

AUTOREFERAT

MAREK GROCHOWSKI

I. Imię i nazwisko

Marek Grochowski

II. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe

Tytuł magistra:

Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, 1998

Kierunek: matematyka

Specjalność: matematyka ogólna

Tytuł doktora nauk matematycznych:

Instytut Matematyczny PAN, 2001

Rozprawa pt. "Pewne własności funkcji odległości w geometrii subriemannowskiej i sublorentzowskiej" (praca została uznana za wyróżniającą się)

III. Informacje o zatrudnieniu

Wydział Matematyczno-Przyrodniczym, SNŚ, Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego - na stanowisku adiunkta od 01.10.2001 aż do dzisiaj.

W okresach 01.03.2007 - 31.08.2007, 01.10.2008 - 30.09.2009, 01.10.2010 - 30.09.2011 byłem zatrudniony na stanowisku adiunkta w Instytucie Matematycznym PAN, w Zakładzie Równań Różniczkowych. Obecnie, tj. od 1.10.2013 również pracuję w IMPAN.

IV. Osiągnięcie naukowe, o którym jest mowa w art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach i tytule naukowym oraz stopniach i tytule w zakresie sztuki

Osiągnięcie naukowe, o którym mowa powyżej, to rozprawa

Struktura zbiorów osiągalnych oraz postacie normalne dla wybranych klas struktur sublorentzowskich. Związki z afinicznymi układami sterowania,

na którą składa się siedem następujących prac:

- [G1] M. Grochowski, *Normal Forms of Germs of Contact sub-Lorentzian Structures on \mathbb{R}^3 . Differentiability of the sub-Lorentzian Distance*, Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 9, No. 4, 2003, 531-547;
- [G2] M. Grochowski, *Reachable Sets for the Heisenberg sub-Lorentzian Metric on \mathbb{R}^3 . An Estimate for the Distance Function*, Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 12, No. 2, 2006, 145-160;
- [G3] M. Grochowski, *Properties of Reachable Sets in the sub-Lorentzian Geometry*, Journal of Geometry and Physics, 59 (2009), 885-900;

- [G4] M. Grochowski, *Reachable Sets For Contact sub-Lorentzian Structures on \mathbb{R}^3 . Application to Control Affine Systems on \mathbb{R}^3 with a Scalar Input*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 177, Issue 3, September (2011), 383-394; również tłumaczenie na rosyjski w *Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya* (tom 70, 2011);
- [G5] M. Grochowski, *Normal Forms and Reachable Sets For Analytic Martinet sub-Lorentzian Structures of Hamiltonian Type*, Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 17, No. 1, January 2011, 49-75;
- [G6] M. Grochowski, *The structure of reachable sets for affine control systems induced by generalized Martinet Sub-Lorentzian metrics*, ESAIM COCV 18 (2012) 1150-1177, DOI: 10.1051/cocv/2011202.
- [G7] M. Grochowski, *The structure of reachable sets and geometric optimality of singular trajectories for certain affine control systems in \mathbb{R}^3 . The sub-Lorentzian approach*, Journal of dynamical and Control Systems, DOI: 10.1007/s10883-013-9202-7.

Spis treści

1. Zawartość autoreferatu.....	4
2. Wprowadzenie do geometrii sublorentzowskiej..	4
2.1. Krzywe horyzontalne.....	5
2.2. Metryki sublorentzowskie.....	6
2.3. Otoczenia normalne, ciągi krzywych przyczynowych.....	7
2.4. Geodezyjne sublorentzowskie, zbiory osiągalne, odległość sublorentzowska.....	8
2.5. Gradient horyzontalny.....	9
2.6. Geodezyjne hamiltonowskie, odwzorowanie wykładnicze.....	9
3. Omówienie głównych wyników jednotematycznego cyklu prac.....	10
3.1. Wstęp.....	10
3.2. Związek z afinicznymi układami sterowania.....	12
3.3. Własności zbiorów osiągalnych w przypadku ogólnym.....	14
3.4. Zbiory osiągalne w przypadku kontaktowym.....	16
3.5. Zbiory osiągalne w przypadku Martineta.....	20
3.6. Zbiory osiągalne w uogólnionym przypadku Martineta.....	23
3.7. Zbiory osiągalne dla struktur z nieładką powierzchnią Martineta..	25
3.8. Zastosowanie do układów afinicznych. Geometrycznie optymalne krzywe osobliwe a minimalna liczba funkcji analitycznych opisujących zbiór osiągalny.....	28
4. Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze.....	28
4.1. Omówienie artykułów nie włączonych do jednotematycznego cyklu.	28
4.2. Udział w projektach badawczych. Pobyty.....	31
4.3. Udział w konferencjach.....	31
4.4. Organizacja konferencji. Wykłady plenarne.....	32
4.5. Recenzje artykułów naukowych.....	32
4.6. Recenzje prac doktorskich.....	32
4.7. Bibliografia.....	33

1. ZAWARTOŚĆ AUTOREFERATU

Niniejszy autoreferat składa się z trzech głównych części. Rozdział 2 stanowi wprowadzenie do geometrii sublorentzowskiej. W rozdziale 3 prezentowane są rezultaty zawarte w mojej rozprawie habilitacyjnej, a dotyczące zbiorów osiągalnych dla wybranych klas struktur sublorentzowskich i odpowiadających im afinicznych układów sterowania. W rozdziale 4 przedstawiam moje pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze.

2. WPROWADZENIE DO GEOMETRII SUBLORENTZOWSKIEJ.

Rozmaitość lorentzowska (M, g) to para złożona z rozmaitości gładkiej M oraz metryki lorentzowskiej g na M . Mówiąc dokładniej g jest cięciem gładkim wiązki wektorowej $T^*M \otimes T^*M \rightarrow M$, takim że $g_x : T_xM \times T_xM \rightarrow \mathbb{R}$ jest niezdegenerowaną formą dwuliniową symetryczną o indeksie 1 dla każdego $x \in M$. Innymi słowy dla każdego $x \in M$ istnieje baza v_1, \dots, v_n przestrzeni stycznej T_xM , w której g_x ma macierz $\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$. Rozmaitości lorentzowskie są ważne i dość szeroko znane z racji swoich zastosowań w fizyce, zwłaszcza w teorii względności i kosmologii (zob. np. [39, 19, 37]).

Jeśli M jest rozmaitością gładką, to *dystrybucją* na M nazywamy taki podzbiór $H \subset TM$ wiązki stycznej, że przecięcie $H_x = H \cap T_xM$ jest podprzestrzenią liniową w T_xM dla każdego $x \in M$. Jeśli wymiar $\dim H_x$ nie zależy od punktu x , to mówimy, że H jest stałego rzędu, a liczbę $\dim H_x$ nazywamy *rzędem dystrybucji* H i oznaczamy przez *rank* H . Dystrybucje o stałym rzędzie są subwiązkami wiązki stycznej. Mówimy, że dystrybucja H jest *w pełni nieholonomiczna* lub że spełnia *warunek Hörmandera*, jeśli dla każdego punktu $x \in M$ pola wektorowe o wartościach w H i określone w otoczeniu x , wraz z ich nawiasami Liego dowolnego rzędu rozpinają całą przestrzeń styczną T_xM . Dystrybucje nieholonomiczne w sposób naturalny pojawiają się w fizyce. Jako przykład rozważmy sferę poruszającą się bez poślizgu po poziomej płaszczyźnie. Jej ruch opisywany jest przez krzywe leżące na 5-wymiarowej rozmaitości $\mathbb{R}^2 \times SO(3, \mathbb{R})$, które są styczne do pewnej nieholonomicznej dystrybucji rzędu 3 (zob. np. [24, 34]). Powyższy przykład i wiele jemu podobnych dały impuls do rozwoju geometrii subriemannowskiej, tj. geometrii rozmaitości gładkich wyposażonych we w pełni nieholonomiczną dystrybucję, na której zadany jest iloczyn skalarny (metryka riemannowska).

Geometria sublorentzowska to geometria rozmaitości wyposażonych we w pełni nieholonomiczną dystrybucję, na której zadana jest metryka lorentzowska. Jest to więc połączenie geometrii lorentzowskiej z geometrią par: rozmaitość, dystrybucja, a zatem znajduje zastosowania na styku teorii względności i zagadnień, w których taka dystrybucja się pojawia. Natychmiastowym przykładem może być relatywizacja zagadnień fizycznych, do których stosuje się geometria subriemannowska. Inny przykład to próba unifikacji grawitacji i elektromagnetyzmu [28] w pięciowymiarowej przestrzeni z metryką lorentzowską zadaną na odpowiednio dobranej dystrybucji nieholonomicznej rzędu 4. Warto w tym miejscu zaznaczyć, że pierwsze cztery współrzędne czasowych geodezyjnych hamiltonowskich (wszystkie definicje zawarte są w rozdziale 2) w \mathbb{R}^5 względem naturalnej kontaktowej struktury sublorentzowskiej, pokrywają się z trajektoriami cząstek o niezerowej masie i ładunku w statycznym polu elektromagnetycznym (por. [26, 35]). Struktury sublorentzowskie pojawiają się również w teorii równań różniczkowych. Np. geometria związana z równiem zwyczajnym rzędu 2 w sposób naturalny utożsamia się z odpowiednią klasą

konferemną kontaktowych metryk sublorentzowskich w $\mathbb{R}^3 \approx J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Również rzeczywisty analogon struktur Cauchy'ego Riemanna - tzw. "para CR structures" typu $(k, 1, s)$ mogą być interpretowane jako pewne szczególne struktury sublorentzowskie z dystrybucją kowymiaru k na $(k + 1 + s)$ -wymiarowej rozmaitości - patrz [21, 36]. Poza wspomnianymi zastosowaniami formalizm sublorentzowski przydatny jest również w badaniu afinicznych układów sterowania, jak to jest wyjaśnione w podrozdziale 3.2.

Geometria sublorentzowska jest teorią mało zbadaną. Pierwszy, bardziej systematyczny opis tej geometrii należy do autora niniejszego referatu i znajduje się w [13] oraz w następnych jego pracach. Tematyka sublorentzowska jest również poruszana np. w pracach [8, 25, 26, 27, 12, 17, 22, 28, 29], jak również [34, 43, 38]. Celem niniejszego rozdziału jest wprowadzenie do geometrii sublorentzowskiej.

2.1. Krzywe horyzontalne. Niech M będzie gładką (tzn. klasy C^∞) i spójną rozmaitością wymiaru $n+1$. Niech H będzie dystrybucją gładką na M stałego rzędu $k+1$ (tj. H jest $(k+1)$ -wymiarową subwiązką wiązki stycznej TM). Dla ustalonego punktu $q \in M$ oraz liczby naturalnej i definiujemy H_q^i jako podprzestrzeń liniową przestrzeni T_qM generowaną przez wszystkie wektory postaci

$$[X_1, [X_2, \dots, [X_{j-1}, X_j] \dots]](q),$$

gdzie X_1, \dots, X_j są cięciami H określonymi na otoczeniu q , $j \leq i$, nawiasy kwadratowe oznaczają iterowany nawias Liego. Mówimy, że H spełnia *warunek Hörmandera*, zwany też *warunkiem Chow*, jeśli dla każdego $q \in M$ istnieje $i = i(q) \in \mathbb{N}$, takie że $T_qM = H_q^i$.

Geometria pary (M, H) w dużej mierze odzwierciedlana jest przez tzw. krzywe horyzontalne. Krzywa $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ nazywa się *krzywą horyzontalną* (lub *dopuszczalną*), jeśli (i) γ jest absolutnie ciągła, (ii) $\dot{\gamma}(t) \in H_{\gamma(t)}$ dla prawie każdego $t \in [a, b]$, (iii) $\dot{\gamma}$ jest całkowalna z kwadratem względem pewnej (a więc dowolnej) metryki riemannowskiej na M .

Uwaga 2.1. Część autorów z geometrii subriemannowskiej rozważa węższą klasę krzywych, mianowicie definiuje krzywe horyzontalne jako takie, które spełniają (i), (ii) oraz warunek $\dot{\gamma} \in L^\infty$. Wszystko zależy od technik używanych przez danego autora. Klasa L^∞ wydaje się być dogodniejsza ze względu na fakt, iż zasada maksimum Pontriagina dowodzona jest właśnie dla tej klasy. Z kolei klasa L^2 jest „wygodniejsza” ze względu na refleksywność przestrzeni L^2 . Oba podejścia są w każdym razie równoważne dla problemów optymalizacyjnych, które nie zależą od parametryzacji krzywych.

Oznaczmy przez Ω_q^T zbiór wszystkich krzywych horyzontalnych $\gamma : [0, T] \rightarrow M$, takich że $\gamma(0) = q$, i rozważmy odwzorowanie

$$\text{end}_q^T : \Omega_q^T \rightarrow M, \quad \text{end}_q^T(\gamma) = \gamma(T).$$

Dowodzi się [5], że Ω_q^T posiada naturalną strukturę rozmaitości Hilberta modelowanej na przestrzeni $L^2([0, T], \mathbb{R}^{k+1})$ oraz że end_q^T jest klasy C^∞ względem tej struktury. Można również pokazać, że jeśli H spełnia warunek Hörmandera, to $\text{end}_q^T(\Omega_q^T) = M$ dla każdego punktu $q \in M$ oraz dla każdego $T > 0$ - jest to twierdzenie Chow-Rashevskiego (patrz np. [10, 16, 31]). W przypadku $H = TM$ odwzorowanie $d_\gamma \text{end}_q^T : T_\gamma \Omega_q^T \rightarrow T_{\gamma(T)}M$ jest surjekcją dla każdej krzywej $\gamma \in \Omega_q^T$. Sytuacja zmienia się, gdy $H \neq TM$, skąd następująca definicja. Krzywa

horyzontalna $\gamma \in \Omega_q^T$ nazywa się *krzywą anormalną*, jeśli jest punktem osobliwym odwzorowania end_q^T , tj. gdy różniczka $d_\gamma end_q^T : T_\gamma \Omega_q^T \rightarrow T_{\gamma(T)} M$ nie jest surjekcją. Krzywe anormalne pojawiają się w sposób naturalny w geometrii subriemannowskiej i sublorentzowskiej oraz w wielu zagadnieniach teorii sterowania, a ich obecności towarzyszą zwykle różne osobliwe zjawiska (porównaj [6]). W sytuacji, gdy H jest dystrybucją kontaktową jedynymi krzywymi anormalnymi są krzywe stałe.

Podamy jeszcze jedno (równoważne) określenie krzywych anormalnych, które wykorzystamy do zdefiniowania tzw. krzywych Goha. Przez H^\perp oznaczymy anihilator dystrybucji H , tj. $H^\perp = \{\lambda \in T^*M : \langle \lambda, v \rangle = 0 \text{ dla każdego } v \in H_{\pi(\lambda)}\}$. H^\perp jest $(2 \dim M - \text{rank } H)$ -wymiarową subwiązką w T^*M . Otóż krzywa horyzontalna $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ jest anormalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje jej podniesienie do wiązki kostycznej $\Gamma : [a, b] \rightarrow T^*M$ spełniające następujące warunki:

- (i) $\Gamma(t) \in T_{\gamma(t)}^* M \setminus \{0\}$ dla każdego $t \in [a, b]$,
- (ii) $\Gamma([a, b]) \subset H^\perp$,
- (iii) $\Omega_{\Gamma(t)}(\dot{\Gamma}(t), \zeta) = 0$ dla prawie każdego $t \in [a, b]$ i każdego $\zeta \in T_{\Gamma(t)} H^\perp$;

Ω oznacza tutaj obcięcie standardowej formy symplektycznej z T^*M do H^\perp . Podniesienie Γ spełniające warunki (i), (ii), (iii) nazywa się *podniesieniem anormalnym*. Krzywa horyzontalna $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ nazywa się *krzywą Goha*, jeśli istnieje takie jej podniesienie anormalne $\Gamma : [a, b] \rightarrow T^*M$, które dodatkowo spełnia warunek

$$\langle \Gamma(t), v \rangle = 0 \text{ dla każdego } v \in H_{\Gamma(t)}^2;$$

jest to tzw. *warunek Goha*. W teorii sterowania dowodzi się, że warunek Goha jest warunkiem koniecznym drugiego rzędu na optymalność krzywych anormalnych.

