γ na X nazywamy wolnym, jeśli jedynym elementem γ grupy Γ posiadającym punkty stałe (tj. $\gamma(x) = x$ dla pewnego $x \in X$) jest element neutralny.

Oczywiście dowolna podgrupa dyskretna $\Gamma \subset G$ działa na przestrzeń jednorodną G/H poprzez mnożenie z lewej strony. Jeśli działanie to jest wolne i właściwe to przestrzeń $\Gamma \backslash G/H$ posiada strukturę gładkiej rozmaitości, taką że naturalna projekcja

$$\pi' : G \rightarrow \Gamma \backslash G/H$$

jest odwzorowaniem gładkim.

Definicja 1.3. Niech $\Gamma \subset G$ będzie dyskretną podgrupą, która działa w sposób wolny i właściwy na przestrzeni G/H . Przestrzeń $\Gamma \backslash G/H$ nazywamy formą Clifforda-Kleina. Jeśli przestrzeń $\Gamma \backslash G/H$ jest zwarta, to formę nazywamy zwartą.

Oczywiście pytanie o zwartość formy Clifforda-Kleina jest ciekawe tylko w przypadku gdy wyjściowa przestrzeń G/H jest niezwarta. W przypadku kiedy G/H jest zwarte tylko skończone podgrupy dyskretne G działają właściwie na G/H .

Pierwszym interesującym przypadkiem zwartych form Clifforda-Kleina są riemannowskie przestrzenie lokalnie symetryczne. Niech G będzie półprostą i liniową grupą Liego z maksymalną zwartą podgrupą K , $K \subset G$. Zgodnie z twierdzeniem Borela istnieje zwarta krata $\Gamma \subset G$. Ponieważ podgrupa K jest zwarta więc Γ działa właściwie na G/K . Ponadto, zgodnie z twierdzeniem Selberga ([S]), możemy założyć że Γ jest beztorsyjna - a zatem działa w sposób wolny na G/K . W ten sposób otrzymujemy zwartą formę Clifforda-Kleina:

$$\Gamma \backslash G/K.$$

Rozpatrzmy następujący przykład. Niech $\tilde{M} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im} z > 0\}$ będzie płaszczyzną Poincarego oraz niech J oznacza standardową strukturę zespoloną na $\tilde{M}$. Ponadto przyjmijmy $PSL(2, \mathbb{R}) := SL(2, \mathbb{R})/\{\pm \mathbf{1}_2\}$. Wtedy grupa biholomorficznych izomorfizmów $\text{Aut}(\tilde{M}, J)$ jest izomorficzna z $PSL(2, \mathbb{R})$. Dla $A \in PSL(2, \mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

mamy działanie

$$A \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Działanie to jest tranzytywne i stąd otrzymujemy utożsamienie

$$\tilde{M} \cong PSL(2, \mathbb{R})/SO(2).$$

Korzystając z tego utożsamienia możemy przedstawić zwartą powierzchnię riemannowską M_g ($g \geq 2$) jako formę Clifforda-Kleina przestrzeni $PSL(2, \mathbb{R})/SO(2)$,

$$M_g = \Gamma_g \backslash PSL(2, \mathbb{R})/SO(2),$$

gdzie $\Gamma_g = \pi_1(M_g) \subset PSL(2, \mathbb{R})$.

Założmy teraz, że G jest prostą i liniową grupą Liego, $H \subset G$ jej podgrupą Liego, oraz że G , H , i G/H są niezwarłe. W takim przypadku badanie istnienia zwartych form Clifforda-Kleina staje się już bardzo trudnym problemem. Nie jest znana nawet klasyfikacja prostych, pseudoriemannowskich (nieredukowalnych) przestrzeni symetrycznych posiadających zwarte formy Clifforda-Kleina. Znane są natomiast przykłady przestrzeni posiadających i nieposiadających zwarte formy Clifforda-Kleina. Przypomnijmy, że zupełna rozmaitość pseudo-riemannowska o dodatniej krzywiznie sekcijnej i sygnaturze (p, q) może być przedstawiona jako forma Clifforda-Kleina przestrzeni $O(p+1, q)/O(p, q)$.

Przykład 1.4 (T. Kobayashi). *Przestrzeń jednorodna $O(8, 8)/O(7, 8)$ posiada zwarte formy Clifforda Kleina. Stąd istnieje zwarta i zupełna rozmaitość pseudo-riemannowska o dodatniej krzywiznie sekcijnej i sygnaturze $(7, 8)$. Przestrzeń jednorodna $O(9, 8)/O(8, 8)$ nie posiada zwartych form Clifforda Kleina i stąd nie istnieje zwarta i zupełna rozmaitość pseudo-riemannowska o dodatniej krzywiznie sekcijnej i sygnaturze $(8, 8)$.*

W rozważaniach dotyczących form Clifforda-Kleina często ograniczamy się do specjalnej klasy przestrzeni jednorodnych nazywanej przestrzeniami typu reduktywnego.

Definicja 1.5. Niech G będzie liniową, reduktywną grupą Liego oraz $H \subset G$ podgrupą Liego. Oznaczmy przez $\mathfrak{g}$ oraz $\mathfrak{h}$ odpowiednie algebry Liego oraz przez $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ i $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ ich kompleksyfikacje. Niech ponadto $Int(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ oznacza komponentę spójności elementu neutralnego grupy automorfizmów $Aut(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ algebry $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Mówimy, że H jest typu reduktywnego w G jeśli spełnione są warunki:

1. Pewna inwolucja Cartana θ algebry $\mathfrak{g}$ zachowuje $\mathfrak{h}$, tj. $\theta(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.
2. Spójna podgrupa $H^{\mathbb{C}}$ grupy $Int(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ odpowiadająca $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ jest domknięta.

VB

Przykłady takich przestrzeni to np. przestrzenie symetryczne (oraz k-symetryczne) oraz przestrzenie G/H , w których H jest grupą półprostą.

Dokładny opis tematyki form Clifforda-Kleina można znaleźć w [KY]. Należy podkreślić, że obecnie prowadzone badania skupiają się na znajdowaniu kryteriów na istnienie zwartych form Clifforda-Kleina oraz wykluczaniu poszczególnych klas przestrzeni jednorodnych z listy potencjalnych kandydatów do posiadania zwartych form Clifforda-Kleina (np. [Mor, Ok]). Głównym powodem tego stanu rzeczy jest tzw. *Hipoteza Kobayashiego*. Załóżmy, że mamy przestrzeń typu reduktywnego G/H oraz istnieje podgrupa reduktywna $L \subset G$, taka że

$$G = HL,$$

oraz $H \cap L$ jest zwarte. W takim wypadku mamy

$$G/H \cong L/H \cap L.$$

Ponieważ $H \cap L$ jest zwarte więc L działa właściwie i kozwarcie na $L/H \cap L$. Zatem działanie L na G/H też jest właściwe i kozwarcie. Stąd dowolna krata kozwarta Γ w L (która istnieje na mocy twierdzenia Borela) działa właściwie i kozwarcie na G/H . Po wzięciu beztorsyjnej podgrupy Γ skończonego indeksu otrzymujemy w ten sposób zwartą formę Clifforda-Kleina nazywaną formą *standardową*.

