

Warszawa, 17 sierpnia 2021 r.

prof. dr hab. Zbigniew Lonc
Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych
Politechnika Warszawska
ul. Koszykowa 75
00-662 Warszawa

**Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym
doktora Macieja Dołęgi**

Osiągnięcie naukowe dr. Macieja Dołęgi wymagane w art. 219 ust. 1 pkt 2b ustawy Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, stanowi cykl powiązanych tematycznie pięciu artykułów naukowych. Dotyczą one związków wielomianów symetrycznych Jacka i Macdonalda oraz pewnych i ich uogólnień z własnościami różnych struktur kombinatorycznych takich jak mapy, grafy, czy diagramy Younga. Bardzo interesującą własnością wielomianów Jacka i Macdonalda jest pewne przenikanie się ich algebraicznej i kombinatorycznej struktury. Dzięki temu istnieje możliwość stosowania różnorodnych metod do poznania ich własności. Co więcej, tematyka ta jest powiązana z kilkoma jeszcze innymi działami matematyki, w związku z czym uzyskiwane rezultaty mają swoje konsekwencje, interpretacje i zastosowania w tych działach, m. in. w statystyce, teorii reprezentacji grup, probabilistyce, a także w fizyce kwantowej. Wszystko to sprawia, że tematyka badawcza podjęta przez dr. Dołęgę jest bardzo atrakcyjna i stanowi przedmiot badań wielu wybitnych matematyków.

Dr Dołęga jest jedynym autorem trzech spośród prac wchodzących w skład omawianego osiągnięcia naukowego oraz jednym z dwóch współautorów pozostałych dwóch prac. W przedłożonej dokumentacji znajdują się oświadczenia współautorów oraz samego dr. Dołęgi dotyczące wkładu w powstanie tych dwóch współautorskich prac. Wynika z nich, że w obu przypadkach wkład dr. Dołęgi był znaczący i porównywalnie duży w stosunku do wkładu drugiego współautora.

Praca [Hab1]¹ dotyczy tzw. Hipotezy *b*. Jest to zadziwiająca hipoteza postawiona w 1996 roku przez Gouldena i Jacksona, która mówi, że pewna

¹W niniejszej recenzji stosuję numerację prac zgodną ze znajdującym się w dokumentacji „Wykazem osiągnięć naukowych” Kandydata.

funkcja zawierająca parametr b zdefiniowana z użyciem wielomianów Jacka jest ważoną funkcją tworzącą wielu zmiennych dla liczby pewnego rodzaju map, w szczególności współczynniki rozwinięcia tej funkcji w szereg potęgowy są wielomianami o nieujemnych całkowitych współczynnikach względem b . Ten przewidywany związek wielomianów Jacka z mapami jest to dość zaskakujący ponieważ na ogół strukturami kombinatorycznymi związanymi z wielomianami symetrycznymi są diagramy Younga, a nie mapy. Do tej pory udowodnione zostały tylko bardzo szczególne przypadki Hipotezy- b , w których daje się wykorzystać związki wielomianów Jacka z innymi działami matematyki. Głównym rezultatem zawartym w pracy [Hab1] jest ogólny wynik o charakterze algebraicznym mówiący, że współczynniki rozwinięcia funkcji występującej w tej hipotezie są istotnie wielomianami względem b . Dowód tego wyniku jest skomplikowany i składa się z kilku etapów. Autorzy wykorzystują swój wcześniejszy rezultat (z pracy nie wchodzącej w zakres omawianego osiągnięcia naukowego), który implikuje, że współczynniki szeregu potęgowego, którego dotyczy Hipoteza- b , są funkcjami wymiernymi względem b o biegunach możliwych jedynie w $b = -1$. Następnie znajdują związek rozważanego problemu z wywodzącą się z rachunku prawdopodobieństwa teorią kumulant i pokazują, że ten problem daje się sprowadzić do pewnej własności kumulant powiązanych z pewnymi funkcjami zdefiniowanymi z użyciem wielomianów Jacka (tę własność nazywają własnością małych kumulant). Do pokazania tej ostatniej własności Autorzy używają metod kombinatorycznych oraz metod pochodzących z geometrii różniczkowej. Jak widać z tego co napisałem powyżej, dowód głównego wyniku w pracy [Hab1] wymaga różnorodnych metod pochodzących z różnych działów matematyki.

Praca [Hab2] również dotyczy Hipotezy- b . Autor dowodzi w niej pewnego ogólnego wyniku dotyczącego tej hipotezy, z którego wynika między innymi, że Hipoteza- b jest prawdziwa dla $b = -1$. Wcześniej jej prawdziwość była znana jedynie dla $b = 0$ i $b = 1$, co udowodnione zostało jeszcze w latach 90-tych XX wieku. Innym ciekawym wnioskiem jest wynik mówiący, że pewne współczynniki w rozwinięciu funkcji występującej w Hipotezie- b w szereg potęgowy istotnie są takie jak przewiduje ta hipoteza. Współczynniki te mają interpretacje w terminach map niskiego genusu o jednej ścianie. Do dowodu tych rezultatów Autor użył metod zarówno kombinatorycznych, jak i algebraicznych.