2.2. Metryki sublorentzowskie. Niech g będzie metryką lorentzowską na H , tj. g jest cięciem gładkim wiązki $H^* \otimes H^* \rightarrow M$, takim że $g_q : H_q \times H_q \rightarrow \mathbb{R}$ jest niezdegenerowaną formą dwuliniową symetryczną indeksu 1 dla każdego $q \in M$. Oznacza to, że dla każdego punktu $q \in M$ istnieje baza v_0, \dots, v_k przestrzeni H_q , w której g_q ma macierz $diag(-1, 1, \dots, 1)$. W dalszym ciągu będziemy pisać $g(v, v)$ zamiast $g_q(v, v)$, $v \in H_q$.

Definicja 2.1. Parę (H, g) nazywamy *metryką lub strukturą sublorentzowską na M* , zaś trójkę (M, H, g) nazywa się *rozmaitością sublorentzowską*.

Nie na każdej dystrybucji istnieją metryki lorentzowskie. Dostosowując do wiązek wektorowych rozważania z [42] oraz [2] można udowodnić stwierdzenie.

Stwierdzenie 2.1 ([15]). *Istnieje metryka lorentzowska g na dystrybucji H wtedy i tylko wtedy, gdy H posiada poddystrybucję rzędu 1. Mówiąc precyzyjniej, jeśli istnieje metryka lorentzowska na dystrybucji H , to H przedstawia się w postaci sumy Whitney'a $H = H^- \oplus H^+$ poddystrybucji, gdzie $\text{rank } H^- = 1$ oraz obcięcie g do H^- (odp. do H^+) jest ujemnie (odp. dodatnio) określone. Przy tym można zakładać, że powyższa suma Whitney'a jest ortogonalna w sensie metryki g .*

Nietrudno skonstruować przykład dystrybucji (rozmaitości), na której metryki lorentzowskie (sublorentzowskie) nie istnieją.

Przykład 2.1. *Rozważmy sferę S^5 i niech H będzie dowolną dystrybucją rzędu 4 na S^5 (taką H można skonstruować np. jako dopełnienie w TS^5 wiązki prostych $\text{Span}\{X\}$, gdzie X jest nieznikającym polem wektorowym na S^5). Pokażemy, że*

na H nie istnieje metryka lorentzowska. Istotnie, gdyby taka metryka istniała, to wówczas mielibyśmy rozkład $H^- \oplus H^+$ jak w stwierdzeniu 2.1, ale wtedy H^+ jest dystrybucją rzędu 3, a takie jak wiadomo na S^5 nie istnieją (patrz [42]). Zatem udowodniliśmy, że na S^5 nie istnieją metryki sublorentzowskie, chociaż jak wiadomo metryki lorentzowskie istnieją.

Widać więc, że istnienie metryk sublorentzowskich (podobnie jak istnienie metryk lorentzowskich) na rozmaitości M nakłada ograniczenia na topologię M . Korzystając ze stwierdzenia 2.1 można podać szereg bardziej szczegółowych rezultatów tego typu. Jako przykład zanotujmy dwa fakty.

Stwierdzenie 2.2 ([15]). *Niech (M, H, g) będzie jednopójną rozmaitością sublorentzowską, gdzie $\text{rank } H = 2$. Wówczas H ma globalnie określoną bazę, tj. istnieją dwa liniowo niezależne cięcia H określone na całej M . W szczególności $w_n(M) = w_{n-1}(M) = 0$, gdzie $w_k(M)$ oznacza odpowiednią klasę Stiefela-Whitney'a wiązki TM .*

Stwierdzenie 2.3 ([15]). *Niech (M, H, g) będzie jednopójną rozmaitością sublorentzowską, gdzie $\dim M = 3$ (wtedy $\text{rank } H = 2$). Wówczas M jest paralelizowalna.*

Przykład 2.2. *Nie istnieje metryka sublorentzowska na rozmaitości $S^2 \times \mathbb{R}$ (metryka lorentzowska oczywiście istnieje). Istotnie, $S^2 \times \mathbb{R}$ jest jednopójna, ale nie jest paralelizowalna.*

Niech (M, H, g) będzie ustaloną rozmaitością sublorentzowską i niech $q \in M$. Przez analogię do geometrii lorentzowskiej mówimy, że $v \in H_q$ jest *wektorem czasowym*, gdy $g(v, v) < 0$, *wektorem przyczynowym*, gdy $g(v, v) \leq 0$ i $v \neq 0$, *wektorem przestrzennym*, gdy $g(v, v) > 0$ lub $v = 0$ i wreszcie *wektorem zerowym*, gdy $g(v, v) = 0$, ale $v \neq 0$. Przez *orientację czasową* metryki (H, g) rozumiemy ciągle pole czasowe na M . Niech X będzie orientacją czasową. Mówimy, że wektor przyczynowy $v \in H_q$ jest *zorientowany w przyszłość* (odp. *w przeszłość*), jeśli $g(v, X(q)) < 0$ (odp. $g(v, X(q)) > 0$). Analogicznie jak w geometrii lorentzowskiej [37] dowodzi się

Stwierdzenie 2.4. *Następujące warunki są równoważne:*

- (1) *istnieje metryka lorentzowska na H ;*
- (2) *istnieje czasowo zorientowana metryka lorentzowska na H .*

Ze stwierdzenia 2.1 mamy

Wniosek 2.1. *Każda jednopójna rozmaitość sublorentzowska jest czasowo orientowalna.*

Krzywa horyzontalna $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ nazywa się *krzywą przyczynową* (skierowaną w przyszłość), jeśli wektor $\dot{\gamma}(t)$ jest przyczynowy (skierowany w przyszłość) dla prawie każdego $t \in [a, b]$. Analogicznie definiujemy krzywe czasowe, zerowe (skierowane w przyszłość) oraz krzywe przestrzenne.

2.3. Otoczenia normalne, ciągi krzywych przyczynowych. Na początku przypomnijmy, że na rozmaitości pseudoriemannowskiej (M, g) zbiór otwarty U nazywa się *otoczeniem normalnym punktu q* , jeśli U jest dyfeomorficznym obrazem otoczenia zera w $T_q M$ poprzez odwzorowanie wykładnicze \exp_q . Zmniejszając odpowiednio U można założyć, że dowolne dwa punkty z U da się połączyć jedyną geodezyjną zawartą w U . Takie otoczenie U nazywa się *otoczeniem wypukłym punktu q* .

Do końca tego rozdziału (M, H, g) jest ustaloną rozmaitością sublorentzowską. Przez analogię do geometrii pseudoriemannowskiej w pracy [13] zostało wprowadzone pojęcie sublorentzowskich otoczeń normalnych. Ustalmy $q \in M$. W otoczeniu punktu q metrykę g można rozszerzyć do metryki lorentzowskiej, którą oznaczmy przez \tilde{g} . Otoczenie U punktu q nazywa się *otoczeniem normalnym*, jeśli U jest otoczeniem wypukłym punktu q w sensie metryki \tilde{g} oraz \bar{U} jest zwarte i zawarte w innym otoczeniu wypukłym punktu q w sensie \tilde{g} . Otoczenia normalne pełnią ważną funkcję, między innymi z powodu dobrych własności ciągów krzywych przyczynowych zawartych w takich otoczeniach.

Załóżmy, że dany jest ciąg krzywych $\gamma, \gamma_\nu : [a, b] \rightarrow M$, $\nu = 1, 2, \dots$, na M . Mówimy, że ciąg $\{\gamma_\nu\}$ jest C^0 -zbieżny do γ ("C⁰ topology on curves" - patrz [3, 13]; nazwa taka, choć trochę myląca, funkcjonuje w geometrii lorentzowskiej), gdy $\gamma_\nu(a) \rightarrow \gamma(a)$, $\gamma_\nu(b) \rightarrow \gamma(b)$ przy $\nu \rightarrow \infty$ oraz gdy dla każdego otoczenia V zbioru $\gamma([a, b])$ istnieje taki wskaźnik Λ , że $\gamma_\nu([a, b]) \subset V$ dla każdego $\nu > \Lambda$.

Stwierdzenie 2.5 ([13]). *Niech U będzie otoczeniem normalnym punktu q_0 i niech $\gamma_\nu : [0, T] \rightarrow U$ będzie takim ciągiem krzywych przyczynowych skierowanych w przyszłość, że $\gamma_\nu(0) = q_0$ i $\gamma_\nu(T) \rightarrow q$, $\nu \rightarrow \infty$, dla pewnego punktu $q \in U$. Wówczas z ciągu $\{\gamma_\nu\}$ można wybrać podciąg C^0 -zbieżny do krzywej przyczynowej skierowanej w przyszłość $\gamma : [0, T] \rightarrow U$, takiej że $\gamma(0) = q_0$, $\gamma(T) = q$.*

2.4. Geodezyjne sublorentzowskie, zbiory osiągalne, odległość sublorentzowska. Odtąd pod pojęciem krzywej będziemy zawsze rozumieć krzywe horyzontalne.

Niech $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ będzie krzywą przyczynową. *Długością (sublorentzowską) krzywej γ* nazywamy liczbę

$$L(\gamma) = \int_a^b |g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))|^{1/2} dt.$$

Funkcjonał L jest półciągły z góry w następującym sensie. Jeśli $\{\gamma_\nu\}$ jest ciągiem krzywych przyczynowych skierowanych w przyszłość C^0 -zbieżnym do krzywej przyczynowej γ skierowanej w przyszłość, to $\limsup_{\nu \rightarrow \infty} L(\gamma_\nu) \leq L(\gamma)$. Wynika to bezpośrednio z własności funkcjonału L w geometrii lorentzowskiej [39].

Niech U będzie otwartym podzbiorem w M i niech $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ będzie krzywą przyczynową zorientowaną w przyszłość. Mówimy, że γ jest *optymalna* lub *maksymalizująca względem U* , jeśli dla każdej krzywej przyczynowej skierowanej w przyszłość $\eta : [\alpha, \beta] \rightarrow U$, takiej że $\eta(\alpha) = \gamma(a)$, $\eta(\beta) = \gamma(b)$ jest $L(\gamma) \geq L(\eta)$. γ jest *U -geodezyjną*, jeśli jej obcięcie $\gamma|_{[\alpha_1, \beta_1]}$ do każdego dostatecznie krótkiego odcinka $[\alpha_1, \beta_1] \subset [a, b]$, jest krzywą maksymalizującą względem U . Nietrudno znaleźć przykład krzywej, która jest U -geodezyjną maksymalizującą dla pewnego zbioru U , ale nie jest U' -geodezyjną maksymalizującą, dla odpowiedniego U' zawierającego U .

Ustalmy punkt $q_0 \in M$ i jego otoczenie $U \subset M$.

Definicja 2.2. *Przyczynowym (odp. czasowym, zerowym) zbiorem osiągalnym (skierowanym w przyszłość) w U nazywamy zbiór $J^+(q_0, U)$ (odp. $I^+(q_0, U)$, $N^+(q_0, U)$) tych wszystkich $q \in U$, do których można dotrzeć z q_0 wzdłuż krzywej przyczynowej (odp. czasowej, zerowej) skierowanej w przyszłość i zawartej w U .*

Uwaga 2.2. *W przypadku lorentzowskim, gdy U jest otoczeniem normalnym punktu q_0 , dowodzi się [19], że $J^+(q_0, U) = N^+(q_0, U)$ jest zbiorem domkniętym postaci*

$\{q \in U : \eta(q) \leq 0, \Phi(q) > 0\}$, gdzie η jest funkcją gładką, a Φ jest tzw. funkcją czasu, tzn. gradient Φ jest wektorem czasowym skierowanym w przeszłość. W odpowiednio ponumerowanych współrzędnych normalnych o środku w q_0 , η zadaje się wzorem $\eta(x_0, \dots, x_n) = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$, natomiast $\Phi(x_0, \dots, x_n) = x_0$. W szczególności, gdy rozważana rozmaitość lorentzowska jest analityczna, minimalna liczba funkcji analitycznych potrzebnych do opisu zbioru $J^+(q_0, U)$ wynosi 1 (warunek $\Phi > 0$ jest trywialnie spełniony). Ponadto można pokazać, że dla każdego, niekoniecznie normalnego, otoczenia U punktu q_0 zbiór $I^+(q_0, U)$ jest otwarty.

Jak widać będzie z dalszych części autoreferatu, sytuacja w przypadku sublorentzowskim jest znacznie bardziej skomplikowana. W przypadku ogólnym, dla dowolnego otwartego U można pokazać, że

$$\begin{aligned} \partial_U J^+(q_0, U) &= \partial_U N^+(q_0, U) = \partial_U I^+(q_0, U) \\ cl_U J^+(q_0, U) &= cl_U N^+(q_0, U) = cl_U I^+(q_0, U) \end{aligned} \quad ,$$

gdzie ∂_U oznacza brzeg, a cl_U domknięcie względem U .

Dla $q_0, q \in U$ oznaczmy przez $\Omega_{q_0, q}^{n, spc}(U)$ zbiór wszystkich krzywych przyczynowych w U skierowanych w przyszłość i łączących q_0 z q . Określimy funkcję $f[U] : U \rightarrow \mathbb{R}$ za pomocą formuły

$$f[U](q) = \begin{cases} \sup \{L(\gamma) : \gamma \in \Omega_{q_0, q}^{n, spc}(U)\} & : q \in J^+(q_0, U) \\ 0 & : q \notin J^+(q_0, U) \end{cases} \quad ;$$

$f[U]$ nazywa się *odległością sublorentzowską (względem zbioru U) od punktu q_0* . Okazuje się [13], że jeśli U jest otoczeniem normalnym punktu q_0 , to $f[U]$ jest półciągła z góry. $f[U]$ jest również ciągła wzdłuż czasowych i gładkich U -geodezyjnych maksymalizujących startujących z q_0 i zawartych w $int I^+(q_0, U)$. Dowodzi się również [13], że jeśli U jest otoczeniem normalnym punktu q_0 i $q \in J^+(q_0, U)$, to istnieje U -geodezyjna maksymalizująca γ łącząca q_0 z q , tj. $L(\gamma) = f[U](q)$.

2.5. Gradient Horyzontalny. Niech $U \subset M$ będzie zbiorem otwartym. Jeśli $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, to definiujemy jej *gradient horyzontalny* $\nabla_H \varphi$, jako takie pole horyzontalne, że dla każdego $q \in U$ i każdego $v \in H_q$ zachodzi wzór $(\partial_v \varphi)(q) = g(v, \nabla_H \varphi(q))$.

Stwierdzenie 2.6 ([13, 14]). *Załóżmy, że $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją gładką, że $\nabla_H \varphi$ jest polem przyczynowym na U skierowanym w przyszłość, a funkcja $q \rightarrow g(\nabla_H \varphi(q), \nabla_H \varphi(q))$ jest stała na U . Wówczas dowolna trajektoria pola $\nabla_H \varphi$ jest jedyną U -geodezyjną maksymalizującą pomiędzy swoimi końcami.*

2.6. Geodezyjne hamiltonowskie, odwzorowanie wykładnicze. Zadanie metryki sublorentzowskiej (H, g) na rozmaitości M jest równoważne z zadaniem morfizmu wiązek wektorowych $G : T^*M \rightarrow H$ nakrywającego identycznością i takiego że $\text{Im } G = H$ oraz $g(v, w) = \langle \xi, G\eta \rangle = \langle \eta, G\xi \rangle$ dla każdych $\xi \in G^{-1}(v)$, $\eta \in G^{-1}(w)$. Funkcja $\mathcal{H} : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana przez formułę

$$\mathcal{H}(\lambda) = \frac{1}{2} \langle \lambda, G\lambda \rangle$$

nazywa się *(sublorentzowskim) hamiltonianem geodezyjnym*. Lokalnie \mathcal{H} można zapisać następująco. Niech X_0, \dots, X_k będzie bazą ortonormalną (H, g) określoną na zbiorze otwartym U , gdzie X_0 jest wektorem czasowym. Wówczas

$$\mathcal{H}|_{T^*U}(\lambda) = -\frac{1}{2} \langle \lambda, X_0 \rangle^2 + \frac{1}{2} \langle \lambda, X_1 \rangle^2 + \dots + \frac{1}{2} \langle \lambda, X_k \rangle^2 .$$

Oznaczmy przez $\vec{\mathcal{H}}$ hamiltonowskie pole wektorowe na T^*M (względem standardowej struktury symplektycznej) odpowiadające funkcji \mathcal{H} . Krzywa $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ nazywa się *geodezyjną hamiltonowską*, gdy istnieje taka trajektoria $\Gamma : [a, b] \rightarrow T^*M$ pola $\vec{\mathcal{H}}$, że $\gamma(t) = \pi \circ \Gamma(t)$ na $[a, b]$, gdzie $\pi : T^*M \rightarrow M$ jest naturalnym rzutowaniem.

