Tomasz Schoen
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4
61-614 Poznań
email: schoen@amu.edu.pl

Poznań, 13.08.2021

**Ocena dorobku doktora Macieja Dołęgi
w postępowaniu o nadanie stopnia doktora habilitowanego**

Pan dr Maciej Dołęga uzyskał stopień doktora nauk matematycznych na Uniwersytecie Wrocławskim w 2013 roku na podstawie rozprawy "Kombinatoryka asymptotycznej teorii reprezentacji grup permutacji" napisanej pod kierunkiem prof. dr hab. Piotra Śniadego. Od 2018 roku pracuje na stanowisku adiunkta w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk.

Dr Maciej Dołęga przedstawił osiągnięcie habilitacyjne zatytułowane "Struktura kombinatoryczna funkcji symetrycznych Jacka i Macdonalda, a własności enumeratywne grafów", które składa się z pięciu prac:

[Hab1] M. Dołęga, V. Féray, *Cumulants of Jack symmetric functions and the b-conjecture*, Trans. Amer. Math. Soc. 369 (2017), no. 12, 9015–9039.

[Hab1] M. Dołęga, *Top degree part in b-conjecture for unicellular bipartite maps,* Electron. J. Combin. 24 (2017), no. 3, Paper No. 3.24, 39 pp.

[Hab1] G. Chapuy, M. Dołęga, *A bijection for rooted maps on general surfaces,* J. Combin. Theory Ser. A 145 (2017), 252–307.

[Hab1] M. Dołęga, *Strong factorization property of Macdonald polynomials and higher-order Macdonald's positivity conjecture,* J. Algebraic Combin. 46 (2017), no. 1, 135–163.

[Hab1] M. Dołęga, *Macdonald cumulants, G-inversion polynomials and G-parking functions,* European J. Combin. 75 (2019), 172–194.

Są to obszerne publikacje, które ukazały się w dobrych bądź bardzo dobrych czasopismach, takich jak *Transactions of the American Mathematical Society*, czy *Journal of Combininatorial Theory Serie A.* Warto podkreślić, aż trzy prace są samodzielne, co jest rzadkością. Wyniki przedstawione w osiągnięciu habilitacyjnym przynależą do teorii funkcji symetrycznych, a szczególnie dotyczą jednej z najważniejszych hipotez tego obszaru matematyki tzw. Hipotezy-b (otwartej od 25 lat) podającej związek między funkcjami

Jacka a liczeniem map na dowolnych powierzchniach, przy zachowaniu kontroli nad ich strukturą. Poniżej omówię pokrótce prace wchodzące w skład osiągnięcia habilitacyjnego dra Dołęgi.

W pracy [Hab1] pokazana jest algebraiczna część Hipotezy-b dotycząca wielomianowości, która orzeka, że funkcja $\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}; t, 1+b)$ jest wielomianem zmiennej b o całkowitoliczbowych dodatnich współczynnikach. Autorzy udowodnili, że funkcja $\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}; t, 1+b)$, jest wielomianem zmiennej b o wymiernych współczynnikach. Jest to bardzo wartościowy wynik, który daje znaczny postęp w kierunku rozstrzygnięcia Hipotezy-b. Dotychczas Hipoteza-b dowodzona była tylko w różnych szczególnych przypadkach. Dowód głównego twierdzenia [Hab1] jest długi, zawiły i opiera się na szeregu redukcji oryginalnego problemu. Wykazano, że szereg potęgowy ψ ma naturalne rozwinięcie w terminach tzw. małych kumulant, a następnie autorzy udowodnili pewne własności małych kumulant, które odegrały kluczową rolę w ich rozumowaniu.

