AUTOREFERAT

MACIEJ DOŁĘGA

Adres: Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa
Email: mdolega@impan.pl
www: http://www.impan.pl/~mdolega

Dyplomy i stopnie naukowe

2010 Magister Matematyki, Uniwersytet Wrocławski
Praca magisterska: *Struktura wielomianów Kerova*
promotor: Prof. dr hab. Piotr Śniady

2013 Doktor Nauk Matematycznych (obrona z wyróżnieniem), Uniwersytet Wrocławski
Praca doktorska: *Kombinatoryka asymptotycznej teorii reprezentacji grup permutacji*
promotor: Prof. dr hab. Piotr Śniady

Dotychczasowe zatrudnienie

2013–2015 *Asystent*, Instytut Matematyki, Uniwersytet Wrocławski (urlop bezpłatny)
2013–2015 *Postdoc*, Université Paris 7
2015–2018 *Adiunkt*, Instytut Matematyki, Uniwersytet Wrocławski (urlop bezpłatny)
2015–2018 *Adiunkt*, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Adama Mickiewicza w Poznaniu
2018–teraz *Adiunkt*, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

Osiągnięcie habilitacyjne:

STRUKTURA KOMBINATORYCZNA FUNKCJI SYMETRYCZNYCH JACKA I MACDONALDA, A WŁASNOŚCI ENUMERYTWNE GRAFÓW

[Hab1] M. Dołęga and V. Féray, *Cumulants of Jack symmetric functions and b-conjecture*, Trans. Amer. Math. Soc. **369** (2017), no. 12, 9015–9039.

IF: 1.496, MNiSW: 140,

[Hab2] M. Dołęga, *Top degree part in b-conjecture for unicellular bipartite maps*, Electron. J. Combin **24** (2017), no. 3, Paper 3.24, 39.

IF: 0.762, MNiSW: 100,

[Hab3] G. Chapuy and M. Dołęga, *A bijection for rooted maps on general surfaces*, J. Combin. Theory Ser. A **145** (2017), 252–307.

IF: 0.930, MNiSW: 100,

[Hab4] M. Dołęga, *Strong factorization property of Macdonald polynomials and higher-order Macdonald's positivity conjecture*, J. Algebraic Combin. **46** (2017), no. 1, 135–163.

IF: 0.730, MNiSW: 100,

[Hab5] M. Dołęga, *Macdonald cumulants, G-inversion polynomials and G-parking functions*, European J. Combin. **75** (2019), 172–194.

IF: 0.848, MNiSW: 100,

Omówienie

1. Wstęp

Wielomiany symetryczne mają bardzo prostą definicję – są to wielomiany niezmiennicze ze względu na permutacje ich zmiennych. Niektóre z tych wielomianów, takie jak *wielomiany Jacka lub Macdonalda*, okazały się być niezwykle interesujące za względu na ich interdyscyplinarną naturę. Znalazły one zastosowania w wielu dziedzinach matematyki i fizyki: są one związane z uogólnionymi zespołami β macierzy losowych [OO97], z pewnymi modelami mechaniki statystycznej [BC14], ze schematami Hilberta [Hai01], rozmaitościami kołczanów i charakterów [HRV08, HLRV11], grupami kwantowymi [LLT97], uogólnionymi całkami Selberga [Kad97], pewnymi modelami losowych partycji [BO05] czy wreszcie topologią węzłów [Che13]. Stanowią one istotną część programów badawczych wielu znakomitych matematyków jak choćby laureat medalu Fieldsa Andrei Okounkov [OO97], Richard Stanley [Sta89], Alexei Borodin [BC14] czy Mark Haiman [Hai01]. Podczas ostatnich dwóch dekad nastąpił niezwykle intensywny rozwój badań nad tymi wielomianami i obecnie leżą one w centrum zainteresowań współczesnej kombinatoryki algebraicznej.

Pojawia się tutaj naturalne pytanie: *co sprawiło że te wielomiany mają tak bardzo szerokie zastosowania?* Jedną z możliwych odpowiedzi jest to, że wszystkie te wielomiany mają wspólna cechę – ich struktura algebraiczna i kombinatoryczna wzajemnie się uzupełniają i ta dualność sprawie że są one silnym narzędziem występującym naturalnie w różnych kontekstach. To zjawisko odzwierciedlone jest w różnych własnościach dodatniości tych wielomianów. Wiele z tych fascynujących własności wraz z licznymi implikacjami zostało udowodnionych poprzez znalezienie oraz zbadanie pewnych struktur kombinatorycznych, które szybko znalazły różne zastosowania głównie w geometrii algebraicznej, teorii reprezentacji i teorii prawdopodobieństwa [Sta89, KS97, HHL05, HLRV11, BC14]. Odkrycia te przyniosły również wiele pytań i hipotez na temat struktury tych funkcji i kombinatorycznych obiektów rzekomo z nimi związanych. Główną tematyką opisanych przeze mnie badań jest próba odpowiedzi na te pytania oraz znalezienie nowych struktur opisujących te funkcje.

Przedstawię teraz niezbędną teorię oraz najważniejsze odkrycia dotyczące kombinatorycznych i algebraicznych aspektów struktury wielomianów Jacka i Macdonalda, co stanowi istotne wprowadzenie do opisu moich badań.

1.1. Funkcje symetryczne: wprowadzenie.

Oznaczmy przez $\Lambda_n := \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]_n^{\mathfrak{S}}$ algebrę wielomianów symetrycznych n zmiennych. Okazuje się, że często wygodniej jest badać *funkcje symetryczne*, o których można myśleć jak o "wielomianach symetrycznych nieskończenie wielu zmiennych". Ściśle rzecz biorąc, algebra funkcji symetrycznych Λ zdefiniowana jest jako granica wsteczna

$$\Lambda = \varprojlim \Lambda_n$$

względem morfizmu $\Lambda_{n+1} \to \Lambda_n$ zadanego przez podstawienie

$$\Lambda_{n+1} \ni f(x_1 \dots, x_n, x_{n+1}) \to f(x_1 \dots, x_n, 0) \in \Lambda_n.$$

Prosta, lecz mająca głębokie konsekwencje, obserwacja mówi że algebra funkcji symetrycznych jest izomorficzna z algebrą wielomianową $\mathbb{Q}[f_1, f_2, \dots]$. Istnieje wiele ciekawych klasycznych wyborów zmiennych $\{f_n\}$ dla których zachodzi wspomniany izomorfizm:

- *potęgowe funkcje symetryczne:* $\{f_n\} = \{p_n\}$, gdzie $p_n = \sum_i x_i^n$;
- *elementarne funkcje symetryczne:* $\{f_n\} = \{e_n\}$, gdzie $e_n = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}$;

- *zupełne funkcje symetryczne:* $\{f_n\} = \{h_n\}$, gdzie $h_n = \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}$.

W szczególności $\Lambda = \bigoplus \Lambda^n$ rozkłada się na sumę prostą przestrzeni wektorowych jednorodnych funkcji symetrycznych stopnia n (czyli granicy wstecznej jednorodnych wielomianów symetrycznych stopnia n $\Lambda^n = \varprojlim \Lambda_k^n$). Każda taka przestrzeń wektorowa Λ^n jest skończonego wymiaru i jej elementy bazowe indeksowane są w naturalny sposób przez proste obiekty kombinatoryczne zwane *partycjami* n. Partycja λ rozmiaru n (oznaczona również jako $\lambda \vdash n$ lub $|\lambda| = n$) jest nierosnącym ciągiem dodatnich liczb całkowitych $\lambda = (\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_\ell)$ (*długość* takiej partycji oznaczona jest jako długość ciągu $\ell(\lambda) := \ell$) takim, że $\sum_i \lambda_i = n$. Oczywiście

$$\Lambda^n = \mathrm{Span}\{f_\lambda : \lambda \vdash n\},$$

gdzie $f_\lambda := \prod_i f_{\lambda_i}$. Wszystkie trzy bazy, które opisaliśmy przed momentem, są bardzo proste, ale prawdopodobnie "najprostsza" baza to tzw. baza jednomianów symetrycznych m_λ, którą jest symetryzacją jednomianu $x_1^{\lambda_1} \cdots x_\ell^{\lambda_\ell}$ (uwaga: $m_\lambda \neq \prod_i m_{\lambda_i}$). Jednym z klasycznych problemów teorii funkcji symetrycznych jest znalezienie wzoru wyrażającego zadaną funkcję symetryczną f w wybranej bazie. Odpowiedź na tak fundamentalne pytanie prowadzi do wielu głębokich wyników i zastosowań, co bardzo dobrze opisuje poniższy przykład.

Niech s_λ oznacza *wielomian Schura* - funkcję symetryczną, która jest jednym z bazowych bloków teorii funkcji symetrycznych. Wielomian Schura, nazwany na cześć Issai Schura, jest nieredukowalnym charakterem reprezentacji wielomianowej ogólnej grupy liniowej GL_n i możemy go zdefiniować np. używając *wzoru Weyla na charaktery*:

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{a_{\lambda+\delta_n}}{a_{\delta_n}},$$

gdzie $a_\alpha = \det(x_j^{\alpha_i})$, oraz $\delta_n = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$.

- Wyrażenie s_λ w bazie potęgowych funkcji symetrycznych wiąże wielomiany Schura z teorią reprezentacji grup permutacji, co z kolei ma związek z *dualnością Schura–Weyla*. Ściślej rzecz biorąc, dla dowolnej partycji $\lambda \vdash n$ mamy:

  $$s_\lambda = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi_\lambda(\sigma) p_{ct(\sigma)},$$

  gdzie $ct(\sigma)$ (zwany *typem cykli* w σ) jest partycją zadaną przez długości cykli w permutacji σ, a χ_λ jest charakterem nieprzywiedlnej reprezentacji ρ_λ grupy permutacji $\mathfrak{S}_n$.
- Wzór (w którym występuje redukcja pewnych wyrazów) wyrażający s_λ w bazie elementarnych oraz zupełnych funkcji symetrycznych, zwany wzorem *Jacobiego–Trudiego* przedstawia s_λ jako pewien wyznacznik:

  $$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i+j-i})_{i,j=1}^{\ell(\lambda)} = \det(e_{\lambda_i^t+j-i})_{i,j=1}^{\ell(\lambda)},$$

  gdzie przyjmujemy następującą konwencję

  $$h_i = e_i = \begin{cases} 1 & \text{for } i = 0, \\ 0 & \text{for } i < 0, \end{cases}$$

i λ^t jest partycją sprzężoną z λ. Sprzężenie partycji jest bardzo prostą operacją z geometrycznego punktu widzenia – możemy przedstawić partycje λ poprzez narysowanie jej *diagramu Younga*, który składa się ze zbioru

$$\lambda = \{(i,j) : 1 \leq i \leq \lambda_j, 1 \leq j \leq \ell(\lambda)\}.$$

Wówczas sprzężenie partycji λ odpowiada odbiciu jej diagramu względem prostej $x = y$. Wzór Jacobiego–Trudiego ma bardzo wiele nietrywialnych zastosowań i warto wspomnieć choćby jego zastosowanie do powiązania teorii hierarchii KP z funkcjami Schura [SS83, Sat89].

- Wzór wyrażający s_λ w bazie jednomianów symetrycznych jest zadany przez słynną interpretację kombinatoryczną funkcji Schura jako funkcja tworząca półstandardowych tableaux Younga. Tableau $T : \lambda \to \mathbb{N}$ (o kształcie λ) jest wypełnieniem komórek λ przez nieujemne liczby całkowite. Jeżeli wypełnienie jest ściśle rosnące w każdej kolumnie (czytając elementy z dołu do góry) i niemalejące w każdym wierszu (czytając elementy od lewej do prawej), wówczas nazywamy je *półstandardowym*. Niech $\mathrm{SSYT}(\lambda)$ oznacza zbiór półstandardowych tableaux Younga o kształcie λ. Wówczas
$$s_\lambda = \sum_{T \in \mathrm{SSYT}(\lambda)} \boldsymbol{x}^T,$$
gdzie $\boldsymbol{x}^T := \prod_{\square \in \lambda} x_{T(\square)}$. W szczególności współczynnik $[m_\mu]s_\lambda = K_{\lambda,\mu} = \mathrm{SSYT}(\lambda, \mu)$ przy m_μ w rozwinięciu s_λ w bazie jednomianów symetrycznych jest równy liczbie półstandardowych tableaux Younga o kształcie λ i wypełnieniu μ (jest to tzw. *liczba Kostki*). Jedną z najbardziej rozpoznawalnych konsekwencji tego wzoru jest jawna kombinatoryczna interpretacja:
  - wymiaru przestrzeni wag odpowiadających μ w nieprzywiedlnej reprezentacji V_λ ogólnej grupy liniowej $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$;
  - krotności nieprzywiedlnej reprezentacji ρ_λ grupy permutacji w module grupowym $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{\mu_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\mu_\ell}]$;
  - pierścienia kohomologii Grassmanianu.

Przestrzeń funkcji symetrycznych jest naturalnie wyposażona w iloczyn skalarny, który jest jednoznacznie wyznaczony poprzez następujące relacje ortogonalności dla bazy funkcji potęgowych

$$\langle p_\mu, p_\lambda \rangle = \delta_{\lambda,\mu} \frac{|\mathfrak{S}_n|}{|\mathcal{C}_\lambda|},$$

gdzie $\mathcal{C}_\lambda$ jest klasą sprzężoności permutacji o typie cykli λ. Liczba takich permutacji jest dana następującym wzorem:

$$|\mathcal{C}_\lambda| = \frac{n!}{z_\lambda},$$

gdzie $m_i(\lambda) = |\{j : \lambda_j = i\}|$ i $z_\lambda = \prod_i i^{m_i(\lambda)} m_i(\lambda)!$. Wybór funkcji potęgowych jako bazy ortogonalnej z tą konkretną normalizacją wynika z następujących teorio-reprezentacyjnych rozważań.

Niech G będzie grupą skończoną, a $Z(G)$ oznacza przestrzeń centralnych funkcji na G (nad ciałem $\mathbb{Q}$). Przestrzeń $Z(G)$ jest wyposażona w następujący iloczyn skalarny,

$$\langle f, g \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} f(\sigma) g(\sigma^{-1}).$$

Niech $Z(\mathfrak{S}_\infty) := \bigoplus_{n\geq 0} Z(\mathfrak{S}_n)$, przyjmując konwencję że $Z(\mathfrak{S}_0) = \mathbb{Q}$. Przestrzeń wektorowa $Z(\mathfrak{S}_0)$ ma strukturę pierścienia zdefiniowaną w następujący sposób: dla $f \in Z(\mathfrak{S}_n)$ i $g \in Z(\mathfrak{S}_m)$ zdefiniujmy $f \times g \in Z(\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m)$. Grupa $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$ jest podgrupą grupy permutacji $\mathfrak{S}_{n+m}$, zatem możemy zdefiniować iloczyn $f \cdot g$ jako charakter indukowany:

$$f \cdot g := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}}(f \times g),$$

a następnie możemy przedłużyć ten iloczyn na $Z(\mathfrak{S}_\infty)$ dzięki dwuliniowości co zadaje wspomnianą strukturę pierścienia. Wreszcie, dla przemiennego, łącznego, pierścienia z gradacją $Z(\mathfrak{S}_\infty)$ definiujemy iloczyn skalarny odziedziczony z $Z(\mathfrak{S}_n)$:

$$\langle f, g\rangle := \sum_{n\geq 0} \langle f_n, g_n\rangle_{\mathfrak{S}_n},$$

gdzie $f_n, g_n \in Z(\mathfrak{S}_n)$. Zdefiniujmy przekształcenie $\psi : \mathfrak{S}_n \to \Lambda^n$ poprzez następująca tożsamość $\psi(\sigma) = p_{ct(\sigma)}$. Ta tożsamość indukuje przekształcenie $\mathrm{ch}_n : Z(\mathfrak{S}_n) \to \Lambda^n$ kładąc

$$ch_n(f) := \langle f, \psi\rangle_{\mathfrak{S}_n} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} f(\sigma)\psi(\sigma),$$

(delikatnie nadużywamy tutaj notacji aby podkreślić podobieństwo pomiędzy tą definicją a maturalnym iloczynem skalarnym na przestrzeni funkcji na grupie skończonej) który przedłuża się do $\mathrm{ch} : Z(\mathfrak{S}_\infty) \to \Lambda$. Opisana konstrukcja została przeprowadzona w taki sposób, że zachodzi następujące twierdzenie

Twierdzenie 1.1. Przekształcenie charakterystyczne $\mathrm{ch} : Z(\mathfrak{S}_\infty)$ *jest izomorficzną izometrią* $Z(\mathfrak{S}_\infty)$ *na* Λ.

Jedną z konsekwencji tej konstrukcji jest następująca interpretacja funkcji Schura.

Wniosek 1.2. *Przekształcenie charakterystyczne nieprzywiedlnego charakteru* χ_λ *reprezentacji* ρ_λ *jest równe funkcji Schura indeksowanej tą samą partycją* $\mathrm{ch}(\chi_\lambda) = s_\lambda$. *W szczególności funkcje Schura są ortonormalne* $\langle s_\lambda, s_\mu\rangle = \delta_{\lambda,\mu}$.

Możemy z tego wywnioskować, że wielomiany Schura są jednoznacznie wyznaczone poprzez następujące własności, co można potraktować jako alternatywną ich definicję.

Definicja-Stwierdzenie 1.3. *Rodzina funkcji symetrycznych Schura* $\{s_\lambda\}_\lambda$ *jest jedyną rodziną która ma następujące własności:*

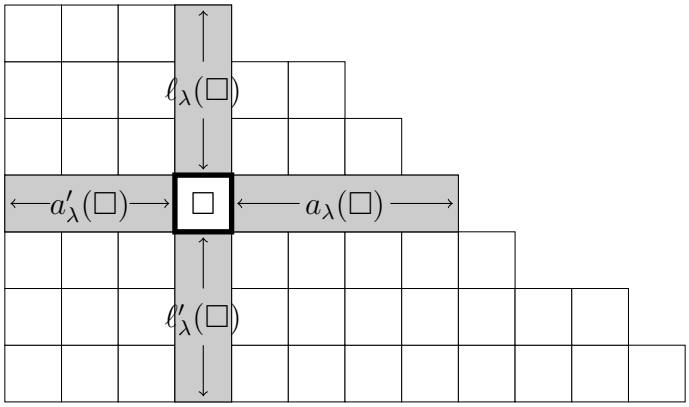
(O) Własność ortogonalności: $\langle s_\lambda, s_\mu\rangle = 0$ *dla* $\lambda \neq \mu$,
(T) Własność górnotrójkątna: $s_\lambda = \sum_{\mu\leq\lambda} c_\mu m_\mu$ *dla pewnych* $c_\mu \in \mathbb{Q}$
(N) Własność normalizacji: $[m_\lambda]s_\lambda = 1$.

Porządek liniowy na zbiorze partycji pojawiający się we własności (T) jest porządkiem leksykograficznym, tzn.

$$\mu < \lambda \iff \text{istnieje } i \geq 1 \text{ takie że } \mu_j = \lambda_j \text{ dla wszystkich } j < i \text{ i } \mu_i < \lambda_i.$$

Ta definicja mówi, że funkcje Schura możemy otrzymać poprzez zastosowanie procesu ortogonalizacji Grama–Schmidta do bazy jednomianów symetrycznych. Zachodzi ponadto bardzo nietrywialny fakt: porządek leksykograficzny we własności (T) możemy zastąpić tzw. *porządkiem dominacji* zdefiniowanym w następujący sposób:

$$\mu \leq \lambda \iff \sum_{i=1}^{j} \mu_i \leq \sum_{i=1}^{j} \lambda_i \text{dla wszystkich } j.$$



Rysunek 1. Długości ramienia, ko-ramienia, nogi i ko-nogi oznaczonej klatki w diagramie Younga.

Definicja-Stwierdzenie 1.3 jest źródłem pomysłu Macdonalda, który wprowadził słynne *funkcje symetryczne Macdonalda* uogólniające funkcje Schura poprzez wprowadzenie dodatkowych parametrów deformacyjnych.