Hipoteza 1.4 (T. Kobayashi). *Jeśli przestrzeń typu reduktywnego G/H posiada zwartą formę Clifforda-Kleina to przestrzeń ta posiada także standardową formę Clifforda-Kleina.*

Trzeba zaznaczyć, że powyższa hipoteza nie sugeruje, że wszystkie formy Clifforda-Kleina są standardowe. Istnieje wiele przykładów form niestandardowych, np. takich w których Γ jest Zariski-gęste w G (np. [Ka]).

Uwaga 1.6. *Od tej pory, w tym i w następnym rozdziale przez G będziemy oznaczać półprostą, rzeczywistą, linową, niezwartą grupę Liego. Stąd grupę G zawsze możemy utożsamiać z grupą macierzową, tj. z domkniętą podgrupą $GL(n, \mathbb{R})$. Podgrupa $H \subset G$ oznaczać będzie podgrupę typu reduktywnego. Literami gotyckimi $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \dots$ oznaczać będziemy algebry Liego odpowiednich grup.*

Ustalmy dowolnie inwolucję Cartana θ algebry $\mathfrak{g}$. Otrzymujemy rozkład na podprzestrzenie niezmiennicze θ :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p},$$

gdzie $\mathfrak{k}$ odpowiada maksymalnej zwartej podgrupie $K \subset G$. W $\mathfrak{p}$ wybieramy maksymalną abelową podprzestrzeń $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. Okazuje się, że każde dwie tak wybrane podprzestrzenie w $\mathfrak{p}$ są sprzęgalne (poprzez pewien element z K) oraz wymiar $\mathfrak{a}$ nie zależy od wyboru θ . Spostrzeżenia te umożliwiają zdefiniowanie rzędu rzeczywistego algebry $\mathfrak{g}$.

Definicja 1.7. *Rzędem rzeczywistym algebry $\mathfrak{g}$ nazywamy wymiar podalgebry $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$:*

$$\text{rank}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) := \dim(\mathfrak{a}).$$

Można pokazać, że $\mathfrak{j} := \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{a}$ (gdzie $\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}$ oznacza maksymalną podalgebrę abelową centralizatora $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ podalgebry $\mathfrak{a}$ w $\mathfrak{k}$) jest podalgebrą Cartana w $\mathfrak{g}$, nazywaną *splitową podalgebrą Cartana*. Wtedy $\mathfrak{j}^{\mathbb{C}}$ jest podalgebrą Cartana w $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Korzystając z tej własności możemy ograniczyć pierwiastki $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ do $\mathfrak{a}$ otrzymując rozkład pierwiastkowy algebry $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a} + \sum_{\alpha \in \Sigma_{\mathfrak{g}}} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

Układ $\Sigma_{\mathfrak{g}}$ jest abstrakcyjnym układem pierwiastkowym. Wybierzmy i oznaczmy przez $\Sigma_{\mathfrak{g}}^{+}$ podzbiór pierwiastków dodatnich. Otrzymujemy podalgebrę

$$\mathfrak{n} := \sum_{\alpha \in \Sigma_{\mathfrak{g}}^{+}} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

Można pokazać, że daje nam to rozkład

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n},$$

nazywany *rozkładem Iwasawy* algebry $\mathfrak{g}$. Jeśli oznaczymy przez $A, N \subset G$ jednoczynne podgrupy odpowiadające $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{n}$ to

$$G = KAN$$

i powyższy rozkład nazywamy *rozkładem Iwasawy* grupy G . Podgrupa A jest abelowa, U unipotentna oraz $AN \subset G$ jest podgrupą rozwiązalną i jedno-
spójną.

Analogicznie możemy zdefiniować rozkład Iwasawy dla podalgebry $\mathfrak{h}$:

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{k}_{\mathfrak{h}} + \mathfrak{a}_{\mathfrak{h}} + \mathfrak{n}_{\mathfrak{h}},$$

na poziomie grup Liego $H = K_H A_H N_H$.

Rozważmy następujący przykład

AB

Przykład 1.8. Niech $G = SL(2, \mathbb{R})$. Wtedy

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathfrak{k} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad \mathfrak{a} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad \mathfrak{n} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Ponadto

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \mid \beta \in \mathbb{R} \right\}, \quad A = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \mid a > 0 \right\}, \quad N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dokładny opis klasyfikacji rzeczywistych, półprostych algebr Liego za pomocą pierwiastków można znaleźć w [OV], Rozdział 4.

2 Szczegółowy opis wyników

2.1 Rząd a-hyperboliczny - praca [O1]

Aby niezwartą przestrzeń jednorodną G/H posiadała zwarte formy Clifforda-Kleina muszą oczywiście istnieć nieskończone podgrupy dyskretne w G , które działają właściwie na G/H . Okazuje się, że nie zawsze takie istnieją. W artykule [K3] T. Kobayashi podał kryterium pozwalające sprawdzić, czy dana podgrupa reduktywna $L \subset G$ działa właściwie na G/H . Wnioskiem do tego kryterium jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.1 (Zjawisko Calabi-Markusa, T. Kobayashi [K3]). *Jeśli $\text{rank}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = \text{rank}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{h})$ to podgrupa dyskretna $\Gamma \subset G$ działa właściwie na G/H wtedy i tylko wtedy gdy jest skończona.*

Warto zauważyć, że powyższe twierdzenie nie zakłada nic o tym, jak podgrupa H jest włożona do G . Łatwo na jego podstawie uzyskać przykłady przestrzeni bez zwartych form Clifforda-Kleina.

Przykład 2.1. *Przestrzeń $O(p+1, q)/O(p, q)$ dla $p \geq q$ nie posiadają zwartych form Clifforda-Kleina.*

Głównym celem pracy [O1] było podanie analogicznego do rzędu rzeczywistego niezmiennika algebry $\mathfrak{g}$, dzięki któremu będzie można łatwo zbadać,

czy istnieją podgrupy dyskretne w G , które nie są wirtualnie abelowe i działają właściwie na przestrzeń G/H (grupa nazywa się wirtualnie abelową jeśli posiada obelową podgrupę skończonego indeksu). Taki pomysł także prowadzi do wyznaczania przestrzeni jednorodnych bez zwartych form Clifforda-Kleina ponieważ wiadomo, że abelowe grupy (czy ogólniej - unipotentne) nie mogą uzwarcić (niezwartej) przestrzeni G/H ([B]).

W ten sposób powstał pomysł rzędu a -hiperbolicznego algebry $\mathfrak{g}$. Bezpośrednia definicja rzędu a -hiperbolicznego związana jest z działaniem małej grupy Weyla na przestrzeń $\mathfrak{a}$ (Definicja 2.5) aczkolwiek można podać alternatywną, prostszą definicję.