Uwaga 2.3. *W literaturze poświęconej geometrii subriemannowskiej takie geodezyjne najczęściej nazywane są geodezyjnymi normalnymi. Z powodu częstotliwości występowania słowa "normalny" w różnych dziedzinach matematyki, zdaniem autora niniejszego autoreferatu nazwa "hamiltonowska" jest znacznie lepsza.*

Jak łatwo zauważyć z definicji, geodezyjne hamiltonowskie nie zmieniają swojego charakteru przyczynowego, tzn. jeśli $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ jest geodezyjną hamiltonowską, to $\dot{\gamma}(t)$ jest wektorem czasowym (przestrzennym, zerowym itd.) dla pewnego $t \in [a, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\dot{\gamma}(t)$ jest wektorem czasowym (przestrzennym, zerowym itd.) dla każdego $t \in [a, b]$. Jasne jest również, że geodezyjna hamiltonowska (jak każda krzywa gładka z niezerową pochodną) nie zmienia swojej orientacji czasowej. Następujące stwierdzenie uzasadnia nazwę geodezyjna.

Stwierdzenie 2.7 ([13, 14]). *Niech $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ będzie przyczynową geodezyjną hamiltonowską skierowaną w przyszłość. Wówczas dla każdego $t \in (a, b)$ istnieje taki zbiór otwarty $U \ni \gamma(t)$, że $\gamma \cap U$ jest jedyną U -geodezyjną maksymalizującą pomiędzy swoimi końcami.*

Na koniec zdefiniujemy odwzorowanie wykładnicze. Otóż niech $q \in M$. Przez D_q oznaczmy zbiór wszystkich takich kowektorów $\lambda \in T_q^*M$, że krzywa Γ_λ będąca rozwiązaniem zagadnienia $\dot{\Gamma} = \vec{\mathcal{H}}$, $\Gamma(0) = (q, \lambda)$, określona jest na całym odcinku $[0, 1]$. Niech teraz

$$\exp_q : D_q \rightarrow M, \quad \exp_q(\lambda) = \pi \circ \Gamma_\lambda(1);$$

odwzorowanie \exp_q nazywa się *odwzorowaniem wykładniczym z biegunem w punkcie q* . Z teorii równań różniczkowych [11, 18] wiadomo, że D_q jest zbiorem otwartym, a \exp_q odwzorowaniem gładkim. W odróżnieniu od geometrii semi-riemannowskiej, \exp_q nie jest dyfeomorfizmem w $0 \in T_q^*M$.

3. OMÓWIENIE GŁÓWNYCH WYNIKÓW JEDNOTEMATYCZNEGO CYKLU.

3.1. Wstęp. Rozważmy układ sterowania

$$(\Sigma) \quad \dot{q} = f(q, u), u \in \mathcal{U},$$

gdzie M jest rozmaitością gładką, zbiór parametrów sterujących \mathcal{U} jest podzbiorem przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^k , a $f(\cdot, u)$ są polami wektorowymi na M gładkimi względem q i u (jeśli zbiór parametrów sterujących nie jest otwarty, to zakładamy, że f jest gładkie na $M \times \Omega$, gdzie Ω jest otoczeniem zbioru \mathcal{U} w \mathbb{R}^k). Wraz z układem (Σ) rozważamy klasę *sterowań*, tj. rodzinę odwzorowań $u : [0, T(u)] \rightarrow \mathcal{U}$ mierzalnych i ograniczonych, gdzie czas końcowy $T(u) \geq 0$ nie jest ustalony i zależy od sterowania. Każde sterowanie $u : [0, T(u)] \rightarrow \mathcal{U}$ oraz punkt początkowy $q_0 \in M$ definiują zagadnienie Cauchy'ego $\begin{cases} \dot{q} = f(q, u(t)) \\ q(0) = q_0 \end{cases}$. Rozwiązanie tego zagadnienia oznaczamy przez γ_u i nazywamy *trajektorią* (lub *krzywą dopuszczalną*) układu (Σ) generowaną przez sterowanie $u(\cdot)$. Dla ustalonego punktu q_0 oznaczmy przez $\mathcal{A}_{\Sigma, \mathcal{U}}(q_0)$ lub po

prostu przez $\mathcal{A}(q_0)$ zbiór końców wszystkich trajektorii układu (Σ) wychodzących z q_0 . Zbiór $\mathcal{A}(q_0)$ nosi nazwę *zbioru osiągalnego z punktu q_0 dla układu (Σ)* .

Zbiory osiągalne opisane są w każdym podręczniku teorii sterowania, patrz np. [1, 23, 41, 24, 7, 20]. Najlepiej znane przypadki to (i) przypadek liniowy, tj. gdy $f(x, u) = Ax + Bu$, gdzie $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^k$, A, B są macierzami odpowiednich wymiarów, kiedy to $\mathcal{A}(q_0)$ jest podprzestrzenią liniową w \mathbb{R}^n oraz (ii) przypadek układu dystrybucyjnego pełnego rzędu, tj. gdy $0 \in \text{int } \mathcal{U}$, $f(q, u) = \sum_{i=1}^k u_i X_i(q)$, gdzie X_1, \dots, X_k są gładkimi polami wektorowymi na M takimi, że $\text{Lie}\{X_1, \dots, X_k\}(q) = T_q M$ dla każdego $q \in M$, kiedy to zbiór $\mathcal{A}(q_0)$ jest otoczeniem punktu q_0 ($\mathcal{A}(q_0) = M$, gdy $\mathcal{U} = \mathbb{R}^k$ i M jest spójna); $\text{Lie}\mathcal{F}$ oznacza tutaj algebrę Liego generowaną przez rodzinę \mathcal{F} . W przypadku ogólnym pokazuje się, że $\mathcal{A}(q_0)$ jest podzbiorem orbity rodziny pól wektorowych $\{f(\cdot, u)\}_{u \in \mathcal{U}}$, która zgodnie z twierdzeniem Sussmanna o orbicie [44] jest podrozmaitością immersyjną w M , przy czym $\mathcal{A}(q_0)$ ma niepuste wnętrze względem tej orbity.

Wyznaczanie zbiorów osiągalnych jest jednym z fundamentalnych problemów teorii sterowania. Przyczyna jest następująca. Załóżmy, że interesuje nas zagadnienie: dla danego układu sterowania (Σ) i danych $q_0, q_1 \in M$ znaleźć sterowanie \tilde{u} , takie że odpowiadająca mu trajektoria $\gamma_{\tilde{u}}$ układu (Σ) łączy q_0 z q_1 oraz pewny, z góry zadany funkcjonal $L(u)$ osiąga wartość ekstremalną dla $u = \tilde{u}$ (takie sterowanie \tilde{u} , a także trajektoria $\gamma_{\tilde{u}}$ nazywają się *optymalnymi*). Zakładając, że (Σ) spełnia odpowiednie założenia, możemy tu stosować zasadę maksimum Pontriagina. Zasada ta daje nam układ równań różniczkowych, których spełnianie jest warunkiem koniecznym pierwszego rzędu na optymalność sterowania i trajektorii. Otrzymujemy w ten sposób zbiór krzywych, które są "podejrzane" o bycie optymalnymi. Następnie, w zależności od konkretnej sytuacji, można stosować warunki konieczne wyższych rzędów oraz szereg warunków dostatecznych mając nadzieję, że w skończonej liczbie kroków znajdziemy szukaną trajektorię optymalną. Wszystko to ma sens pod warunkiem, że q_1 jest osiągalny z q_0 , tzn. gdy $q_1 \in \mathcal{A}(q_0)$. Ponadto bardzo pomocną informacją może być to, czy $q_1 \in \text{int } \mathcal{A}(q_0)$, czy też $q_1 \in \partial \mathcal{A}(q_0)$, bo od tego zależy wybór technik jakich będziemy używać.

Podstawowa metoda, przynajmniej teoretycznie, szukania zbiorów osiągalnych polega na wydzieleniu tzw. krzywych geometrycznie optymalnych spośród wszystkich trajektorii układu. Otóż niech $\gamma = \gamma_u : [0, T] \rightarrow M$ będzie trajektorią (Σ) wychodzącą z $\gamma(0) = q_0$. Krzywa γ (lub sterowanie u) jest *geometrycznie optymalna* dla układu (Σ) , gdy $\gamma((0, T]) \subset \partial \mathcal{A}(q_0)$. Warunkiem koniecznym na geometryczną optymalność jest spełnianie geometrycznej wersji zasady maksimum Pontriagina (patrz np. [1]), którą dla wygody przytoczymy. Otóż niech $h_u : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ będzie zdefiniowane wzorem

$$h_u(q, p) = \langle p, f(q, u) \rangle.$$

Jeśli krzywa $\gamma = \gamma_u : [0, T] \rightarrow M$ jest geometrycznie optymalna, to istnieje taka krzywa absolutnie ciągła $p : [0, T] \rightarrow T^*M$, $p(t) \in T_{\gamma(t)}^*M \setminus \{0\}$, że spełnione są następujące warunki:

- (i) $(\dot{\gamma}(t), \dot{p}(t)) = \overrightarrow{h_{u(t)}}(\gamma(t), p(t))$, gdzie $\overrightarrow{h_u}$ jest hamiltonowskim polem wektorowym odpowiadającym funkcji (hamiltonianowi) h_u ; u jest tutaj parametrem;
- (ii) $h_{u(t)}(\gamma(t), p(t)) = 0$ na $[0, T]$;
- (iii) $h_{u(t)}(\gamma(t), p(t)) = \max_{v \in \mathcal{U}} h_v(\gamma(t), p(t))$ prawie wszędzie na $[0, T]$.

Celem prezentowanego jednotematycznego zbioru prac jest opisanie ogólnych własności zbiorów osiągalnych dla metryk sublorentzowskich, ze szczególnym uwzględnieniem tych własności, które są przydatne przy wyznaczaniu takich zbiorów. Ponadto w wymiarze 3 przedstawiona jest metoda ("algorytm") pozwalająca na obliczanie zbiorów osiągalnych dla pewnych klas metryk sublorentzowskich oraz dla afinicznych układów sterowania indukowanych przez te metryki. Mówiąc dokładniej chodzi o wyznaczenie skończonej rodziny funkcji opisujących takie zbiory. Podstawowa metoda jest następująca. Dla danej klasy struktur budujemy postacie normalne, które - jak się okazuje - zależne są od dwóch parametrów funkcyjnych. Struktura otrzymana przez wyzerowanie tych parametrów nazywa się strukturą płaską. W efekcie dowolna struktura z danej klasy może być postrzegana jako zaburzenie struktury płaskiej. Dla struktur płaskich funkcje opisujące zbiory osiągalne dają się wyznaczyć efektywnie, natomiast funkcje opisujące zbiory osiągalne w przypadku ogólnym są zaburzeniem tych z przypadku płaskiego. W efekcie rezultaty, które zachodzą globalnie w przypadku płaskim pozostają prawdziwe lokalnie w przypadkach zaburzonych. Ponieważ metoda wyznaczania zbiorów osiągalnych ma charakter geometryczny, więc udowodniwszy stosowne twierdzenia we współrzędnych normalnych otrzymujemy sposób postępowania, który działa bez potrzeby sprowadzania struktury do postaci normalnej. Przy tym funkcje opisujące zbiory osiągalne dostajemy jako rozwiązania odpowiednich liniowych równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego. Zatem nawet, jeśli tych rozwiązań nie da się uzyskać w sposób jawny, można bez większych problemów wyznaczyć początkowe wyrazy ich rozwinięć Taylora, a przy użyciu metod komputerowych nie będzie problemów z wyznaczeniem też dalszych.

Jako przykład zastosowań rezultatów zawartych w prezentowanym autoreferacie, wspomnimy na zakończenie tego podrozdziału o dwóch ważnych problemach występujących w rachunku wariacyjnym oraz teorii sterowania. Pierwszy problem dotyczy pytania, kiedy różne obiekty związane z analitycznym zagadnieniem optymalizacyjnym są semianalityczne, subanalityczne (zob. np. [45]; definicje oraz własności zbiorów semianalitycznych i subanalitycznych opisane są np. w [32, 4]). Pytanie to dotyczy np. tzw. funkcji wartości lub właśnie zbiorów osiągalnych. Okazuje się, że przy założeniu analityczności rozważanych przez mnie struktur sublorentzowskich, zbiory osiągalne - również te dla afinicznych układów sterowania indukowanych przez wspomniane struktury sublorentzowskie - są semianalityczne. Ponadto minimalna liczba funkcji analitycznych potrzebnych do opisu takich zbiorów jest ściśle związana z liczbą geometrycznie optymalnych krzywych czasowych. Drugi problem, o którym należy wspomnieć to problem Meyera. W najprostszej swojej postaci jest to następujące zagadnienie optymalizacyjne: dla danego układu sterowania (Σ) i danej funkcji (gładkiej) $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}$, znaleźć

$$\min \Phi(T, \gamma_u(T)), \gamma_u(0) = q_0,$$

gdzie $q_0 \in M$ jest ustalonym punktem, a minimum jest brane po wszystkich sterowaniach $u : [0, T] \rightarrow \mathcal{U}$, $T \geq 0$. Otóż dla rozważanych w autoreferacie struktur sublorentzowskich oraz układów afinicznych, problem Meyera sprowadza się do zastosowania twierdzenia Karusha-Kuhna-Tuckera, które - przynajmniej teoretycznie - jest dużo prostsze niż zagadnienia programowania dynamicznego.

3.2. Związek z afinicznymi układami sterowania. Niech (M, H, g) będzie czasowo zorientowaną rozmaitością sublorentzowską. Załóżmy, że na zbiorze otwartym

$U \subset M$ metryka (H, g) dana jest przez bazę ortonormalną X_0, X_1, \dots, X_k z orientacją czasową X_0 . Wynika stąd, że dowolna krzywa przyczynowa w U skierowana w przyszłość jest trajektorią układu sterowania

$$(3.1) \quad \dot{q} = \sum_{j=0}^k u_j X_j, \quad u = (u_0, u_1, \dots, u_k) \in \mathcal{C},$$

ze zbiorem parametrów sterujących

$$\mathcal{C} = \left\{ u = (u_0, u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^{k+1} : -u_0^2 + \sum_{j=1}^k u_j^2 \leq 0, u_0 > 0 \right\}.$$

Ustalmy taką krzywą $\gamma : [0, T] \rightarrow U$; wtedy $\dot{\gamma}(t) = \sum_{j=0}^k u_j(t) X_j(\gamma(t))$ dla odpowiedniego sterowania $u : [0, T] \rightarrow \mathcal{C}$. Podobnie jak w [G3] niech $\beta(t) = \int_0^t u_0(s) ds$. $\beta : [0, T] \rightarrow [0, T_1]$, $T_1 = \int_0^T u_0(s) ds$, jest absolutnie ciągłą funkcją rosnącą i niech $\alpha : [0, T_1] \rightarrow [0, T]$ będzie funkcją odwrotną. Połóżmy $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\alpha(t))$. Nietrudno zobaczyć, że

$$\frac{d}{dt} \tilde{\gamma}(t) = X_0(\tilde{\gamma}(t)) + \sum_{j=1}^k \frac{u_j(\alpha(t))}{u_0(\alpha(t))} X_j(\tilde{\gamma}(t)),$$

skąd wynika, że $\tilde{\gamma}$ jest trajektorią afinicznego układu sterowania

$$(3.2) \quad \dot{q} = X_0 + \sum_{j=1}^k u_j X_j, \quad u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathcal{B},$$

ze zbiorem parametrów sterujących

$$\mathcal{B} = \left\{ u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k : \sum_{j=1}^k u_j^2 \leq 1 \right\}$$

będącym kulą jednostkową domkniętą.