1.2. **Funkcje symetryczne Jacka i Macdonalda.** Niech $\Lambda_{(q,t)}$ oznacza algebrę funkcji symetrycznych nad ciałem ułamków $\mathbb{Q}(q,t)$, czyli $\Lambda_{(q,t)} := \mathbb{Q}(q,t) \otimes \Lambda$. Określmy iloczyn skalarny na $\Lambda_{(q,t)}$ poprzez następującą q,t-deformację klasycznego iloczynu skalarnego

$$\langle p_\mu, p_\lambda \rangle_{(q,t)} := \delta_{\mu,\lambda} z_\lambda \prod_i \frac{1-q^{\lambda_i}}{1-t^{\lambda_i}}.$$

Definicja-Stwierdzenie 1.4 ([Mac88, Mac95])**.** *Rodzina* funkcji symetrycznych Macdonalda $\{J_\lambda^{(q,t)}\}_\lambda$ *jest jedyną rodziną która ma następujące własności:*

(O) Własność ortogonalności: $\langle J_\lambda^{(q,t)}, J_\mu^{(q,t)} \rangle_{(q,t)} = 0$ *dla* $\lambda \neq \mu$,

(T) Własność górnotrójkątna: $J_\lambda^{(q,t)} = \sum_{\mu \leq \lambda} c_\mu(q,t) m_\mu$ *dla pewnych* $c_\mu(q,t) \in \mathbb{Q}(q,t)$

(N) Własność normalizacji: $[m_\lambda] J_\lambda^{(q,t)} = \mathrm{hook}_{(q,t)}(\lambda) := \prod_{\square \in \lambda} (1 - q^{a_\lambda(\square)} t^{\ell_\lambda(\square)+1})$,

gdzie $a_\lambda(\square), \ell_\lambda(\square)$ *oznaczają długości ramienia i nogi klatki* $\square$*, zobacz Rys. 1.*

Zauważmy że dla $q = t$ iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(q,q)}$ pokrywa się z klasycznym iloczynem skalarnym definiującym funkcje Schura. Innymi słowy, funkcje symetryczne Macdonalda w tym przypadku $J_\lambda^{(q,q)}$ są po prostu funkcjami Schura (z dokładnością do normalizacji). Podstawienie $t = 0$ daje nam inną klasyczną funkcję symetryczną, tzw. funkcję *Halla–Littlewooda*. Najważniejszym dla nas szczególnym przypadkiem będzie podstawienie $q = t^\alpha$ oraz przejście do granicy gdy $t \to 1$. Tak otrzymane funkcje nazywają się *funkcjami symetrycznymi Jacka*. W szczególności, funkcje Jacka można zdefiniować w następujący sposób:

Definicja-Stwierdzenie 1.5 ([Sta89, Mac95])**.** *Rodzina* funkcji symetrycznych Jacka $\{J_\lambda^{(\alpha)}\}_\lambda$ *jest jedyną rodziną funkcji w* $\Lambda_\alpha := \mathbb{Q}(\alpha) \otimes \Lambda$*, która ma następujące własności:*

(O) Własność ortogonalności: $\langle J_\lambda^{(\alpha)}, J_\mu^{(\alpha)} \rangle_{(\alpha)} = 0$ *dla* $\lambda \neq \mu$,

(T) Własność górnotrójkątna: $J_\lambda^{(q,t)} = \sum_{\mu \leq \lambda} c_\mu(\alpha) m_\mu$ *dla pewnych* $c_\mu(\alpha) \in \mathbb{Q}(\alpha)$

(N) Własność normalizacji: $[m_\lambda] J_\lambda^{(q,t)} = \mathrm{hook}_{(\alpha)}(\lambda) := \prod_{\square \in \lambda} (\alpha \cdot a_\lambda(\square) + \ell_\lambda(\square) + 1)$,

gdzie $\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_{(\alpha)} = \delta_{\lambda,\mu} \alpha^{\ell(\lambda)} z_\lambda$.

Oryginalnie funkcje Jacka zostały wprowadzone niemal pół wieku temu [Jac71] w kontekście statystki. Później okazało się, że funkcje własne hamiltonianu tzw. *modelu Calogero-Sutherlanda* są w naturalny sposób wyrażone przy pomocy wielomianów Jacka [Sta89]. To odkrycie wywodzące się z fizyki kwantowej wielu ciał było silną motywacją do rozpoczęcia intensywnych badań nad wielomianami Jacka, co szybko przyniosło nowe zastosowania [OO97, Kad97]. Efektem tych badań były obserwacje wielu zjawisk tajemniczej dodatniości funkcji Macdonalda i Jacka, co sugerowało istnienie nieznanej jeszcze kombinatorycznej struktury opisującej te zjawiska. W wielu przypadkach znalezienie tej struktury prowadziło do odkrycia niespodziewanych związków między tymi funkcjami, a innymi działami matematyki i fizyki.

Jednym z najbardziej spektakularnych wyników w tym kierunku jest ex-hipoteza Macdonalda o Schur dodatniości [Mac88], której dowód został znaleziony przez Haimana [Hai01]. Jego słynne twierdzenie wskazuje związek między funkcjami Macdonalda a geometrią schematów Hilberta punktów na zespolonej płaszczyźnie oraz teorią reprezentacji. Pierwsze ślady tych związków znaleźć można we wcześniejszych pracach Garsii i Procesiego, [GP92, GH93] którzy udowodnili Schur dodatniość funkcji symetrycznych Halla–Littlewooda interpretując je jako charakterystyki Frobeniusa pewnych $\mathfrak{S}_n$-modułów z gradacją, wywodzących się z geometrii. Nieco później Garsia i Haiman [GH93] zasugerowali podobną interpretację funkcji symetrycznych Macdonalda wprowadzając ich *wersję transformowaną* $\tilde{H}_\lambda^{(q,t)}$. Ta subtelna zmiana optyki ujawniła wiele kombinatorycznych cech funkcji Macdonalda, które w oryginalnej wersji Macdonalda $J_\lambda^{(q,t)}$ (zwanej wersją całkowitą) były niejako ukryte. Wersja transformowana $\tilde{H}_\lambda^{(q,t)}$ otrzymana jest z $J_\lambda^{(q,t)}$ poprzez zastosowanie pletystycznego podstawienia:

$$\tilde{H}_\lambda^{(q,t)}(\boldsymbol{x}) = t^{-n(\lambda)} J_\lambda^{(q,t^{-1})}[X(1-t)^{-1}], \tag{1}$$

gdzie $n(\lambda) := \sum_i (i-1)\lambda_i$ a ten konkretny przypadek podstawienia pletystycznego należy rozumieć jako zastosowanie następującego podstawienia funkcji potęgowych $p_i(\boldsymbol{x}) \to p_i(\boldsymbol{x})(1-t^i)^{-1}$, a następnie rozszerzenie na całą algebrę funkcji symetrycznych poprzez liniowość.

Przypomnijmy, że przekształcenie charakterystyczne $\mathrm{ch} : Z(\mathfrak{S}_\infty) \to \Lambda$ posyła nieprzywiedlne charaktery χ_λ grupy permutacji $\mathfrak{S}_n$ w funkcje Schura s_λ. Używając nieco innego języka możemy zinterpretować przekształcenie charakterystyczne jako przekształcenie $\mathfrak{S}_n$-modułów w funkcje symetryczne. Przedłużmy przekształcenie charakterystyczne do kategorii $\mathfrak{S}_n$-modułów z podwójną gradacją, tzn. dla $\mathfrak{S}_n$-modułu z podwójną gradacją $V = \bigoplus_{i,j} V^{i,j}$ zdefiniujmy przekształcenie charakterystyczne jako

$$\mathrm{ch}(V) := \sum_{i,j} q^i t^j \,\mathrm{ch}(V^{i,j}) \in \Lambda_{(q,t)}.$$

Garsia i Haiman [GH93] wzmocnili hipotezę Macdonalda poprzez jawną konstrukcję $\mathfrak{S}_n$-modułu V_λ z podwójna gradacją i postawienie hipotezy, że jej przekształcenie charakterystyczne zadane jest przez funkcję symetryczną Macdonalda. Ta hipoteza została udowodniona przez Haimana niemal pełną dekadę później:

Twierdzenie 1.6 ([Hai01])**.** *Niech* $\lambda \vdash n$ *będzie partycją liczby* n*. Wówczas*

$$\tilde{H}_\lambda^{(q,t)} = \mathrm{ch}(V_\lambda).$$

Jak już wspomnieliśmy wcześniej, dowód Twierdzenia 1.6 jest oparty na serii związków między różnymi obiektami matematycznymi, przede wszystkim schematami Hilberta punktów na płaszczyźnie zespolonej. W szczególności, poza nielicznymi szczególnymi przypadkami, znalezienie kombinatorycznej interpretacji Schur dodatniości wielomianów Macdonalda jest jednym z największych wyzwań współczesnej kombinatoryki algebraicznej. Niemniej jednak, istnieje słynna kombinatoryczna interpretacja funkcji symetrycznych Macdonalda znaleziona przez Haglunda, Haimana i Loehra [HHL05], która jawnie wyraża dodatniość funkcji Macdonalda w bazie jednomianów symetrycznych.

1.3. **Interpretacja kombinatoryczna funkcji symetrycznych Jacka i Macdonalda.** Macdonald i Stanley postawili hipotezę [Sta89, Mac95][1] że znormalizowany współczynnik $\frac{[m_\mu]J_\lambda^{(\alpha)}}{\prod_i m_i(\mu)!}$ jest wielomianem w α o nieujemnych całkowitych współczynnikach. Zauważmy, że a priori $[m_\mu]J_\lambda^{(\alpha)}$ jest zaledwie funkcją wymierną α o wymiernych współczynnikach, zatem zarówno wielomianowość jak i dodatniość sugerują iż wielomiany Jacka mają bogatą strukturę, być może opisaną przez interesujące kombinatoryczne obiekty czekające na ich odkrycie. Wielomianowość tych współczynników została udowodniona przez Lapointe'a i Vineta w 1995 roku.

Twierdzenie 1.7 ([LV95])**.** *Dla każdej nieujemnej liczby całkowitej n oraz partycji $\lambda, \mu \vdash n$, współczynnik $[m_\mu]J_\lambda^{(\alpha)}$ jest wielomianem w α o całkowitych współczynnikach.*

Lapointe i Vinet, bazując na ważnym związku wielomianów Jacka z modelem Calogero-Sutherlanda [Sta89, Mac95], skonstruowali przy pomocy operatorów Dunkla pewne operatory "kreacji" B_i^+ i pokazali, że wielomiany Jacka można otrzymać działaniem operatorów kreacji na jedynce w następujący sposób:

$$J_\lambda^{(\alpha)} = (B_n^+)^{\lambda_n}(B_{n-1}^+)^{\lambda_{n-1}-\lambda_n}\cdots(B_1^+)^{\lambda_1-\lambda_2}(1).$$

Rozwinięcie operatorów kreacji w bazie jednomianów symetrycznych pozwoliło im wywnioskować Twierdzenie 1.7. Hipoteza Macdonalda i Stanleya została wkrótce udowodniona w pełnej ogólności przez Knopa i Sahiego [KS97] którzy znaleźli jawny kombinatoryczny wzór na funkcje symetryczne Jacka. Ich słynny wzór powstał dzięki dalszemu badaniu algebraicznej struktury wielomianów Jacka. Udowodnili oni, że funkcje symetryczne Jacka są funkcjami własnymi rodziny operatorów Cherednika. Skrupulatne badanie działania tych operatorów pozwoliły na znalezienie jawnego wzoru.

Twierdzenie 1.8 ([KS97])**.** *Niech λ będzie partycją. Wówczas*

$$J_\lambda^{(\alpha)} = \sum_T \prod_{\substack{(i,j)\in\lambda:\\ T(i,j)=T(i,j-1)}} \alpha(a_{\lambda^t}((i,j))+1) + (\ell_{\lambda^t}((i,j))+1)\boldsymbol{x}^T,$$

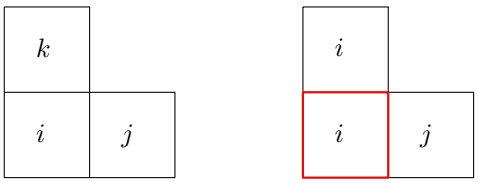
gdzie suma przebiega po wszystkich dopuszczalnych tableaux kształtu λ^t, a $\boldsymbol{x}^T := \prod_{\square\in\lambda} x_{T(\square)}$.

Zanim wyjaśnimy czym jest dopuszczalne tableaux, musimy wprowadzić pewną notację. Niech $T : \lambda \to \mathbb{N}$ będzie wypełnieniem diagramu λ. *Porządek czytania* jest liniowym porządkiem określonym na komórkach λ i zadanym przez czytanie komórek od lewej do prawej, wiersz po wierszu, startując od najniższego wiersza i idąc w górę. Para komórek $(\square, \square')$ z λ jest *parą atakującą* w λ jeśli

[1] ta hipoteza została przedstawiona w pracy Stanleya jako Hipoteza 8.1, lecz Stanley przypisał jej autorstwo Macdonaldowi

- obie komórki są w tym samym wierszu $\square = (i, j), \square' = (k, j)$ i $i < k$ lub
- komórki leżą w dwóch sąsiadujących wierszach tak, że komórka w wyższym wierszu leży ściśle na prawo od komórki w niższym: $\square = (i, j+1), \square' = (k, j)$, gdzie $i > k$.

Tableau T jest *dopuszczalne* jeśli $T(\square) \neq T(\square')$ dla wszystkich par atakujących $(\square, \square')$ w λ.



Rysunek 2. Dopuszczalne tableau o kształcie $(2, 1)$, gdzie $i \neq j \neq k \neq i$.

Przykład 1. Niech $\lambda = (2, 1)$. Dla takiego kształtu mamy "zasadniczo" dwa różne dopuszczalne tableaux przedstawione na Rys. 2. Zatem $J^{(\alpha)}_{(2,1)} = \sum_{i \neq j \neq k \neq i} x_i x_j x_k + 2(\alpha + 1) \sum_{i \neq j} x_i^2 x_j = 6m_{(1^3)} + 2(\alpha + 1)m_{(2,1)}$

Te wyniki miały ogromny wpływ na rozwój kombinatorycznych badań nad strukturą wielomianów Macdonalda. Wielomianowość w ich przypadku, analogiczna do Twierdzenia 1.7, została udowodniona niezależnie i niemalże w tym samym czasie (przy użyciu różnych technik) w pięciu różnych pracach [Sah96, GT96, LV97, Kno97, KN98].

Twierdzenie 1.9. *Dla każdej nieujemnej liczby całkowitej n oraz partycji $\lambda, \mu \vdash n$, współczynnik $[s_\mu]\tilde{H}^{(q,t)}_\lambda$ jest wielomianem w q, t o całkowitych współczynnikach.*

Jednakowoż na interpretacje kombinatoryczną manifestującą dodatniość musieliśmy czekać niemalże dekadę. Haglund [Hag04] w 2004 skonstruował dwie statystyki na zbiorze tableaux Younga i postawił hipotezę, że funkcje Macdonalda można zinterpretować jako funkcję tworzącą tableaux Younga względem tych statystyk. Rok później wspólnie z Haimanem i Loehrem udowodnili ten słynny wzór [HHL05]. Ten wynik, obok wspomnianego wcześniej twierdzenia Haimana o Schur dodatniości [Hai01] były ogromnym przełomem i punktem zwrotnym prowadzącym do niezwykle szybkiego rozwoju dziedziny. Zanim przedstawimy słynny wzór HHL musimy wprowadzić niezbędne statystyki na wypełnieniach diagramów Younga znalezione przez Haglunda.

Niech $T : \lambda \to \mathbb{N}_+$ będzie wypełnieniem diagramu Younga λ. *Inwersja* w T to para atakująca $(\square, \square')$ taka, że $T(\square) > T(\square')$. Mówimy, że uporządkowana trójka komórek $\square_1, \square_2, \square_3$ jest *przeciwzegarowo rosnąca*, jeśli któryś z warunków jest spełniony

- $T(\square_1) \leq T(\square_3) < T(\square_2)$,
- $T(\square_3) < T(\square_2) < T(\square_1)$,
- $T(\square_2) < T(\square_1) \leq T(\square_3)$.

Definiujemy *trójkę inwersji*[2] jako parę atakującą $(\square_1, \square_2)$ leżącą w tym samym wierszu tak, że trójka $\square_1, \square_2, \square_3$ jest przeciwzegarowo rosnąca, gdzie $\square_3$ jest klatką leżącą bezpośrednio pod klatką $\square_1$. Gdy $\square_1, \square_2$ leżą w pierwszym rzędzie to przyjmujemy konwencję, że $T(\square_3) < \min_{\square \in \lambda} T(\square)$. Zbiór trójek inwersji T oznaczamy jako $\mathrm{InvT}(T)$.

[2]słowo "trójka" może być zastanawiające gdyż a priori definiujemy parę komórek. Z drugiej strony ta para jednoznacznie wyznacza pewną trójkę i zdecydowaliśmy się użyć słowa *trójka*, które było oryginalnym nazewnictwem w pracy [HHL05], aby uniknąć pomyłek z inwersją $T(\square) > T(\square')$, która również jest parą.

Jesteśmy gotowi aby zdefiniować statystyki na T:

$$\mathrm{inv}(T) := |\,\mathrm{InvT}(T)|, \tag{2}$$

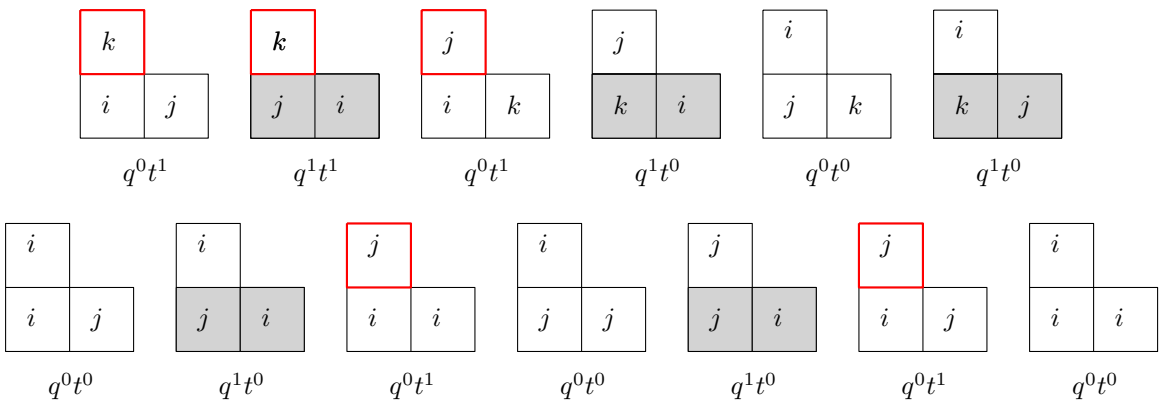
$$\mathrm{maj}(T) := \sum_{\square \in \mathrm{Des}(T)} (\ell_\lambda(\square) + 1), \tag{3}$$

gdzie $\mathrm{Des}(T) := \{(i, j+1) \in \lambda : T(i, j+1) > T(i, j)\}$ jest zbiorem *spadków* w T.

Słynny wzór HHL wyraża się następująco:

Twierdzenie 1.10. [HHL05] *Dla dowolnego diagramu Younga λ zachodzi następujący wzór:*

$$\tilde{H}_\lambda(\boldsymbol{x}; q, t) = \sum_{T:\lambda \to \mathbb{N}_+} q^{\mathrm{inv}(T)}\, t^{\mathrm{maj}(T)}\, \boldsymbol{x}^T. \tag{4}$$



Rysunek 3. Wszystkie wypełnienia mające wkład we wzorze HHL na $\tilde{H}^{(q,t)}_{(2,1)}$ wraz z odpowiadającymi wagami, gdzie przyjmujemy konwencję $i < j < k$. Trójki inwersji są zaznaczone na szaro, zaś komórki o czerwonych obrzeżach oznaczają spadki.