Definicja 2.2. *Rząd a -hiperboliczny algebry $\mathfrak{g}$ jest sumą rzędów a -hiperbolicznych jej wszystkich prostych czynników. Rząd a -hiperboliczny prostej algebry Liego można obliczyć korzystając z tabeli 1.*

Tabela 1. Rząd a -hiperboliczny		
$\mathfrak{g}$	Rząd a -hiperboliczny	$\text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$
$\mathfrak{sl}(2k, \mathbb{R})$ $k \geq 2$	k	$2k-1$
$\mathfrak{sl}(2k+1, \mathbb{R})$ $k \geq 1$	k	$2k$
$\mathfrak{su}^*(4k)$ $k \geq 2$	k	$2k-1$
$\mathfrak{su}^*(4k+2)$ $k \geq 1$	k	$2k$
$\mathfrak{so}(2k+1, 2k+1)$ $k \geq 2$	$2k$	$2k+1$
$\mathfrak{e}_6^{\text{I}}$	4	6
$\mathfrak{e}_6^{\text{IV}}$	1	2

Tabela 1: Tabela zawiera rzędy a -hioperboliczne tych absolutnie prostych, rzeczywistych algebr Liego $\mathfrak{s}$, dla których $\text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{s} \neq \text{rank}_{a\text{-hyp}} \mathfrak{s}$.

Dzięki rzędowi a -hiperbolicznemu możemy sformułować i udowodnić następujące twierdzenie

Twierdzenie 2.2 (Twierdzenie 8 w [O1]). *Jeśli:*

CBS

1. $\text{rank}_{a\text{-hyp}}\mathfrak{g} = \text{rank}_{a\text{-hyp}}\mathfrak{h}$ to G/H nie dopuszcza właściwego działania podgrupy $\Gamma \subset G$, która nie jest wirtualnie abelowa (a stąd zwartych form Clifforda-Kleina).
2. $\text{rank}_{a\text{-hyp}}\mathfrak{g} > \text{rank}_{\mathbb{R}}\mathfrak{h}$ to istnieje podgrupa dyskretna $\Gamma \subset G$, która nie jest wirtualnie abelowa i działa właściwie na G/H .

Przykład 2.3 (Example 4 w [O1]). Następujące przestrzenie jednorodne nie posiadają zwartych form Clifforda-Kleina:

$$SL(4k + 2l, \mathbb{R})/SO(2k, 2k) \times Sp(l, \mathbb{R});$$

$$SL(2k + 2l, \mathbb{R})/Sp(k, \mathbb{R}) \times Sp(l, \mathbb{R});$$

$$SL(4k + 4l, \mathbb{R})/SO(2k, 2k) \times SO(2l, 2l);$$

$$SL(4k + 2l + 1, \mathbb{R})/SO(2k, 2k) \times SO(l, l + 1);$$

$$SU^*(4k+2)/U(s, r-s) \times Sp(t, 2k+1-r-t), \text{ for } s+t = k+1, 1 \leq r \leq 2k+1;$$

$$SU^*(4k)/U(s, r-s) \times Sp(t, 2k+1-r-t), \text{ for } s+t = k, 1 \leq r \leq 2k.$$

Przykład 2.4 (Example 5 w [O1]). Dla każdej z następujących przestrzeni jednorodnych G/H istnieje podgrupa dyskretna $\Gamma \subset G$, która nie jest wirtualnie abelowa i działa właściwie na G/H :

$$SL(2k + 2l + 2, \mathbb{R})/SO(k, k + 1) \times SO(l, l + 1);$$

$$SL(2k + 2l + 2, \mathbb{R})/SO(k, k) \times SO(l, l);$$

$$E_6^I/\{SL(3, \mathbb{C}) \times SU(2, 1)\}/\mathbb{Z}_3$$

Opis metod

Oznaczmy przez W_g grupę Weyla odpowiadającą układowi pierwiastków Σ_g oraz niech $\Pi \subset \Sigma_g^+$ oznacza podzbiór pierwiastków prostych. Ponieważ Π generuje skończoną grupę W_g możemy znaleźć najdłuższy element w_0 grupy W_g (istnieje dokładnie jeden taki element w grupie W_g). Ponadto niech

$$\mathfrak{a}^+ := \{X \in \mathfrak{a} \mid \forall_{\alpha \in \Sigma_g^+} \alpha(X) \geq 0\} \subset \mathfrak{a}.$$

Można pokazać, że

$$-w_0 : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}, \quad X \mapsto -w_0(X)$$

jest involucją na $\mathfrak{a}$ zachowującą $\mathfrak{a}^+$. Zatem możemy zdefiniować następujący zbiór

$$\mathfrak{b}^+ := \{X \in \mathfrak{a}^+ \mid -w_0(X) = X\} \subset \mathfrak{a}^+.$$

Oznaczmy przez $\mathfrak{b}$ najmniejszą podprzestrzeń liniową w $\mathfrak{a}$ zawierającą zbiór $\mathfrak{b}^+$. Można pokazać, że wymiar $\mathfrak{b}$ nie zależy od wyboru $\mathfrak{a}$ oraz Σ_g^+ .

Definicja 2.5. *Rzędem a -hiperbolicznym algebry $\mathfrak{g}$ nazywamy wymiar przestrzeni $\mathfrak{b}$.*

W pracy [O1] zostały wyliczone rzędy a -hiperboliczne półprostych, rzeczywistych algebr Liego (Tabela 1).

Następnie wykorzystane jest poniższe twierdzenie Benoista

Twierdzenie 2.3 (Theorem 1 w [B]). *Grupa G zawiera dyskretną podgrupę Γ , która nie jest wirtualnie abelowa i działa właściwie na G/H wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego w w W_g , $w \cdot \mathfrak{a}_h$ nie zawiera zbioru $\mathfrak{b}^+$. Podgrupę Γ można dobrać tak by była Zariski-gęsta w G .*

Powyższe twierdzenie daje warunek na istnienie odpowiednich podgrup $\Gamma \subset G$, który silnie zależy od włożenia $H \subset G$ (co przekłada się na włożenie $\mathfrak{a}_h \subset \mathfrak{a}$) i jego sprawdzanie w praktyce jest bardzo trudne. Już w przypadku $H = SL(2, \mathbb{R})$, $\text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} \geq 3$ istnieje zawsze wiele nierównoważnych włożeń $H \subset G$ (co wynika z klasyfikacji orbit nilpotentnych, [CMG]). Przy pomocy teorii orbit nilpotentnych można jednak pokazać, że w następujących przypadkach:

1. $\text{rank}_{a\text{-hyp}} \mathfrak{g} = \text{rank}_{a\text{-hyp}} \mathfrak{h}$,
2. $\text{rank}_{a\text{-hyp}} \mathfrak{g} > \text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}$,

warunek Benoista nie zależy już od włożenia $H \subset G$. Dokładniej: nigdy nie jest spełniony w przypadku 1 i zawsze jest spełniony w przypadku 2.