Stwierdzenie 3.1 ([G3]). *Układy sterowania (3.1) oraz (3.2) mają w U , z dokładnością do reparametryzacji, dokładnie te same trajektorie.*

Tak więc z lokalnego punktu widzenia wyznaczanie zbiorów osiągalnych dla struktur sublorentzowskich to to samo, co liczenie takich zbiorów dla afinicznych układów sterowania z domkniętą kulą jednostkową jako zbiorem parametrów sterujących. Przyjmując powyższe oznaczenia będziemy mówić, że *czasowo zorientowana metryka sublorentzowska (H, g) indukuje na U układ sterowania (3.2)*; podobnie mówimy, że *układ (3.2) indukuje na U czasowo zorientowaną metrykę sublorentzowską (H, g) zdefiniowaną następująco: $H = \text{Span}\{X_0, \dots, X_k\}$, zaś g jest określona przez warunek, że X_0, \dots, X_k jest baza ortonormalna z orientacją czasową X_0 . W przypadku rank $H = 2$ mamy:*

Stwierdzenie 3.2 ([G6]). *Trajektorie układu sterowania $\dot{q} = X + uY$, $u \in [a, b]$, pokrywają się, z dokładnością do reparametryzacji, z krzywymi przyczynowymi skierowanymi w przyszłość dla metryki sublorentzowskiej $(H, g^{a,b})$, gdzie $H = \text{Span}\{X, Y\}$, a $g^{a,b}$ jest metryką lorentzowską na H zdefiniowana przez warunek, że układ*

$$X^{a,b} = X + \frac{1}{2}(b+a)Y, \quad Y^{a,b} = \frac{1}{2}(b-a)Y$$

jest bazą ortonormalną z orientacją czasową $X^{a,b}$.

Jeśli U jest otoczeniem punktu q_0 w M , to przez $\mathcal{A}(q_0, U)$ oznaczmy zbiór osiągalny w U z q_0 dla układu (3.2), tj. zbiór końców wszystkich trajektorii układu (3.2) startujących z q_0 i zawartych w U . Powyższe stwierdzenia pokazują więc, że

Wniosek 3.1. $\mathcal{A}(q_0, U) = J^+(q_0, U)$, gdzie $J^+(q_0, U)$ jest przyczynowym zbiorem osiągalnym dla indukowanej struktury sublorentzowskiej.

Zauważmy jeszcze, że gdy mówimy o krzywych geometrycznie optymalnych zawartych w U , operator brzegu ∂ trzeba zastąpić operatorem brzegu ∂_U względem U , tzn. krzywa przyczynowa skierowana w przyszłość $\gamma : [0, T] \rightarrow U$, $\gamma(0) = q_0$, jest geometrycznie optymalna w U , jeśli $\gamma((0, T]) \subset \partial_U J^+(q_0, U)$.

Przyjmując powyższe oznaczenia ustanowimy teraz pewne analogie pomiędzy pojęciami geometrii sublorentzowskiej związanymi z układem (3.1), a pojęciami teorii sterowania związanymi z układem (3.2). Jak już wiemy krzywymi przyczynowym skierowanym w przyszłość, tj. trajektoriom (3.1) odpowiadają trajektorie (3.2). Niech $\gamma : [0, T] \rightarrow U$, $\gamma(0) = q_0$, będzie krzywą czasową dla (H, g) , która jest geometrycznie optymalna w U . Wówczas γ jest geometrycznie optymalna w U również względem zbioru parametrów sterujących $\text{int } \mathcal{C}$, a więc zbioru otwartego. Stosując teraz zasadę maksimum Pontriagina dochodzimy do konkluzji, że γ jest krzywą anormalną dla dystrybucji H . Dalej po stosownej reparametryzacji mamy $\dot{\gamma} = X_0 + \sum_{j=1}^k u_j X_j$, gdzie $u_1^2 + \dots + u_k^2 < 1$. Zatem γ jest geometrycznie optymalna w U dla układu (3.2) względem zbioru parametrów sterujących $\text{int } \mathcal{B}$, a więc znowu zbioru otwartego. Korzystając z np. [6] widać, że γ jest trajektorią osobliwą (singular extremal) dla układu (3.2). Idąc jeszcze dalej i stosując np. [1] dochodzimy do wniosku, że taka γ jest krzywą Goha.

Wniosek 3.2 ([G3, G6]). *Czasowe krzywe anormalne dla (3.1) to, po stosownej reparametryzacji, trajektorie osobliwe dla (3.2). Ponadto każda geometrycznie optymalna krzywa czasowa jest krzywą Goha dla dystrybucji H .*

Jak wynika z powyższych rozważań warunek Goha jest warunkiem koniecznym drugiego rzędu na geometryczną optymalność dla anormalnych krzywych czasowych (lub trajektorii osobliwych). Nie jest to jednak warunek wystarczający i sprawdzenie, czy dana krzywa Goha jest faktycznie geometrycznie optymalna nie jest łatwym zagadnieniem. Niżej pokażemy jak w pewnych szczególnych przypadkach wyróżnić geometrycznie optymalne krzywe Goha.

3.3. Własności zbiorów osiągalnych w przypadku ogólnym. Niech (M, H, g) będzie ustaloną czasowo zorientowaną rozmaitością sublorentzowską. Ogólne własności zbiorów osiągalnych względem otoczeń normalnych można streścić w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 3.1 ([G3]). *Niech U będzie otoczeniem normalnym punktu $q_0 \in M$. Wówczas $J^+(q_0, U)$ jest domknięty względem U . Ponadto $J^+(q_0, U) = \text{cl}_U(\text{int } I^+(q_0, U)) = \text{cl}_U(\text{int } N^+(q_0, U))$, $\partial_U J^+(q_0, U) = \partial_U I^+(q_0, U) = \partial_U N^+(q_0, U)$ oraz $\text{int } J^+(q_0, U) = \text{int } I^+(q_0, U) = \text{int } N^+(q_0, U)$.*

Twierdzenie 3.1 nie wynika wprost ze znanych twierdzeń teorii sterowania (por. [7, 24]) - nie zakładamy zupełności występujących tu pól wektorowych, nie ma wspólnego czasu końcowego dla wszystkich trajektorii, wykresy trajektorii nie muszą

być zawarte w żadnych podzbiorze zwartym $K \subset \mathbb{R} \times U$, a są to typowe założenia używane w teorii sterowania.

Przejdźmy teraz do zerowych geodezyjnych hamiltonowskich. Okazuje się, że mają one bardzo ważną własność wyrażoną w następującym

Stwierdzenie 3.3 ([G3]). *Niech $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ będzie zerową geodezyjną hamiltonowską skierowaną w przyszłość, $\gamma(0) = q_0$, i niech U będzie otoczeniem punktu q_0 . Wówczas $\gamma([0, T]) \subset \partial_U J^+(q_0, U)$, jeśli tylko $T > 0$ i U są dostatecznie małe. Mówiąc w uproszczeniu każdy dostatecznie mały odcinek zerowej geodezyjnej hamiltonowskiej skierowanej w przyszłość jest krzywą geometrycznie optymalną.*

Ze stwierdzenia 3.3 wynika szczególna rola zerowych geodezyjnych hamiltonowskich w wyznaczaniu zbioru osiągalnego dla metryk sublorentzowskich i odpowiadających im afinicznych układów sterowania. Załóżmy, że dany jest układ afiniczny jak w (3.2). Rozpatrzmy dalej indukowaną przez ten układ czasowo zorientowaną metrykę sublorentzowską (H, g) . Ustalmy punkt $q \in U$ i rozważmy wszystkie zerowe geodezyjne hamiltonowskie skierowane w przyszłość wychodzące z q . Każda taka geodezyjna po stosownej reparametryzacji jest trajekcją (3.2) i jak wynika ze stwierdzenia 3.3 jest geometrycznie optymalna dla (3.2).

Wniosek 3.3. *Niech $\mathcal{A}(q, U)$ będzie zbiorem osiągalnym w U z punktu q dla układu (3.2). Wówczas $\partial_U \mathcal{A}(q, U)$ zawiera wszystkie wychodzące z q zerowe geodezyjne hamiltonowskie skierowane w przyszłość dla indukowanej struktury sublorentzowskiej (H, g) .*

Powyższy wniosek jest użyteczny zwłaszcza dla $k \geq 2$, gdyż z góry mamy daną rodzinę krzywych geometrycznie optymalnych, która jak się wydaje, nie da się wyróżnić metodami teorii sterowania. Zauważmy jeszcze, że przy $k = 1$ zerowe geodezyjne hamiltonowskie pokrywają się (ewentualnie z dokładnością do reparametryzacji) z trajektoriami pól $X_0 + X_1$ i $X_0 - X_1$.

Jak wynika z przykładów przytoczonych w następujących podrozdziałach czasowe zbiory osiągalne $I^+(q_0, U)$ nie muszą być otwarte. Spowodowane jest to możliwością istnienia geometrycznie optymalnych krzywych czasowych. Sytuacja taka jest jednak rzadka w przypadku $\text{rank } H \geq 3$.

Stwierdzenie 3.4 ([G3]). *Niech (M, H, g) będzie rozmaitością sublorentzowską, gdzie H jest typowa (w sensie [9]) i $\text{rank } H \geq 3$. Wówczas dla każdego $q_0 \in M$ i dla każdego otoczenia U punktu q_0 zbiory $I^+(q_0, U)$ są otwarte.*

Powyższe stwierdzenie jest konsekwencją wniosku 3.2: każda geometrycznie optymalna krzywa czasowa jest krzywą Goha, a takie dla typowych dystrybucji rzędu co najmniej 3 nie istnieją - patrz [9].

Brak geometrycznie optymalnych krzywych czasowych nie wyklucza jednak istnienia na brzegu $\partial_U J^+(q_0, U)$ krzywych o niezerowej długości, które nie mają czasowych kawałków. Łatwo skonstruować krzywe o powyższej własności. Załóżmy, że metryka sublorentzowska (H, g) dana jest na U przez bazę ortonormalną X_0, \dots, X_k z orientacją czasową X_0 . Rozważmy odcinek $[0, T]$, $T > 0$, i niech $A \subset [0, T]$ będzie dowolnym zbiorem nigdzie gęstym o dodatniej mierze Lebesgue'a. Połóżmy teraz $u_0(t) = 1$, $t \in [0, T]$, oraz

$$u_1(t) = \dots = u_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} : t \in [0, T] \setminus A \\ 0 : t \in A \end{cases} .$$

Niech γ , $\gamma(0) = q_0$, będzie rozwiązaniem $\dot{\gamma} = X_0 + \sum_{j=1}^k u_j X_j$. Jasne, że γ nie ma odcinków czasowych oraz że $L(\gamma) > 0$. Gdyby taka krzywa była geometrycznie optymalna, wówczas zbiór $N^+(q_0, U)$ nie byłby domknięty w U , a $f[U]_{|\partial_U J^+(q_0, U)}$ nie znikałaby tożsamościowo.

Stwierdzenie 3.5 ([G3]). *Załóżmy, że $f[U]_{|\partial_U J^+(q_0, U)} = 0$ (co jest równoważne ciągłości $f[U]$ na $\partial_U J^+(q_0, U)$). Wówczas $I^+(q_0, U)$ jest zbiorem otwartym, a $N^+(q_0, U)$ zbiorem domkniętym; w szczególności $J^+(q_0, U) = N^+(q_0, U)$.*

Niech M będzie rozmaitością wymiaru $2n + 1$. Dystrybucja H rzędu $2n$ na M nazywa się *dystrybucją kontaktową*, jeśli lokalnie, w otoczeniu każdego punktu, H zadaje się jako jądro 1-formy ω spełniającej warunek $\omega \wedge d\omega \wedge \dots \wedge d\omega \neq 0$ (n czynników $d\omega$). Rozmaitość sublorentzowska (M, H, g) nazywa się *kontaktową rozmaitością sublorentzowską*, gdy H jest dystrybucją kontaktową.

Okazuje się, że w przypadku kontaktowym warunek $f[U]_{|\partial_U J^+(q_0, U)} = 0$ jest spełniony. Ponadto (por. stwierdzenie 3.3) mamy

Twierdzenie 3.2 ([G3]). *Niech (M, H, g) będzie $(2n + 1)$ -wymiarową kontaktową rozmaitością sublorentzowską. Ustalmy punkt $q_0 \in M$ i jego otoczenie normalne U . Wówczas dla każdego $q \in \partial_U J^+(q_0, U)$ dowolna krzywa geometrycznie optymalna łącząca q_0 z q jest kawałkami gładka ze skończoną liczbą punktów niégładkich. Kawałki gładkie krzywych geometrycznie optymalnych są zerowymi geodezyjnymi hamiltonowskimi skierowanymi w przyszłość. Wynika stąd w szczególności, że zbiory $I^+(q_0, U)$ są otwarte oraz że $J^+(q_0, U) = N^+(q_0, U)$.*

Udowodnienie twierdzeń dotyczących struktury zbiorów osiągalnych w przypadku ogólnym (poza twierdzeniami typu 3.1, 3.2) jest praktycznie rzecz biorąc niemożliwe. Można uzyskać częściowe rezultaty dokonując dość silnych założeń. Na koniec tego podrozdziału zanotujemy jedno z takich twierdzeń.

Twierdzenie 3.3. *Niech H będzie dystrybucją analityczną rzędu 2 w \mathbb{R}^n określoną na otoczeniu U zera. Załóżmy, że g jest taką analityczną metryką lorentzowską na H , że istnieje analityczna baza ortonormalna X, Y na U , z orientacją czasową X , spełniająca następujący warunek:*

dla każdej liczby naturalnej m istnieją funkcje analityczne $\alpha_0^{(m)}, \dots, \alpha_m^{(m)}, \beta^{(m)}$ określone na U , takie że $|\beta^{(m)}| < 1$ oraz

$$(3.3) \quad [Y, (ad^m X)Y] = \sum_{i=0}^m \alpha_i^{(m)} (ad^i X)Y + \beta^{(m)} (ad^{m+1} X)Y.$$

Wówczas przy założeniu, że U jest dostatecznie małe, dla każdego $q \in \partial_U J^+(q_0, U)$ krzywa geometrycznie optymalna łącząca 0 z q jest zerowa i ma skończoną liczbę punktów niégładkich. W szczególności zbiory $I^+(q_0, U)$ są otwarte i $J^+(q_0, U) = N^+(q_0, U)$.

3.4. Zbiory osiągalne w przypadku kontaktowym. Odtąd będziemy pracować w wymiarze 3. Najprostsza kontaktowa struktura sublorentzowska na 3-wymiarowych rozmaitości to przestrzeń \mathbb{R}^3 z tzw. *płaską sublorentzowską metryką kontaktową* lub *sublorentzowską metryką Heisenberga* (\hat{H}, \hat{g}) , która zdefiniowana jest [G2] przez bazę ortonormalną

$$\hat{X} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}y \frac{\partial}{\partial z}, \quad \hat{Y} = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}x \frac{\partial}{\partial z}$$

z orientacją czasową \hat{X} . Oznaczmy przez $\hat{J}^+(0)$ zbiór osiągalny $J^+(0, \mathbb{R}^3)$ (analogicznie określamy $\hat{I}^+(0)$ i $\hat{N}^+(0)$). Z podrozdziału 3.2 wynika, że $\hat{J}^+(0) = \mathcal{A}(0)$, gdzie $\mathcal{A}(0)$ jest zbiorem osiąganym dla układu afinicznego

$$\dot{q} = \hat{X} + u\hat{Y}, \quad u \in [-1, 1].$$

Patrząc na pola \hat{X} , \hat{Y} można od razu zauważyć, że $J^+(0) \subset \{|y| \leq x, x \geq 0\}$ oraz $\hat{I}^+(0) \subset \{|y| < x, x > 0\}$.

Jeśli Z , W są polami wektorowymi określonymi w otoczeniu $0 \in \mathbb{R}^3$, to przez ZW będziemy oznaczać krzywe postaci $t \longrightarrow \begin{cases} g_Z^t(0) : 0 \leq t \leq t_1 \\ g_W^t(g_Z^{t_1}(0)) : t \geq t_1 \end{cases}$, gdzie $t_1 \geq 0$ jest dowolne, a g_Z^t (odp. g_W^t) oznacza potok pola Z (odp. W).

Dalej z ogólnych rozważań teorii sterowania (zastosowanie zasady maksimum Pontriagina oraz fakt, iż w rozpatrywanym przypadku nie ma trajektorii osobliwych) wynika, że krzywe geometrycznie optymalne startujące z zera w tym przypadku to dokładnie krzywe $(\hat{X} + \hat{Y})(\hat{X} - \hat{Y})$ oraz $(\hat{X} - \hat{Y})(\hat{X} + \hat{Y})$. Znając wszystkie krzywe geometrycznie optymalne znamy $\partial\hat{J}^+(0) = \partial\mathcal{A}(0)$, tak więc w tym najprostszym przypadku struktura zbiorów osiągalnych jest znana.