Przykład 2. Niech $\lambda = (2, 1)$. Wówczas wszystkie wypełnienia, wraz z odpowiadającymi wagami zostały przedstawione na Rys. 3. Zatem

$$\begin{aligned}\tilde{H}^{(q,t)}_{(2,1)} &= \sum_{i<j<k} (1 + 2t + 2q + qt) x_i x_j x_k + \sum_{i<j} (1 + q + t)(x_i^2 x_j + x_i x_j^2) + \sum_i x_i^3 \\ &= (1 + 2t + 2q + qt) m_{(1^3)} + (1 + q + t) m_{(2,1)} + m_{(3)}.\end{aligned}$$

1.4. **Hipoteza-*b*.** Stanley w swojej słynnej pracy [Sta89] rozpoczął badania kombinatorycznych aspektów wielomianów Jacka uogólniając pewne klasyczne kombinatoryczne własności wielomianów Schura. Między innymi, znalazł on wzór Cauchy'ego dla wielomianów Jacka [Sta89]:

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; t, \alpha) := \sum_{n \geq 1} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{J_\lambda(\boldsymbol{x}; \alpha) J_\lambda(\boldsymbol{y}; \alpha)}{\langle J_\lambda^{(\alpha)}, J_\lambda^{(\alpha)} \rangle_\alpha} t^n = \prod_{i,j} (1 - t x_i y_j)^{-1/\alpha}.$$

Goulden i Jackson badali analogon wzoru Cauchy'ego dla trzech niezależnych rodzin zmiennych [GJ96a]. Zdefiniowali oni funkcję

$$\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \mathbf{z}; t, \alpha) := \sum_{n \geq 1} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{J_\lambda(\boldsymbol{x}; \alpha) J_\lambda(\boldsymbol{y}; \alpha) J_\lambda(\mathbf{z}; \alpha)}{\langle J_\lambda^{(\alpha)}, J_\lambda^{(\alpha)} \rangle_\alpha} t^n, \tag{5}$$

która w oczywisty sposób przedłuża $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; t, \alpha)$. Rozważali oni ϕ jako element pierścienia szeregów formalnych w t nad pierścieniem wielomianów $\mathbb{Q}(\alpha)[\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}]$ o nieskończenie wielu zmiennych $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots), \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots), \mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots)$, które są symetrycznymi funkcjami potęgowymi oryginalnych zmiennych $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \mathbf{z}$:

$$p_n = \sum_i x_i^n, \qquad q_n = \sum_i y_i^n, \qquad r_n = \sum_i z_i^n.$$

Zauważmy że ten punkt widzenia jest możliwy poprzez rozwinięcie funkcji Jacka w bazie potęgowych funkcji symetrycznych, gdyż algebra funkcji symetrycznych $\Lambda_{(\alpha)}$ jest izomorficzna z algebrą wielomianową $\mathbb{Q}(\alpha)[\mathbf{p}]$. Okazuje się, że ściśle związana funkcja

$$\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}; t, \alpha) := \alpha t \frac{\partial}{\partial t} \log\big(1 + \phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}; t, \alpha)\big) \in \mathbb{Q}(\alpha)[\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}][[t]] \tag{6}$$

zdaje się mieć fascynujące własności: jej współczynniki są wielomianami w α o całkowitych współczynnikach (również ujemnych). Na przykład

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}; t, \alpha) = 1 + t \cdot p_1 q_1 r_1 + t^2 \cdot \Big(&(p_2 q_{1^2} r_2 + p_{1^2} q_2 r_2 + p_2 q_2 r_{1^2}) + (\alpha - 1) p_2 q_2 r_2 \Big) \\ + t^3 \Big(&(p_{1^3} q_3 r_3 + p_3 q_{1^3} r_3 + p_3 q_3 r_{1^3}) + 3(p_3 q_{2,1} r_{2,1} + p_{2,1} q_3 r_{2,1} + p_{2,1} q_{2,1} r_3) \\ &+ 3(\alpha - 1) \cdot (p_3 q_3 r_{2,1} + p_{2,1} q_3 r_3 + p_3 q_{2,1} r_3) + (2\alpha^2 - 3\alpha + 2) \cdot p_3 q_3 r_3 \Big) + \cdots\end{aligned}$$

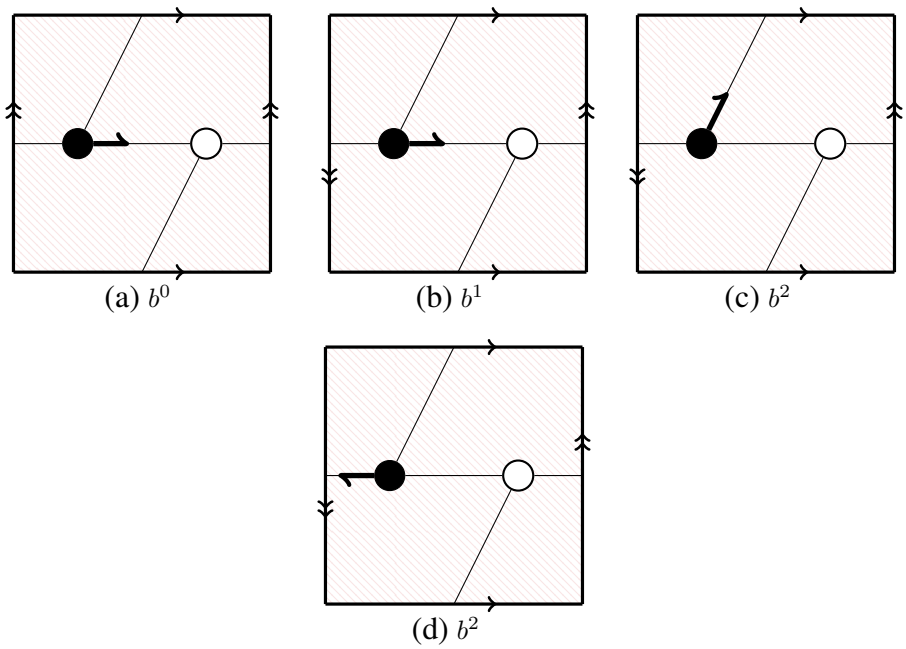
Jeszcze bardziej zaskakujące jest to, że po przesunięciu parametru deformacyjnego α o jeden, czyli używając nowego parametru $b := \alpha - 1$, **wielomiany te zdają się mieć tylko nieujemne współczynniki**:

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}; t, \alpha) = 1 + t \cdot p_1 q_1 r_1 + t^2 \cdot \Big(&(p_2 q_{1^2} r_2 + p_{1^2} q_2 r_2 + p_2 q_2 r_{1^2}) + b \cdot p_2 q_2 r_2 \Big) \\ + t^3 \Big(&(p_{1^3} q_3 r_3 + p_3 q_{1^3} r_3 + p_3 q_3 r_{1^3}) + 3(p_3 q_{2,1} r_{2,1} + p_{2,1} q_3 r_{2,1} + p_{2,1} q_{2,1} r_3) \\ &+ 3b \cdot (p_3 q_3 r_{2,1} + p_{2,1} q_3 r_3 + p_3 q_{2,1} r_3) + (2b^2 + b + 1) \cdot p_3 q_3 r_3 \Big) + \cdots\end{aligned}$$

Kombinatoryczna struktura ukryta za tym fascynującym zjawiskiem to hipotetycznie pewne grafy z dodatkową strukturą geometryczną, tzw. *ukorzenione mapy dwudzielne*. Ukorzeniona mapa (dwudzielna) to (dwudzielny) graf wraz z wyróżnioną krawędzią i zorientowaną stroną tej krawędzi, zanurzony w powierzchnię tak, że rozcina ją na ściągalne obszary (zwane *ścianami*). Powierzchnia to spójna, zwarta, dwuwymiarowa rozmaitość rzeczywista – może być więc orientowalna, lub nie. Załóżmy, że η jest pewną tajemniczą statystyką która "mierzy nieorientowalność map" w następującym sensie: $\eta(M) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy mapa M jest orientowalna. Wówczas funkcja $\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}; t, 1 + b)$ jest hipotetycznie *ważoną funkcją tworzącą ukorzenionych map dwudzielnych, gdzie wykładnik b jest wspomnianą miarą nieorientowalności*:

Hipoteza 1.11 (Hipoteza–b [GJ96a]). *Istnieje pewien niezmiennik $\eta : \mathcal{M}^{\rho}_{\mu,\nu} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ taki, że $\eta(M) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy M jest orientowalna i*

$$[t^n p_\lambda q_\mu r_\nu] \psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}; t, 1 + b) = h^{\rho}_{\mu,\nu}(b) := \sum_{M \in \mathcal{M}^{\rho}_{\mu,\nu}} b^{\eta(M)}, \tag{7}$$



Rysunek 4. Wszystkie ukorzenione mapy dwudzielne o dwóch wierzchołkach stopnia 3 i jednej ścianie stopnia 6.

gdzie $\mathcal{M}^{\rho}_{\mu,\nu}$ oznacza zbiór ukorzenionych map dwudzielnych o stopniach czarnych i białych wierzchołków oraz ścian, odpowiednio, zadanych przez partycje μ, ν oraz 2ρ (takie mapy nazywamy mapami typu $(\mu, \nu; \rho)$). W szczególności dla wszystkich liczb całkowitych n oraz partycji $\lambda, \mu, \nu \vdash n$ współczynnik $[t^n p_\lambda q_\mu r_\nu]\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}; t, 1+b)$ jest wielomianem w b o nieujemnych całkowitych współczynnikach.

Dla przykładu, Rys. 4 przedstawia wszystkie ukorzenione, dwudzielne mapy odpowiadające partycjom $\mu = \nu = \rho = \{3\}$. Powierzchnie na Rys. 4 są przedstawione jako czworoboki, których punkty na brzegu są sklejone tak jak zaznaczają strzałki. Zatem pierwsza mapa przedstawiona jest na torusie (więc jest orientowalna), zaś pozostałe trzy mapy zanurzone są w butelkę Kleina (a zatem są nieorientowalne) i ich hipotetyczna miara nieorientowalności przedstawiona jest na Rys. 4, co daje kombinatoryczną interpretację tożsamości $[t^3 p_3 q_3 r_3]\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}; t, 1+b) = 2b^2+b+1$. Ta niezwykła hipoteza postawiona przez Gouldena i Jacksona znana jest jako ***Hipoteza–***b i po upływie przeszło dwóch dziesięcioleci jest wciąż problemem otwartym.

Różnorakie kombinatoryczne struktury opisujące funkcje symetryczne zazwyczaj związane są z kombinatoryką diagramów Younga i ich wypełnień, co mogliśmy zauważyć w poprzednich rozdziałach. Wydaje się zatem że hipotetyczne struktury pojawiające się w Hipotezie–b są mocno zaskakujące. Okazuje się, że ich źródło ukryte jest w teorii reprezentacji i jej związkach z geometrią rozgałęzionych nakryć sfery. W istocie, Goulden i Jackson sformułowali swoja hipotezę w oparciu o fakt że rozwinięcie funkcji $\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \mathbf{z}; t, 1)$ oraz $\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \mathbf{z}; t, 2)$ w bazie potęgowych funkcji symetrycznych można otrzymać poprzez zastosowanie wzoru Frobeniusa dla charakterów grup permutacji w pierwszym przypadku, oraz jej analogonu dla funkcji sferycznych algebry warstw podwójnych grupy permutacji $\mathfrak{S}_{2n}$ względem grupy hiperoktahedralnej B_n w przypadku drugim. Stosując teorię charakterów, można

otrzymać piękne wzory wyrażające te funkcje jako funkcje tworzące orientowalnych, oraz dowolnych (czyli orientowalnych lub nie) ukorzenionych map dwudzielnych [JV90, GJ96b]. Niestety, poza tymi dwoma specjalnymi przypadkami $\alpha = 1, 2$, wielomiany Jacka nie mają teorio-reprezentacyjnej interpretacji, która choćby w małym stopniu wyjaśniała hipotetyczne występowanie map w ich strukturze. To czyni Hipotezę–b jednym z największych wyzwań w teorii wielomianów symetrycznych.

1.5. **Liczenie map.** Problem liczenia map pojawił się znacznie wcześniej niż wspomniana Hipoteza–b i posiada dość długą historię. Został on zapoczątkowany przez Tutte'a w latach sześćdziesiątych. Tutte był zainteresowany problem liczenia map planarnych, czyli zanurzonych na sferze [Tut62, Tut63]. Udowodnił on pewne własności strukturalne funkcji tworzących map planarnych liczonych względem liczby krawędzi poprzez konstrukcję równań funkcyjnych, znanych obecnie jako *równania Tutte'a*. Funkcje tworzące map są rozwiązaniami tych równań. Pierwsze uogólnienie tej metody do przypadku powierzchni dowolnego genusu zostało znalezione przez Lehmana i Walsha [WL72], którzy wykorzystali je do znalezienia rekurencji na liczbę map orientowalnych genusu g o n krawędziach i dokładnie jednej ścianie. Ta rekurencja została później na nowo odkryta przez Harera i Zagiera w kontekście przestrzeni moduli krzywych [HZ86] i często w literaturze przypisywana jest właśnie im. W przypadku planarnym, Tutte potrafił zgadnąć rozwiązanie równania które skonstruował, jednak w późniejszej pracy z Brownem [BT64] rozwinęli oni bardziej systematyczny sposób na rozwiązywanie podobnych równań zawierających tzw. jedną *zmienną katalityczną*, które okazały się najbardziej klasyczną sytuacją w przypadku wielu problemów kombinatoryki enumeratywnej. Liczba map planarnych o n krawędziach zadana jest pięknym i zwartym wzorem znalezionym przez Tutte'a [Tut63], który aż prosi się o znalezione bezpośredniej kombinatorycznej interpretacji: $m(n) = \frac{2\cdot 3^n (2n)!}{(n+2)!n!}$. Podobnie zwarty wzór niestety nie istnieje w przypadku powierzchni wyższego genusu i na znalezienie wzoru asymptotycznego trzeba było czekać ponad dwie dekady [BC86]. Bender i Canfield, używając technik analitycznych do badania równań Tutte'a otrzymali wzór asymptotyczny na liczbę map o n krawędziach na dowolnej powierzchni, który okazał się być niezwykle podobny w przypadku map orientowalnych jak i nieorientowalnych:

Twierdzenie 1.12 ([BC86])**.** *Dla dowolnej powierzchni $\mathcal{S}$ istnieje stała $t(\mathcal{S})$ taka, że liczba $\vec{q}_{\mathcal{S}}(n)$ ukorzenionych map o n krawędziach na powierzchni $\mathcal{S}$ jest asymptotycznie równa:*

$$\vec{q}_{\mathcal{S}}(n) \sim t(\mathcal{S}) n^{\frac{-5\chi(\mathcal{S})}{4}} 12^n.$$

Pierwsi, którym udało się znaleźć bezpośrednie kombinatoryczne wyjaśnienie wzoru Tutte'a byli Cori i Vauquelin [CV81], którzy skonstruowali jawną bijekcję między mapami, a prostymi obiektami kombinatorycznymi, których liczenie jest bezpośrednie (szczegóły można znaleźć w Rozdziale 2.3). Ich konstrukcja została później znacząco rozwinięta przez Schaeffera [Sch99], który uogólnił przypadek planarny do dowolnej, *orientowalnej* powierzchni (jego konstrukcja w sposób znaczący opierała się na orientowalności). Konstrukcja ta została później użyta w pracy [CMS09] aby dać czysto kombinatoryczne wyjaśnienie asymptotyki opisanej w Twierdzeniu 1.12, jak również w pracy [CS04] w której po raz pierwszy opisano pewne metryczne zachowanie losowych powierzchni orientowalnych. Bijekcja Schaeffer'a okazała się być punktem zwrotnym w rozwoju nowej dziedziny powierzchni losowych, której punktem kulminacyjnym był dowód Le Galla [Le 13] i Miermonta [Mie13] tego, że losowe kwadrangulacje sfery, odpowiednio unormowane, zbiegają według prawdopodobieństwa do

tak zwanej mapy Browna, co można zinterpretować jak dwuwymiarowy analogon twierdzenia Wienera.

Mapy, jako obiekty uniwersalnie występujące w matematyce i fizyce, zyskały duże zainteresowanie z wielu różnych punktów widzenia (patrz [LZ04] oraz odnośniki). Ich niezwykłe własności enumeratywne są odzwierciedlone przez mnogość narzędzi rozwiniętych do ich badań jak choćby funkcje tworzące, techniki całek macierzowych, funkcje symetryczne, topologiczna rekursja czy metody bijektywne i z czasem zliczanie map urosło do samodzielnej, szybko rozwijającej się dziedziny kombinatoryki o silnych zastosowaniach w fizyce [Eyn16].

2. Osiągnięcie habilitacyjne

W niniejszym rozdziale skupię się na opisie mojego osiągnięcia habilitacyjnego na które składają się prace [Hab1-Hab5]. Główne wyniki przedstawione w tych pracach motywowane są Hipotezą–b (Hipoteza 1.11). W pracy [Hab1] dowodzimy algebraicznej części Hipotezy–b dotyczącej wielomianowości, co pozostawało otwartym problemem przez dwie dekady. Praca [Hab2] koncentruje się na części kombinatorycznej Hipotezy–b oraz na dodatniości. Badam w niej strukturę kombinatoryczną map nieorientowalnych i opisuję pewną jej podklasę tzw. map "bez rączek" (ang. "unhandled" maps). Dowodzę, że współczynnik $[p]\psi(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r},t,0)|_{\mathbf{p}=(p,p,\dots)}$ jest ważoną funkcją tworzącą map bez rączek z jedną ścianą. Używając naszego wcześniejszego wyniku z pracy [Hab1] dowodzę Hipotezę–b w przypadku map jednościennych niskiego genusu. W pracy [Hab3] badamy szczegółowo strukturę map na dowolnych powierzchniach (orientowalnych lub nie) i konstruujemy bijekcję między nimi a mapami jednościennymi z dodatkowo poetykietowanymi wierzchołkami. Nasza konstrukcja rozszerza wcześniejszą konstrukcję Schaeffera [Sch99] z powierzchni orientowalnych do dowolnych powierzchni i w konsekwencji daje pierwszy kombinatoryczny dowód Twierdzenia 1.12 w pełnej ogólności. Jako zastosowanie naszej konstrukcji przedstawiamy wyniki opisujące typowe zachowania metryczne dowolnych losowych powierzchni, co wcześniej było znane jedynie w przypadku powierzchni orientowalnych. Nasza praca [Hab4] jest naturalną kontynuacja rozważań rozpoczętych w pracy [Hab1]. Kluczowym wynikiem w pracy [Hab1] pozwalającym dowieść algebraiczną część Hipotezy–b było pokazanie tzw. "własności małych kumulant", patrz Rozdział 2.1. Bazując na eksperymentach komputerowych postawiliśmy hipotezę że własność małych kumulant zachodzi również w bardziej ogólnym kontekście wielomianów Macdonalda. Dowód tej hipotezy, w jeszcze bardziej ogólnym przypadku interpolacyjnych wielomianów Macdonalda jest głównym wynikiem mojej pracy [Hab4]. Dalsze badania pozwoliły mi odkryć nowe hipotezy uogólniające słynny wynik dotyczący Schur dodatniości wielomianów Macdonalda i sugerujące głębokie związki struktury kumulant Macdonalda z nieznaną dotąd kombinatoryką. Badanie tych struktur jest główną tematyką mojej pracy [Hab5], gdzie przedstawiam i dowodzę kombinatoryczny wzór na kumulanty Macdonalda w terminach funkcji G-parkujących, które z kolei są związane z pewnym modelem fizyki statystycznej tzw. "abelowym modelem przepływu piasku". Znaleziony przeze mnie wzór uogólnia Twierdzenie 1.10, które odpowiada przypadkowi trywialnej kumulanty. W szczególności jawnie wyraża on następującą własność dodatniości — współczynniki kumulanty Macdonalda, rozwiniętej w bazie jednomianów symetrycznych, są wielomianami w q,t o nieujemnych, całkowitych współczynnikach.

Przejdźmy teraz do szczegółowego omówienia każdej z prac wchodzącej w skład osiągnięcia habilitacyjnego.

2.1. **Wielomianowość w Hipotezie–b.** Od czasów pionierskiej pracy Gouldena i Jacksona [GJ96a] w której postawili oni Hipotezę–b powstało wiele prac dowodzących różnych szczególnych przypadków Hipotezy–b. Wszystkie z nich opierały się na podobnej filozofii – w pewnych szczególnych przypadkach struktura algebraiczna odpowiadającej funkcji tworzącej może być zrozumiana dzięki dotychczas poznanych związkach między wielomianami Jacka, a innymi dziedzinami matematyki.

Goulden, Harer i Jackson [GHJ01] badali następujące podstawienie

$$\Psi(\mathbf{p},\mathbf{q};t,1+b) := \psi(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r};t,1+b)\big|_{r_i=\delta_{2,i}},$$

które ma szczególne znaczenie jako że $\Psi(\mathbf{p},\mathbf{q};t,1)$ jest bi-wielozmienną funkcja tworzącą ukorzenionych map orientowalnych, a $\Psi(\mathbf{p},\mathbf{q};t,2)$ jest bi-wielozmienną funkcja tworzącą wszystkich ukorzenionych map. Gouldena, Harer i Jackson [GHJ01] znaleźli wzór wyrażający $\Psi(\mathbf{p},\mathbf{q};t,1+b)$ przy pomocy całki Selberga i zasugerowali oni, żeby użyć ich wzoru do znalezienia kombinatorycznej interpretacji następującego wyrażenia

$$\Psi(\mathbf{p},\mathbf{q};t,1+b)\big|_{\mathbf{p}=(p,p,\dots)}$$

jako funkcji tworzącej map, która kontroluje stopnie ścian oraz liczbę wierzchołków. Brown i Jackson [BJ07] uzyskali nieco słabszy wynik, znajdując pewną statystykę η, która opisuje następujące podstawienie:

$$\Psi(\mathbf{p},\mathbf{q};t,1+b)\big|_{\mathbf{p}=(1,1,\dots)}$$

Wreszcie La Croix [La 09] znalazł nieco inny opis statystyki η i użył go, aby udowodnić kombinatoryczną interpretację funkcji $\Psi(\mathbf{p},\mathbf{q};t,1+b)\big|_{\mathbf{p}=(p,p,\dots)}$, co sugerowali Goulden, Harer i Jackson.