Praca [Hab3] dotyczy problemu istnienia bijekcji pomiędzy pewnego rodzaju mapami, a poetykietowanymi mapami o jednej ścianie. Problem ten ma związek ze zliczaniem ukorzenionych map na dowolnych powierzchniach.

Istnienie takiej bijekcji dla map planarnych zostało pokazane już w roku 1981 przez Coriego i Vauquelina, a dla map na powierzchniach orientowalnych przez Schaeffera w roku 1999. Istnienie takiej bijekcji dla map niorientowalnych było do tej pory problemem otwartym. W pracy [Hab3] Autorzy rozwiązali ten problem pokazując istnienie tej bijekcji dla map na dowolnych powierzchniach. Kombinatoryczny dowód tego rezultatu opiera się na daleko idącym rozwinięciu metody Schaeffera i jest technicznie złożony. Wnioskiem z tego wyniku jest między innymi asymptotyka na liczbę ukorzenionych map na dowolnej powierzchni. Asymptotyka ta znaleziona została jeszcze w roku 1986 przez Bendera i Canfielda z użyciem metod analitycznych. Praca [Hab3] zawiera pierwszy czysto kombinatoryczny dowód tej asymptotyki. Inną konsekwencją głównego rezultatu zawartego w pracy [Hab3] jest pewien wynik odnoszący się do własności metrycznych losowych powierzchni, który uogólnia wcześniejszy rezultat dotyczący powierzchni orientowalnych na powierzchnie nieorientowalne.

Tematyka pracy [Hab4] wiąże się z tematyką pracy [Hab1], w której między innymi udowodniono tzw. własność małych kumulant dla wielomianów Jacka. W pracy [Hab4] znajdujemy uogólnienie tego wyniku, a mianowicie pokazanie własności małych kumulant dla pewnej zmodyfikowanej wersji wielomianów Macdonalda (wielomiany Jacka są granicznym przypadkiem wielomianów Macdonalda). Dowód tego rezultatu został uzyskany podobnymi metodami jak te użyte w pracy [Hab1], ale wymagał istotnego rozbudowania i modyfikacji tych metod. Jako wniosek z głównego wyniku pracy [Hab4] Autor dostaje rezultat dotyczący kumulant zdefiniowanych dla wielomianów Macdonalda będący uogólnieniem twierdzenia udowodnionego pod koniec lat 90-tych XX wieku niezależnie przez wielu autorów mówiącego, że współczynniki tzw. transformowalnej wersji wielomianów Macdonalda w bazie wielomianów Schura są wielomianami o całkowitych współczynnikach. W pracy [Hab4] Autor stawia hipotezę, że w tym uogólnieniu (tak jak pokazano wcześniej w podstawowej wersji) te współczynniki są nieujemne.

Ta ostatnia hipoteza jest punktem wyjścia do rozważań, których rezultaty zawarte są w pracy [Hab5]. Spodziewana nieujemność współczynników, o których mowa w tej hipotezie sugeruje istnienie kombinatorycznej interpretacji tych współczynników. W pracy [Hab5] Autorowi udaje się znaleźć taką interpretację, co prawda nie dla rozwinięć kumulant dla wielomianów Macdonalda w bazie wielomianów Schura, lecz w bazie wielomianów jednomianów symetrycznych. Jest to bardzo skomplikowana interpretacja z użyciem tzw. wielomianów G-inwersji (ściśle powiązanych ze znanymi wielomianami

Tutte'a) zdefiniowanych dla pewnych multigrafów, w których definicji istotną rolę odgrywają diagramy Younga. Odkrycie tak skomplikowanej interpretacji kombinatorycznej świadczy o niezwyklej dociekliwości i biegłości technicznej Autora. Wynik ten, jako szczególny przypadek, zawiera słynny rezultat udowodniony przez Haglunda, Haimana i Loehra w roku 2005, który dotyczy interpretacji kombinatorycznej samych wielomianów Macdonalda. Wnioskiem z głównego wyniku pracy [Hab5] jest rezultat, który stanowi interpretację kombinatoryczną współczynników rozwinięć kumulant dla wielomianów Macdonalda w bazie wielomianów Schura indeksowanych szczególnymi partycjami, które Autor nazywa „hakami” (kształt ich diagramów Younga w istocie przypomina hak). Stanowi to potwierdzenie hipotezy sformułowanej w pracy [Hab4] dla tych szczególnych współczynników.