Uwaga 3.1. W pracy [30] autorzy opisali w ten sposób strukturę zbioru osiągalnego $\mathcal{A}(0, \leq T)$ dla układu sterowania $\dot{q} = X + uY$, $|u| \leq 1$, przy założeniu, że $\text{Span}\{X, Y\}$ jest dystrybucją kontaktową, a $T > 0$ jest dostatecznie małe. Zbiór $\mathcal{A}(0, \leq T)$ z definicji to zbiór złożony z końców wszystkich trajektorii wspomnianego układu sterowania startujących z 0 i określonych na przedziałach $[0, t]$, $t \leq T$.

Zaprezentujemy teraz inne podejście do wyznaczenia zbioru osiągalnego $\hat{J}^+(0)$, mianowicie takie, które wykorzystuje obecność metryki sublorentzowskiej. W tym celu rozważmy wszystkie zerowe geodezyjne hamiltonowskie wychodzące z zera i skierowane w przyszłość. Ze stwierdzenia 3.3 wiadomo, że takie geodezyjne są geometrycznie optymalne. W naszym przypadku są dokładnie dwie geodezyjne zerowe - jak zaznaczono powyżej pokrywają się one z trajektoriami pól $\hat{X} + \hat{Y}$ i $\hat{X} - \hat{Y}$ wychodzącymi z zera. Zdefiniujmy dwie hiperpowierzchnie: $\Gamma_1 = \{y = x\}$ i $\Gamma_2 = \{y = -x\}$, a następnie zauważmy, że z -owe współrzędne trajektorii pola $\hat{X} - \hat{Y}$ startujących z $\Gamma_1 \cap \{z = 0\}$ są dodatnie, natomiast z -owe współrzędne trajektorii pola $\hat{X} + \hat{Y}$ startujących z $\Gamma_2 \cap \{z = 0\}$ są ujemne. Obserwacja ta prowadzi do następujących dwóch zagadnień Cauchy'ego:

$$(3.4) \quad (\hat{X} - \hat{Y})(\eta) = 0, \quad \eta|_{\Gamma_1} = z,$$

którego rozwiązaniem jest $\hat{\eta}_1(x, y, z) = z - \frac{1}{4}(x^2 - y^2)$ oraz

$$(3.5) \quad (\hat{X} + \hat{Y})(\eta) = 0, \quad \eta|_{\Gamma_1} = -z,$$

którego rozwiązaniem jest $\hat{\eta}_2(x, y, z) = -z - \frac{1}{4}(x^2 - y^2)$. Łatwo sprawdzamy, że $\nabla_{\hat{H}}\hat{\eta}_1 = -\hat{X}(\hat{\eta}_1)\hat{X} + \hat{Y}(\hat{\eta}_1)\hat{Y} = -\hat{X}(\hat{\eta}_1)(\hat{X} - \hat{Y}) = \frac{1}{2}(x - y)(\hat{X} - \hat{Y})$ i podobnie $\nabla_{\hat{H}}\hat{\eta}_2 = \frac{1}{2}(x + y)(\hat{X} + \hat{Y})$. Widać, że oba gradienty horyzontalne są polami zerowymi skierowanymi w przyszłość na zbiorze $\{|y| < x, x > 0\}$, zaś na zbiorze $\{|y| = x\}$ - znikają. Weźmy teraz dowolną krzywą przyczynową $\sigma : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ skierowaną w przyszłość i startującą z $\sigma(0) = 0$. Ponieważ

$$g(\dot{\sigma}(t), \nabla_{\hat{H}}\hat{\eta}_i(\sigma(t))) \leq 0$$

dla prawie każdego t , funkcje $t \rightarrow \hat{\eta}_i(\sigma(t))$ są nierosnące, $i = 1, 2$. Stąd $\hat{J}^+(0) \subset \{\hat{\eta}_1 \leq 0, x \geq 0, z \geq 0\} \cup \{\hat{\eta}_2 \leq 0, x \geq 0, z \leq 0\}$, a ponieważ trajektorie $\nabla_{\hat{H}}\hat{\eta}_1, \nabla_{\hat{H}}\hat{\eta}_2$ (w szczególności te startujące z Γ_1, Γ_2) są krzywymi przyczynowymi skierowanymi w przeszłość, otrzymujemy równość

$$\hat{J}^+(0) = \{\hat{\eta}_1 \leq 0, x \geq 0, z \geq 0\} \cup \{\hat{\eta}_2 \leq 0, x \geq 0, z \leq 0\}.$$

Zauważmy jeszcze tylko, że powierzchnia $\{\hat{\eta}_1 = 0\}$ jest utworzona z trajektorii pola $\hat{X} - \hat{Y}$ startujących z $\Gamma_1 \cap \{z = 0\}$, które pokrywają się z trajektoriami pola $\nabla_{\hat{H}}\hat{\eta}_1$, natomiast powierzchnia $\{\hat{\eta}_2 = 0\}$ składa się z trajektorii pola $\hat{X} + \hat{Y}$ startujących z $\Gamma_2 \cap \{z = 0\}$, które pokrywają się z trajektoriami $\nabla_{\hat{H}}\hat{\eta}_2$. Dochodzimy w ten sposób do stwierdzenia.

Stwierdzenie 3.6 ([G2, G4]). *Zbiory osiągalne dla płaskiej metryki kontaktowej wynoszą*

$$\begin{aligned} \hat{J}^+(0) &= \hat{N}^+(0) = \{\hat{\eta}_1 \leq 0, x \geq 0, z \geq 0\} \cup \{\hat{\eta}_2 \leq 0, x \geq 0, z \leq 0\}, \\ \hat{I}^+(0) &= \{\hat{\eta}_1 < 0, x > 0, z \geq 0\} \cup \{\hat{\eta}_2 < 0, x > 0, z \leq 0\}. \end{aligned}$$

Jak zostało wspomniane we wstępie, aby policzyć zbiory osiągalne dla dowolnych kontaktowych struktur sublorentzowskich na 3-wymiarowych rozmaitościach potrzebne są odpowiednie postacie normalne.

Twierdzenie 3.4 ([G1]). *Niech (M, H, g) będzie gładką (odp. analityczną) kontaktową rozmaitością sublorentzowską, $\dim M = 3$. Wówczas dla każdego $q \in M$ istnieją takie współrzędne gładkie (odp. analityczne) x, y, z określone w otoczeniu q , $x(q) = y(q) = z(q) = 0$, w których (H, g) ma bazę ortonormalną w następującej postaci normalnej*

$$(3.6) \quad \begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial x} + y\varphi(y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}) + \frac{1}{2}y(1 + \psi)\frac{\partial}{\partial z} \\ Y &= \frac{\partial}{\partial y} - x\varphi(y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}) - \frac{1}{2}x(1 + \psi)\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} ,$$

gdzie X jest orientacją czasową, a φ, ψ są takimi funkcjami gładkimi (odp. analitycznymi) określonymi w otoczeniu 0 , że $\varphi(0, 0, z) = \psi(0, 0, z) = \frac{\partial\psi}{\partial x}(0, 0, z) = \frac{\partial\psi}{\partial y}(0, 0, z) = 0$.

Ustalmy punkt q na kontaktowej rozmaitości sublorentzowskiej (M, H, g) . Niech U będzie dostatecznie małym otoczeniem normalnym punktu q . Korzystając z twierdzenia 3.4 można założyć, że $q = 0$, U jest otoczeniem zera w \mathbb{R}^3 , a (H, g) jest zadana na U przez bazę ortonormalną X, Y w postaci normalnej (3.6). Niech $\Gamma_1 = U \cap \{y = x\}$, $\Gamma_2 = U \cap \{y = -x\}$. Patrząc na (3.6) widać, że podobnie jak w przypadku płaskim z -owe współrzędne trajektorii pola $X - Y$ startujące z $\Gamma_1 \cap \{z = 0\}$ są dodatnie, a z -owe współrzędne trajektorii pola $X + Y$ startujące z $\Gamma_2 \cap \{z = 0\}$ są ujemne (zakładamy, że U jest dostatecznie małe). Rozważamy więc zagadnienia Cauchy'ego analogiczne do (3.4) i (3.5):

$$(X - Y)(\eta) = 0, \quad \eta|_{\Gamma_1} = z,$$

którego rozwiązanie oznaczamy przez η_1 oraz

$$(X + Y)(\eta) = 0, \quad \eta|_{\Gamma_2} = -z,$$

którego rozwiązanie oznaczamy przez η_2 . Pisząc $X = \hat{X} + X_1, Y = \hat{Y} + Y_1$, widać, że $\eta_1 = \hat{\eta}_1 + R_1, \eta_2 = \hat{\eta}_2 + R_2$, gdzie R_i jest wyższego rzędu niż $\hat{\eta}_i, i = 1, 2$. Tak więc gradient horyzontalny $\nabla_H\eta_i$ ma ten sam charakter przyczynowy, co $\nabla_{\hat{H}}\hat{\eta}_i$,

$i = 1, 2$, zakładając, że rozważane otoczenie U jest dostatecznie małe. Wówczas stosując te same argumenty, co w przypadku płaskim otrzymujemy

Twierdzenie 3.5 ([G4]). *Przy powyższych oznaczeniach, zbiory osiągalne z q dla metryki sublorentzowskiej (H, g) we współrzędnych normalnych wyrażają się następująco:*

$$J^+(0, U) = N^+(0, U) = (\{\eta_1 \leq 0, x \geq 0, z \geq 0\} \cap U) \cup (\{\eta_2 \leq 0, x \geq 0, z \leq 0\} \cap U),$$

$$I^+(0, U) = (\{\eta_1 < 0, x > 0, z \geq 0\} \cap U) \cup (\{\eta_2 < 0, x > 0, z \leq 0\} \cap U).$$

Uwaga 3.2. *Zauważmy, że udowodniwszy twierdzenie 3.5 nie musimy już sprowadzać naszej metryki do postaci normalnej. W celu wyznaczenia funkcji opisujących zbiory osiągalne wystarczy postępować następująco. Załóżmy, że mamy daną kontaktową rozmaitość sublorentzowską (gładką bądź analityczną) i że interesują nas (lokalne) zbiory osiągalne z ustalonego punktu q . Niech U będzie otoczeniem normalnym punktu q , które w razie potrzeby będziemy zmniejszać. Niech X, Y będzie bazą ortonormalną (H, g) określoną na U z orientacją czasową X . Dalej niech γ_1 (odp. γ_2) oznacza trajektorię pola $X + Y$ (odp. $X - Y$) wychodzącą z q (tzn. γ_1, γ_2 są (jedyne) zerowymi geodezyjnymi hamiltonowskimi skierowanymi w przyszłość wychodzącymi z q). Następnie wybieramy w U dwie hiperpowierzchnie M_1 i M_2 w taki sposób, że M_1 zawiera γ_1 i jest transwersalna do γ_2 , zaś M_2 zawiera γ_2 i jest transwersalna do γ_1 . Dalej wybieramy funkcję (gładką bądź analityczną) ζ_i określoną na M_i , $i = 1, 2$, jak następuje. Po pierwsze $\zeta_i^{-1}(0) = \gamma_i$, $i = 1, 2$. Po drugie określamy znaki tych funkcji. Rozważmy trajektorie pola $X - Y$ (odp. $-X + Y$) startujące z γ_1 . Zakładamy, że znak ζ_1 jest tak określony, iż rzuty $X - Y$ (odp. $-X + Y$) na M_1 wchodzą w obszar $\{\zeta_1 > 0\}$ (odp. w obszar $\{\zeta_1 < 0\}$). Analogicznie rozważmy trajektorie pola $X + Y$ (odp. $-X - Y$) startujące z γ_2 . Zakładamy, że rzuty tych trajektorii na M_2 wchodzą w obszar $\{\zeta_2 > 0\}$ (odp. w obszar $\{\zeta_2 < 0\}$). Łatwo zauważyć, że przy typowym wyborze M_1 i M_2 oraz dla U dostatecznie małego takie definicje mają sens. Rozważamy teraz zagadnienia Cauchy'ego*

$$(X - Y)(\eta) = 0, \quad \eta|_{M_1} = \zeta_1,$$

$$(X + Y)(\eta) = 0, \quad \eta|_{M_2} = \zeta_2,$$

których rozwiązania będą opisywały zbiory osiągalne $J^+(q, U)$, $I^+(q, U)$, $N^+(q, U)$. Otrzymane w ten sposób funkcje oczywiście nie są jednoznacznie wyznaczone. Jednoznacznie wyznaczone są za to ich poziomice zerowe.

W ten sposób otrzymujemy

Twierdzenie 3.6 ([G4]). *Niech (M, H, g) będzie gładką (odp. analityczną) kontaktową rozmaitością sublorentzowską, $\dim M = 3$. Dla każdego $q_0 \in M$ i dla każdego dostatecznie małego otoczenia normalnego U punktu q_0 istnieją funkcje η_1, η_2 określone i gładkie (odp. analityczne) na U , takie że*

$$J^+(q_0, U) = N^+(q_0, U) = \{q \in U : \eta_1(q) \leq 0, \eta_2(q) \leq 0, \Phi(q) \geq 0\},$$

$$I^+(0, U) = \{q \in U : \eta_1(q) < 0, \eta_2(q) < 0, \Phi(q) > 0\},$$

gdzie Φ jest funkcją czasu określoną na U .

Funkcja $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ określona na podzbiorze czasowo zorientowanej rozmaitości sublorentzowskiej nazywa się funkcją czasu, gdy $\nabla_H \Phi$ jest czasowy skierowany w przeszłość. Wtedy, jeśli $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ jest krzywą przyczynową skierowaną w

przyszłość, to $t \rightarrow \Phi(\gamma(t))$ jest rosnąca. Zauważmy jeszcze, że z przedstawionych rozważań wynika, że twierdzenie 3.6 jest uszczegółowieniem ogólnego twierdzenia 3.2.

Wniosek 3.4. *W analitycznym przypadku kontaktowym zbiory osiągalne są semi-analityczne. Ponadto minimalna liczba funkcji analitycznych potrzebna do opisu zbioru $J^+(q, U)$ wynosi 2.*

3.5. Zbiory osiągalne w przypadku Martineta. Rozważymy teraz najprostszy przypadek niekontaktowy. Niech H będzie dystrybucją (gładką, analityczną) spełniającą warunek Chow na otoczeniu U zera w \mathbb{R}^3 . Niech $H = \ker \omega$ dla odpowiedniej 1-formy ω . Jasne, że $\omega \wedge d\omega = f\Omega$, gdzie Ω jest formą objętości, a f - funkcją (gładką, analityczną) na U . W przypadku, gdy $f(0) \neq 0$, ω jest formą kontaktową. Załóżmy więc, że $f(0) = 0$ i jednocześnie $d_0f \neq 0$. Niech $S = \{f = 0\}$. Jak łatwo sprawdzić, $(\omega \wedge df)_q \neq 0$ dla typowego punktu $q \in S$. H nazywa się *dystrybucją (typu) Martineta*, jeśli $(\omega \wedge df)_q \neq 0$ dla każdego $q \in S$. Powierzchnia S nazywa się *powierzchnią Martineta*. Dystrybucje typu Martineta pojawiają się w fizyce, jak to jest przedstawione np. w [34]. Wprost z definicji wynika, że na S mamy nieosobliwe pole kierunków $L : S \ni q \rightarrow L_q = H_q \cap T_qS$. Zauważmy jeszcze, że H jest dystrybucją kontaktową na $U \setminus S$. Powyższe rozważania prowadzą do następującej definicji.

Metryka sublorentzowska (H, g) na rozmaitości M , $\dim M = 3$, nazywa się *sublorentzowską metryką (strukturą) Martineta*, jeśli istnieje hiperpowierzchnia S o następujących własnościach:

- (i) H zadaje strukturę kontaktową na $M \setminus S$;
- (ii) $H_q^2 \subset H_q$, $H_q^3 = T_qM$ dla każdego $q \in S$;
- (iii) $\dim H_q \cap T_qS = 1$ dla każdego $q \in S$;
- (iv) pole kierunków L jest czasowe

(przestrzenie H_q^i zdefiniowane są na początku podrozdziału 2.1). Pole kierunków L zadaje foliację hiperpowierzchni S krzywymi horyzontalnymi (w naszym przypadku czasowymi). Powszechnie znany fakt (zob. np. [33]) mówi, iż krzywe te są krzywymi anormalnymi dla dystrybucji H . Mówimy, że sublorentzowska metryka Martineta (H, g) jest *typu hamiltonowskiego*, gdy krzywe anormalne zadające foliację powierzchni S są, z dokładnością do parametryzacji, geodezyjnymi hamiltonowskimi skierowanymi w przyszłość.