Niestety, żaden z powyższych rezultatów nie dawał dostępu do badania struktury algebraicznej funkcji $\psi(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r};t,1+b)$, co wynikało z ograniczonych możliwości zastosowania używanych metod. Nasza wspólna praca z Férayem [DF16] była przełomem w tej kwestii, gdyż udało się nam udowodnić następujący wynik wielomianowości dla funkcji $\phi(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r};t,\alpha)$ zdefiniowanej równanie (5) i ściśle związanej z funkcją ψ:

Twierdzenie 2.1. *Współczynniki szeregu potęgowego $\phi(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r};t,\alpha)$ są wielomianami w α, tzn.*

$$\phi(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r};t,\alpha) \in \mathbb{Q}[\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r},\alpha][[t]].$$

Używając związku między szeregami potęgowymi ϕ a ψ wyrażonego w równaniu (6), możemy wysnuć następujący wniosek:

Wniosek 2.2. *Współczynniki szeregu potęgowego $\psi(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r};t,\alpha)$ są funkcjami wymiernymi w α, o biegunach możliwych jedynie w $\alpha = 0$.*

Zatem chcąc udowodnić algebraiczną część Hipotezy–b postulującą wielomianowość wystarczy, że udowodnimy, że współczynniki szeregu potęgowego ψ nie mają biegunów w zerze. Mimo, iż ta redukcja problemu jest bardzo mocna, okazało się że dowód tego stwierdzenia wymaga innych pomysłów niż tych, które użyliśmy w pracy [DF16] i jest on głównym tematem pracy [Hab1]. Przejdziemy teraz do opisu naszych głównych idei, które zawierają szereg przekształceń oryginalnego problemu do wykazania tzw. *własności małych kumulant*.

2.1.1. *Kumulanty.* Pierwszym pomysłem było znalezienie związku między naszym problemem, a teorią kumulant wywodzącą się z rachunku prawdopodobieństwa i rozwiniętą w kontekście wolnej probabilistyki.

Definicja 2.3. *Niech $(u_I)_{I\subseteq J}$ będzie rodziną elementów z ciała, indeksowanych podzbiorami zbioru J. Ich* częściowa kumulanta *zdefiniowana jest w sposób następujący. Dla dowolnego niepustego podzbioru H zbioru J definiujemy*

$$\kappa_H(\boldsymbol{u}) = \sum_{\pi\in\mathcal{P}(H)} (-1)^{\#(\pi)-1}\,(\#(\pi)-1)! \prod_{B\in\pi} u_B. \tag{8}$$

We wzorze powyżej sumujemy po wszystkich *partycjach zbioru H*, czyli po wszystkich niepustych podzbiorach zbioru H, które sumują się do H i nie mają wspólnych elementów (tzn. H jest rozłączną sumą elementów z π); $\#\pi$ oznacza liczbę elementów zbioru π.

Wykazaliśmy, że szereg potęgowy ψ ma naturalne rozwinięcie wyrażone w terminach kumulant. W rzeczywistości takie rozwinięcie pojawia się w szerszym kontekście logarytmu dowolnej sumy statystycznej F. Niech F będzie sumą statystyczną, czyli w naszym kontekście funkcją zdefiniowaną na zbiorze partycji. Rozważmy rodzinę $(u_I)_{I\subseteq J}$ elementów skonstruowanych przy pomocy funkcji F w następujący sposób. Dla partycji $\mu = (\mu_1, \dots)$ i $\nu = (\nu_1, \dots)$, oznaczmy przez $\mu \oplus \nu$ partycję otrzymaną przez sumę po współrzędnych. Dla partycji $\lambda^1, \dots, \lambda^r$ i podzbioru I zbioru $[r] := \{1, \dots, r\}$ oznaczmy

$$\lambda^I := \bigoplus_{i\in I} \lambda^i$$

i zdefiniujmy

$$u_I = F\left(\bigoplus_{i\in I} \lambda^i\right) = F(\lambda^I). \tag{9}$$

Niech $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \dots)$ będzie nieskończonym alfabetem zmiennych formalnych i $\boldsymbol{t}^\lambda := t_{\lambda_1}\cdots t_{\lambda_r}$. Wówczas logarytm sumy statystycznej F wyraża się w następujący sposób.

Lemat 2.4. *Niech F będzie funkcją zdefiniowaną na zbiorze diagramów Younga. Oznaczmy poprzez $\kappa^F(\lambda^1, \dots, \lambda^r)$ kumulantę $\kappa_{[r]}(\boldsymbol{u})$, gdzie rodzina $\boldsymbol{u}$ zdefiniowana jest przez równanie 9. Wówczas zachodzi następująca równość pomiędzy formalnymi szeregami potęgowymi w $\boldsymbol{t}$:*

$$\log \sum_\lambda \frac{F(\lambda)}{\alpha^{\lambda_1}\prod_i m_i(\lambda^t)!}\boldsymbol{t}^{\lambda^t} = \sum_{r\geq 1}\frac{1}{r!\alpha^r}\sum_{(j_1,\dots,j_r)} \kappa^F(1^{j_1},\dots,1^{j_r})\, t_{j_1}\cdots t_{j_r}.$$

Wybierając $F(\lambda) = \frac{J_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{p})J_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{q})J_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{r})\alpha^{\lambda_1}\prod_i m_i(\lambda^t)!}{\langle J^{(\alpha)}, J^{(\alpha)}\rangle_{(\alpha)}}$ otrzymujemy

$$\psi(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r};t,\alpha) = \alpha\frac{t\partial}{\partial t}\log\sum_\lambda \frac{F(\lambda)}{\alpha^{\lambda_1}\prod_i m_i(\lambda^t)!}\boldsymbol{t}^{\lambda^t}\Big|_{t_i=t^i},$$

co odpowiada lewej stronie równania w Lemacie 2.4. W szczególności, zredukowaliśmy nasz problem do następującego:

Problem 2.5. *Czy prawdą jest że dla dowolnych liczb naturalnych $j_1, \dots, j_r$ zachodzi następująca równość*

$$\kappa^F(1^{j_1},\dots,1^{j_r}) = O(\alpha^{r-1})?$$

Znaczenie symbolu O w równości powyżej jest następujące: dla dowolnej funkcji wymiernej $f \in \mathbb{Q}(\alpha)$ i dla dowolnej liczby całkowitej n zapis $f = O(\alpha^n)$ oznacza, że funkcja wymierna $\alpha^{-n} \cdot f$ nie ma bieguna w $\alpha = 0$.

2.1.2. *Własności małych kumulant i silnej faktoryzacji.* Próbując zrozumieć znaczenie Problemu 2.5 wprowadziliśmy następujący koncept małych kumulant. Rozważmy rodzinę $\boldsymbol{u} = (u_I)_{I \subseteq [r]}$ elementów z ciała ułamków $R(\alpha)$ indeksowanych podzbiorami zbioru $[r]$, gdzie R jest pewnym pierścieniem. W tym podrozdziale zakładamy dodatkowo, że wszystkie te elementy są niezerowe i $u_\emptyset = 1$.

Definicja 2.6. *Rodzina $\boldsymbol{u}$ ma własność małych kumulant, jeśli dla dowolnego podzbioru $H \subseteq [r]$ zawierającego przynajmniej 2 elementy zachodzi następująca równość*

$$\kappa_H(\boldsymbol{u}) = \left(\prod_{h \in H} u_h \right) O\left(\alpha^{|H|-1}\right). \tag{10}$$

Okazuje się, że własność małych kumulant jest zachowana ze względu na operacje produktu i ilorazu. Wynika to z następującej charakteryzacji własności małych kumulant, która pochodzi z pracy Féraya [Fér13].

Łączny czynnik błędu faktoryzacji $T_H(\boldsymbol{u})$ dla rodziny $\boldsymbol{u}$ definiujemy w następujący sposób: dla dowolnego podzbioru H zbioru $[r]$ zawierającego przynajmniej dwa elementy kładziemy

$$T_H(\boldsymbol{u}) = \prod_{G \subseteq H} u_G^{(-1)^{|H|}} - 1. \tag{11}$$

Wówczas zachodzi następujący fakt:

Stwierdzenie 2.7. *Następujące stwierdzenia są równoważne*

I. Własność silnej faktoryzacji: *dla dowolnego podzbioru H zbioru $[r]$ zawierającego przynajmniej dwa elementy mamy*

$$T_H(\boldsymbol{u}) = O\left(\alpha^{|H|-1}\right). \tag{12}$$

II. Własność małych kumulant: *dla dowolnego podzbioru H zbioru $[r]$ zawierającego przynajmniej dwa elementy mamy*

$$\kappa_H(\boldsymbol{u}) = \left(\prod_{h \in H} u_h \right) O\left(\alpha^{|H|-1}\right). \tag{13}$$

Poniższa własność stabilizacji, o której wcześniej wspomnieliśmy, jest bezpośrednią konsekwencją Stwierdzenia 2.7.

Wniosek 2.8. *Rozważmy rodziny $(u_I)_{I \subseteq [r]}$ i $(v_I)_{I \subseteq [r]}$ obie z własnością małych kumulant. Wówczas ich produkt $(u_I v_I)_{I \subseteq [r]}$ oraz iloczyn $(u_I / v_I)_{I \subseteq [r]}$ również mają własność małych kumulant.*

Stosując ten wniosek do naszego problemu dostajemy kolejną redukcję.

Problem 2.9. *Czy dla dowolnych diagramów Younga $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$ rodzina $\boldsymbol{u}$ zadana przez równanie 9 ma własność małych kumulant w przypadku gdy*

- $F(\lambda) = \frac{\alpha^{\lambda_1} \prod_i m_i(\lambda^t)!}{\langle J^{(\alpha)}, J^{(\alpha)} \rangle_{(\alpha)}}$,
- $F(\lambda) = J_\lambda^{(\alpha)}$?

2.1.3. *Własność małych kumulant dla wielomianów Jacka.* Jak dotąd nasze rozważania były dość ogólne i nie wykorzystywały w żaden sposób bogatej struktury algebraicznej funkcji symetrycznych Jacka. Niemniej jednak, aby rozwiązać Problem 2.9 musimy zrozumieć w jaki sposób struktura wielomianów Jacka zapewnia własność małych kumulant. Pierwszy przypadek gdy $F(\lambda) = \frac{\alpha^{\lambda_1}\prod_i m_i(\lambda^t)!}{\langle J^{(\alpha)}, J^{(\alpha)}\rangle_{(\alpha)}}$ wynika z jawnego wzoru na funkcję F, który możemy otrzymać bazując na pracy Stanleya [Sta89]. Dowodzimy, że

$$F(\lambda) = \frac{1}{\mathrm{hook}_\alpha(\lambda)\cdot \mathrm{hook}''_\alpha(\lambda},$$

gdzie

$$\mathrm{hook}_\alpha(\lambda) := \prod_{\square\in\lambda} \left(\alpha a_\lambda(\square) + \ell_\lambda(\square) + 1\right),$$
$$\mathrm{hook}''_\alpha(\lambda) := \prod_{\substack{\square\in\lambda\\ \ell(\square)\neq 0}} \left(\alpha a_\lambda(\square) + \ell_\lambda(\square) + \alpha\right).$$

W szczególności, dzięki Wnioskowi 2.8, wystarczy pokazać że rodziny $\boldsymbol{u}$ związane z funkcjami $F = \mathrm{hook}_\alpha$ i $F = \mathrm{hook}''_\alpha$ mają własność małych kumulant. To zaś wynika z bezpośrednich kombinatorycznych manipulacji zastosowanych do funkcji F.

Kluczową i najtrudniejszą częścią pracy [Hab1] jest dowód drugiego przypadku Problem 2.9 odpowiadającego $F(\lambda) = J_\lambda^{(\alpha)}$. Nasz dowód jest dość zawiły pod względem technicznym, lecz główna idea dowodu opiera się na charakteryzacji funkcji symetrycznych Jacka jako funkcji własnych operatora Laplace'a–Beltramiego:

$$D_\alpha J_\lambda^{(\alpha)}(x_1,\dots,x_N) = \left(\alpha\sum_i \binom{\lambda_i}{2} - \sum_i \binom{\lambda_i^t}{2} + (N-1)|\lambda|\right) J_\lambda^{(\alpha)}(x_1,\dots,x_N),$$

gdzie

$$D_\alpha := \sum_{i\le N}\sum_{i\neq j} \frac{x_i^2}{x_i - x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\alpha}{2}\sum_{i\le N} x_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

W naszym dowodzie wykorzystaliśmy pewne własności działania operatora D_α na jednomianowych i elementarnych funkcjach symetrycznych jak również fakt, że wartości własne tego operatora są liniowe w α. To pozwoliło nam zbadać działanie tego operatora bezpośrednio na kumulancie $\kappa^F(\lambda^1,\dots,\lambda^r)$. W szczególności udowodniliśmy, że

$$D_\alpha \kappa^F(\lambda^1,\dots,\lambda^r) = f(\lambda^{[r]})\cdot\kappa^F(\lambda^1,\dots,\lambda^r) + \alpha(A_1(\lambda_1,\dots,\lambda_r) + A_2(\lambda_1,\dots,\lambda_r)),$$

gdzie

- $f(\lambda^{[r]})$ jest jawną funkcją, która nie zależy od α,
- $A_1(\lambda_1,\dots,\lambda_r)$ jest jawnie wyrażone w terminie kumulant niższego rzędu niż r,
- $A_2(\lambda_1,\dots,\lambda_r)$ jest jawnie wyrażone w terminie kumulant niższego rzędu niż r.

Używając tego rozkładu mogliśmy zastosować indukcję ze względu na r, aby udowodnić, że $\kappa^F(\lambda^1,\dots,\lambda^r) = O(\alpha^{r-1})$. To ostatecznie rozwiązuje Problem 2.9, a zatem dowodzi część algebraiczną Hipotezy–b postulującą wielomianowość.

Algebraiczne rozważania przedstawione w pracy [Hab1] stanowiły mocny impuls do rozpoczęcia badań nad częścią kombinatoryczną Hipotezy–b, co jest głównym tematem mojej kolejnej pracy [Hab2].

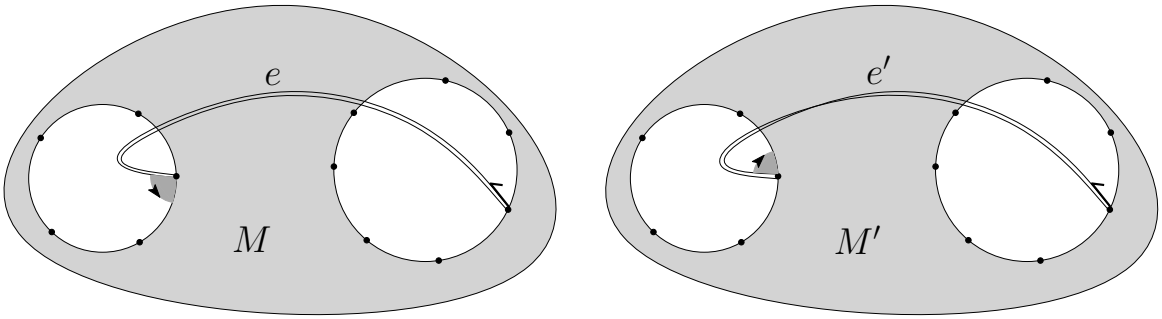
2.2. **Część najwyższego stopnia w Hipotezie–b dla map jednościennych.** Jak już poprzednio wspomniałem, pewne szczególne przypadki Hipotezy–b zostały udowodnione. Najbardziej ogólnym wynikiem otrzymanym do tej pory jest wynik La Croix [La 09], który znalazł statystykę η opisującą funkcję $\Psi(\mathbf{p},\mathbf{q};t,1+b)\big|_{\mathbf{p}=(p,p,\dots)}$ jako ważoną funkcję tworzącą map (niekoniecznie dwudzielnych) ze względu na liczbę wierzchołków oraz stopnie ścian. Zauważmy, że mapy można bijektywnie utożsamić z mapami dwudzielnymi, w których wszystkie białe wierzchołki są stopnia dwa — mapę dwudzielną otrzymujemy ze zwykłej mapy poprzez dodanie białego wierzchołka stopnia dwa na środku każdej krawędzi. Z drugiej strony mapy dwudzielne stanowią podzbiór wszystkich map, zatem badanie własności funkcji tworzącej map dwudzielonych ważonej statystyką η, zdefiniowana przez La Croix, ma sens. Analiza kombinatoryczna takiej funkcji jest przedmiotem moich badań przedstawionych w pracy [Hab2], gdzie wykazałem że pewne jej algebraiczne własności pokrywają się z algebraicznymi własnościami funkcji tworzącej ψ dla wielomianów Jacka. To pozwoliło mi udowodnić szereg nowych wyników na temat dodatniości funkcji ψ postulowanej w Hipotezie–b. Poniżej przedstawiam szkic moich głównych wyników i idei.

2.2.1. *Miara nieorientowalności η.* Goulden i Jackson [GJ97] znaleźli wzór który hipotetycznie wyraża funkcję $\Psi(\mathbf{p},\mathbf{q};t,1+b)\big|_{\mathbf{p}=(p,p,\dots)}$ jako pewną całkę związaną z modelem uogólnionych macierzy-β, lecz nie potrafili go udowodnić. Ich wzór został udowodniony przez Okounkova [Oko97] i La Croix wykorzystał ten wzór, używając podobnych technik jak [GHJ01], aby udowodnić że funkcja $\Psi(\mathbf{p},\mathbf{q};t,1+b)\big|_{\mathbf{p}=(p,p,\dots)}$ spełnia pewne równanie różniczkowe. Postać tego równania sugeruje w jaki sposób można zdefiniować statystykę η na zbiorze map, aby odpowiadająca funkcja tworząca spełniała to samo równanie różniczkowe co $\Psi(\mathbf{p},\mathbf{q};t,1+b)\big|_{\mathbf{p}=(p,p,\dots)}$. Te rozważania były kluczowym punktem w pracy La Croix do zaproponowania następującej definicji.

Definicja 2.10. [La 09, Definition 4.1] Miara nieorientowalności *to dowolny niezmiennik $\eta(M)$ zdefiniowanych dla wszystkich map ukorzenionych M w taki sposób, że dla każdej mapy M wartość $\eta(M)$ spełnia następujące własności:*

- *Jeżeli M nie ma krawędzi to $\eta(M)=0$;*
- *W przeciwnym wypadku, niech e będzie krawędzią korzenia mapy M. Wówczas zachodzą następujące możliwości:*
  - *$M\setminus\{e\}$ rozspaja M na dwie komponenty spójności. Wówczas $\eta(M)=\eta(M_1)+\eta(M_2)$, gdzie $M\setminus\{e\}=M_1\cup M_2$;*
  - *$M\setminus\{e\}$ jest spójna i liczba jej ścian jest mniejsza niż liczba ścian mapy M. Wówczas $\eta(M)=\eta(M\setminus\{e\})$;*
  - *$M\setminus\{e\}$ jest spójna i liczba jej ścian jest taka sama jak w M. Wówczas $\eta(M)=\eta(M\setminus\{e\})+1$;*
  - *$M\setminus\{e\}$ jest spójna i liczba jej ścian jest większa niż liczba ścian mapy M. Wówczas krawędź e nazywamy* rączką *i istnieje dokładnie jedna mapa M' powstała z M poprzez przekręcenie krawędzi e tak, że odpowiadająca jej krawędź e' w M' jest krawędzią korzenia, rączką i $M\setminus\{e\}=M'\setminus\{e'\}$. Patrz Rys. 5. W tym przypadku*

$$\{\eta(M),\eta(M')\}=\{\eta(M\setminus\{e\}),\eta(M\setminus\{e\})+1\}.$$



(a) (b)

Rysunek 5. (a) przedstawia mapę M, gdzie krawędź korzenia e jest rączką zaś (b) przedstawia mapę M' otrzymaną z M poprzez przekręcenie jej krawędzi korzenia e. Innymi słowy M' to jedyna mapa różna od M taka że $M \setminus \{e\} = M' \setminus \{e'\}$, gdzie e' jest krawędzią korzenia w M' i taka że rogi w $M \setminus \{e\}$ zawierające pół-krawędzi e i rogi w $M' \setminus \{e'\}$ zawierające pół-krawędzi e' pokrywają się ze sobą. Dwa białe obszary na (a) ((b), odpowiednio) przedstawiają dwie różne ściany $M \setminus \{e\} = M' \setminus \{e'\}$ złączone w jedną ścianę krawędzią korzenia e (e',odpowiednio). Aby pomóc czytelnikowi zauważyć różnicę między mapami M a M', w obu mapach został zacieniowany i zorientowany zgodnie z orientacją korzenia róg, odwiedzony tuż po rogu korzenia.