Naturalną kontynuacją pracy [Hab1] są badania nad częścią kombinatoryczną oraz dodatniością Hipotezy-b i temu problemowi poświęcona jest publikacja [Hab2]. Stosując argumenty algebraiczne i interpretując $\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}; t, 1+b)|_{\mathbf{r}=(1,1,\dots)}$ jako funkcję tworzacą pewnych map z wagami, Habilitant dowodzi słabej wersji Hipotezy-b przy podstawieniu $\mathbf{r} = (1, 1, \dots)$. Wynik ten jest wykorzystywany do pokazania dalszych rezultatów potwierdzających hipotezę dla map jednościennych. Hipoteza-b była inspirowana dwoma przypadkami dla $b = 0, 1$. Dr Dołęga wykazał, że zachodzi ona również dla $b = -1$ w przypadku map jednościennych. Kolejne twierdzenie uzyskane w tej pracy również potwierdza Hipotezę-b dla szczególnych partycji μ, ν, ρ spełniających następujące warunki: $\mu, \nu \vdash n$, $\rho = (n)$ oraz $\ell(\mu) + \ell(\nu) \geqslant n - 3$.

Kolejna publikacja [Hab3] dotyczy innej problematyki, a mianowicie bijektywnego zliczania map na dowolnych powierzchniach. Punktem wyjścia tych rozważań był wynik Coriego i Vauquelina podający jawną $2-(n+1)$ odpowiedniość pomiędzy mapami planarnymi o n krawędziach a poetykietowanymi drzewami planarnymi o n krawędziach, z którego wynika klasyczny wzór Tutte'a na liczbę $m(n) = 2 \cdot 3^n (2n)!/((n+2)!n!)$ map planarnych o n krawędziach. Schaeffer rozszerzył konstrukcję Coriego i Vauquelina do wszystkich powierzchni orientowalnych. Jego twierdzenie można sformułować stosując dwudzielne planarne kwadrangulacje zamiast map planarnych: *Niech S będzie dowolną powierzchnią orientowalną. Wówczas istnieje jawna bijekcja pomiędzy dwudzielnymi kwadrangulacjami na S o n ścianach z wyróżnionym wierzchołkiem a znakowanymi poetykietowanymi mapami jednościennymi na S o n krawędziach. Ponadto etykiety w mapie jednościennej odpowiadają odległościom od wyróżnionego wierzchołka w kwadrangulacji.* Powstaje zatem naturalne pytanie o rozszerzenie wyniku Schaeffera do dowolnych powierzchni. Odpowiedź twierdzącą na to pytanie podaje główny wynik pracy [Hab3]. Wcześniejsze wyniki Coriego i Vauquelina oraz Schaeffera w istotny sposób wykorzystywały orientowalność powierzchni i dlatego wykazanie tego twierdzenia dla powierzchni nieorientowalnych wymagało istotnych nowych pomysłów. Dowód tego wyniku jest długi, skomplikowany i oparty na subtelnej rekursywnej konstrukcji. W pracy podanych jest również kilka zastosowań głównego wyniku. I tak autorzy udowodnili na przykład twierdzenie o kombinatorycznej interpretacji algebraiczności i struktury funkcji tworzącej map, podali wzór na liczbę ukorzenionych map o n krawędziach płaszczyzny rzutowej.

Głównym wynikiem pracy [Hab4] jest rozwiązanie w ogólniejszej postaci problemu sformułowanego w [Hab1]. Habilitant pokazał, że tzw. interpolacyjne wielomiany Macdonalda mają własność małych kumulant. Argumenty w pracy częściowo bazują na pomysłach [Hab1], gdzie pokazany był analogiczny wynik dla funkcji Jacka, jednak w dowodzie pojawiają się przeszkody, które wymagają nowych nietrywialnych pomysłów. Główna idea dowodu bazuje na zrozumieniu działania pewnego operatora różnicowego. Wnioskiem z tego twierdzenia jest interesująca własność wielomianów Macdonalda, a mianowicie, że dla dowolnych ustalonych partycji $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$, oraz dla dowolnej partycji μ, q, t-wielomian Kostki jest wielomianem zmiennych q i t o całkowitych współczynnikach. W pracy sformułowana jest również hipoteza, że q, t-wielomian Kostki jest wielomianem o całkowitych dodatnich współczynnikach.