2.2 Przestrzenie silnie regularne - praca [O2]

Celem pracy [O2] było rozszerzenie wyniku z Twierdzenia 2.2, a dokładniej zbadanie związku między następującymi trzema warunkami

- C1 := przestrzeń G/H dopuszcza właściwe działanie dyskretnej, nieskończonej podgrupy grupy G ,

- $C2 :=$ przestrzeń G/H dopuszcza właściwe działanie dyskretnej, nieskończonej podgrupy grupy G , która nie jest wirtualnie abelowa,
- $C3 :=$ przestrzeń G/H dopuszcza właściwe działanie podgrupy $L \subset G$, która jest lokalnie izomorficzna $SL(2, \mathbb{R})$.

Należy zaznaczyć, że grupa G zawsze posiada podgrupę $L \subset G$ lokalnie izomorficzną z $SL(2, \mathbb{R})$ - innymi słowy: każda półprosta algebra Liego typu niezwartego zawiera jako podalgebrę $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ - jest to wniosek z twierdzenia Jacobsona-Morozova.

Oczywiście w przypadku kiedy H jest zwarte, każda podgrupa Liego w G działa właściwie na G/H , a stąd:

$$C1 \Leftrightarrow C2 \Leftrightarrow C3.$$

Sytuacja zmienia się diametralnie w przypadku gdy H (i oczywiście G/H) jest niezwarte. Jak już widzieliśmy wcześniej zachodzi wtedy zjawisko Calabi-Markusa:

Przestrzeń G/H spełnia warunek $C1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} > \text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}$.

Co więcej - na mocy twierdzenia 2.2 (patrz także Example 1 w [B]) przestrzeń $SL(3, \mathbb{R})/SL(2, \mathbb{R})$ spełnia warunek $C1$, ale nie spełnia warunku $C2$ a przez to także warunku $C3$. W omawianej w tym podrozdziale pracy (Appendix w [O2]) podano także po raz pierwszy w literaturze przykład przestrzeni, która spełnia warunek $C2$ ale nie spełnia warunku $C3$

Przykład 2.6. Niech $U \subset SO(4, 4)$ będzie spójną podgrupą o algebrze Liego $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u} \cong \mathbb{R}^2 + \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ (przy czym włożenie $U \hookrightarrow G$, indukowane przez $\mathfrak{u} \hookrightarrow \mathfrak{so}(4, 4)$, opisano w Appendix w [O2]). Istnieją podgrupy dyskretne $\Gamma \subset SO(4, 4)$, które nie są wirtualnie abelowe i działają właściwie na $SO(4, 4)/U$. Ponadto jeśli $L \subset SO(4, 4)$ jest lokalnie izomorficzna z $SL(2, \mathbb{R})$ to L nie działa właściwie na $SO(4, 4)/U$.

Zatem w ogólnym ujęciu dla przestrzeni jednorodnych G/H mamy tylko

$$C1 \Leftarrow C2 \Leftarrow C3.$$

W pracy [O2] zaproponowano więc następującą definicję

Definicja 2.7. Niech $\mathfrak{j}$ oznacza splitową podalgebrę Cartana algebry $\mathfrak{g}$ oraz niech $\mathfrak{j}_{[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]}$ oznacza splitową podalgebrę Cartana algebry $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. Przestrzeń G/H nazywa się silnie regularną jeśli (z dokładnością do sprzężenia) $\mathfrak{j}_{[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]} \subset \mathfrak{j}$ oraz $[\mathfrak{j}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]] \subset \mathfrak{h}$.

Klasa przestrzeni silnie regularnych jest szeroka. Przykładami takich przestrzeni są m.in. przestrzenie typu parabolicznego (to jest przestrzenie, w których H jest częścią półprostą centralizatora elementu hiperbolicznego w G), przestrzenie indukowane przez regularne włożenia $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, niektóre przestrzenie k -symetryczne (szczegółowy opis wraz z przykładami znajduje się w rozdziale 2.2 w [O2]).

Głównym wynikiem pracy [O2] jest następujące twierdzenie

Twierdzenie 2.4 (Theorem 2 w [O2]). Niech G/H będzie przestrzenią silnie regularną spełniającą warunek $\text{rank}_{a\text{-hyp}} \mathfrak{h} = \text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}$. Wtedy

$$C2 \iff C3 \iff \text{rank}_{a\text{-hyp}} \mathfrak{g} > \text{rank}_{a\text{-hyp}} \mathfrak{h}.$$

Wniosek 2.8 (Corollary 1 w [O2]). Jeśli G/H jest przestrzenią silnie regularną spełniającą warunek $\text{rank}_{a\text{-hyp}} \mathfrak{g} = \text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ oraz $\text{rank}_{a\text{-hyp}} \mathfrak{h} = \text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}$ to

$$C1 \iff C2 \iff C3 \iff \text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} > \text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}.$$

Biorąc pod uwagę zjawisko Calabi-Markusa otrzymujemy w ten sposób następującą charakteryzację przestrzeni silnie regularnych G/H spełniających warunek $\text{rank}_{a\text{-hyp}} \mathfrak{h} = \text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}$

- $C1 \iff \text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} > \text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{h},$
- $C2 \iff \text{rank}_{a\text{-hyp}} \mathfrak{g} > \text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{h},$
- $C3 \iff \text{rank}_{a\text{-hyp}} \mathfrak{g} > \text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}.$

Zatem

Twierdzenie 2.5. Jeśli niezwartą przestrzeń silnie regularną G/H spełniającą warunek $\text{rank}_{a\text{-hyp}} \mathfrak{h} = \text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}$ posiada zwartą formę Clifforda-Kleina to G/H dopuszcza właściwe działanie podgrupy $L \subset G$ lokalnie izomorficznej z $SL(2, \mathbb{R})$.

4/5

Opis metod

W przypadku przestrzeni silnie regularnych G/H spełniających warunek $\text{rank}_{\mathbb{R}}\mathfrak{h} = \text{rank}_{a\text{-hyp}}\mathfrak{h}$ warunki C2 i C3 są równoważne. Oczywiście najbardziej interesujący jest fakt, że w takim wypadku istnienie podgrupy $\Gamma \subset G$, która nie jest wirtualnie abelowa i działa właściwie na G/H , pociąga za sobą istnienie podgrupy $L \subset G$, lokalnie izomorficznej z $SL(2, \mathbb{R})$ i działającej właściwie na G/H . Na poziomie algebr Liego istnienie Γ wymusza warunek

$$\mathfrak{b}_h \subset \mathfrak{b},$$

z dokładnością do działania W_g ($\mathfrak{b}_h$ definiujemy dla $\mathfrak{h}$ analogicznie jak $\mathfrak{b}$ dla $\mathfrak{g}$). Następnie trzeba pokazać, że powyższy warunek - na mocy klasyfikacji orbit nilpotentnych w $\mathfrak{g}$ i twierdzenia Jacobsona-Morozova - implikuje istnienie nietrywialnego elementu nilpotentnego (i odpowiadającej mu podalgebry $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{g}$), którego orbita nie przecina $\mathfrak{h}$. Na mocy kryterium właściwych działań T. Kobayashigeo ([K3]) uzyskujemy w ten sposób odpowiednią podgrupę $L \subset G$.