Ponadto, co najwyżej jedna z map M, M' jest orientowalna – w tym przypadku jej miara nieorientowalności wynosi 0, a miara nieorientowalności drugiej mapy (nieorientowalnej) wynosi 1.

Uwaga 1. Istnieje wiele różnych miar nieorientowalności η spełniających własności podane w Definicji 2.10. Zatem powyższa definicja zadaje całą klasę funkcji i każda taka funkcja zwana jest miarą nieorientowalności.

Powyższa definicja wymaga pewnego komentarza. Po pierwsze przypomnę, że mapa jest *ukorzeniona* jeśli ma wyróżnioną krawędź zwaną *krawędzią korzenia*, oraz wyróżnioną i zorientowaną stronę tej krawędzi. Równoważnie mapa jest ukorzeniona jeśli posiada wyróżniony zorientowany róg (obszar ograniczony przez dwie sąsiadujące ze sobą pół-krawędzie wokół wspólnego wierzchołka), zwany *rogiem korzenia*. Koncept mapy ukorzenionej sięga początków historii map, gdy Tutte zaczął je badać i odkrył że obiekty ukorzenione są znacznie wygodniejsze do opisania różnego rodzaju kombinatorycznych operacji, jak choćby rozkład map na mniejsze kawałki [Tut62, Tut63]. Druga kwestia wymagająca komentarza to fakt, że Definicja 2.10 ma sens tylko wtedy gdy mapa $M \setminus \{e\}$ (lub mapy, gdy e rozspaja M) jest ukorzeniona, zatem trzeba ustalić pewną konwencję jak zadeklarować korzeń w mapach otrzymanych przez usunięcie krawędzi korzenia z M. Zakładając, że taka konwencja jest ustalona, Definicja 2.10 jest kompletna.

Niech η będzie miarą nieorientowalności i niech μ, ν, ρ będą partycjami liczby n. Przypomnę, że Hipoteza–b (Hipoteza 1.11) opisuje związek pomiędzy wielomianem $h^{\rho}_{\mu,\nu}(b)$ zdefiniowanym przez prawą stronę równania (7), a szeregiem potęgowym $\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}; t, 1+b)$.

Mój pierwszy główny wynik dowodzi słabej wersji Hipotezy–b, która jest postulowaną równością (7) po zastosowaniu podstawienia $\mathbf{r} = (1, 1 \dots)$:

Twierdzenie 2.11. *Dla dowolnej miary nieorientowalności η zachodzi następująca równość:*

$$\psi(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r};t,1+b)\big|_{\mathbf{r}=(1,1,\dots)} = \sum_{n\geq 1} t^n \sum_{\mu,\nu,\rho\vdash n} h^{\rho}_{\mu,\nu}(b) p_\mu q_\nu r_\rho\big|_{\mathbf{r}=(1,1,\dots)}. \tag{14}$$

Główna idea dowodu Twierdzenia 2.11 jest następująca. Algebraiczne manipulacje wielomianami Jacka pozwalają mi znaleźć jawny wzór na lewą stronę równania (14). Następnie interpretuję ten wzór jako funkcja tworzącą pewnych map z pewnymi krotnościami. Wreszcie rozkładam te mapy na mniejsze kawałki, stosując analogiczne metody jak te opisane w Definicji 2.10, aby otrzymać prawą stronę równania (14). Mówiąc nieco bardziej precyzyjnie:

- jestem w stanie wyrazić lewą stronę równania w terminach pewnych orientowalnych map dwudzielnych liczonych z krotnościami ważonymi przez parametr b;
- konstruuję bijekcję (zachowującą wagę) pomiędzy orientowalnymi mapami dwudzielnymi liczonymi z tymi krotnościami ważonymi przez parametr b, a wszystkimi mapami dwudzielnymi liczonymi z wagą $b^{\eta(M)}$, co odpowiada prawej stronie równania (14).

W pracy [Hab2] stosuję również Twierdzenie 2.11 aby udowodnić więcej własności dodatniości, przewidzianych przez Hipotezę–b, w szczególnym przypadku *map jednościennych*, czyli map posiadających dokładnie jedną ścianę.

2.2.2. *Mapy jednościenny – najwyższy stopień i powierzchnie niskiego genusu.* Hipoteza–b była inspirowana dwoma szczególnymi przypadkami $b = 0, 1$, w których to wykazano, że funkcja $\psi(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r};t,1+b)$ jest funkcją tworzącą odpowiednich map [JV90, GJ96b]. Te wyniki opierają się na fakcie, że są to jedyne znane przypadki w których funkcja symetryczna Jacka $J^{(1+b)}_\lambda$ odpowiada jawnych funkcjom symetrycznym wywodzącym się z teorii reprezentacji[3] i wyznaczenie funkcji $\psi(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r};t,1+b)$ może być zrozumiane w terminach stałych strukturalnych pewnych algebra przemiennych. Istnieje jeszcze jeden przypadek graniczny $b = -1$ (i jego wersja dualna $b = \infty$) dla którego funkcja Jacka $J^{(1+b)}_\lambda$ staje się klasyczną funkcją symetryczną. Niestety, podejście zastosowane w pracach [JV90, GJ96b], które pozwoliło zrozumieć przypadki $b = 0, 1$, nie może być tutaj zastosowane, gdyż mianownik pojawiający się w funkcji tworzącej $\psi(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r};t,1+b)$, który jest równy iloczynowi skalarnemu $\langle J^{(1+b)}_\lambda, J^{(1+b)}_\lambda\rangle_{(1+b)}$, jest zdegenerowany w punkcie $b = -1$ i jest równy 0. W mojej pracy [Hab2] omijam tę trudność stosując nowe podejście do problemu, które polega na zbadaniu algebraicznych własności wielomianu $h^{\rho}_{\mu,\nu}(b)$ i pokazaniu, że są one ściśle związane z kombinatoryką map. To pozwala mi obliczyć $h^{\rho}_{\mu,\nu}(-1)$.

Dla ustalonej liczby naturalnej n i partycji $\mu,\nu,\rho\vdash n$, zbiór $\mathcal{M}^{\rho}_{\mu,\nu}$ map typu $(\mu,\nu;\rho)$ (patrz Hipoteza 1.11) rozkłada się w następujący sposób:

$$\mathcal{M}^{\rho}_{\mu,\nu} = \bigcup_{i\geq 0} \mathcal{M}^{\rho}_{\mu,\nu;i}, \tag{15}$$

gdzie $\mathcal{M}^{\rho}_{\mu,\nu;i}$ jest zbiorem map typu $(\mu,\nu;\rho)$ takich, że podczas procesu usuwania korzenia (opisanego w Definicji 2.10) usunięto dokładnie i rączek. Ten rozkład pociąga następujący

[3] nieco precyzyjniej, istnieje jeszcze trzeci przypadek $b = -1/2$ który można zinterpretować z terminach teorii reprezentacji, ale ten przypadek jest ściśle związany z przypadkiem $b = 1$ ze względu na pewną dualność $b \leftrightarrow \frac{-b}{1+b}$, która zachodzi w ogólnym przypadku.

rozkład wielomianów

$$h^{\rho}_{\mu,\nu}(b) = \sum_{i\geq 0} h^{\rho}_{\mu,\nu;i}(b),$$

gdzie

$$h^{\rho}_{\mu,\nu;i}(b) = \sum_{M\in\mathcal{M}^{\rho}_{\mu,\nu;i}} b^{\eta(M)}.$$

W pracy [Hab2] znalazłem ograniczenie górne na stopień wielomianu $h^{\rho}_{\mu,\nu;i}(b)$, oraz następującą własność znikania:

Stwierdzenie 2.12. *Dla ustalonej liczby naturalnej n i partycji $\mu,\nu,\rho\vdash n$*

- $h^{\rho}_{\mu,\nu;i}(b) = 0$ *dla* $i > [g/2]$*;*
- $\deg\left(b^{2i-g}h^{\rho}_{\mu,\nu;i}(b)\right) \leq i$*;*
- $h^{(n)}_{\mu,\nu;i}(-1) = 0$ *dla* $i \neq 0$*,*

gdzie $g := n+2-(\ell(\mu)+\ell(\nu)+\ell(\rho))$.

To stwierdzenie może wyglądać nieco technicznie, ale zestawione z Twierdzeniem 2.11 daje bardzo konkretną wiadomość — jedyne mapy dwudzielne mające wkład w część najwyższego stopnia $[p_\mu q_\nu]\psi(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r};t,1+b)$ *nie mają rączek* i są *jednościenne*, czyli posiadają dokładnie jedną ścianę i podczas procesu usuwania korzenia ani raz nie usunięto rączki. Ponadto, ta część najwyższego stopnia zadana jest (co do znaku) przez podstawienie $b=-1$. Znalazłem zatem nowy szczególny przypadek, obok dobrze zrozumianych $b=0,1$, w którym Hipoteza–b jest prawdziwa dla map jednościennych.

Twierdzenie 2.13. *Istnieje niezmiennik $\eta : \mathcal{M}^{\rho}_{\mu,\nu} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ taki że $\eta(M) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy M jest orientowalna, oraz taki że równanie*

$$[t^n p_\lambda q_\mu r_n]\psi(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r};t,1+b) = \sum_{M\in\mathcal{M}^{(n)}_{\mu,\nu}} b^{\eta(M)}, \tag{16}$$

zachodzi dla $b\in\{-1,0,1\}$. Ponadto

$$[t^n p_\lambda q_\mu r_n]\psi(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r};t,1+b) = h^{(n)}_{\mu,\nu}(-1)(-b)^{n+1-(\ell(\mu)+\ell(\nu))} + o\left(b^{n+1-(\ell(\mu)+\ell(\nu))}\right).$$

Moim ostatnim głównym wynikiem z pracy [Hab2] jest dowód Hipotezy–b dla map jednościennych niskiego genusu. Mój pomysł jest dość prosty - każdy wielomian $f(b)$ stopnia $n-1$ jest jednoznacznie wyznaczony przez swoje wartości w n różnych punktach. W szczególności Twierdzenie 2.13 i Stwierdzenie 2.12 bezpośrednio implikują, że Hipoteza–b zachodzi dla wszystkich partycji μ,ν,ρ takich, że $\rho=(n)$ i

$$\ell(\mu)+\ell(\nu) \geq n-1. \tag{17}$$

Ja znalazłem dowód Hipotezy–b w nieco szerszym kontekście, zastępując warunek (17) słabszym warunkiem:

Twierdzenie 2.14. *Dla wszystkich partycji $\mu,\nu\vdash n\geq 1$ spełniających $\ell(\mu)+\ell(\nu)\geq n-3$ oraz $\rho=(n)$ Hipoteza–b jest prawdziwa, czyli*

$$[t^n p_\mu q_\nu r_\rho]\psi(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r};t,1+b) = \sum_{M\in\mathcal{M}^{\rho}_{\mu,\nu}} b^{\eta(M)},$$

gdzie $\eta(M)$ jest nieujemną liczbą całkowitą która wynosi 0 wtedy i tylko wtedy gdy M jest orientowalna.

Mój pomysł polegał na użyciu tylko tych niezmienników η, które w pewnym sensie są sztywne. Mówiąc nieco bardziej ściśle, wybieram te niezmienniki, które mają następującą własność: dla dowolnej mapy M i jej dwóch zorientowanych ścian f_1 i f_2 wszystkie rączki łączące te ściany i zachowujące ich orientacje mają tę samą wagę. Udowodniłem, że wielomian $h^{\rho}_{\mu,\nu}(b)$ odpowiadający takim miarom nieorientowalności η ma pewne dodatkowe symetrie. Dowód polegał na skonstruowaniu pewnej bijekcji opierającej się na delikatnych manipulacjach krawędziami ukorzenionymi podczas przeprowadzania procesu usuwania korzenia. Te dodatkowe symetrie implikują, że Twierdzenie 2.13 wyznacza w sposób jednoznaczny wielomian $h^{\rho}_{\mu,\nu}(b)$, co kończy dowód.

2.3. **Bijektywne zliczanie map na dowolnych powierzchniach.** W tym rozdziale wszystkie mapy są ukorzenione, więc pominę używanie tego słowa.

Hipoteza–b mówi o tym, że funkcje Jacka maja ścisły związek z liczeniem map na dowolnych powierzchniach, przy zachowaniu ścisłej kontroli nad strukturą tych map. Problem zrozumienia pięknych własności enumeratywnych map poprzez bezpośrednią kontrolę ich struktury jest tematem naszej pracy [Hab3].

Spójrzmy na słynny wzór Tutte'a [Tut63] na liczbę $m(n)$ map planarnych o n krawędziach:

$$m(n) = \frac{2 \cdot 3^n (2n)!}{(n+2)!n!}.$$

Zauważmy, że prawa strona tego wzoru ma naturalną kombinatoryczną interpretację: jest to n-ta liczba Catalana przemnożona przez $\frac{2}{n+1}3^n$. Jako że n-ta liczba Catalana jest liczbą drzew planarnych o n krawędziach, możemy zinterpretować tę prawą stronę jako liczbę poetykietowanych drzew planarnych o n wierzchołkach przeskalowaną przez $\frac{2}{n+1}$, gdzie wszystkie wierzchołki oprócz wierzchołka korzenia etykietujemy $\{-1, 0, +1\}$. Wzór Tutte'a został przez niego znaleziony poprzez zgadnięcie rozwiązania równania funkcyjnego, które skonstruował, a następnie udowodnienie że jest to jedyne właściwe rozwiązanie, zatem znalezienie bezpośredniej 2—$(n+1)$ odpowiedniości między mapami planarnymi a poetykietowanymi drzewami planarnymi jest niezwykle pożądane. Taka konstrukcja nie tylko dałaby nową konceptualną jakość wzoru Tutte'a, lecz przede wszystkim przyniosłaby lepsze zrozumienie struktury map planarnych. To podejście zostało przedstawione przez Coriego i Vauquelina [CV81], którym udało się udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.15. *Istnieje jawna konstrukcja* 2—$(n+1)$ *odpowiedniości pomiędzy mapami planarnymi o* n *krawędziach a poetykietowanymi drzewami planarnymi o* n *krawędziach.*

Ich konstrukcja staje się znacznie bardziej naturalna gdy mapy planarne o n krawędziach zastąpimy dwudzielnymi planarnymi kwadrangulacjami o n ścianach, czyli mapami dwudzielnymi, których każda ściana ma stopień 4. Te dwa modele są ze sobą w naturalnej bijekcji i jest to ogólny fakt, który pozostaje prawdą gdy sferę zastąpimy dowolną powierzchnią, co zauważył Tutte: zaczynając od mapy o n krawędziach narysujmy wewnątrz każdej ściany nowy wierzchołek, połączmy go krawędziami z wszystkimi rogami wewnątrz tej ściany i usuńmy poprzednie krawędzie; otrzymana mapa jest dwudzielną kwadrangulacją o n ścianach na tej samej powierzchni. Ponadto, ta konstrukcja jest oczywiście odwracalna. Zauważmy, że dwudzielne planarne kwadrangulacje o n ścianach mają dokładnie $n+1$ wierzchołków, co wynika z formuły Eulera. Zatem Twierdzenie 2.15 może być przeformułowane w następujący sposób: istnieje jawna bijekcja pomiędzy dwudzielnymi planarnymi kwadrangulacjami o n ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem, a znakowanymi poetykietowanymi

drzewami planarnymi o n krawędziach. To przeformułowanie było punktem wyjścia dla pracy Schaeffera [Sch99], który rozszerzył konstrukcję Coriego i Vauquelina do wszystkich *orientowalnych* powierzchni:

Twierdzenie 2.16. *Niech $\mathcal{S}$ będzie powierzchnią* orientowalną. *Wówczas istnieje jawna bijekcja pomiędzy dwudzielnymi kwadrangulacjami na $\mathcal{S}$ o n ścianach i wyróżnionym wierzchołku, a znakowanymi poetykietowanymi mapami jednościennymi na $\mathcal{S}$ o n krawędziach. Ponadto etykiety w mapie jednościennej odpowiadają odległościom od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji.*

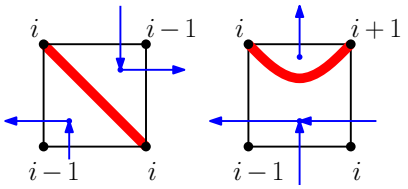
Zauważmy, że planarne mapy jednościenne to dokładnie drzewa, zatem Twierdzenie 2.15 w istocie jest szczególnym przypadkiem Twierdzenia 2.16 gdy $\mathcal{S}$ jest sferą. Konstrukcja Schaeffera, podobnie jakie poprzednia konstrukcja Coriego i Vauquelina, w kluczowy sposób wykorzystuje założenie orientowalności. Powstaje naturalne pytanie:

Pytanie 2.17. *Czy można się spodziewać że Twierdzenie 2.16 rozszerza się do dowolnych powierzchni $\mathcal{S}$?*

Wyniki enumeratywne przedstawione w Twierdzeniu 1.12 sugerują pozytywną odpowiedź na to pytanie — struktura funkcji tworzącej jednej zmiennej dla map na powierzchni $\mathcal{S}$ zależy tylko i wyłącznie od charakterystyki Eulera $\mathcal{S}$, a nie orientowalności. Pytanie 2.17 pozostało otwarte przez niemal dwie dekady i nasza praca [Hab3] pozytywnie i konstruktywnie na nie odpowiada. Udało się nam opuścić założenie orientowalności w Twierdzeniu 2.16 opisując nową konstrukcję przekształcającą zadaną kwadrangulację w poetykietowaną mapę jednościenną, która nie zależy od orientowalności:

Twierdzenie 2.18. *Dla dowolnej powierzchni $\mathcal{S}$ istnieje jawna bijekcja pomiędzy dwudzielnymi kwadrangulacjami na $\mathcal{S}$ o n ścianach i wyróżnionym wierzchołku, a znakowanymi poetykietowanymi mapami jednościennymi na $\mathcal{S}$ o n krawędziach. Ponadto etykiety w mapie jednościennej odpowiadają odległościom od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji.*

2.3.1. *Graf dualnej eksploracji.* Zanim opiszę nasze podejście do problemu, przybliżę pokrótce konstrukcję Schaeffera, co jest istotne aby zrozumieć główne przeszkody i nasze podejście do tego jak je ominąć. Aby skonstruować poetykietowaną mapę jednościenną najpierw etykietujemy wierzchołki kwadrangulacji ich odległościami od wyróżnionego wierzchołka i zauważamy, że wędrując wokół ścian kwadrangulacji albo natykamy się na etykiety $(i, i+1, i, i+1)$ (te ściany nazywamy *ścianami I typu*) albo na $(i-1, i, i+1, i)$ (te ściany nazywamy *ścianami II typu*). W ścianach typu I łączymy ze sobą rogi $i+1$ nową krawędzią, a w ścianach typu II łączymy róg $i+1$ z pierwszym rogiem i leżącym przeciwzegarowo (te nowe krawędzie będziemy nazywać czerwonymi tak, że odpowiadają one czerwonym krawędziom na Rys. 6; w tej chwili proszę zignorować niebieski graf). Twierdzenie 2.16 mówi,



Rysunek 6. DEG (niebieskie krawędzie) w przypadku powierzchni orientowalnej

że czerwona mapa, którą otrzymujemy poprzez wymazanie wyróżnionego wierzchołka oraz

oryginalnych krawędzi kwadrangulacji, jest poetykietowaną mapą jednościenną i ponadto ta konstrukcja w rzeczywistości jest bijekcją. Zauważmy, że sposób w jaki decydujemy o tym jak narysować czerwone krawędzie w przypadku ścian typu II opiera się na istnieniu globalnej orientacji, która jest równoważna temu że $\mathcal{S}$ jest powierzchnią orientowalną.

Chcąc uogólnić tę konstrukcję do przypadku dowolnej powierzchni musimy znaleźć sposób na decydowanie o tym jak rysować czerwone krawędzie wewnątrz ścian typu II tak, żeby

(1) ten sposób zgadzał się ze sposobem zaproponowanym przez Schaeffera w przypadku gdy $\mathcal{S}$ jest orientowalna,
(2) powstały graf był mapą o jednej ścianie,
(3) cała konstrukcja była odwracalna, tak aby ostatecznie zadawała ona bijekcję.