Najprostsza sublorentzowska metryka Martineta typu hamiltonowskiego to metryka, którą będziemy nazywać *metryką płaską* i oznaczać przez $(\mathbb{R}^3, \hat{H}, \hat{g})$, a która zdefiniowana jest przez bazę ortonormalną

$$(3.7) \quad \hat{X} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}y^2 \frac{\partial}{\partial z}, \quad \hat{Y} = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}xy \frac{\partial}{\partial z}$$

z orientacją czasową \hat{X} . Powierzchnia Martineta w tym przypadku to $S = \{y = 0\}$. Dla zbiorów osiągalnych w przypadku płaskim wprowadźmy następujące oznaczenia: $\hat{J}^+(0) = J^+(0, \mathbb{R}^3)$, $\hat{N}^+(0) = N^+(0, \mathbb{R}^3)$, $\hat{I}^+(0) = I^+(0, \mathbb{R}^3)$. Patrząc na (3.7) od razu mamy $\hat{J}^+(0) \subset \{|y| \leq x, x \geq 0\}$, $\hat{I}^+(0) \subset \{|y| < x, x > 0\}$. Następnie, tak jak w przypadku kontaktowym, rozważmy wszystkie zerowe geodezyjne hamiltonowskie startujące z zera, tj. trajektorie pól $\hat{X} + \hat{Y}$ i $\hat{X} - \hat{Y}$. Niech jak wyżej $\Gamma_1 = \{y = x\}$, $\Gamma_2 = \{y = -x\}$. Zauważmy, że z -owe współrzędne trajektorii pola $\hat{X} - \hat{Y}$ startujących z $\Gamma_1 \cap \{z = 0\}$ są dodatnie, podobnie jak z -owe współrzędne trajektorii

pola $\hat{X} + \hat{Y}$ startujących z $\Gamma_2 \cap \{z = 0\}$. W związku z tym rozważamy następujące zagadnienia Cauchy'ego:

$$(\hat{X} - \hat{Y})(\eta) = 0, \quad \eta|_{\Gamma_1} = z$$

z rozwiązaniem równym $\hat{\eta}_1 = z - \frac{1}{16}(x^2 - y^2)(x + 3y)$ oraz

$$(\hat{X} + \hat{Y})(\eta) = 0, \quad \eta|_{\Gamma_2} = z$$

z rozwiązaniem $\hat{\eta}_2 = z - \frac{1}{16}(x^2 - y^2)(x - 3y)$. Tym razem jednak, w odróżnieniu od przypadku kontaktowego, dwie funkcje $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2$ nie wystarczają do opisu $\hat{J}^+(0)$. Potrzeba kolejnych funkcji. Weźmy pod uwagę krzywą $\gamma(t) = (t, 0, 0)$, która jest czasową krzywą anormalną wychodzącą z zera. Z teorii sterowania wiadomo, że krzywa taka spełnia warunki konieczne na geometryczną optymalność i rzeczywiście, korzystając z twierdzenia 3.1, nietrudno sprawdzić [G5], że leży ona na brzegu $\partial\hat{J}^+(0)$. Z wniosku 3.2 wynika więc, że γ jest krzywą Goha.

Zauważmy teraz, że z -owe współrzędne pola $\hat{X} + \hat{Y}$ na $\{y > 0\}$ i pola $\hat{X} - \hat{Y}$ na $\{y < 0\}$ są ujemne, co uzasadnia rozważenie zagadnień Cauchy'ego:

$$(\hat{X} + \hat{Y})(\eta) = 0, \quad \eta|_S = -z,$$

którego rozwiązaniem jest $\hat{\eta}_3 = -z - \frac{1}{4}(xy^2 - y^3)$ oraz

$$(\hat{X} - \hat{Y})(\eta) = 0, \quad \eta|_S = -z,$$

którego rozwiązaniem jest $\hat{\eta}_4 = -z - \frac{1}{4}(xy^2 + y^3)$. Łatwo sprawdzamy charakter przyczynowy gradientów $\nabla_{\hat{H}}\hat{\eta}_1, \dots, \nabla_{\hat{H}}\hat{\eta}_4$. Otóż $\nabla_{\hat{H}}\hat{\eta}_1$ jest polem zerowym skierowanym w przyszłość na zbiorze $\{-\frac{1}{3}x < y < x, x > 0\}$, $\nabla_{\hat{H}}\hat{\eta}_2$ jest zerowe skierowane w przyszłość na $\{-x < y < \frac{1}{3}x, x > 0\}$, natomiast $\nabla_{\hat{H}}\hat{\eta}_3$ i $\nabla_{\hat{H}}\hat{\eta}_4$ są zerowe skierowane w przyszłość na $\{y \neq 0, x > 0\}$. Weźmy teraz dowolną krzywą przyczynową $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ skierowaną w przyszłość i wychodzącą z $\gamma(0) = 0$. Biorąc po uwagę powyższe uwagi możemy stwierdzić, że funkcja $t \rightarrow \hat{\eta}_1(\gamma(t))$ jest nierosnąca na każdej składowej spójnej zbioru

$$\{t \in [0, T] : \gamma(t) \in \{0 \leq y \leq x, x \geq 0\}\},$$

$t \rightarrow \hat{\eta}_2(\gamma(t))$ jest nierosnąca na każdej składowej spójnej

$$\{t \in [0, T] : \gamma(t) \in \{-x \leq y \leq 0, x \geq 0\}\},$$

$t \rightarrow \hat{\eta}_3(\gamma(t))$ jest nierosnąca na każdej składowej spójnej

$$\{t \in [0, T] : \gamma(t) \in \{0 \leq y \leq x, x \geq 0\}\},$$

zaś funkcja $t \rightarrow \hat{\eta}_4(\gamma(t))$ jest nierosnąca na każdej składowej spójnej zbioru

$$\{t \in [0, T] : \gamma(t) \in \{-x \leq y \leq 0, x \geq 0\}\}.$$

Obserwacje te prowadzą do następującego wyniku.

Stwierdzenie 3.7 ([G5]). *Zbiory osiągalne dla płaskiej sublorentzowskiej metryki Martineta mają postać*

$$(3.8) \quad \hat{J}^+(0) = \hat{A}_1 \cup \hat{A}_2 \cup \hat{A}_3 \cup \hat{A}_4,$$

$$(3.9) \quad \hat{I}^+(0) = \text{int}(\hat{A}_1 \cup \hat{A}_2 \cup \hat{A}_3 \cup \hat{A}_4) \cup A_5,$$

$$(3.10) \quad \hat{N}^+(0) = \text{int}(\hat{A}_1 \cup \hat{A}_2 \cup \hat{A}_3 \cup \hat{A}_4) \cup \partial(\hat{A}_1 \cup \hat{A}_2) \setminus A_5,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= \{(x, y, z) : \hat{\eta}_1(x, y, z) \leq 0, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}, \\ \hat{A}_2 &= \{(x, y, z) : \hat{\eta}_2(x, y, z) \leq 0, x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0\}, \\ \hat{A}_3 &= \{(x, y, z) : \hat{\eta}_3(x, y, z) \leq 0, x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0\}, \\ \hat{A}_4 &= \{(x, y, z) : \hat{\eta}_4(x, y, z) \leq 0, x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0\}, \\ A_5 &= \{(x, 0, 0) : x > 0\}. \end{aligned}$$

Przejsie do przypadku ogólnego, przy założeniu analityczności, umożliwia następująca

Twierdzenie 3.7 ([G5]). *Niech (H, g) będzie czasowo zorientowaną analityczną sublorentzowską metryką Martineta typu hamiltonowskiego określoną na rozmaitości analitycznej M i niech S będzie powierzchnią Martineta dla H . Wówczas dla każdego $q \in S$ istnieją takie współrzędne analityczne x, y, z określone w otoczeniu q , $x(q) = y(q) = z(q) = 0$, w których (H, g) ma bazę ortonormalną w następującej postaci normalnej*

$$(3.11) \quad \begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial x} + y\varphi(y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}) + \frac{1}{2}y^2(1 + \psi)\frac{\partial}{\partial z} \\ Y &= \frac{\partial}{\partial y} - x\varphi(y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}) - \frac{1}{2}xy(1 + \psi)\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad ,$$

przy czym X jest orientacją czasową, φ i ψ są takimi funkcjami analitycznymi określonymi w otoczeniu 0 , że $\psi(0, 0, z) = 0$, a powierzchnia Martineta S jest równa $S = \{y = 0\}$.

Twierdzenie 3.7 umożliwia uogólnienie globalnych rezultatów z przypadku płaskiego do lokalnych rezultatów dla ogólnych analitycznych struktur sublorentzowskich Martineta typu hamiltonowskiego. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że pracujemy w otoczeniu zera w \mathbb{R}^3 .

Twierdzenie 3.8 ([G5]). *Niech (H, g) będzie czasowo zorientowaną analityczną sublorentzowską metryką Martineta typu hamiltonowskiego określoną na otoczeniu U zera w \mathbb{R}^3 i daną przez bazę ortonormalną w postaci normalnej (3.11). Załóżmy, że U jest dostatecznie małym otoczeniem normalnym zera. Wówczas istnieją funkcje analityczne $\eta_1, \dots, \eta_4 : U \rightarrow \mathbb{R}$ oraz zbiór semi-analityczny Σ wymiaru 2, taki że $U \cap \{x \geq 0\} \setminus \Sigma$ ma dwie składowe spójne Σ^+ , Σ^- oraz*

$$\begin{aligned} J^+(0, U) &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4, \\ I^+(0, U) &= \text{int}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \cup A_5, \\ N^+(0, U) &= \text{int}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \cup \partial_U(A_1 \cup A_2) \setminus A_5, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y, z) \in U : \eta_1(x, y, z) \leq 0\} \cap \Sigma^+ \cap \{z \geq 0\}, \\ A_2 &= \{(x, y, z) \in U : \eta_2(x, y, z) \leq 0\} \cap \Sigma^- \cap \{z \geq 0\}, \\ A_3 &= \{(x, y, z) \in U : \eta_3(x, y, z) \leq 0\} \cap \{y \geq 0, x \geq 0\} \cap \{z \leq 0\}, \\ A_4 &= \{(x, y, z) \in U : \eta_4(x, y, z) \leq 0\} \cap \{y \leq 0, x \geq 0\} \cap \{z \leq 0\}, \\ A_5 &= \{(x, 0, 0) : x > 0\}, \end{aligned}$$

A_5 jest zbiorem punktów czasowe geodezyjnej anormalnej wychodzącej z zera.

Podobnie jak w przypadku kontaktowym, funkcja η_i jest zaburzeniem funkcji $\hat{\eta}_i$, $i = 1, \dots, 4$. Korzystając z notacji wprowadzonej w podrozdziale 3.4 wypiszemy krzywe geometrycznie optymalne w przypadku Martineta. Są to $(X + Y)(X - Y)$, $(X - Y)(X + Y)$ - przestają być one geometrycznie optymalne po osiągnięciu zbioru Σ , oraz krzywe $X(X + Y)$, $X(X - Y)$.

Dla przypadku Martineta ma zastosowanie uwaga analogiczna do uwagi 3.2 z tą różnicą, że teraz będziemy rozwiązywać dwa dodatkowe zagadnienia Cauchy'ego z warunkami początkowymi na powierzchni Martineta. Otrzymujemy również

Wniosek 3.5. *Zbiory osiągalne dla analitycznych struktur Martineta typu hamiltonowskiego są semi-analityczne. Ponadto minimalna liczba funkcji analitycznych potrzebna do opisu zbioru $J^+(q, U)$, $q \in S$, wynosi 4.*

3.6. Zbiory osiągalne w uogólnionym przypadku Martineta. Metryka sublorentzowska (H, g) na rozmaitości M , $\dim M = 3$, nazywa się *uogólnioną sublorentzowską metryką Martineta*, jeśli istnieje gładka (analityczna w przypadku analitycznym) hiperpowierzchnia S , zwana powierzchnią Martineta, oraz liczba naturalna k o następujących własnościach

- (i) H zadaje strukturę kontaktową na $M \setminus S$;
- (ii) $H_q^l \subset H_q$, $1 \leq l \leq k$, oraz $H_q^{k+1} = T_q \mathbb{R}^3$ dla każdego $q \in S$;
- (iii) $\dim H_q \cap T_q S = 1$ dla każdego $q \in S$;
- (iv) pole kierunków $L : S \ni q \longrightarrow L_q = H_q \cap T_q S$ jest czasowe.

Podobnie jak w przypadku Martineta, trajektorie pola kierunków L są krzywymi anormalnymi względem H i stanowią foliację powierzchni S . Mówimy, że uogólniona metryka sublorentzowska (H, g) jest *typu hamiltonowskiego*, gdy trajektorie pola kierunków L są, przy stosownej parametryzacji, czasowymi geodezyjnymi hamiltonowskimi.

Najprostsza struktura wspomnianego typu to struktura płaska zadana przez bazę ortonormalną

$$\hat{X} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}y^k \frac{\partial}{\partial z}, \quad \hat{Y} = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}xy^{k-1} \frac{\partial}{\partial z},$$

gdzie za orientację czasową przyjmujemy pole \hat{X} . Łatwo sprawdzamy, że jest to struktura typu hamiltonowskiego. Zauważmy ponadto, że oś x jest w tym przypadku czasową geodezyjną anormalną startującą z zera i że $S = \{y = 0\}$. Podobnie jak w poprzednich przypadkach badamy znaki z -owych współrzędnych pól $\hat{X} \pm \hat{Y}$. Dochodzimy do wniosku, że dla k nieparzystego sytuacja przypomina tę opisaną w podrozdziale 3.4, a dla k parzystego tę z podrozdziału 3.5. Stosując analogiczne rozumowania i analogiczną notację do tej z podrozdziałów 3.4, 3.5 dochodzimy do następujących rezultatów.

Stwierdzenie 3.8 ([G6]). *Zbiory osiągalne dla płaskiej uogólnionej sublorentzowskiej metryki Martineta dla k nieparzystego są postaci*

$$\begin{aligned} \hat{J}^+(0) &= \hat{N}^+(0) = \hat{A}_1 \cup \hat{A}_2 \\ \hat{I}^+(0) &= \text{int}(\hat{A}_1 \cup \hat{A}_2), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \hat{\eta}_1(x, y, z) = z + \frac{1}{2k}(y+x)(y^k - \frac{1}{2k}(y+x)^k) \leq 0\} \cap \{x \geq 0, z \geq 0\}, \\ \hat{A}_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \hat{\eta}_2(x, y, z) = -z - \frac{1}{2k}(x-y)(y^k + \frac{1}{2k}(x-y)^k) \leq 0\} \cap \{x \geq 0, z \leq 0\}. \end{aligned}$$

Stwierdzenie 3.9 ([G6]). *Zbiory osiągalne dla płaskiej uogólnionej sublorentzowskiej metryki Martineta dla k parzystego są postaci*

$$\begin{aligned} \hat{J}^+(0) &= \hat{A}_1 \cup \dots \cup \hat{A}_4 \\ \hat{I}^+(0) &= \text{int}(\hat{A}_1 \cup \dots \cup \hat{A}_4) \cup A_5 \\ \hat{N}^+(0) &= \text{int}(\hat{A}_1 \cup \dots \cup \hat{A}_4) \cup \partial(\hat{A}_1 \cup \hat{A}_2) \setminus A_5, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\hat{A}_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \hat{\eta}_1(x, y, z) = z + \frac{1}{2^k}(y+x)(y^k - \frac{1}{2^k}(y+x)^k) \leq 0\} \cap \{y \geq 0\} \cap \\ &\quad \{x \geq 0, z \geq 0\}, \\ \hat{A}_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \hat{\eta}_2(x, y, z) = z + \frac{1}{2^k}(x-y)(y^k - \frac{1}{2^k}(x-y)^k) \leq 0\} \cap \{y \leq 0\} \cap \\ &\quad \{x \geq 0, z \geq 0\}, \\ \hat{A}_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \hat{\eta}_3(x, y, z) = -z - \frac{1}{2^k}y^k(x-y) \leq 0\} \cap \{y \geq 0\} \cap \{x \geq 0, z \leq 0\}, \\ \hat{A}_4 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \hat{\eta}_4(x, y, z) = -z - \frac{1}{2^k}y^k(x+y) \leq 0\} \cap \{y \leq 0\} \cap \{x \geq 0, z \leq 0\}\end{aligned}$$

i gdzie A_5 to zbiór punktów geodezyjnej anormalnej startującej z zera.