2.3 Rozwiązalne, zwarte formy Clifforda-Kleina - praca [O3]

Opisane wcześniej wyniki wskazują na możliwe ograniczenia na strukturę algebraiczną podgrupy dyskretnej $\Gamma \subset G$ dającej zwartą formę Clifforda-Kleina. Z twierdzenia Borela wynika, że jeśli H jest zwarte to dowolna grupa $\Gamma \subset G$ dająca zwartą formę Clifforda-Kleina na G/H nie będzie posiadać nietrywialnych elementów unipotentnych. Ponadto, twierdzenie Benoista mówi, że jeśli $\Gamma \backslash G/H$ jest zwartą formą Clifforda-Kleina niezwarłej przestrzeni G/H to Γ nie jest (wirtualnie) unipotentna. Wyniki pracy [O3] pokazują na ile te własności można przełożyć na dyskretne podgrupy rozwiązalne. Przypomnijmy, że element $h \in G$ nazywany jest hiperbolicznym jeśli jest sprzęgalny z pewnym elementem podgrupy A z rozkładu Iwasawy $G = KAN$.

Twierdzenie 2.6 (Theorem 1.2 w [O3]). *Załóżmy, że H jest częścią półprostą centralizatora pewnego elementu hiperbolicznego h w G . Jeśli $\Gamma \backslash G/H$ jest zwartą formą Clifforda-Kleina niezwarłej przestrzeni G/H to Γ nie może być wirtualnie rozwiązalne.*

Wniosek 2.9 (Corollary 1.3 w [O3]). *Niech Γ będzie dowolną dyskretną i rozwiązalną podgrupą $SL(n, \mathbb{R})$, $n > 1$ oraz niech $SL(n, \mathbb{R}) \subset SL(m, \mathbb{R})$,*

$n > m$ będzie standardowym włożeniem. Wtedy $\Gamma \backslash SL(n, \mathbb{R}) / SL(m, \mathbb{R})$ nie jest zwarte.

Opis metod

Dowód Twierdzenia 2.6 przebiega w następujących krokach:

1. Załóżmy, że istnieje rozwiązalna, zwarta forma Clifforda Kleina $\Gamma \backslash G/H$. Można pokazać, że istnieje wtedy tzw. powłoka syndetyczna $B \subset G$, czyli rozwiązalna, spójna podgrupa Liego, taka że $\Gamma_0 := B \cap \Gamma$ jest skończonego indeksu w Γ oraz $\Gamma_0 \backslash B$ jest zwarte.
2. Weźmy domknięcie Zariskiego $\bar{B}$ grupy B . Wtedy $\bar{B}$ jest rozwiązalną podgrupą Liego w G . Mamy także

$$\bar{\mathfrak{b}} = \bar{\mathfrak{t}}_C + \bar{\mathfrak{t}}_S + \bar{\mathfrak{u}},$$

gdzie $\bar{\mathfrak{t}}_C$ jest algebrą Liego zwartego torusa, $\bar{\mathfrak{t}}_S$ algebrą Liego splitowego torusa oraz $\bar{\mathfrak{u}}$ algebrą Liego Zariski-domkniętej podgrupy unipotentnej.

3. Przy wykorzystaniu strukturalnej teorii algebr Liego można pokazać, że istnieje wektor $Z \in \mathfrak{b}$, taki że endomorfizm

$$ad_Z : \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{b}$$

ma niezerowy ślad. Stąd grupa B posiada kratę i nie jest unimodularna. Sprzeczność.

2.4 Metody komputerowe w badaniu zwartych form Clifforda-Kleina - praca [O4]

Tholozan w pracy [T] wyprowadził warunek kohomologiczny, który musi spełniać niezwarła przestrzeń G/H typu reduktywnego jeśli posiada zwarte formy Clifforda-Kleina. W uproszczeniu warunek ten mówi, że:

Twierdzenie 2.7 (Tholozan, [T], Theorem 3.2). *Niech K_H będzie maksymalną zwartą podgrupą w H i niech $n := \dim H - \dim K_H$. Oznaczmy przez G_U/K zwartą przestrzeń dualną do przestrzeni symetrycznej G/K . Jeśli*

$$H^n(G_U/K, \mathbb{R}) = \{0\}$$

to przestrzeń G/H nie posiada zwartych form Clifforda-Kleina.

Warunek ten jest techniczny i trudny do sprawdzenia w praktyce. Należy podkreślić, że przy użyciu tego warunku Tholozan nie wskazał żadnych nowych przykładów przestrzeni nie posiadających zwartych form Clifforda-Kleina (podał jedynie przykłady, które znane były już w literaturze i znalezione zostały przy użyciu innych technik). Celem pracy [O4] było stworzenie i wdrożenie algorytmu komputerowego, który przesiewałby listy przestrzeni typu reduktywnego, które spełniają warunek Tholozana. To podejście pozwoliło na obliczenie nowych klas przestrzeni nie posiadających zwartych form Clifforda-Kleina. Lista przykładów uzyskanych za pomocą programu podana jest w tabelach w rozdziale 9 w [O4].

Przy wykorzystaniu warunku Tholozana udało się też udowodnić następujące, ciekawe twierdzenie dotyczące zwartych form Clifforda-Kleina

Twierdzenie 2.8. *Niech G będzie półprostą, liniową i niezwartą grupą Liego. Załóżmy, że maksymalna zwarta podgrupa w G jest półprosta. Wtedy dla dowolnego włożenia $SL(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ przestrzeń jednorodna $G/SL(2, \mathbb{R})$ nie posiada zwartych form Clifforda-Kleina.*

Opis metod

Do zaprojektowania i wdrożenia algorytmu wykorzystano wyniki De Grafa [G, G1] dotyczące metod znajdowania i klasyfikowania półprostych algebr w prostych, zespolonych algebrach Liego w środowisku GAP. Do stworzenia algorytmów potrzebne było udowodnione następujących własności:

Twierdzenie 2.9. *Niech $d = \dim H - \dim K_H := d(H)$. Jeśli współczynnik w wyrazie stopnia d wielomianu Poincarégo $P(G_U/K, t)$ wynosi zero, to G/H nie posiada zwartych form Clifforda-Kleina.*

Wniosek 2.10. *Niech*

$$\Lambda P_{G_U} = \Lambda(y_1, \dots, y_l), \Lambda P_K = \Lambda(x_1, \dots, x_m)$$

będą zewnętrznymi algebrami nad przestrzeniami elementów prymitywnych w $H^(G)$ i $H^*(K)$. Oznaczmy przez*

$$|y_j| = 2p_j - 1, j = 1, \dots, l,$$

$$|x_i| = 2q_i - 1, i = 1, \dots, m.$$

stopnie elementów prymitywnych. Jeśli współczynnik przy wyrazie stopnia $d = d(H)$ w wielomianie

$$P(t) = \prod_{j=m+1}^l (1 + t^{2p_j-1}) \prod_{i=1}^m (1 - t^{2p_i}) / (1 - t^{2q_i}). \quad (1)$$

wynosi zero to G/H nie posiada zwartych form Clifforda-Kleina.