Nasze podejście do problemu opiera się na następującej analizie: narysujmy mapę dualną do mapy otrzymanej poprzez połączenie oryginalnej kwadrangulacji z mapą czerwoną, a następnie usuńmy krawędzi przecinające czerwone krawędzi. Ten graf odpowiada niebieskiemu grafowi na Rys. 6. Zauważmy teraz, że warunek (2) jest równoważny stwierdzeniu że niebieski graf jest drzewem[4]. Istotnie, jeśli czerwona mapa jest jednościenna, to niebieski graf jest ściągalny do punktu, czyli jest drzewem. Ponadto opis struktury czerwonego grafu lokalnie ogranicza się do opisu ścian typu I i II, a to bezpośrednio tłumaczy się na opis lokalnej struktury grafu niebieskiego - patrz Rys. 6. Zatem zamiast rysować czerwone krawędzie, możemy równoważnie konstruować niebieski graf. Nasz pomysł polega na wykorzystaniu lokalnej orientacji zadanej przez korzeń, aby eksplorować naszą kwadrangulację rekurencyjnie ze względu na odległości od wyróżnionego wierzchołka. Podczas tej eksploracji decydujemy w jaki sposób wybrać lokalną orientację, bazując na naszych wcześniejszych wyborach. Ta zgrubna idea pozwoliła nam skonstruować niebieski graf, który nazwaliśmy grafem dualnej eksploracji (w skrócie DEG z języka angielskiego). Rekursywna konstrukcja DEG jest możliwa dzięki następującym własnościom:

(1) załóżmy że ustaliliśmy lokalną orientację wokół wyróżnionego wierzchołka i otoczyliśmy go niebieską, przeciwzegarową pętlą. Każda niebieska krawędź przecinająca czarną krawędź o etykietach i oraz $i+1$ nazywać będziemy krawędzią o etykiecie i;
(2) w każdym kroku naszej konstrukcji dołączamy zorientowaną gałąź niebieskich krawędzi o etykietach i do istniejącego już DEG, poprzez poruszanie się przeciwzegarowo wokół wierzchołka o etykiecie i;
(3) jesteśmy w stanie kontynuować ten proces dopóki nie przetniemy wszystkich krawędzi kwadrangulacji dzięki temu, że wszystkie wierzchołki o etykiecie i leżą w bliskim otoczeniu już skonstruowanego DEG.

To, że nasza konstrukcja pokrywa się z konstrukcją Schaeffera w przypadku orientowalnym wynika z faktu iż gałęzie w DEG zawsze dołączaliśmy przeciwzegarowo. Ponieważ istnieje globalna orientacja, to nigdy nie trafiliśmy na ścianę, w której musieliśmy zmienić lokalną orientację. To, że nasza konstrukcja jest odwracalna wynika bezpośrednio z naszej idei, że globalna konstrukcja powstaje poprzez sklejenie lokalnych konstrukcji, w ściśle kontrolowany przez nas sposób. Przedstawiony tutaj opis naszej konstrukcji jest, de facto, jedynie opisem idei tego jak i dlaczego udało nam się udowodnić Twierdzenie 2.18 – konstrukcja

[4]mówiąc ściślej jest on pętlą obiegającą wyróżniony wierzchołek w kwadrangulacji, do której dołączone są drzewa – po ściągnięciu tej pętli do pojedynczego wierzchołka otrzymujemy drzewo

sama w sobie jest bardzo techniczna i skomplikowana, więc do jej szczegółowego opisu odsyłam czytelnika do naszej pracy [Hab3]. Niemniej jednak mam nadzieję, że opis konstrukcji DEG wyjaśnia, że Twierdzenie 2.18 jest jej natychmiastową konsekwencją.

2.3.2. *Zastosowania.* Nasze główne twierdzenie nie tylko odpowiedziało na jedno z największych problemów bijektywnej kombinatoryki map, lecz znalazło różne zastosowania. Pierwszym zastosowaniem jest nowy, w pełni kombinatoryczny dowód Twierdzenia 1.12. Ściślej rzecz biorąc, używając standardowych technik rozkładu map jednościennych ma ścieżki Motzkina, wywnioskowaliśmy następujące twierdzenie jako bezpośrednio wniosek z naszej bijekcji:

Twierdzenie 2.19 (Kombinatoryczna interpretacja algebraiczności i struktury funkcji tworzącej map)**.** *Niech $\mathcal{S}$ będzie dowolną powierzchnią a $\vec{q}_{\mathcal{S}}(n)$ będzie liczbą map na $\mathcal{S}$ o n krawędziach (równoważnie, dwudzielnych kwadrangulacji o n ścianach). Niech*

$$Q_{\mathcal{S}}(t) := \sum_{n\geq 0}(n+\chi(\mathcal{S}))\vec{q}_{\mathcal{S}}(n)t^n$$

będzie funkcją tworzącą map z wyróżnionym wierzchołkiem lub ścianą, ze względu na liczbę krawędzi (równoważnie, dwudzielnych kwadrangulacji z wyróżnionym wierzchołkiem, ze względu na liczbę ścian).

Wówczas $Q_{\mathcal{S}}(t)$ jest funkcją algebraiczną. Dokładniej, niech $U \equiv U(t)$ oraz $T \equiv T(t)$ będą formalnymi szeregami potęgowymi zdefiniowanymi poprzez:

$$T = 1 + 3tT^2, \qquad U = tT^2(1+U+U^2).$$

Wówczas $Q_{\mathcal{S}}(t)$ jest funkcją wymierną w U. W szczególności liczba map na $\mathcal{S}$ asymptotycznie jest równa:

$$\vec{q}_{\mathcal{S}}(n) \sim t(\mathcal{S})n^{\frac{-5\chi(\mathcal{S})}{4}}12^n.$$

Drugie zastosowanie naszej konstrukcji idzie w nieco innym kierunku. Bada ono geometrię metryczną losowych powierzchni. Nasze wyniki są pierwszymi, które nie ograniczają się jedynie do powierzchni orientowalnych. Niech $\mathcal{M}$ będzie mapą zaś $v \in V(\mathcal{M})$ pewnym wierzchołkiem. *Promień* mapy $\mathcal{M}$ scentrowanej w wierzchołku v definiujemy jako maksymalną odległość od wierzchołka v osiągniętą w $\mathcal{M}$:

$$R(\mathcal{M}, v) := \max_{u\in V(\mathcal{M})} d_{\mathcal{M}}(v,u).$$

Dla dowolnego $r > 0$, definiujemy również *profil odległości* od wyróżnionego wierzchołka v, o którym można myśleć jak o rozkładzie odległości w mapie $\mathcal{M}$:

$$I_{(\mathcal{M},v)}(r) := \#\{u \in V(\mathcal{M}) : d_{\mathcal{M}}(v,u) = r\}.$$

Używając obecnie uznawanych za standardowe, technik rozwiniętych w pracach [CS04, Le 06, Bet10] wykorzystaliśmy naszą bijekcję do udowodnienia następującego twierdzenia:

Twierdzenie 2.20. *Niech q_n będzie losową, dwudzielną kwadrangulacją o n ścianach na powierzchni $\mathcal{S}$, wybraną w sposób jednostajny i niech v_0 będzie wierzchołkiem korzenia q_n. Warunkowo na q_n, niech v_* będzie wierzchołkiem wybranym losowo w sposób jednostajny na $V(q_n)$. Wówczas istnieje ciągły proces stochastyczny $\mathfrak{L}^{\mathcal{S}} = (\mathfrak{L}^{\mathcal{S}}_t, 0 \leq t \leq 1)$ taki, że zachodzą następujące zbieżności:*

(C1) $\left(\frac{9}{8n}\right)^{1/4} R(q_n, v_*) \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \sup \mathfrak{L}^{\mathcal{S}} - \inf \mathfrak{L}^{\mathcal{S}}$;

(C2) $\left(\frac{9}{8n}\right)^{1/4} d_{q_n}(v_0, v_*) \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \sup \mathfrak{L}^{\mathcal{S}}$;

(C3) $\frac{I_{(q_n,v_*)}\left((8n/9)^{1/4}\cdot\right)}{n+\chi(\mathcal{S})} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \mathcal{I}^{\mathcal{S}}$,

gdzie $\mathcal{I}^{\mathcal{S}}$ jest miarą pozostania $\mathfrak{L}^{\mathcal{S}}$ powyżej infimum, zdefiniowaną w następujący sposób: dla każdej, nieujemnej mierzalnej funkcji $g : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}_+$,

$$\langle \mathcal{I}^{\mathcal{S}}, g\rangle = \int_0^1 \mathrm{dt}\, g(\mathfrak{L}^{\mathcal{S}}_t - \inf \mathfrak{L}^{\mathcal{S}}).$$

Wszystkie zbieżności zachodzą według rozkładu (i w przypadku (C3), użyta topologia to topologia słabej zbieżności rzeczywistych miar probabilistycznych na $\mathbb{R}_+$).

2.4. **Kumulanty Macdonalda i wielomianowość.** W naszej wspólnej pracy z Férayem [Hab1], udowodniliśmy wielomianowość kumulant Jacka. Jako że funkcje symetryczne Jacka są przypadkiem granicznym słynnych funkcji Macdonalda, naturalnym jest pytanie czy ta własność wielomianowości nie jest przypadkiem konsekwencją bardziej ogólnej własności wielomianowości na poziomie funkcji Macdonalda, co zresztą było wielokrotnie udowadniane w przeszłości w przypadku innych własności wielomianowości (patrz Rozdział 1.3). Przeprowadzone przez nas symulacje komputerowe potwierdzały nasze przewidywania i zainspirowały nas do postawienia następującej hipotezy:

Hipoteza 2.21. *[Hab1] Dla dowolnych partycji $\lambda^1, \dots, \lambda^r$, wielomiany Macdonalda mają* własność małych kumulant *gdy $q \to 1$, czyli*

$$\kappa^J(\lambda^1, \cdots, \lambda^r) := \sum_{\pi\in\mathcal{P}([r])} (-1)^{\#(\pi)-1}\,(\#(\pi)-1)! \prod_{B\in\pi} J^{(q,t)}_{\lambda^B} = O_1\left((q-1)^{r-1}\right),$$

gdzie $f(q,t) = O_1\left((q-1)^{r-1}\right)$ oznacza że funkcja wymierna $f(q,t)\cdot(q-1)^{1-r}$ nie ma bieguna w punkcie $q = 1$.

Głównym wynikiem pracy [Hab4] jest dowód Hipotezy 2.21, a w zasadzie jej uogólnienie w którym wielomiany Macdonalda zastąpione są *interpolacyjnymi wielomianami Macdonalda* wprowadzonymi przez Sahiego [Sah96].

2.4.1. *Interpolacyjne wielomiany Macdonalda.* Interpolacyjne wielomiany Macdonalda zostały wprowadzone przez Sahiego [Sah96] w celu udowodnienia własności wielomianowości wielomianów Macdonalda (patrz Rozdział 1.3). Sahi udowodnił, że dla każdej partycji λ długości $\ell(\lambda) \le N$, istnieje jedyny (niejednorodny) wielomian symetryczny $\mathcal{J}^{(q,t)}_\lambda(\boldsymbol{x})$ stopnia $|\lambda|$, gdzie $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_N)$, o następujących własnościach

- $[m_\lambda]\mathcal{J}^{(q,t)}_\lambda(\boldsymbol{x}) = \mathrm{hook}_{(q,t)}(\lambda)$;
- dla wszystkich partycji $\mu \ne \lambda$, $|\mu| \le |\lambda|$ wartość $\mathcal{J}^{(q,t)}_\lambda((q,t)^\mu)$ jest równa zero, gdzie

$$(q,t)^\mu := (q^{\mu_1}t^{N-1}, q^{\mu_2}t^{N-2}, \dots, q^{\mu_N}t^0).$$

Taki wielomian symetryczny nazywa się *interpolacyjnym wielomianem Macdonalda* i ma pewną niezwykłą własność wyjaśniającą jego nazwę: jego jednorodna część maksymalnego stopnia to dokładnie wielomian Macdonalda $J^{(q,t)}_\lambda(\boldsymbol{x})$.

Głównym twierdzeniem mojej pracy [Hab4] jest następujący wynik:

Twierdzenie 2.22. *[Hab4] Dla dowolnych partycji $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$, interpolacyjne wielomiany Macdonalda mają* własność małych kumulant *gdy $q \to 1$, czyli*

$$\kappa^{\mathcal{J}}(\lambda^1, \cdots, \lambda^r) := \sum_{\pi \in \mathcal{P}([r])} (-1)^{\#(\pi)-1} \left(\#(\pi) - 1\right)! \prod_{B \in \pi} \mathcal{J}_{\lambda^B}^{(q,t)} = O_1\left((q-1)^{r-1}\right).$$

Naturalnym pomysłem na dowód Hipotezy 2.21 jest próba zaadaptowania dowodu w przypadku funkcji Jacka do bardziej ogólnych ram funkcji Macdonalda. Niektóre fragmenty dowodu przedstawionego w [Hab1] w naturalny sposób uogólniają się do przypadku Macdonalda poprzez użycie nieco bardziej technicznych manipulacji na funkcjach z dwoma parametrami, lecz pozostałe fragmenty wymagały zastosowania nowych pomysłów.

Pierwsza istotna różnica nie pozwalająca użyć tych samych argumentów co w przypadku α pojawia się w dowodzie tego, że rodziny skonstruowane przy pomocy (q,t)-hakowych wielomianów $[m_\lambda]\mathcal{J}_\lambda^{(q,t)}$ mają własność małych kumulant w $q = 1$. Aby otrzymać potrzebną własność, udowodniłem pewien ogólny lemat implikujący własność małych kumulant w punkcie $q = 1$ dla szerokiej rodziny funkcji.

Lemat 2.23. *Ustalmy dodatnią liczbę naturalną r i podzbiór K zbioru $[r]$. Niech $c \in \mathbb{N}$ oraz $(c_i)_{i \in K}$ będą rodziną liczb naturalnych, oraz niech $C \neq 1 \in R$. Dla dowolnego podzbioru I zbioru K, zdefiniujmy*

$$v_I = 1 - C \cdot q^{c + \sum_{i \in I} c_i}.$$

Wówczas dla dowolnego podzbioru H zbioru K rodzina $(\boldsymbol{v})_H$ ma własność małych kumulant gdy $q \to 1$.

Druga istotna różnica polega na zinterpretowaniu interpolacyjnych wielomianów Macdonalda jako funkcji własnych pewnego operatora różniczkowego. W przypadku wielomianów Jacka oparliśmy nasz dowód na fakcie iż są one funkcjami własnymi operatora Laplace'a–Beltramiego — operatora różniczkowego drugiego rzędu. Macdonald [Mac95] znalazł rodzinę operatorów, których funkcje własne są wielomianami Macdonalda, a nieco później Sahi [Sah96] rozszerzył ten wynik do przypadku interpolacyjnych wielomianów Macdonalda. Problem polega na tym, że te operatory nie są a priori operatorami różniczkowymi. Mój pomysł polegał na tym, aby rozwinąć je w pobliżu punktu $q = 1$. To pozwala wyrazić je jako operatory różniczkowe, ale nieskończonego rzędu, nie zaś drugiego jak w przypadku operatora Laplace'a–Beltramiego. To było największym problem w zaadaptowaniu dowodu do przypadku wielomianów Macdonalda.

Główna idea polegała na tym, aby zrozumieć działanie "diagonalne" operatora D^k na kumulantach, gdzie D jest abstrakcyjnym operatorem różnicowym. Ściśle rzecz biorąc, rozważam następującą sytuację.

Niech R będzie pierścieniem. Zdefiniujmy R-moduł operatorów różnicowych Der_R, czyli operatorów liniowych $D : R \to R$ spełniających następującą regułę Leibniza:

$$D(f \cdot g) = (Df) \cdot g + f \cdot (Dg).$$

Dla dowolnych dodatnich liczb naturalnych r, k i elementów $f_1, \ldots, f_r \in R$ definiuję "działanie diagonalne" operatora D^k na ciągu $(f_1, \ldots, f_r)$ w następujący sposób:

$$\widetilde{D^k}(f_1, \ldots, f_r) := \sum_{1 \leq i \leq r} f_1 \cdots \left(D^k f_i\right) \cdots f_r.$$

To działanie przedłuża się do działania na kumulantach w naturalny sposób:

$$\widetilde{D^k}\,\kappa_{[r]}(\boldsymbol{u}) := \sum_{\pi\in\mathcal{P}([r])} \mu(\pi,\{[r]\})\,\widetilde{D^k}(u_B : B\in\pi),$$

gdzie $\boldsymbol{u} = (u_I)_{I\subseteq[r]}$ jest rodziną elementów z pierścienia R. W dowodzie własności małych kumulant rozważam działanie operatora Macdonalda D na kumulancie:

$$D\kappa^{\mathcal{J}}(\lambda^1,\dots,\lambda^r).$$

Trik, który znalazłem, to rozłożenie funkcji $D\kappa^{\mathcal{J}}(\lambda^1,\dots,\lambda^r)$ na dwie części: pierwsza część pochodzi z "wymuszenia" reguły Leibniza dla działania operatora D na iloczynie interpolacyjnych wielomianów Macdonalda, zaś druga część jest "błędem", czyli różnicą pomiędzy właściwym działaniem operatora D na kumulancie, a działaniem "wymuszającym" regułę Leibniza:

$$D\kappa^{\mathcal{J}}(\lambda^1,\dots,\lambda^r) = \underbrace{\widetilde{D}\kappa^{\mathcal{J}}(\lambda^1,\dots,\lambda^r)}_{\text{część pierwsza}} + \underbrace{D\kappa^{\mathcal{J}}(\lambda^1,\dots,\lambda^r) - \widetilde{D}\kappa^{\mathcal{J}}(\lambda^1,\dots,\lambda^r)}_{\text{część druga}}, \tag{18}$$

gdzie

$$\widetilde{D}\kappa^{\mathcal{J}}(\lambda^1,\dots,\lambda^r) := \sum_{\pi\in\mathcal{P}([r])} (-1)^{\#\pi}\widetilde{D}\left(\mathcal{J}_{\lambda^B}^{(q^{-1},t^{-1})} : B\in\pi\right),$$

i

$$\widetilde{D}(f_1,\dots,f_r) := \sum_{1\le k\le r} f_1\cdots(Df_k)\cdots f_r.$$

Znalezienie tego rozkładu było kluczowe. Uogólniając formuły z pracy [Hab1] pokazałem, że pierwszy czynnik w rozkładzie może być wyrażony jako kombinacja liniowa iloczynu kumulant niższego rzędu niż r, co pozwoliło mi zastosować indukcję do ich analizy. Dla drugiego czynnika znalazłem nowy, jawny wzór, który zachodzi dla dowolnych kumulant i dowolnych operatorów różnicowych. W szczególności, w znalezionym wzorze, jedyne kumulanty które się pojawiają są rzędu niższego niż r, a zatem również dla tego czynnika mogłem zastosować indukcję, co w konsekwencji dało dowód Twierdzenia 2.22.

2.4.2. *Dodatniość Schura wyższego rzędu.* Pomimo tego, że opisane metody są dość techniczne i abstrakcyjne, mój wynik sugeruje nową, interesującą własność wielomianów Macdonalda.