Ostatnia praca cyklu habilitacyjnego [Hab5] podejmuje problem zrozumienia struktury kombinatorycznej kumulant Macdonalda. W pracy pokazane są dwa twierdzenia w tym kierunku. Dr Dołęga uogólnił wynik Haglunda, Haimana i Loehra, dowodząc kombinatoryczną interpretację kumulant Macdonalda w bazie jednomianów symetrycznych. Z konstrukcji tej wynika, że współczynniki, które w skomplikowany sposób są związane ze strukturą drzew rozpiętych pewnych grafów, należą do $\mathbb{N}[q, t]$. Główny wynik tej publikacji ma kilka ciekawych zastosowań. Wykazana jest dodatniość wpółczynników kumulant Macdonalda wyrażonych w bazie wielomianów Schura indeksownych przez "haki". Ponadto autor pokazuje również dodatniość kumulat Macdonalda wyrażonych w bazie funkcji kwazi-symetrycznych.

Poza pracami, które weszły w skład rozprawy habilitacyjnej dr Dołęga jest autorem ośmiu prac opublikowanych w latach 2009-2020. Podobnie jak prace wchodzące w skład rozprawy, wszystkie ukazały się w solidnych pismach, a dwie z nich w niezwykle prestiżowych: *Duke Mathematical Journal* oraz *Advances in Mathematics*. Tematycznie są one zbliżone do wyżej omówionych prac.

Chciałbym również podkreślić, że autoreferat przygotowany przez dra Dołęgę jest bardzo dobrze napisany i był dla mnie niezwykle pomocny. Nie jest on zbyt rozwlekły, Habilitant w przejrzysty sposób omawia i umiejscawia swój dorobek w nurcie badań prowadzonych na świecie w tym obszarze.

Prace dra Dołęgi według MathSciNet były cytowane 105 razy (stan z sierpnia 2021) i jest to wynik bardzo dobry na tym etapie rozwoju naukowego. Tak więc prace Habilitanta cieszą się sporym zainteresowaniem i jest on już rozpoznawalny w środowisku. Prowadzi on również intensywną wpółpracę międzynarodową. Między innymi odbył dwuletni staż podoktorski we Francji oraz szereg dłuższych i krótszych pobytów na uczelniach krajowych i zagranicznych. Wygłosił również wiele odczytów na prestiżowych seminariach i konferencjach. Habilitant był wykonawcą grantach MNiSW, ANR-Francja oraz NCN-u oraz kierownikiem w trzech grantach NCN-u.

Podsumowując, bardzo wysoko oceniam dorobek naukowy dra Dołęgi. Wszystkie prace osiągnięcia habilitacyjnego ukazały się w dobrych lub bardzo dobrych czasopismach.

Chociaż nie jestem specjalistą w teorii funkcji symetrycznych i z pewnością nie byłem wstanie docenić wszystkich subtelności dowodowych, to uważam, że uprawia on matematykę ciekawą i na wysokim poziomie. Zajmuje się on poważnymi i głębokimi zagadnieniami, rozwiązuje ważne problemy, stawia nowe hipotezy, a jeśli uzyskuje wyniki częściowe, to wymagają one również nietrywialnych argumentów. Dysponuje on solidnym warsztatem naukowym i potrafi go wykorzystywać. Powyższe argumenty utwierdzają mnie w przekonaniu, że Habiliatnt jest również gotowy do sprawowania samodzielnej opieki nad doktorantami.

Nie mam najmniejszych wątpliwości, że rozprawa i dorobek naukowy dr Macieja Dołęgi spełniają ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane osobom ubiegającym się o nadanie stopnia doktora habilitowanego. Z pełnym przekonaniem wnoszę o dopuszczenie go do dalszych etapów postępowania habilitacyjnego.

Tomasz Schoen