Powyższe własności pozwalają na zbudowanie algorytmu wykrywającego przestrzenie G/H nieposiadające zwartych form Clifforda-Kleina. Schemat algorytmu jest następujący:

- Wypisanie eksponentów $p_1, \dots, p_l$ grupy G oraz eksponentów $q_1, \dots, q_m$ podgrupy K ;
- Obliczenie $d = d(H)$;
- Wygenerowanie funkcji postaci (1) z Wniosku 2.10 dla wszystkich permutacji zbioru $P = \{p_1, \dots, p_l\}$. Jeśli jakaś funkcja nie jest wielomianem (jest funkcją wymierną) to eliminujemy ją z dalszych rozważań;
- Jeśli wszystkie wielomiany uzyskane w poprzednim punkcie mają zero-wy wyraz stopnia d to G/H nie posiada zwartych form Clifforda-Kleina.

Algorytmy zostały zaimplementowane w środowisku GAP [GAP].

3 Pozostałe publikacje i omówienie wyników w nich zawartych

Lista publikacji, które nie wchodzą w skład osiągnięcia naukowego

- ([P1]) M. Bocheński, P. Jastrzębski, A. Tralle, *On locally homogeneous compact pseudo-Riemannian manifolds*, Colloq. Math.-Warsaw 150 (2017), 135-139.
- ([P2]) M. Bocheński, A. Szczepkowska, A. Tralle, A. Woike, *On fibers of fat associated bundles*, Colloq. Math.-Warsaw 150 (2017), 149-159.

CPB

- ([P3]) M. Bocheński, A. Szczepkowska, A. Tralle, A. Woike, *On a classification of fat bundles over compact homogeneous spaces*, Differ. Geom. Appl. 49 (2016), 131-141.
- ([P4]) M. Bocheński, P. Jastrzębski, A. Tralle, T. Okuda *Proper $SL(2, \mathbb{R})$ -actions on homogeneous spaces*, Int. J. Math. 27 (2016).
- ([P5]) M. Bocheński, M. Ogryzek, *A restriction on proper group actions on homogeneous spaces of reductive type*, Geometriae Dedicata 178 (2015), 405-411.
- ([P6]) M. Bocheński, A. Szczepkowska, A. Tralle, A. Woike, *New constructions of symplectically fat fiber bundles*, J. Fixed Point Theory Appl. 17 (2015), 65-81.
- ([P7]) M. Bocheński, A. Szczepkowska, A. Tralle, A. Woike, *On symplectically fat twistor bundles*, Ann. Glob. Anal. Geom. 48 (2015), 181-194.
- ([P8]) M. Bocheński, A. Tralle, *Generalized symplectic symmetric spaces*, Geometriae Dedicata 171 (2014), 329-343 (Artykuł napisany na podstawie rozprawy doktorskiej).

3.1 Właściwe działania na przestrzeniach jednorodnych - prace [P4], [P5] i [P1]

W tym podrozdziale trzymamy się notacji z rozdziału 2. Praca [P5] dotyczy właściwych działań *spójnych* podgrup Liego $L \subset G$ na przestrzeni jednorodnej G/H . Głównym wynikiem pracy jest następujące twierdzenie

Twierdzenie 3.1 (Theorem 2 w [P5]). *Założmy, że podgrupa L jest reduktywna. Przestrzeń G/H dopuszcza właściwe działanie L tylko wtedy, gdy:*

$$\text{rank}_{a\text{-hyp}}(\mathfrak{l}) + \text{rank}_{a\text{-hyp}}(\mathfrak{h}) \leq \text{rank}_{a\text{-hyp}}(\mathfrak{g}).$$

Twierdzenie to pozwala na przykład na sprawdzenie, czy dana przestrzeń może zawierać *standardowe* formy Clifforda-Kleina. Głównym narzędziem w dowodzie jest rząd a -hiperboliczny.

Praca [P4] ma na celu zbadanie, czy dana przestrzeń G/H posiada właściwe działania spójnej podgrupy $L \subset G$ lokalnie izomorficznej z $SL(2, \mathbb{R})$. Przy

pomocy technicznych twierdzeń opartych na kryterium właściwych działań Kobayashiego uzyskano wiele przykładów przestrzeni posiadających właściwe działanie podgrupy L (Tabele 1, 2 i 3 w [P4]). Warto wspomnieć, że uzyskane w ten sposób przykłady mogą posłużyć - dzięki np. Twierdzeniu 2.5 do wskazania przestrzeni nie posiadających zwartych form Clifforda-Kleina. Artykuł [P1] zawiera inny dowód twierdzenia opublikowanego po raz pierwszy w [O3]. W przeciwieństwie do pierwotnego dowodu, metody zastosowane w [P1] opierają się głównie na wynikach Mority opublikowanych w [Mor2].

3.2 Grube wektory - prace [P2, P3, P6, P7]

Załóżmy, że mamy daną wiązkę główną $G \rightarrow P \rightarrow B$ z koneksją θ . Oznaczmy przez Ω formę krzywizny koneksji θ oraz niech $\mathbf{H} := \text{Ker}\theta \subset TP$ będzie horyzontalną dystrybucją. Forma Ω przyjmuje wartości w $\mathfrak{g}$, algebrze Liego grupy G . Załóżmy też, że $\mathfrak{g}$ posiada niezmienniczą formę dwuliniową B_g i oznaczmy przez $\mathfrak{g}^*$ przestrzeń sprzężoną z $\mathfrak{g}$.

Definicja 3.1. Wektor $u \in \mathfrak{g}$ nazywamy grubym jeśli forma dwuliniowa

$$B_g(\Omega(\bullet, \bullet), u)$$

jest niezdegenerowana na $\mathbf{H}$.

Ważnym zastosowaniem powyższej definicji jest twierdzenie Steinberga-Weinsteina

Twierdzenie 3.2 (Steinberg-Weinstein). Niech (M, ω) będzie rozmaitością symplektyczną z hamiltonowskim działaniem grupy Liego G i odwzorowaniem momentu $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Jeśli w wiązce głównej $P \rightarrow B$ istnieje koneksja dla której wszystkie wektory w zbiorze $\mu(M)$ są grube to przestrzeń totalna wiązki stowarzyszonej

$$M \rightarrow P \times_G M \rightarrow B$$

posiada włóknistą strukturę symplektyczną, która ogranicza się do ω na włóknie M .