Przypomnę, że jednym z najbardziej spektakularnych wyników w teorii wielomianów Macdonalda jest ich Schur dodatniość — Twierdzenie 1.6 — postawiony jako problem otwarty przez Macdonalda [Mac88] i udowodniony przez Haimana [Hai01]. Najwygodniejszą wersją wielomianów Macdonalda do opisania tej własności jest tzw. "wersja transformowana" $\tilde{H}_\lambda^{(q,t)}$, której związek z wersją całkowitą $J_\lambda^{(q,t)}$ jest zadany przez podstawienie (1). W szczególności, to podstawienie nie zależy od zmiennej q, zatem Twierdzenie 2.22 natychmiastowo implikuje następujący wynik:

Twierdzenie 2.24. *Dla dowolnych partycji $\mu,\lambda^1,\dots,\lambda^r$ współczynnik*

$$[s_\mu]\kappa(\lambda^1,\dots,\lambda^r)\in\mathbb{Z}[q,t]$$

jest wielomianem w q,t o całkowitych współczynnikach, gdzie

$$\kappa(\lambda^1,\dots,\lambda^r) := \frac{\kappa(\tilde{H}_{\lambda^1},\dots,\tilde{H}_{\lambda^r})}{(q-1)^{r-1}}. \tag{19}$$

To twierdzenie można zinterpretować jako analogon wyższego rzędu Twierdzenia 1.9. W istocie, kumulanta najniższego rzędu $r = 1$ jest zadana przez jedną partycję λ i wówczas $\kappa(\lambda)$ jest dokładnie wielomianem Macdonalda $\tilde{H}_\lambda$. W świetle Twierdzenia 2.24 bardzo kuszące jest postawienie hipotezy o Schur dodatniości kumulant Macdonalda, co dałoby wersję wyższego rzędu słynnego Twierdzenia 1.6. Na podstawie głównego wyniku z pracy [Hab4] oraz licznych testów komputerowych, które przeprowadziłem, postawiłem w pracy [Hab4] następującą hipotezę:

Hipoteza 2.25 (Hipoteza o dodatniości wyższego rzędu)**.** *Ustalmy partycje $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$. Wówczas dla dowolnej partycji μ, q, t-*wielomian Kostki wielu zmiennych $\tilde{K}^{(q,t)}_{\mu;\lambda^1,\ldots,\lambda^r}$ *zdefiniowany poprzez następujące rozwinięcie w bazie funkcji Schura*

$$\kappa(\lambda^1, \ldots, \lambda^r) := \sum_\mu \tilde{K}^{(q,t)}_{\mu;\lambda^1,\ldots,\lambda^r}\, s_\mu$$

*jest wielomianem w q, t o **nieujemnych, całkowitych** współczynnikach.*

2.5. **Struktura kombinatoryczna kumulant Macdonalda.** Hipoteza 2.25 rodzi następujący problem:

Problem 2.26. *Jaki jest kombinatoryczny/geometryczny/teorio-reprezentacyjny powód dla którego kumulanty $\kappa(\lambda^1, \ldots, \lambda^r)$ są Schur dodatnie?*

Zauważmy, że rozwiązanie tego problemu nawet w trywialnym przypadku $r = 1$ jest znane jedynie w kontekście geometrycznym i jej związkach z teorią reprezentacji, lecz wyjaśnienie kombinatoryczne Schur dodatniości jest jednym z największych problemów otwartych w swojej dziedzinie. Jednakowoż ważnym przełomem w teorii było znalezienie kombinatorycznego wzoru na wielomiany Macdonalda — Twierdzenie 1.10 — które jawnie wyraża dodatniość w bazie jednomianów symetrycznych. Dowód Twierdzenia 2.22, który przedstawiłem w pracy [Hab4] nie był dla mnie całkowicie zadawalający z następujących powodów — jest on bardzo skomplikowany, techniczny i przede wszystkim nie wyjaśnia on w sposób intuicyjny odkrytego przeze mnie zjawiska. Piękny wzór Haimana, Haglunda i Loehra opisujący wielomiany Macdonalda, oraz intuicja zaczerpnięta z probabilistycznej interpretacji kumulant zainspirowały mnie do rozpoczęcia następującego programu badań nad strukturą kombinatoryczną kumulant Macdonalda:

- Znajdź bezpośredni, nieindukcyjny dowód Twierdzenia 2.22.
- Wywnioskuj z niego kombinatoryczną interpretację kumulant Macdonalda.

Ten program udało mi się nam zrealizować w pracy [Hab5], znajdując wersję wyższego rzędu Twierdzenia 1.10.

2.5.1. *Funkcje G-parkujące i wielomian G-inwersji.* Praca Haglunda, Haimana i Loehra [HHL05], zainspirowała mnie do prób uogólnienia ich kombinatorycznego wzoru. Udało mi się znaleźć taki wzór i nieoczekiwanie, głównym składnikiem kombinatorycznym okazały się być pewne niezmienniki grafów badane w przeszłości w kontekście wielomianów Tutte'a [Ges95, GS96], w kontekście tzw. "abelowego modelu przepływu piasku" [ML97], oraz w kontekście algebry homologicznej [PS04].

Wprowadzę teraz niezbędna terminologię. Niech $G = (V, E)$ będzie spójnym multigrafem (tzn. wielokrotne krawędzie oraz pętle są dozwolone), gdzie V jest skończonym zbiorem $[r]$. Wierzchołek 1 będę nazywać *korzeniem*. Dla dowolnych wierzchołków $i, j \in V$ liczbę krawędzi łączących i z j będę oznaczać $e_{i,j}(G)$. Podgraf $H \subset G$ nazywa się *grafem*

rozpinającym G, jeśli dla każdego wierzchołka $v \in V$ istnieje krawędź w H która go zawiera. Minimalne (ze względu na liczbę krawędzi), spójne grafy rozpinające G, to *drzewa rozpinające*. W istocie, są one drzewami, czyli grafami spójnymi nie posiadającymi cykli. Wierzchołek i jest *potomkiem* wierzchołka j w drzewie T, jeśli i leży na najkrótszej ścieżce łączącej j z korzeniem – wówczas j nazywa się *przodkiem* wierzchołka i. *Rodzic* wierzchołka j to przodek, który jest z nim połączony krawędzią. Para (i, j) nie zawierająca korzenia jest κ-*inwersją* w drzewie T rozpinającym G, jeśli jest *inwersją* (i jest przodkiem j i $i > j$) oraz j jest połączony z rodzicem i w grafie G. Niech $\tilde{G}$ będzie grafem otrzymanym z G poprzez zastąpienie wielokrotnych krawędzi pojedynczymi. *Wielomian G-inwersji* definiuję jako

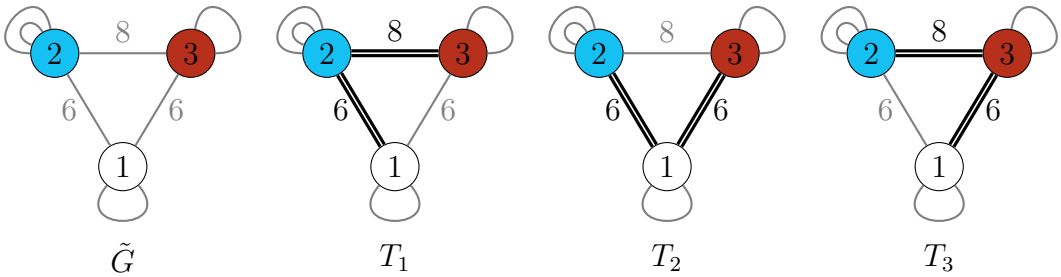
$$\mathcal{I}_G(q) = q^{\text{number of loops in } G} \sum_{T \subset \tilde{G}} q^{\kappa(T)} \prod_{\{i,j\} \in T} [e_{i,j}(G)]_q, \tag{20}$$

gdzie suma przebiega po wszystkich drzewach rozpinających $\tilde{G}$,

$$\kappa(T) = \sum_{\{i,j\} - \kappa - \text{inwersja w } T} e_{\text{parent}(i),j}(G), \tag{21}$$

oraz standardowo $[n]_q := \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$.

Przykład 3. Obliczę $\mathcal{I}_G(q)$ dla grafu G przedstawionego na Rys. 7. Istnieją dokładnie 3 drzewa rozpinające $\tilde{G}$, które oznaczymy T_1, T_2 i T_3. Para $(3, 2)$ nie jest κ-inwersją w T_1



Rysunek 7. $G = ([3], E)$, gdzie $e_{1,2}(G) = e_{1,3}(G) = 6$ i $e_{2,3}(G) = 8$. T_1, T_2 oraz T_3 są zaznaczone podwójnymi krawędziami.

ani w T_2, ale jest κ-inwersją w T_3. Zatem $\kappa(T_1) = \kappa(T_2) = 0$ i $\kappa(T_3) = e_{\text{parent}(3),2}(G) = e_{1,2}(G) = 6$. Ostatecznie,

$$\mathcal{I}_G(q) = q^4 \left(q^0[6]_q[8]_q + q^0[6]_q[6]_q + q^6[6]_q[8]_q\right) =$$
$$q^4(1+q+q^2+q^3+q^5)(2+2q+2q^2+2q^3+2q^4+2q^5+2q^6+2q^7+q^8+q^9+q^{10}+q^{11}+q^{12}+q^{13}).$$

Przykład 4. Zauważmy, że wielomian G–inwersji dla grafu pełnego $G = K_r$ zadany jest wzorem

$$\mathcal{I}_G(q) = \sum_T q^{\text{inv}(T)}.$$

W tym przypadku jest to tzw. *wielomian inwersji*, czyli funkcja tworząca poetykietowanych drzew na r wierzchołkach ważona względem liczby inwersji.

Jestem gotowy aby sformułować kombinatoryczny wzór na kumulanty Macdonalda, rozszerzający Twierdzenie 1.10, które odpowiada szczególnemu przypadkowi $r = 1$:

Twierdzenie 2.27. *Ustalmy partycje $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$. Wówczas zachodzi następujący wzór:*

$$\kappa(\lambda^1, \ldots, \lambda^r) = \sum_{\sigma:\lambda^{[r]}\to\mathbb{N}_+} \mathcal{I}_{G^\sigma_{\lambda^1,\ldots,\lambda^r}}(q)\, t^{\mathrm{maj}(\sigma)}\, \boldsymbol{x}^\sigma, \tag{22}$$

gdzie $\lambda^B := \bigoplus_{b\in B} \lambda^b$, $\boldsymbol{x}^\sigma := \prod_{\square\in\lambda^{[r]}} x_{\sigma(\square)}$ i $G^\sigma_{\lambda^1,\ldots,\lambda^r}$ jest multigrafem pokolorowanych inwersji.

Podobnie jak w równaniu (4) suma przebiega po wszystkich wypełnieniach σ diagramu Younga $\lambda^{[r]}$ dodatnimi liczbami całkowitymi, a $\mathrm{maj}(\sigma)$ zadane jest równaniem (3). $G^\sigma_{\lambda^1,\ldots,\lambda^r}$ jest multigrafem pokolorowanych inwersji, którego konstrukcja jest opisana w kolejnym rozdziale i uogólnia ona koncept liczenia trójek inwersji w σ – w szczególnym przypadku $r = 1$ graf G^σ_λ ma dokładnie jeden wierzchołek $r = 1$ oraz $\mathrm{inv}(\sigma)$ pętli, zatem $\mathcal{I}_{G^\sigma_\lambda}(q) = q^{\mathrm{inv}(\sigma)}$, co bezpośrednio daje wzór (4).

2.6. **Multigraf pokolorowanych inwersji.** Kluczowym krokiem pośrednim w znalezieniu wzoru (22) była następująca interpretacja wielomianu G-inwersji udowodniona w mojej pracy [Hab5]:

Lemat 2.28. *Niech $G = (V, E)$ będzie grafem. Wówczas*

$$\mathcal{I}_G(q) = (q-1)^{1-\#V} \sum_{\pi\in\mathcal{P}(V)} (-1)^{\#\pi-1}(\#\pi-1)! \prod_{B\in\pi} q^{\#E|_B},$$

gdzie $E|_B$ oznacza podzbiór krawędzi E o obu końcach w zbiorze $B \subset V$.

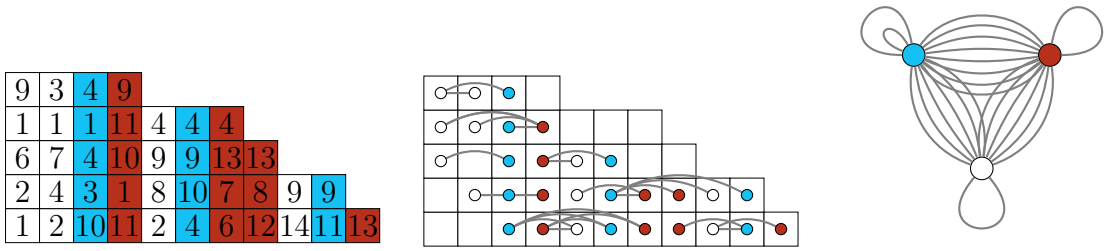
Powyższy lemat daje bezpośredni związek między wielomianem G-inwersji a kumulantami. W szczególności, podstawiając wzór (4) w definicji kumulant Macdonalda zadanych wzorem (19), otrzymam wzór o bardzo podobnej strukturze jak ten pojawiający się w Lemacie 2.28. Ten wzór jest źródłem konstrukcji multigrafu pokolorowanych inwersji $G^\sigma_{\lambda^1,\ldots,\lambda^r} := (V, E)$, znalezionej przeze mnie w pracy [Hab5].

Niech $\sigma : \lambda^{[r]} \to \mathbb{N}_+$ będzie wypełnieniem diagramu $\lambda^{[r]}$.

- diagram $\lambda^{[r]}$ mogę skonstruować porządkując kolumny diagramów $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$ w sposób nierosnący;
- kolumna (klatka) diagramu $\lambda^{[r]}$ jest *koloru* $i \in [r]$ jeśli ta kolumna (klatka, odpowiednio) jest utożsamiona z kolumną (klatką, odpowiednio) diagramu λ^i w poprzedniej konstrukcji; patrz Rys. 8(a) (na chwilę obecną wnętrza komórek są nieistotne);
- dla każdej trójki inwersji σ tworzę krawędź łączącą jej klatki leżące w tym samym wierszu i koloruję jej wierzchołki kolorami tych klatek w pokolorowanym diagramie $\lambda^{[r]}$;
- utożsamiam ze sobą wszystkie wierzchołki o tym samym kolorze co daje r różnych wierzchołków – patrz Rys. 8(b) i 8(c), który przedstawia konstrukcję $G^\sigma_{\lambda^1,\ldots,\lambda^r}$ dla $r = 3$ i $\sigma, \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3$ z Rys. 8(a); to jest dokładnie graf, którego wielomian G-inwersji obliczyłem w Przykładzie 3.

Formalnie, multigraf $G^\sigma_{\lambda^1,\ldots,\lambda^r} := (V, E)$ zdefiniowany jest jako para:

(1) zbiór wierzchołków V jest równy zbiorowi $[r]$;
(2) zbiór krawędzi E jest jednoznacznie wyznaczony przez liczby $e_{i,j}(G)$ krawędzi łączących wierzchołek i z j (i oraz j mogą być sobie równe) które są równe liczbom trójek inwersji w σ pokolorowanych kolorami $\{i, j\}$.



(a) (b) (c)

Rysunek 8. Fig. 8(a) przedstawia pokolorowane wypełnienie $\sigma : \lambda^{[3]} \to \mathbb{N}_+$ gdzie $\lambda^1 = (4^2, 3^2, 2), \lambda^2 = (3^2, 2^2, 1), \lambda^3 = (4, 3^2, 2, 1)$. Rys. 8(b) przedstawia krawędzi reprezentujące trójki inwersji w σ i kolory ich wierzchołków. Rys. 8(c) przedstawia multigraf $G^{\sigma}_{\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3}$ dla σ, i $\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3$ z Rys. 8(a), otrzymany z krawędzi przedstawionych w Rys. 8(b) po utożsamieniu wierzchołków tego samego koloru.

2.6.1. *Zastosowania.* Okazuje się, że Twierdzenie 2.27 nie tylko jawnie wyraża dodatniość kumulant Macdonalda w bazie jednomianów symetrycznych, dając ich kombinatoryczną interpretację, ale również prowadzi do częściowego dowodu Schur dodatniości. W pracy [Hab5] dowodzę Hipotezę 2.25, znajdując kombinatoryczną interpretację q, t-liczb Kostki wielu zmiennych, w szczególnym przypadku "haków". Ta interpretacja dana jest przez pewien wariant multigrafów pokolorowanych inwersji, który teraz opiszę.

Ustalmy partycje $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$ oraz dodatnią liczbę całkowitą $1 \leq s \leq |\lambda^1| + \cdots + |\lambda^r|$. Dla dowolnego podzbioru klatek $\{\square_1, \ldots, \square_s\} \subset \lambda^{[r]}$ konstruuję graf $G^{\square_1,\ldots,\square_s}_{\lambda^1,\ldots,\lambda^r} := (V, E)$ w sposób następujący:

- każdą klatkę $\square_i$ łączę krawędzią z każdą klatką leżącą w tym samym wierszu na lewo od niej, a następnie koloruję wierzchołki kolorami odpowiadających klatek w $\lambda^{[r]}$;
- utożsamiam ze sobą wierzchołki o tym samym kolorze.

Twierdzenie 2.29. *Ustalmy partycje $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$ takie że $|\lambda^{[r]}| = n$. Wówczas q, t-liczba Kostki wielu zmiennych $\widetilde{K}_{(n-s,1^s);\lambda^1,\ldots,\lambda^r}(q, t)$ jest wielomianem w q, t o całkowitych nieujemnych współczynnikach, zadanym następującym wzorem:*

$$\widetilde{K}_{(n-s,1^s);\lambda^1,\ldots,\lambda^r}(q, t) = \sum_{\{\square_1,\ldots,\square_s\} \subset \lambda^{[r]} \setminus (1,1)} \mathcal{I}_{G^{\square_1,\ldots,\square_s}_{\lambda^1,\ldots,\lambda^r}}(q)\, t^{\sum_{1 \leq i \leq s} \ell'_{\lambda^{[r]}}(\square_i)}, \tag{23}$$

gdzie $\ell'_\lambda(\square)$ oznacza długości ko-nogi klatki $\square$ w λ (patrz Rys. 1).

Innym zastosowaniem mojego wzoru jest dodatni wzór wyrażający kumulanty Macdonalda w bazie fundamentalnych funkcji kwazi-symetrycznych. Te funkcje nie są symetryczne – tworzą one bazę większej algebry funkcji kwazi-symetrycznych, która zawiera w sobie algebrę funkcji symetrycznych.

Definicja 2.30 ([Ges84])**.** *Dla dowolnej nieujemnej liczby całkowitej n oraz podzbioru $D \subset [n-1]$* fundamentalna funkcja kwazi-symetryczna $F_{n,D}(\boldsymbol{x})$ *stopnia n zmiennych*

$\boldsymbol{x} = x_1, x_2, \ldots$ *zadana jest następującym wzorem*

$$F_{n,D}(\boldsymbol{x}) := \sum_{\substack{i_1 \leq \cdots \leq i_n \\ j \in D \Rightarrow i_j < i_{j+1}}} x_{i_1} \cdots x_{i_n}.$$

Dla ustalonej permutacji $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, oraz diagramu Younga $\lambda \vdash n$, można wypełnić komórki λ literami słowa σ zgodnie z porządkiem czytania (Rozdział 1.3) co zadaje wypełnienie $\sigma : \lambda \to \mathbb{N}_+$. Liczba $i < n$, jest *odwrotnym spadkiem* permutacji σ jeśli $i + 1$ leży na lewo od i w słowie σ. Niech $\mathrm{iDes}(\sigma)$ oznacza zbiór odwrotnych spadków permutacji σ. W pracy [Hab5] udowodniłem, że kumulanty Macdonalda wyrażają się w bazie fundamentalnych funkcji kwazi-symetrycznych następującym wzorem:

Twierdzenie 2.31. *Ustalmy partycje $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$. Wówczas zachodzi następujący wzór:*

$$\kappa(\lambda^1, \ldots, \lambda^r) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathcal{I}_{G^{\sigma}_{\lambda^1, \ldots, \lambda^r}}(q)\, t^{\mathrm{maj}_{\lambda^{[r]}}(\sigma)}\, F_{n, \mathrm{iDes}(\sigma)}, \tag{24}$$

gdzie suma przebiega po wszystkich permutacjach zbioru $[n]$.

3. Podsumowanie

Podsumowując, moje badania przedstawione w osiągnięciu habilitacyjnym osadzone są w dziedzinie teorii funkcji symetrycznych, ale również wychodzą poza tę dziedzinę ze względu na interdyscyplinarną naturę badanych przeze mnie funkcji. Główną tematyką przedstawionych przeze mnie badań jest jeden z najważniejszych problemów otwartych dotyczących funkcji symetrycznych Jacka, zwany Hipotezą–b, który pozostaje otwarty od niemal 25 lat. Moje osiągnięcie habilitacyjne w znacznym stopniu rozwiązuje ten problem i poszerza ogólną wiedzę na temat struktury funkcji Jacka, oraz niezwykłego związku między funkcjami Jacka, a mapami. Ponadto w moich pracach przedstawiam liczne implikacje, związki, oraz nowe kierunki badań bezpośrednio wynikające z badań nad Hipotezą–b. W szczególności opisałem wiele własności strukturalnych map, które pełnią kluczową rolę w problemie ich zliczania i stanowią duży postęp w teorii map rozszerzając wyniki znane tylko w przypadku orientowalnym, do przypadku dowolnych powierzchni. Wreszcie, moje badania prowadzone w obrębie teorii funkcji symetrycznych wychodzą poza teorię funkcji Jacka i pozwoliły mi odkryć nowe własności funkcji Macdonalda, które przyniosły nieznane wcześniej związki między nimi, a innymi dziedzinami matematyki, jak również pozwoliły stworzyć nowy program badawczy z licznymi hipotezami badawczymi.