Podobnie jak wyżej, aby uogólnić te rezultaty na przypadek niepłaski potrzebne są nam postacie normalne.

Twierdzenie 3.9 ([G6]). *Niech (H, g) będzie czasowo zorientowaną analityczną uogólnioną sublorentzowską metryką Martineta typu hamiltonowskiego określoną na rozmaitości analitycznej M i niech S oznacza powierzchnię Martineta dla H . Wówczas dla każdego $q \in S$ istnieją takie współrzędne analityczne x, y, z określone w otoczeniu q , $x(q) = y(q) = z(q) = 0$, w których (H, g) ma bazę ortonormalną w następującej postaci normalnej*

$$(3.12) \quad \begin{aligned}X &= \frac{\partial}{\partial x} + y\varphi(y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}) + \frac{1}{2}y^k(1+\psi)\frac{\partial}{\partial z} \\ Y &= \frac{\partial}{\partial y} - x\varphi(y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}) - \frac{1}{2}xy^{k-1}(1+\psi)\frac{\partial}{\partial z},\end{aligned}$$

przy czym X jest orientacją czasową, φ i ψ są takimi funkcjami analitycznymi określonymi w otoczeniu 0 , że $\psi(0, 0, z) = 0$, a S jest równa $S = \{y = 0\}$.

Korzystając z postaci normalnych i stosując rozumowanie jak w poprzednich podrozdziałach otrzymujemy:

Twierdzenie 3.10 ([G6]). *Niech (H, g) będzie czasowo zorientowaną analityczną sublorentzowską metryką Martineta typu hamiltonowskiego określoną na otoczeniu U zera w \mathbb{R}^3 i daną przez bazę ortonormalną w postaci normalnej (3.12). Załóżmy, że liczba k występująca w (3.12) jest nieparzysta. Wówczas, jeśli U jest dostatecznie małym otoczeniem normalnym zera, istnieją takie funkcje analityczne $\eta_1, \eta_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$, że zbiory osiągalne są postaci*

$$\begin{aligned}J^+(0, U) &= N^+(0, U) = A_1 \cup A_2, \\ I^+(0, U) &= \text{int}(A_1 \cup A_2),\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}A_1 &= \{(x, y, z) \in U : \eta_1(x, y, z) \leq 0\} \cap \{x \geq 0, z \geq 0\}, \\ A_2 &= \{(x, y, z) \in U : \eta_2(x, y, z) \leq 0\} \cap \{x \geq 0, z \leq 0\}.\end{aligned}$$

Twierdzenie 3.11 ([G6]). *Niech (H, g) będzie czasowo zorientowaną analityczną sublorentzowską metryką Martineta typu hamiltonowskiego określoną na otoczeniu U zera w \mathbb{R}^3 i daną przez bazę ortonormalną w postaci normalnej (3.12). Załóżmy, że liczba k występująca w (3.12) jest parzysta. Wówczas, jeśli U jest dostatecznie małym otoczeniem normalnym zera, istnieją funkcje analityczne $\eta_1, \dots, \eta_4 : U \rightarrow \mathbb{R}$ oraz zbiór semianalityczny Σ wymiaru 2, taki że $U \cap \{x \geq 0\} \setminus \Sigma$ ma dwie składowe spójne Σ^-, Σ^+ oraz*

$$\begin{aligned}J^+(0, U) &= A_1 \cup \dots \cup A_4, \\ I^+(0, U) &= \text{int}(A_1 \cup \dots \cup A_4) \cup A_5, \\ N^+(0, U) &= \text{int}(A_1 \cup \dots \cup A_4) \cup \partial_U(A_1 \cup A_2) \setminus A_5,\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y, z) \in U : \eta_1(x, y, z) \leq 0\} \cap \Sigma^+ \cap \{z \geq 0\}, \\ A_2 &= \{(x, y, z) \in U : \eta_2(x, y, z) \leq 0\} \cap \Sigma^- \cap \{z \geq 0\}, \\ A_3 &= \{(x, y, z) \in U : \eta_3(x, y, z) \leq 0\} \cap \{x \geq 0, y \geq 0\} \cap \{z \leq 0\}, \\ A_4 &= \{(x, y, z) \in U : \eta_4(x, y, z) \leq 0\} \cap \{x \geq 0, y \leq 0\} \cap \{z \leq 0\}, \\ A_5 &= \{(x, 0, 0) \in U : x \geq 0\}. \end{aligned}$$

Podobnie jak wyżej funkcje η_i są zaburzeniami funkcji $\hat{\eta}_i$ z przypadku płaskiego, $i = 1, \dots, 4$. Również w tym przypadku ma zastosowanie uwaga analogiczna do uwagi 3.2. Na koniec zanotujmy

Wniosek 3.6. *Zbiory osiągalne dla analitycznych uogólnionych struktur Martineta typu hamiltonowskiego są semi-analityczne. Ponadto minimalna liczba funkcji analitycznych potrzebna do opisu zbioru $J^+(q, U)$, $q \in S$, wynosi 4 w przypadku k parzystego i 2 dla k nieparzystego.*

3.7. Zbiory osiągalne dla struktur z niegładką powierzchnią Martineta.

Rozważmy przypadek niekontaktowych struktur sublorentzowskich z najprostszą niegładką powierzchnią Martineta, tj. powierzchnią Martineta będącą sumą dwu transwersalnie przecinających się hiperpowierzchni. Niech (M, H, g) będzie rozmaitością sublorentzowską i niech $v_1, v_2 \in H_q$, $q \in M$, będą wektorami czasowymi skierowanymi w przyszłość. *Kątem hiperbolicznym* pomiędzy v_1 i v_2 nazywamy liczbę $\angle(v_1, v_2) \geq 0$ zdefiniowaną przez warunek

$$\cosh \angle(v_1, v_2) = -\frac{g(v_1, v_2)}{\|v_1\| \|v_2\|},$$

gdzie $\|v\| = (-g(v, v))^{1/2}$ (z odwróconej nierówności Schwarza $-\frac{g(v_1, v_2)}{\|v_1\| \|v_2\|} \geq 1$, więc taka definicja jest poprawna). Niech teraz L_1, L_2 będą 1-wymiarowymi podprzestrzeniami czasowymi w H_q . Wybierzmy wektory czasowe skierowane w przyszłość v_1, v_2 , takie że $L_1 = \text{Span}\{v_1\}$, $L_2 = \text{Span}\{v_2\}$. Określamy kąt pomiędzy takimi prostymi jako

$$\angle(L_1, L_2) = \angle(v_1, v_2).$$

Podamy teraz dokładną definicję klasy struktur rozważanych w tym podrozdziale. Niech M będzie rozmaitością gładką (analityczną) i niech H będzie gładką (analityczną) dystrybucją rzędu 2. Mówimy, że struktura sublorentzowska (H, g) jest *typu $M_{2,2}$* , jeśli

(i) istnieją gładkie (analityczne) hiperpowierzchnie S_1, S_2 , takie że ich przecięcie $\Gamma = S_1 \cap S_2$ jest podrozzmaitością 1-wymiarową. Ponadto $\dim(T_q S_i \cap H_q) = 1$ dla każdego $q \in \Gamma$ oraz $i = 1, 2$;

(ii) H zadaje strukturę kontaktową na $M \setminus (S_1 \cup S_2)$;

(iii) $H_q^2 = H_q$ i $H_q^3 = T_q M$, jeśli tylko $q \in (S_1 \cup S_2) \setminus \Gamma$;

(iv) $H_q^4 = T_q M$ dla $q \in \Gamma$;

(v) pola kierunków $S_i \ni q \rightarrow T_q S_i \cap H_q$, $i = 1, 2$, są czasowe;

(vi) funkcja $S_1 \cap S_2 \ni q \rightarrow \angle(T_q S_1 \cap H_q, T_q S_2 \cap H_q)$ jest stała;

(vii) krzywe anormalne stanowiące foliację $S_1 \cup S_2$ są, z dokładnością do reparametryzacji, czasowymi geodezyjnymi hamiltonowskimi skierowanymi w przyszłość.

Również i w tym przypadku zbiór $S = S_1 \cup S_2$ nazywa się powierzchnią Martineta.

Zauważmy, że w otoczeniu dowolnego punktu ze zbioru $S_i \setminus \Gamma$, $i = 1, 2$, struktura $M_{2,2}$ to uogólniona struktura Martineta typu hamiltonowskiego.

Jak zobaczymy niżej, wartość kąta hiperbolicznego pomiędzy $TS_1 \cap H$ a $TS_2 \cap H$ decyduje o strukturze zbiorów osiągalnych oraz o ilości geometrycznie optymalnych krzywych czasowych. Niech

$$(3.13) \quad W = W(c_1, c_2) = c_1 c_2 + 2c_1 - 2c_2 - 1.$$

Tym razem zaczniemy od twierdzenia o postaciach normalnych.

Twierdzenie 3.12 ([G7]). *Niech (M, H, g) będzie czasowo zorientowaną analityczną rozmaitością sublorentzowską, gdzie (H, g) jest metryką typu $M_{2,2}$. Wówczas dla każdego punktu $q \in \Gamma$ (gdzie Γ ma znaczenie j.w.) istnieją takie współrzędne analityczne x, y, z określone na otoczeniu punktu q , $x(q) = y(q) = z(q) = 0$, że (H, g) ma bazę ortonormalną w następującej postaci normalnej*

$$(3.14) \quad \begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial x} + y\varphi(y) \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}y(y - c_1x)(y - c_2x)(1 + \psi) \frac{\partial}{\partial z} \\ Y &= \frac{\partial}{\partial y} - x\varphi(y) \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}x(y - c_1x)(y - c_2x)(1 + \psi) \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} ,$$

przy czym X jest orientacją czasową, c_1, c_2 są takimi stałymi, że $-1 < c_2 < c_1 < 1$, powierzchnia Martineta przedstawia się wzorem $S = \{y = c_1x\} \cup \{y = c_2x\}$, a φ, ψ są takimi funkcjami analitycznymi określonymi w otoczeniu 0, że $\psi(0, 0, z) = 0$.

Nietrudno teraz odgadnąć interpretację wyrażenia (3.13). Otóż jeśli $\alpha = \sphericalangle(T_q S_1 \cap H_q, T_q S_2 \cap H_q)$ dla $q \in \Gamma$, to z (3.14) widać, że $\cosh \alpha = \frac{1 - c_1 c_2}{\sqrt{1 - c_1^2} \sqrt{1 - c_2^2}}$ i $\sinh \alpha = \frac{c_1 - c_2}{\sqrt{1 - c_1^2} \sqrt{1 - c_2^2}}$, skąd

$$\frac{W}{\sqrt{1 - c_1^2} \sqrt{1 - c_2^2}} = -\cosh \alpha + 2 \sinh \alpha.$$

Tak więc znak wielomianu W jest niezmiennikiem dla struktur typu $M_{2,2}$. Przy tym $W > 0$ ($W < 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy $\tanh \alpha > \frac{1}{2}$ ($\tanh \alpha < \frac{1}{2}$).

Korzystając z powyższego schematu najpierw liczymy zbiory osiągalne dla struktur płaskich w \mathbb{R}^3 , które definiujemy przez warunek, że układ

$$\hat{X} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}y(y - c_1x)(y - c_2x) \frac{\partial}{\partial z}, \quad \hat{Y} = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}x(y - c_1x)(y - c_2x) \frac{\partial}{\partial z}$$

jest ortonormalny z orientacją czasową \hat{X} (wszystkie szczegóły znajdują się w [G7]). Przechodząc do przypadku ogólnego mamy

Twierdzenie 3.13 ([G7]). *Niech (H, g) będzie analityczną czasowo zorientowaną metryką typu $M_{2,2}$ określoną przez bazę ortonormalną w postaci (3.14) na otoczeniu normalnym U zera w \mathbb{R}^3 . Przypuśćmy, że $W(c_1, c_2) < 0$. Wówczas zakładając, że U jest dostatecznie małe, istnieją funkcje analityczne $\eta_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, takie że zbiory osiągalne dla (H, g) mają postać*

$$J^+(0, U) = N^+(0, U) = A_1 \cup A_2,$$

$$I^+(0, U) = \text{int}(A_1 \cup A_2),$$

gdzie

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y, z) \in U : \eta_1(x, y, z) \leq 0\} \cap \{x \geq 0, z \geq 0\}, \\ A_2 &= \{(x, y, z) \in U : \eta_2(x, y, z) \leq 0\} \cap \{x \geq 0, z \leq 0\}. \end{aligned}$$

Jak widać w przypadkach opisywanych przez twierdzenie 3.13 nie ma geometrycznie optymalnych krzywych czasowych.

Twierdzenie 3.14 ([G7]). *Niech (H, g) będzie analityczną czasowo zorientowaną metryką typu $M_{2,2}$ określoną przez bazę ortonormalną w postaci (3.14) na otoczeniu normalnym U zera w \mathbb{R}^3 . Przypuśćmy, że $W(c_1, c_2) > 0$. Wówczas zakładając, że U jest dostatecznie małe, istnieją funkcje analityczne $\eta_i, \xi_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2$, oraz zbiory semianalityczne Σ_1, Σ_2 wymiaru 2, takie że $U \cap \{x \geq 0\} \cap \{z \geq 0\} \cap \{c_2x \leq y \leq x\} \setminus \Sigma_1$ ma dwie składowe spójne Σ_1^+, Σ_1^- oraz $U \cap \{x \geq 0\} \cap \{z \leq 0\} \cap \{-x \leq y \leq c_1x\} \setminus \Sigma_2$ ma dwie składowe spójne Σ_2^+, Σ_2^- i takie że zbiory osiągalne dla (H, g) mają postać*

$$J^+(0, U) = A_1 \cup \dots \cup A_6,$$

$$I^+(0, U) = \text{int}(A_1 \cup \dots \cup A_6) \cup A_7 \cup A_8,$$

$$N^+(0, U) = \text{int}(A_1 \cup \dots \cup A_6) \cup (\{\eta_1 = 0\} \cap \Sigma_1^+) \cup (\{\eta_2 = 0\} \cap \Sigma_2^-),$$

gdzie

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y, z) \in U : \eta_1(x, y, z) \leq 0\} \cap \Sigma_1^+, \\ A_2 &= \{(x, y, z) \in U : \xi_{11}(x, y, z) \leq 0\} \cap \Sigma_1^-, \\ A_3 &= \{(x, y, z) \in U : \xi_{12}(x, y, z) \leq 0\} \cap \{-x \leq y \leq c_2x\} \cap \{z \geq 0\}, \\ A_4 &= \{(x, y, z) \in U : \eta_2(x, y, z) \leq 0\} \cap \Sigma_2^-, \\ A_5 &= \{(x, y, z) \in U : \xi_{21}(x, y, z) \leq 0\} \cap \Sigma_2^+, \\ A_6 &= \{(x, y, z) \in U : \xi_{22}(x, y, z) \leq 0\} \cap \{c_1x \leq y \leq x\} \cap \{z \leq 0\}, \\ A_7 &= \{(x, y, z) \in U : y = c_1x, x \geq 0, z = 0\}, \\ A_8 &= \{(x, y, z) \in U : y = c_2x, x \geq 0, z = 0\}. \end{aligned}$$

Funkcje ξ_{ij} otrzymujemy rozwiązując odpowiednie zagadnienia Cauchy'ego z warunkami początkowymi na płaszczyznach $\{y = c_i x\}$, $i, j = 1, 2$. Wypiszemy jeszcze krzywe geometrycznie optymalne w przypadkach omawianych w twierdzeniu 3.14. Stosując notację z podrozdziału 3.4 są to krzywe tworzące $\partial_U J^+(0, U) \cap \{z \geq 0\}$, tzn. $(X + Y)(X - Y)$, $(X + c_2Y)(X + Y)$, $(X + c_2Y)(X - Y)$ (krzywe $(X + Y)(X - Y)$ oraz $(X + c_2Y)(X + Y)$ przestają być geometrycznie optymalne po osiągnięciu zbioru Σ_1 - wówczas wchodzą do wnętrza $\text{int} J^+(0, U)$) oraz te tworzące $\partial_U J^+(0, U) \cap \{z \leq 0\}$, tj. $(X - Y)(X + Y)$, $(X + c_1Y)(X - Y)$, $(X + c_1Y)(X + Y)$ (krzywe $(X + c_1Y)(X - Y)$ oraz $(X - Y)(X + Y)$ przestają być geometrycznie optymalne po przecięciu zbioru Σ_2). Zauważmy jeszcze, iż mamy tutaj dwie geometrycznie optymalne krzywe czasowe i jednocześnie minimalna liczba funkcji potrzebnych do opisu zbiorów osiągalnych to 6.