W takim wypadku mówimy, że wiązka $M \rightarrow P \times_G M \rightarrow B$ jest symplektycznie gruba.

Co może wydawać się zaskakujące, w literaturze opisano bardzo mało przykładów symplektycznie grubych wiązek.

Przypomnijmy, że wiązką twistorową nad parzyście wymiarową rozmaitością riemannowską (N, g) nazywamy wiązkę stowarzyszoną do wiązki reperów

ortogonalnych nad N z włóknem $SO(2n)/U(n)$. W tym podrozdziale rozważamy wiązki twistorowe nad przestrzeniami jednorodnymi grupy Liego K . W takim wypadku wiązka ma postać

$$SO(2n)/U(n) \rightarrow \mathbf{Tw}(K/H) := SO(K/H) \times_{SO(2n)} (SO(2n)/U(n)) \rightarrow K/H.$$

$SO(K/H)$ oznacza przestrzeń totalną $SO(n)$ -wiązki głównej reperów ortogonalnych.

Celem prac [P6] i [P7] było znalezienie nowych klas wiązek symplektycznie grubych. Otrzymano następujące wyniki

1. Załóżmy, że K jest spójną i półprostą grupą Liego zaś $H \subset K$ zwartym centralizatorem dowolnego torusa $T \subset K$. Załóżmy też, że H działa w sposób hamiltonowski na zwartej i spójnej rozmaitości symplektycznej (M, ω) . Wtedy wiązka stowarzyszona (do wiązki głównej $H \rightarrow K \rightarrow K/H$)

$$M \rightarrow K \times_H M \rightarrow K/H$$

jest symplektycznie gruba (Theorem 4.1 w [P6]).

2. Twierdzenia i warunki pozwalające na wskazanie nowych przykładów symplektycznie grubych wiązek twistorowych nad niesymplektycznymi bazami (Theorem 5.4, Corollary 5.5, Theorem 5.6 w [P6]). Na przykład wiązką twistorową

$$SO(2n)/U(n) \rightarrow Tw(Sp(2n)/SO(2n)) \rightarrow Sp(2n)/SO(2n)$$

jest symplektycznie gruba (Proposition 5.9 w [P6]).

3. Następujące wiązki twistorowe nad Grassmannianami maksymalnego rzędu są symplektycznie grube (Theorem 2 w [P7]):

$$SO(2n+2m)/SO(2n) \times SO(2m), \quad m, n \neq 1$$

$$SO(2n+2m+1)/SO(2n) \times SO(2m+1), \quad n \neq 1$$

$$Sp(n+m)/Sp(n) \times Sp(m), \quad m, n \neq 1$$

$$U(m+n)/U(m) \times U(n).$$

Pojęcie grubych wektorów stanowi też podstawę do badań tzw. grubych wiązek. Rozważmy wiązkę stowarzyszoną

$$F \rightarrow P \times_G F \xrightarrow{\pi} B$$

z wiązką $G \rightarrow P \rightarrow B$. Niech g_F oznacza G -niezmienniczą metrykę riemannowską na włóknie F , zaś g_B metrykę na B . Na $P \times_G F$ możemy zdefiniować metrykę koneksji g . Metryka ta pokrywa się z g_F na włóknach F ,

$$g(\pi^*(X), \pi^*(Y)) = g_B(X, Y)$$

dla $X, Y \in TB$. Ponadto wymagamy, aby H oraz TF były g -ortogonalne. Metryka g posiada następujące własności

Twierdzenie 3.3 (por. [Zi]). *Metryka g jest zupełna oraz $(P \times_G F, g) \xrightarrow{\pi} (B, g_B)$ jest submersją riemannowską z totalnie geodezyjnym włóknem F i grupą holonomii $L \subset G$. Każda riemannowska submersja w B o totalnie geodezyjnych włóknach powstaje w ten sposób.*

W ten sposób dochodzimy do definicji

Definicja 3.2. *Riemannowską submersję $(P \times_G F, g) \xrightarrow{\pi} (B, g_B)$ z włóknem G/L nazywamy grubą jeśli forma dwuliniowa B_g jest niezdegenerowana na H dla dowolnego $u \in \mathfrak{l}^\perp \subset \mathfrak{g}$.*

Grube wiązki znajdują zastosowanie na przykład w konstrukcji rozmaitości o dodatniej krzywiznie sekcijnej [GZ]. Należy podkreślić, że wszystkie jednorodne wiązki grube (tj. wiązki postaci $H/L \rightarrow K/L \rightarrow K/H$) zostały sklasyfikowane przez Berarda-Bergery'ego [Be].

Niech G będzie zwartą, półprostą grupą Liego. W pracy [P3] podano warunki, kiedy G -struktura $G \rightarrow P \rightarrow K/H$ nad przestrzenią jednorodną zwartą i półprostą grupą Liego K jest gruba ze względu na koneksję kanoniczną. Okazuje się, że możliwe jest to tylko w przypadku, gdy G -struktura jest rozszerzeniem wiązki jednorodnej z klasyfikacji Berarda-Bergery'ego (Theorem 3 w [P3]). W szczególności

Twierdzenie 3.4 (por. Theorem 3 w [P3]). *Założmy dodatkowo, że grupa G jest prosta. Wiązka*

$$G/L \rightarrow P/L \rightarrow K/H$$

stowarzyszona z wiązką $G \rightarrow P \rightarrow K/H$ jest gruba wtedy i tylko wtedy gdy jest jednorodna, tj. $G = H$, $P = K$.

C/S

Praca [P2] rozszerza ten wynik na wiązki zdefiniowane nad dowolną zwartą rozmaitością riemannowską B

Twierdzenie 3.5 (Theorem 4.1 w [P2]). *Niech $G/L \rightarrow P/L \rightarrow B$ będzie wiązką stowarzyszoną do wiązki $G \rightarrow P \rightarrow B$ i założmy, że G jest prostą grupą Liego, która nie jest lokalnie izomorficzna z L . Jeśli wiązka ta jest gruba to przestrzeń G/L jest skończenie nakryta przez przestrzeń jednorodną postaci*

$$S^{8k-1} = SU(4k)/SU(4k-1) \quad k \geq 1,$$

$$S^5 = SU(4)/Sp(2),$$

$$\mathbb{CP}^{2k-1} = SU(4k)/(SU(4k-1) \times S^1) \quad (k \geq 1),$$

$$S^{8k-1} = SO(8k)/SO(8k-1) \quad k \geq 1,$$

$$S^{15} = SO(16)/SO(15),$$

$$S^7 = SO(8)/SO(7).$$

3.3 Uogólnione symplektyczne przestrzenie symetryczne - praca [P8]

Celem tej pracy było sklasyfikowanie wszystkich przestrzeni 3-symetrycznych G/H posiadających niezmienniczą (ze względu na działanie G) strukturę symplektyczną. W pracy zostały sklasyfikowane wszystkie niezwarłe przestrzenie 3-symetryczne G/H , w których G jest prostą grupą Liego (co de facto daje klasyfikację wszystkich symplektycznych przestrzeni 3-symetrycznych) - wynik podany jest w tabeli 2 w [P8]. Metoda klasyfikacji oparta jest na dualności między zwartymi i niezwartymi przestrzeniami 3-symetrycznymi.