Literatura

[BC86] E. A. Bender and E. R. Canfield, *The asymptotic number of rooted maps on a surface*, J. Combin. Theory Ser. A **43** (1986), no. 2, 244–257. MR 867650 (88a:05080) 14

[BC14] A. Borodin and I. Corwin, *Macdonald processes*, Probab. Theory Related Fields **158** (2014), no. 1-2, 225–400. 3

[Bet10] J. Bettinelli, *Scaling limits for random quadrangulations of positive genus*, Electron. J. Probab. **15** (2010), no. 52, 1594–1644. MR 2735376 (2011h:60070) 27

[BJ07] D. R. L. Brown and D. M. Jackson, *A rooted map invariant, non-orientability and Jack symmetric functions*, J. Combin. Theory Ser. B **97** (2007), no. 3, 430–452. MR 2305897 (2007m:05225) 16

[BO05] A. Borodin and G. Olshanski, *Z-measures on partitions and their scaling limits*, European Journal of Combinatorics **26** (2005), no. 6, 795–834. 3

[BT64] W. G. Brown and W. T. Tutte, *On the enumeration of rooted non-separable planar maps*, Canadian J. Math. **16** (1964), 572–577. MR 177906 14

[CD15] G. Chapuy and M. Dołęga, *A bijection for rooted maps on general surfaces (extended abstract)*, 27th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2015), Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., FPSAC'15, Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2015, pp. 181–192. 38

[CD17] ———, *A bijection for rooted maps on general surfaces*, J. Combin. Theory Ser. A **145** (2017), 252–307. MR 3551653 38

[Che13] I. Cherednik, *Jones polynomials of torus knots via DAHA*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2013** (2013), no. 23, 5366–5425. MR 3142259 3

[CMS09] G. Chapuy, M. Marcus, and G. Schaeffer, *A bijection for rooted maps on orientable surfaces*, SIAM Journal on Discrete Mathematics **23** (2009), no. 3, 1587–1611. 14

[CS04] P. Chassaing and G. Schaeffer, *Random planar lattices and integrated superBrownian excursion*, Probab. Theory Related Fields **128** (2004), no. 2, 161–212. MR MR2031225 (2004k:60016) 14, 27

[CV81] R. Cori and B. Vauquelin, *Planar maps are well labeled trees*, Canad. J. Math. **33** (1981), no. 5, 1023–1042. MR MR638363 (83c:05070) 14, 24

[DF16] M. Dołęga and V. Féray, *Gaussian fluctuations of Young diagrams and structure constants of Jack characters*, Duke Math. J. **165** (2016), no. 7, 1193–1282. MR 3498866 16

[DFS09] M. Dołęga, V. Féray, and P. Śniady, *Characters of symmetric groups in terms of free cumulants and Frobenius coordinates*, 21st International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2009), Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AK, Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2009, pp. 337–348. MR 2721524 38

[DFŚ10] M. Dołęga, V. Féray, and P. Śniady, *Explicit combinatorial interpretation of Kerov character polynomials as numbers of permutation factorizations*, Adv. Math. **225** (2010), no. 1, 81–120. MR 2669350 (2011i:05267) 38

[Eyn16] Bertrand Eynard, *Counting surfaces*, Progress in Mathematical Physics, vol. 70, Birkhäuser/Springer, [Cham], 2016, CRM Aisenstadt chair lectures. MR 3468847 15

[Fér13] V. Féray, *Asymptotic behavior of some statistics in Ewens random permutations*, Electron. J. Probab **18** (2013), no. 76, 1–32. 18

[Ges84] I. M. Gessel, *Multipartite P-partitions and inner products of skew Schur functions*, Combinatorics and algebra (Boulder, Colo., 1983), Contemp. Math., vol. 34, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984, pp. 289–317. MR 777705 34

[Ges95] ———, *Enumerative applications of a decomposition for graphs and digraphs*, Discrete Math. **139** (1995), no. 1-3, 257–271, Formal power series and algebraic combinatorics (Montreal, PQ, 1992). MR 1336842 31

[GH93] A. Garsia and M. Haiman, *A graded representation model for Macdonald's polynomials*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **90** (1993), no. 8, 3607–3610. MR 1214091 8

[GHJ01] I. P. Goulden, J. L. Harer, and D. M. Jackson, *A geometric parametrization for the virtual Euler characteristics of the moduli spaces of real and complex algebraic curves*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 11, 4405–4427 (electronic). MR 1851176 (2002g:14035) 16, 20

[GJ96a] I. P. Goulden and D. M. Jackson, *Connection coefficients, matchings, maps and combinatorial conjectures for Jack symmetric functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), no. 3, 873–892. MR 1325917 (96m:05196) 11, 12, 16

[GJ96b] ———, *Maps in locally orientable surfaces, the double coset algebra, and zonal polynomials*, Canad. J. Math. **48** (1996), no. 3, 569–584. MR 1402328 (97h:05051) 14, 22

[GJ97] ———, *Maps in locally orientable surfaces and integrals over real symmetric surfaces*, Canad. J. Math. **49** (1997), no. 5, 865–882. MR MR1604106 (99d:05042) 20

[GP92] A. M. Garsia and C. Procesi, *On certain graded S_n-modules and the q-Kostka polynomials*, Adv. Math. **94** (1992), no. 1, 82–138. MR 1168926 8

[GS96] I. M. Gessel and B. E. Sagan, *The Tutte polynomial of a graph, depth-first search, and simplicial complex partitions*, Electron. J. Combin. **3** (1996), no. 2, Research Paper 9, approx. 36 pp. The Foata Festschrift. MR 1392494 31

[GT96] A. Garsia and G. Tesler, *Plethystic formulas for Macdonald q, t-Kostka coefficients*, Adv. Math. **123** (1996), no. 2, 144–222. 10

[Hag04] J. Haglund, *A combinatorial model for the Macdonald polynomials*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **101** (2004), no. 46, 16127–16131. MR 2114585 10

[Hai01] M. Haiman, *Hilbert schemes, polygraphs and the Macdonald positivity conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 4, 941–1006. MR 1839919 3, 8, 10, 30

[HHL05] J. Haglund, M. Haiman, and N. Loehr, *A combinatorial formula for Macdonald polynomials*, J. Amer. Math. Soc. **18** (2005), no. 3, 735–761. MR 2138143 3, 9, 10, 11, 31

[HLRV11] T. Hausel, E. Letellier, and F. Rodriguez-Villegas, *Arithmetic harmonic analysis on character and quiver varieties*, Duke Math. J. **160** (2011), no. 2, 323–400. MR 2852119 3

[HRV08] T. Hausel and F. Rodriguez-Villegas, *Mixed Hodge polynomials of character varieties*, Invent. Math. **174** (2008), no. 3, 555–624, With an appendix by Nicholas M. Katz. MR 2453601 3

[HZ86] J. Harer and D. Zagier, *The Euler characteristic of the moduli space of curves*, Inventiones mathematicae **85** (1986), no. 3, 457–485. 14

[Jac71] H. Jack, *A class of symmetric polynomials with a parameter*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **69** (1970/1971), 1–18. MR MR0289462 (44 #6652) 8

[JV90] D. M. Jackson and T. I. Visentin, *A character-theoretic approach to embeddings of rooted maps in an orientable surface of given genus*, Trans. Amer. Math. Soc. **322** (1990), no. 1, 343–363. MR 1012517 (91b:05093) 14, 22

[Kad97] K. W. J. Kadell, *The Selberg-Jack symmetric functions*, Adv. Math. **130** (1997), no. 1, 33–102. MR MR1467311 (98k:05141) 3, 8

[KN98] A. Kirillov and M. Noumi, *Affine Hecke algebras and raising operators for Macdonald polynomials*, Duke Math. J. **93** (1998), no. 1, 1–39. 10

[Kno97] F. Knop, *Integrality of two variable Kostka functions*, Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik (1997), 177–189. 10

[KS97] F. Knop and S. Sahi, *A recursion and a combinatorial formula for Jack polynomials*, Invent. Math. **128** (1997), no. 1, 9–22. MR 1437493 3, 9

[La 09] M. A. La Croix, *The combinatorics of the Jack parameter and the genus series for topological maps*, Ph.D. thesis, University of Waterloo, 2009. 16, 20

[Le 06] J.-F. Le Gall, *A conditional limit theorem for tree-indexed random walk*, Stochastic processes and their applications **116** (2006), no. 4, 539–567. 27

[Le 13] ———, *Uniqueness and universality of the Brownian map*, Ann. Probab. **41** (2013), no. 4, 2880–2960. MR 3112934 14

[LLT97] A. Lascoux, B. Leclerc, and J.-Y. Thibon, *Ribbon tableaux, Hall-Littlewood functions, quantum affine algebras, and unipotent varieties*, J. Math. Phys. **38** (1997), no. 2, 1041–1068. MR 1434225 3

[LV95] L. Lapointe and L. Vinet, *A Rodrigues formula for the Jack polynomials and the Macdonald-Stanley conjecture*, Internat. Math. Res. Notices **1995** (1995), no. 9, 419–424. MR 1360620 (96i:33018) 9

[LV97] ———, *Rodrigues formulas for the Macdonald polynomials*, Adv. Math. **130** (1997), no. 2, 261–279. MR 1472319 (99e:05128) 10

[LZ04] S. K. Lando and A. K. Zvonkin, *Graphs on surfaces and their applications*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 141, Springer-Verlag, Berlin, 2004, With an appendix by Don B. Zagier. MR 2036721 (2005b:14068) 15

[Mac88] I. G. Macdonald, *A new class of symmetric functions*, Publ. IRMA Strasbourg **372** (1988), 131–171. 7, 8, 30

[Mac95] ———, *Symmetric functions and Hall polynomials*, second ed., Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1995, With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications. MR 1354144 7, 9, 29

[Mie13] G. Miermont, *The Brownian map is the scaling limit of uniform random plane quadrangulations*, Acta Math. **210** (2013), no. 2, 319–401. MR 3070569 14

[ML97] C. Merino López, *Chip firing and the Tutte polynomial*, Ann. Comb. **1** (1997), no. 3, 253–259. MR 1630779 31

[Oko97] A. Okounkov, *Proof of a conjecture of Goulden and Jackson*, Canad. J. Math. **49** (1997), no. 5, 883–886. MR 1604110 20

[OO97] Andrei Okounkov and Grigori Olshanski, *Shifted Jack polynomials, binomial formula, and applications*, Math. Res. Lett. **4** (1997), no. 1, 69–78. MR MR1432811 (98h:05177) 3, 8

[PS04] A. Postnikov and B. Shapiro, *Trees, parking functions, syzygies, and deformations of monomial ideals*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), no. 8, 3109–3142. MR 2052943 31

[Sah96] S. Sahi, *Interpolation, integrality, and a generalization of Macdonald's polynomials*, Internat. Math. Res. Notices **1996** (1996), no. 10, 457–471. 10, 28, 29

[Sat89] M. Sato, *The KP hierarchy and infinite-dimensional Grassmann manifolds*, Theta functions—Bowdoin 1987, Part 1 (Brunswick, ME, 1987), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 49, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, pp. 51–66. MR 1013125 5

[Sch99] Gilles Schaeffer, *Conjugaison d'arbres et cartes combinatoires aléatoires*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 1999. 14, 15, 25

[SS83] M. Sato and Y. Sato, *Soliton equations as dynamical systems on infinite-dimensional Grassmann manifold*, Nonlinear partial differential equations in applied science (Tokyo, 1982), North-Holland Math. Stud., vol. 81, North-Holland, Amsterdam, 1983, pp. 259–271. MR 730247 5

[Sta89] R. P. Stanley, *Some combinatorial properties of Jack symmetric functions*, Adv. Math. **77** (1989), no. 1, 76–115. MR 1014073 (90g:05020) 3, 7, 8, 9, 11, 19

[Tut62] William Thomas Tutte, *A census of planar triangulations*, Canad. J. Math **14** (1962), no. 1, 21–38. 14, 21

[Tut63] ———, *A census of planar maps*, Canad. J. Math. **15** (1963), 249–271. MR 0146823 (26 #4343) 14, 21, 24

[WL72] T. R. S. Walsh and A. B. Lehman, *Counting rooted maps by genus. I*, J. Combinatorial Theory Ser. B **13** (1972), 192–218. MR 314686 14

Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej, w szczególności zagranicznej.

Pierwszą aktywność naukową, realizowaną poza macierzystą jednostką, rozpocząłem jeszcze podczas studiów magisterskich. Po rozmowie z opiekunem naukowym postanowiłem odbyć semestralny staż na **Uniwersytecie Kopenhaskim**, aby nauczyć się przedmiotów niewykładanych w mojej jednostce macierzystej, takich jak geometria algebraiczna, kohomologie de Rhama, czy KK-teoria. Również podczas studiów magisterskich rozpocząłem współpracę naukową z Valentinem Férayem, wówczas z **Université Paris-Est Marne-la-Vallée**, z którym wraz z moim promotorem Piotrem Śniadym napisaliśmy prace [DFS09, DFŚ10].

Studia doktoranckie odbywałem na **Uniwersytecie Wrocławskim** w ramach programu *Środowiskowe Studia Doktoranckie z Nauk Matematycznych*. Odbyłem wówczas staż semestralny na **Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza** w Poznaniu. Istotną częścią moich badań naukowych prowadzonych podczas studiów doktoranckich były liczne wyjazdy na międzynarodowe konferencje, warsztaty, czy seminaria. W szczególności, wystąpiłem wówczas na pięciu konferencjach z odczytem, gdzie dwa odczyty wygłosiłem na zaproszenie, w takich jednostkach jak **Uniwersytet w Bielefeldzie, Instytut Erwina Schrödingera, Uniwersytet w Reykjaviku, Instytut Henri Poincarégo** oraz w ośrodku konferencyjnym **S. Miguel de Seide** w Portugalii. Ponadto wygłosiłem cztery wykłady na zaproszenie na seminariach w macierzystym **Uniwersytecie Wrocławskim** jak również w **Uniwersytet w Bordeaux** oraz **Instytucie Matematycznym PAN**. Podczas studiów doktoranckich realizowałem również współpracę naukową z Valentinem Féraya, między innymi podczas dwutygodniowego pobytu w **Uniwersytecie w Bordeaux**.

Po obronie doktoratu wygrałem konkurs na stanowisko postdoka realizowane na **Université Paris Diderot** w latach 2013–2015 w ramach grantu **Cartaplus** finansowanego przez francuską **Agence Nationale de la Recherche**. Tam nawiązałem współpracę z Guillaumem Chapuy, co zaowocowało publikacjami [CD15, CD17]. Następnie, w ramach przyznanego mi grantu FUGA przez Narodowe Centrum Nauki, otrzymałem podoktorskie stanowisko badawcze adiunkta na **Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza** w Poznaniu w latach 2015–2018. Od 2018 roku realizuję moje badania w **Instytucie Matematycznym PAN**, gdzie

jestem zatrudniony do dziś. W okresie po doktoracie rozszerzałem doświadczenie badawcze podczas licznych spotkań naukowych na całym świecie: w szczególności moje osiągnięcia naukowe prezentowałem podczas odczytów wygłoszonych na szesnastu międzynarodowych konferencjach, w tym dziewięciu na zaproszenie, które miały miejsce w siedmiu różnych krajach (dodatkowo jeden odczyt na zaproszenie został przełożony na rok 2021, ze względu na pandemię COVID-19, szczegóły w Załączniku 6). Ponadto, wygłosiłem szereg wykładów na zaproszenie na seminariach w kraju w takich jednostkach jak **Uniwersytet Jagielloński, Uniwersytet Wrocławski, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, Uniwersytet Gdański, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie** czy **Instytut Matematyczny PAN** oraz za granicą w **Królewskim Instytucie Technologicznym w Sztokholmie, Université Paris Diderot, École Politechnique, czy Uniwersytecie w Zürychu**. Oprócz wyjazdów na konferencje oraz warsztaty naukowe, moją współpracę realizowałem między innymi podczas wizyt na zaproszenie w takich jednostkach naukowych jak **Université Paris Diderot, Uniwersytet w Zürychu** czy **UCSD**. Wynikiem mojej międzynarodowej współpracy w tym okresie są publikacje i preprinty, których łączna liczba współautorów to sześcioro badaczek i badaczy, a lista afiliacji obejmuje następujące jednostki naukowe: **Politechnika Federalna w Lozannie, École Politechnique, Université Paris Diderot, Uniwersytet w Zürychu, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, Instytut Matematyczny PAN, Uniwersytet Wrocławski**.

Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę.

Uwaga: Po obronie doktoratu habilitant zawsze zatrudniony był na stanowisku naukowym, nie zaś na stanowisku naukowo-dydaktycznym; w szczególności do jego obowiązków nie należała realizacja zajęć dydaktycznych, a wymagane pensum dydaktyczne wynosiło 0 godzin.

Osiągnięcia dydaktyczne

W latach 2007–2010 pracowałem w "tutorni" Instytutu Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, udzielając konsultacji dydaktycznych studentom studiów licencjackich. W latach akademickich 2010/2011 oraz 2011/2012 prowadziłem ćwiczenia z przedmiotu *Kombinatoryka i Elementy Rachunku Prawdopodobieństwa B* na Uniwersytecie Wrocławskim. W roku akademickim 2017/2018 prowadziłem reading course *Kombinatoryka funkcji symetrycznych* na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza, zaś w roku akademickim 2018/2019 ten sam kurs prowadziłem na Uniwersytecie Jagiellońskim. W roku 2019 prowadziłem dwa wykłady pt. "Introduction to finite groups of Lie type" w ramach *Szkoły Przygotowawczej do XXI Wykładu im. A. Jankowskiego* zorganizowanej na Uniwersytecie Pedagogicznym w Krakowie. W roku akademickim 2019/2020 prowadziłem reading course *Kombinatoryczna teoria reprezentacji* w Instytucie Matematycznym PAN.

Opieka nad doktorantami

W latach 2015–2018 byłem promotorem pomocniczym Adama Burchardta, który obronił swoją pracę doktorską na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. W roku

2018 rozpocząłem opiekę naukową nad Maciejem Kowalskim, który wygrał konkurs na stypendium doktoranckie realizowane w ramach grantu SONATA "Kombinatoryka funkcji symetrycznych" Narodowego Centrum Nauki, którego jestem kierownikiem. Maciej Kowalski aktualnie jest studentem trzeciego roku studiów doktoranckich w Instytucie Matematycznym PAN.

Osiągnięcia organizacyjne

W latach 2014–2015 byłem współorganizatorem *Seminarium kombinatoryki analitycznej, algebraicznej i enumeratywnej*, które odbywało się na Université Paris Diderot. W roku 2019, we współpracy z matematykami z Uniwersytetu Jagiellońskiego oraz Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie, rozpoczęliśmy organizację nowego seminarium badawczego – *Kraków Combinatorics Seminar*, które organizujemy do dziś. Ponadto w roku 2020 wspólnie z Maciejem Kowalskim, Tomaszem Szembergiem, Piotrem Śniadym i Jacintą Torres zorganizowaliśmy workshop *Algebraic Combinatorics Kraków 2020*, który miał odbyć się w lipcu 2020 na Uniwersytecie Pedagogicznym w Krakowie. Z powodu pandemii COVID-19, byliśmy zmuszeni zmienić datę spotkania na 12-16 lipca 2021.

Osiągnięcia popularyzujące naukę

W latach 2006–2010 prowadziłem serię wykładów dla uzdolnionych licealistów na obozach matematycznych organizowanych przez *Fundację Matematyków Wrocławskich*. Ponadto w latach 2008–2013 byłem jednym z prowadzących *matematyczne kółko olimpijskie* dla uczniów przygotowujących się do olimpiady matematycznej, organizowane przez Liceum im. Stefana Żeromskiego w Jeleniej Górze przy współpracy z Uniwersytetem Wrocławskim. W latach 2016 i 2017 prowadziłem wykłady popularno–naukowe w ramach "Festiwalu Matematyki", "Spotkań z Matematyką" oraz "Potęgi Matematyki" organizowanych przez *Poznańską Fundację Matematyczną*. W roku 2020 wygłosiłem wykład popularyzujący kombinatorykę algebraiczną na zaproszenie *Koła Naukowego Matematyków Teoretyków* na konferencji studenckiej i doktoranckiej "Baby Horizon" zorganizowanej w Będlewie.

Inne informacje

Wybrane stypendia i nagrody

2018–2021 **Stypendium Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego** dla wybitnych młodych naukowców.

2018 **Nagroda Rektora za działalność naukową** (*Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu*).

2016 Laureat **Nagrody Naukowej "POLITYKI"** w dziedzinie nauk ścisłych (*Tygodnik "POLITYKA"*).

2016 **Stypendium START** (*Fundacja na rzecz Nauki Polskiej*).

2014 Nominacja do nagrody **The International Stefan Banach Prize** za rozprawę doktorską (*Polskie Towarzystwo Matematyczne*).

2013–2015 **Stypendium "Cartaplus"** (postdoc na Université Paris Diderot, LIAFA).

2012–2013 **Stypendium im. Hugona Steinhausa** (Wrocławskie Centrum Akademickie).

2010 **I nagroda w Konkursie im. Marcinkiewicza**, konkurs na najlepszą studencką pracę matematyczną (*Polskie Towarzystwo Matematyczne*).

2008–2010 **Stypendium Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego** za wybitne osiągnięcia.

Maciej Dołęga