Moja ocena omówionego wyżej osiągnięcia naukowego dr. Macieja Dołęgi jest wysoka. Uważam, że uzyskane przez niego wyniki są na bardzo dobrym poziomie naukowym. Dr Dołęga uzyskał szereg rezultatów, które są odpowiedziami lub częściowymi odpowiedziami na ważne w uprawianej przez niego dziedzinie matematyki pytania i hipotezy postawione wiele lat temu. Jest to tym bardziej godne uznania, że problemy te były i są w kręgu zainteresowania wielu wybitnych matematyków. Dowody tych wyników są skomplikowane. Wymagały dogłębnego zrozumienia rozważanych problemów i niejednokrotnie dużej biegłości technicznej. Dowody te zawierają zarówno wiele nowych pomysłów, jak i opierają się na twórczym rozwinięciu i wzmocnieniu metod innych autorów. Specyfika tematyki, w której mieszczą się omówione wyniki wymaga dogłębnej znajomości kilku działów matematyki i używanych w nich metod. Dr Dołęga znakomicie posługuje się w swoich pracach nie tylko metodami kombinatorycznymi i algebraicznymi, ale także metodami pochodzącymi z teorii reprezentacji czy probabilistyki. Ta szerokość horyzontów naukowych i różnorodność metod, którymi biegle posługuje się dr. Dołęga jest, moim zdaniem, jednym z głównych źródeł jego sukcesu. Wyniki składające się na omówione osiągnięcie naukowe zostały opublikowane w bardzo dobrych czasopismach matematycznych. Są wśród nich między innymi Transactions of the American Mathematical Society, Journal of Combinatorial Theory, Ser. A, czy Journal of Algebraic Combinatorics. Prace te mają już całkiem sporo cytowań. Na koniec mojej oceny osiągnięcia naukowego dr. Dołęgi warto wspomnieć o bardzo dobrze, dojrzałe i z dużą kulturą matematyczną napisanym autoreferacie. W przystępny sposób przybliży on czytelnikowi tło naukowe omawianych prac, jak i wyniki zawarte w tych pracach. Jedynym mankamentem tego autoreferatu jest dość duża

liczba drobnych pomyłek (głównie w oznaczeniach), które nieco utrudniają czytanie tekstu.

Konkludując część mojej recenzji dotyczącą oceny osiągnięcia habilitacyjnego, nie mam żadnej wątpliwości, że rezultaty zawarte w pracach składających się na to osiągnięcie stanowią znaczny wkład w rozwój dyscypliny matematyka. Uważam więc, że spełniony jest warunek sformułowany w art. 219 ust. 1 pkt 2b ustawy Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce.

Równie entuzjastycznie wypada moja ocena aktywności naukowej dr. Dołęgi. Poza pięcioma pracami wchodzącymi w skład osiągnięcia habilitacyjnego dr Dołęga jest autorem lub współautorem 13 artykułów naukowych. Ich tematyka mieści się w przeważającej mierze w różnych nurtach algebraicznej kombinatoryki. Niemal wszystkie te prace są opublikowane w bardzo dobrych czasopismach matematycznych. Znajdujemy tam między innymi prace, które ukazały się w *Advances in Mathematics* oraz w *Duke Mathematical Journal*. Prace autorstwa dr. Dołęgi mają sporo cytowań. Baza MathSciNet odnotowuje ich 106, a indeks Hirscha dr. Dołęgi (według tej samej bazy) wynosi 6.

Dr Dołęga wygłosił referaty na 22 konferencjach naukowych w wielu krajach (poza Polską m. in. we Francji, USA, Kanadzie, Niemczech), przy czym w większości były to referaty na zaproszenie. Wygłosił także kilkanaście wykładów na seminariach naukowych prowadzonych w różnych instytucjach naukowych w Polsce i za granicą. Pracę naukową rozpoczął już w czasie studiów magisterskich, kiedy to podjął współpracę naukową z Piotrem Śniadym oraz Valentinem Férayem i opublikował wraz z nimi dwie pierwsze prace. Podczas studiów doktoranckich na Uniwersytecie Wrocławskim odbył 1-semesteralną staż na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, a po ukończeniu tych studiów wygrał konkursy na dwa staże podoktorskie: pierwszy (2-letni) na Uniwersytecie Paris VII, a drugi (3-letni) na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Odbył także pięć krótkich wizyt naukowych na uczelniach we Francji, Szwajcarii i USA. Nawiązane kontakty zaowocowały wieloletnią współpracą naukową, głównie z matematykami francuskimi, oraz wynikami opublikowanymi we współautorskich pracach. Wyrazem docenienia osiągnięć badawczych dr. Dołęgi przez środowisko naukowe jest fakt przyznania mu grantów. Dr Dołęga był lub jest kierownikiem trzech grantów przyznanych przez NCN (granty Preludium, Fuga i Sonata), a także wykonawcą trzech innych grantów przyznanych przez instytucje w Polsce i we Francji. Na koniec, warto odnotować, że dr Dołęga był promotorem pomocniczym w jednym zakończonym już pomyślnie przewodzie doktorskim, a

obecnie jest opiekunem naukowym kolejnego doktoranta.

Nawet to powyższe skrótkowe omówienie najważniejszych informacji dotyczących rozwoju naukowego dr. Dołęgi świadczy o jego wysokiej aktywności naukowej. W moim przekonaniu, jego dotychczasowy życiorys naukowy jest wzorcowym przykładem pomyślnego rozwoju naukowego młodego utalentowanego matematyka.

Tak więc bez wahania mogę wyrazić opinię, że dr Dołęga spełnia wszystkie warunki sformułowane w art. 216 ust. 1 ustawy Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, które są wymagane od kandydata do uzyskania stopnia naukowego doktora habilitowanego w dyscyplinie matematyka.

Zbigniew Adam