Prace naukowe

- [P4] M. Bocheński, P. Jastrzębski, A. Tralle, T. Okuda *Proper $SL(2, \mathbb{R})$ -actions on homogeneous spaces*, Int. J. Math. 27 (2016), DOI: 10.1142/S0129167X16501068.
- [P1] M. Bocheński, P. Jastrzębski, A. Tralle, *On locally homogeneous compact pseudo-Riemannian manifolds*, Colloq. Math.-Warsaw 150 (2017), 135-139.
- [O4] M. Bocheński, P. Jastrzębski, A. Szczepkowska, A. Tralle, A. Woike, *Semisimple subalgebras in simple Lie algebras and a computational approach to the compact Clifford-Klein forms problem*, Exp. Math. (2019), DOI:10.1080/10586458.2018.1492475.
- [P5] M. Bocheński, M. Ogryzek, *A restriction on proper group actions on homogeneous spaces of reductive type*, Geometriae Dedicata 178 (2015), 405-411.
- [P6] M. Bocheński, A. Szczepkowska, A. Tralle, A. Woike, *New constructions of symplectically fat fiber bundles*, J. Fixed Point Theory Appl. 17 (2015), 65-81.
- [P3] M. Bocheński, A. Szczepkowska, A. Tralle, A. Woike, *On a classification of fat bundles over compact homogeneous spaces*, Differ. Geom. Appl. 49 (2016), 131-141.
- [P7] M. Bocheński, A. Szczepkowska, A. Tralle, A. Woike, *On symplectically fat twistor bundles*, Ann. Glob. Anal. Geom. 48 (2015), 181-194.
- [O2] M. Bocheński, *Proper Actions on Strongly Regular Homogeneous Spaces*, Asian J. Math., Vol. 21, no. 6 (2017), 1121-1134.
- [O1] M. Bocheński, A. Tralle, *Clifford-Klein forms and a-hyperbolic rank*, Int. Math. Res. Notices 2015, no. 5, 6267-6285.
- [P8] M. Bocheński, A. Tralle, *Generalized symplectic symmetric spaces*, Geometriae Dedicata 171 (2014), 329-343.
- [P2] M. Bocheński, A. Szczepkowska, A. Tralle, A. Woike, *On fibers of fat associated bundles*, Colloq. Math.-Warsaw 150 (2017), 149-159.

- [O3] M. Bocheński, A. Tralle, *On solvable compact Clifford-Klein forms*, P. Am. Math. Soc. 145 (2017), 1819-1832.

Źródła

- [B] Y. Benoist, *Actions propres sur les espaces homogenes reductifs*, Ann. Math. 144 (1996), 315-347.
- [Be] L. Berard-Bergery, *Sur certaines fibrations d'espaces homogenes riemanniens*, Compos. Math. 30 (1975) 43-61.
- [CM] E. Calabi, L. Markus, *Relativistic space forms*, Ann. Math. 75 (1962), 63-76.
- [CMG] D. H. Collingwood, W. M. McGovern, *Nilpotent Orbits in Semisimple Lie Algebras*, Van Nostrand Reinhold, New York (1993).
- [GAP] *The GAP Group, GAP - groups, algorithms and programming*, v.4.8, available at <https://www.gap-system.org/>
- [G] W. A. de Graaf, *SLA - computing with Simple Lie Algebras. A GAP package*, available at <http://www.science.unitn.it/~degraaf/sla.html>
- [G1] W. A. de Graaf, *Constructing semisimple subalgebras of simple Lie algebras*, J. Algebra 325(2011), 416-430.
- [GP] M. Gromov, P. Pansu *Rigidity of lattices: An introduction*, *Geometric Topology: Recent Developments*, Lecture Notes in Mathematics 1504 (2006), 39-137.
- [GZ] K. Grove, W. Ziller, *Curvature and symmetry of Milnor spheres*, Ann. Math. 152 (2000), 331-367.
- [Ka] F. Kassel, *Deformation of proper actions on reductive homogeneous spaces*, Math. Ann., 353 (2012), 599-632.
- [K1] T. Kobayashi, *Discontinuous Groups and Clifford-Klein Forms of Pseudo-Riemannian Homogeneous Manifolds*, Algebraic and Analytic Methods in Representation Theory, Perspectives in Mathematics (1997), 99-165.

UB

- [K2] T. Kobayashi, *Discontinuous groups for non-Riemannian homogeneous spaces*, Berlin, 2001.
- [K3] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann. 285 (1989), 249-263.
- [KO] T. Kobayashi, K. Ono, *Note on Hirzebruch's proportionality principle*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 37 (1990), 71-87.
- [KY] T. Kobayashi, T. Yoshino *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces revisited*, Pure Appl. Math. Quart 1 (2005), 603-684.
- [LMZ] F. Labourie, S. Mozes, R.J. Zimmer, *On manifolds locally modelled on non-Riemannian homogeneous spaces*, Geom. Funct. Anal. 5 (1995), 955-965.
- [M1] G. Margulis, *Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups*, Springer 1991.
- [M2] G. Margulis, *Existence of compact quotients of homogeneous spaces, measurably proper actions, and decay of matrix coefficients*, B. Soc. Math. Fr. 125 (1997), 447-456.
- [Mor] Y. Morita, *A topological necessary condition for the existence of compact Clifford-Klein forms*, J. Differ. Geom., Volume 100 (2015), 533-545.
- [Mor2] Y. Morita, *Homogeneous spaces of nonreductive type locally modelling no compact manifold*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 53 (2017), 287-298.
- [Ok] T. Okuda, *Classification of Semisimple Symmetric Spaces with Proper $SL(2, R)$ -actions*, J. Differ. Geom. 94 (2013), 301-342.
- [OV] A. L. Onishchik, E. B. Vinberg *Lie groups and Lie algebras III*, Springer, Berlin, 1994.
- [R] M. S. Raghunathan, *Discrete Subgroups of Lie Groups*, Springer 1972.
- [S] A. Selberg, *On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces, Contributions to functional theory*, Bombay, 1960, pp. 147-164.
- [T] N. Tholozan, *Volume and non-existence of compact Clifford-Klein forms*, arXiv: 1511.09448[math.GT].

dB

- [WG] J. Wolf and A. Gray, *Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms II*, J. Differ. Geom. 2(1968), 78-159.
- [Zi] W. Ziller, *Fatness revisited*, preprint,
<http://www.math.upenn.edu/~wziller/research.html>.
- [Z] R. J. Zimmer, *Discrete groups and non-Riemannian homogeneous spaces*, J. Am. Math. Soc. 7 (1994), 159-168.

Maciej
Bodurhi