Wniosek 3.7. *Zbiory osiągalne dla analitycznych metryk sublorentzowskich typu $M_{2,2}$ są semi-analityczne. Ponadto minimalna liczba funkcji analitycznych potrzebna do opisu zbioru $J^+(q, U)$, $q \in \Gamma$, wynosi 2 w przypadku $W < 0$ i 6 w przypadku $W > 0$.*

Na koniec zauważmy, że powyższe rezultaty można uogólnić na przypadek dowolnej liczby anormalnych krzywych czasowych startujących z ustalonego punktu. Postacie normalne dla takich struktur, pod pewnymi dodatkowymi założeniami, skonstruowane są w [G7]. Problem stanowi jednak duża liczba różnych stałych, co powoduje, że trudno jest sformułować ogólne twierdzenie.

3.8. Zastosowanie do układów afinicznych. Geometrycznie optymalne krzywe osobliwe a minimalna liczba funkcji analitycznych opisujących zbiór osiągalny. Jak zostało przedstawione w podrozdziale 3.2 wszystkie powyższe rezultaty można bezpośrednio zastosować do liczenia zbiorów osiągalnych dla afinicznych układów sterowania indukowanych przez metryki sublorentzowskie. Biorąc pod uwagę przykłady i obliczenia z [G5, G6, G7] otrzymujemy

Wniosek 3.8. *Niech dany będzie analityczny afiniczny układ sterowania $\dot{q} = X + uY$, $u \in [a, b]$, gdzie X, Y zadane są przez jedną z formuł (3.6), (3.11), (3.12), (3.14) (przy założeniu $W \neq 0$ w tym ostatnim przypadku). Wówczas dla dowolnego punktu q i dla dowolnego dostatecznie małego otoczenia normalnego U punktu q , zbiór $\mathcal{A}(q, U)$ jest semianalityczny, a minimalna liczba funkcji analitycznych potrzebnych do opisu tego zbioru wynosi $2 + 2m$, gdzie m jest liczbą geometrycznie optymalnych trajektorii osobliwych tego układu.*

Na koniec tej części zanotujmy jeszcze jedno zastosowanie formalizmu sublorentzowskiego do teorii układów afinicznych. Otóż we wszystkich rozważanych powyżej przypadkach brzeg $\partial_U \mathcal{A}(q_0, U)$ zbioru osiągalnego jest skończoną sumą zbiorów postaci $\{\eta = 0\}$, gdzie η jest funkcją gładką (analityczną), taką że $\nabla_H \eta$ jest polem zerowym skierowanym w przyszłość, gdzie gradient ∇_H liczymy względem indukowanej struktury sublorentzowskiej. Otóż można udowodnić

Lemma 3.1 ([G5]). *Niech U będzie otwartym podzbiorem rozmaitości sublorentzowskiej (M, H, g) i niech $\eta : U \rightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją gładką, że gradient horyzontalny $\nabla_H \eta$ jest wszędzie zerowy. Wówczas każda poziomica $\{\eta = \text{const}\}$ jest niezmiennicza względem $\nabla_H \eta$. Ponadto dla każdego $q \in \{\eta = \text{const}\}$, przestrzeń $H_q \cap T_q \{\eta = \text{const}\}$ zawiera dokładnie jeden kierunek przyczynowy, mianowicie kierunek wektora $\nabla_H \eta(q)$.*

Jako wniosek z lematu 3.1 otrzymujemy

Wniosek 3.9. *Rozważmy afiniczny układ sterowania $\dot{q} = X + uY$, $u \in [a, b]$, gdzie X, Y zadane są przez jedną z formuł (3.6), (3.11), (3.12), (3.14). Wówczas dla każdego $q \in \partial_U \mathcal{A}(q_0, U)$ istnieje dokładnie jedna trajektoria geometrycznie optymalna łącząca q_0 z q .*

4. POZOSTAŁE OSIĄGNIĘCIA NAUKOWO-BADAWCZE

4.1. Omówienie artykułów nie włączonych do jednotematycznego cyklu.

Są to następujące artykuły:

- [P1] M. Grochowski, *Differential Properties of the sub-Riemannian Distance Function*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Vol. 50, No. 1 (2002), 93-101.
- [P2] M. Grochowski, *Geodesics in the sub-Lorentzian Geometry*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Vol. 50, No. 2 (2002), 161-178.
- [P3] M. Grochowski, *On the Heisenberg sub-Lorentzian Metric on \mathbb{R}^3* , in Geometric Singularity Theory, Banach Center Publication, vol. 65 (2004), 57-65.
- [P4] M. Grochowski, *Reachable Sets For a Class of Contact sub-Lorentzian Metrics on \mathbb{R}^3 . Existence of Non-smooth Geodesics*, Geometry and Topology of Caustics - Caustics '06, Banach Center Publications, Vol. 82, Warszawa 2008, 101-110.

- [P5] M. Grochowski, *Some Properties of Reachable Sets for Control Affine Systems*, Analysis and Mathematical Physics, Vol. 1, No. 1 (2011), 3-13.
- [P6] M. Grochowski, *Some Remarks on the Global sub-Lorentzian Geometry*, Analysis and Mathematical Physics, Vol. 3, No. 4 (2013), 295-309.
- [P7] M. Grochowski, *Normal Forms for sub-Lorentzian Metrics Supported on Engel Type Distributions*, recenzja typu "minor revision" w Journal of Geometry and Physics (<http://arxiv.org/abs/1312.4201>)
- [S1] M. Grochowski, B. Warhurst, *Invariants for contact sub-Lorentzian structures on 3-dimensional manifolds*, złożone do Geometriae Dedicata (<http://arxiv.org/abs/1312.4581>).
- [S2] M. Grochowski, *A Necessary and Sufficient Condition for Local Control-lability Around Closed Orbits*, złożone do Bulletin of Polish Acad. Sci. (<http://arxiv.org/abs/1312.4181>)

W artykule [P1] badam własności różniczkowe funkcji odległości w geometrii subriemannowskiej. Pokazuję, że odległość subriemannowska od punktu jest gładka na podzbiornie otwartym i gęstym otoczenia każdej geodezyjnej minimalizującej nie będącej krzywą anormalną. Pokazuję również przydatny fakt mówiący, że w przypadku, gdy odległość subriemannowska f jest gładka, to każda trajektoria gradientu horyzontalnego $\nabla_H f$ jest jedyną geodezyjną minimalizującą pomiędzy swoimi końcami, nie będącą przy tym krzywą anormalną. Uzupełniam również znany rezultat mówiący o tym, iż każda geodezyjna hamiltonowska (tj. normalna) jest lokalnie minimalizująca. Mianowicie korzystając z pojęcia gradientu horyzontalnego dowodzę, że każdy dostatecznie krótki odcinek geodezyjnej hamiltonowskiej jest jedyną geodezyjną minimalizującą pomiędzy swoimi końcami.

Praca [P2] stanowi pierwsze wprowadzenie do geometrii sublorentzowskiej. Prezentowane są tutaj wszystkie podstawowe definicje i pojęcia geometrii sublorentzowskiej oraz dowodzone są ich własności. Większa część materiału prezentowanego w podrozdziałach 2.1, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6 wstępu została sformułowana i udowodniona w [P2]. Wprowadzam tam również pojęcie globalnej hiperboliczności dla rozmaitości sublorentzowskich i dowodzę, że przy takim założeniu (globalna) odległość sublorentzowska jest wszędzie skończona i półciągła z góry. Prace [P1], [P2] składają się na moją pracę doktorską

W [P3] badam podstawowe własności płaskiej kontaktowej metryki sublorentzowskiej. Wypisuję i rozwiązuję równania na geodezyjne, wyznaczam conjugate locus, pokazuję, że odwzorowanie wykładnicze \exp_0 z biegunem w zerze nie jest "na" żadne otoczenie zera oraz dowodzę, że w tym przypadku odległość sublorentzowska od zera jest gładka na pewnym otoczeniu W zbioru $I^+(0) \cap \{z = 0\}$, takim że $0 \in \partial W$.

W [P4] dla pewnej klasy metryk kontaktowych w \mathbb{R}^3 wyznaczam zbiory osiągalne, konstruuje zerowe geodezyjne niegładkie i dowodzę, że odległość sublorentzowska od 0 jest ciągła w punktach zbioru $\partial_U J^+(0, U)$.

Praca [P5] bada własności lokalnych zbiorów osiągalnych z punktu dla afinicznych układów sterowania. Niech

$$(4.1) \quad \dot{q} = X_0 + \sum u_j X_j, \quad u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathcal{C},$$

będzie afinicznym układem sterowania określonym na rozmaitości M . O zbiorze paratentrow sterujących \mathcal{C} zakładamy, że jest zwarty, wypukły i $\dim \mathcal{C} > 0$. Przez $ri\mathcal{C}$ (odp. $rb\mathcal{C}$) będzie oznaczać relatywne wnętrze (odp. relatywny brzeg) zbioru \mathcal{C} tak jak to definiowane jest w analizie wypukłej (zob. np. [40]). Ustalmy punkt $q_0 \in M$ i założmy, że $Lie\{X_0 + \sum u_j X_j : u \in rb\mathcal{C}\}(q_0) = T_{q_0}M$. Dla otoczenia U punktu q_0 oraz podzbioru $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, przez $\mathcal{A}(q_0, U; \mathcal{B})$ będziemy oznaczać zbiór złożony ze wszystkich trajektorii układu (4.1) startujących z q_0 , zawartych w U i generowanych przez wszystkie sterowania przyjmujące wartości w \mathcal{B} (czas końcowy nie jest ustalony). Główne rezultaty pracy [P5] można streścić w następującym

Twierdzenie 4.1. *Przy powyższych założeniach istnieje taka baza otoczeń \mathcal{O} punktu q_0 , że dla każdego $U \in \mathcal{O}$ prawdziwe są wzory*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(q_0, U; \mathcal{C}) &= cl_U(int\mathcal{A}(q_0, U; ri\mathcal{C})) = cl_U(int\mathcal{A}(q_0, U; rb\mathcal{C})), \\ int\mathcal{A}(q_0, U; \mathcal{C}) &= int\mathcal{A}(q_0, U; ri\mathcal{C}) = int\mathcal{A}(q_0, U; rb\mathcal{C}), \\ \partial_U \mathcal{A}(q_0, U; \mathcal{C}) &= \partial_U \mathcal{A}(q_0, U; ri\mathcal{C}) = \partial_U \mathcal{A}(q_0, U; rb\mathcal{C}). \end{aligned}$$

Ponadto, jeśli dystrybucja $Span\{X_0, \dots, X_k\}$ jest typowa w sensie [9], to zbiory $\mathcal{A}(q_0, U; ri\mathcal{C})$ są otwarte.

Twierdzenie 4.1, podobnie jak twierdzenie 3.1, nie wynika wprost ze znanych twierdzeń teorii sterowania.

Łatwo zauważyć, że otoczenia U nie mogą być dowolne. Stosowny przykład układu i otoczenia U takiego, że zbiór $\mathcal{A}(0, U; [-1, 1])$ nie jest domknięty zawarty jest w [P5] w paragrafie 4.

Artykuł [P6] jest pierwszą pracą mającą na celu skonstruowanie narzędzi do badania rozmaitości sublorentzowskich z globalnego punktu widzenia. Konstruuje globalnie określony układ sterowania opisujący krzywe przyczynowe, a następnie formułując warunek konieczny i dostateczny na lokalną sterowalność tego układu w otoczeniu zamkniętych krzywych czasowych. Dowodzone są też tutaj stwierdzenia 2.1, 2.2, 2.3 oraz wniosek 2.1.

Praca [P7] rozpoczyna badania struktur sublorentzowskich w \mathbb{R}^4 . Skonstruowane są postacie normalne dla metryk lorentzowskich na dystrybucjach Engela:

Twierdzenie 4.2 ([P7]). *Niech (H, g) będzie gładką metryką sublorentzowską na 4-wymiarowej rozmaitości, taką że H jest dystrybucją typu Engela, a g jest metryka lorentzowską na H , przy czym zakładamy, że krzywe anormalna dla H są, z dokładnością do reparametryzacji, czasowymi geodezyjnymi hamiltonowskimi. Wówczas dla każdego punktu $q_0 \in M$ istnieją współrzędne x, y, z, w określone w otoczeniu q_0 , $x(q_0) = \dots = w(q_0) = 0$, w których (H, g) ma bazę ortonormalną w następującej postaci normalnej*

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial x} + y\varphi \left(y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}y(1 + \psi_1) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2}y^2(1 + \psi_2) \frac{\partial}{\partial w} \\ Y &= \frac{\partial}{\partial y} - x\varphi \left(y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{1}{2}x(1 + \psi_1) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2}xy(1 + \psi_2) \frac{\partial}{\partial w} \end{aligned} ,$$

gdzie φ, ψ_1, ψ_2 są takimi funkcjami gładkimi określonymi w otoczeniu 0 , że $\psi_1(0, 0, z, w) = \psi_2(0, 0, 0, w) = 0$, natomiast pole X jest orientacją czasową o tej własności, że krzywe anormalne zawarte w $\{y = 0\}$ są trajektoriami X .

Otrzymuję również pewne oszacowania na zbiory osiągalne. Warto w tym miejscu zauważyć, że przedstawione w rozdziale 3 autoreferatu metody, w wyższych wymiarach nie działają.

W pracy [S1] wraz z B. Warhurstem konstruujemy niezmienniki dla kontaktowych struktur sublorentzowskich w wymiarze 3. Są to: funkcja gładka na rozmaitości oraz $(1, 1)$ -tensor na dystrybucji. Zastosowanie uzyskanych niezmienników do przypadku grup z lewo niezmienniczymi metrykami sublorentzowskimi daje nam częściową klasyfikację takich przestrzeni. Razem z B. Warhurstem napisaliśmy kolejną pracę, w której liczymy algebrę infinitezymalnych transformacji konforemnych (w szczególności izometrii) dla grup w prostszych przypadkach. Ponadto pokazujemy jak zrealizować dowolną kontaktową strukturę sublorentzowską w wymiarze 3 jako geometrię równania różniczkowego zwyczajnego modulo tzw. "point transformations".

W pracy [S2] dowodzę przy dość ogólnych założeniach, że każdy układ sterowania na rozmaitości zwartej ma orbitę zamkniętą. Ponadto (już bez założenia o zwartości) podaję warunek konieczny i dostateczny na lokalną sterowalność układu w otoczeniu orbity zamkniętej.

4.2. Udział w projektach badawczych. Pobyty.

- W latach 2002 - 2006 byłem członkiem projektu europejskiego RAAG (real algebraic and analytic geometry, nr projektu HPRN-CT-2001-00271)
- Byłem członkiem dwóch grantów Ministerstwa Edukacji Narodowej: grant nr 2703/H03/2007/32 (lata 2007-2009) oraz grant nr NN201 607540 (lata 2011-2014);
- Jako student w 1996 odbyłem 3-miesięczny staż na Université de Savoie w Chambéry we Francji;
- W okresach 01.03.2007 – 31.08.2007, 01.10.2008 – 30.09.2009, 01.10.2010 – 30.09.2011 byłem zatrudniony w Instytucie Matematycznym PAN. Obecnie, tj. od 1.10.2013 również pracuję w IMPAN.
- Krótkie wizyty na Uniwersytecie w Bergen (Norwegia): 02.09.2010 – 14.09.2010, 02.02.2011 – 08.02.2011.
- Instytut Mittag-Leffler: 01.10.2011 – 31.10.2011.

4.3. Udział w konferencjach. Poniżej przedstawiam listę konferencji, w których brałem czynny udział (z wygłoszeniem referatu poza jednym przypadkiem).

- Polish-Japanese Singularity Working Days, Będlewo, 2001;
- Geometry and Topology of Caustics, CAUSTICS'02;
- RAAG Meeting of Young Researchers, Barcelona, Coma Ruga, 2003;
- RAAG Meeting of Young Researchers, Perugia 2004;
- Tame geometry: a tribute to Rene Thom and Stanisław Łojasiewicz, Chambéry, 2005 (wspólny referat z P. Goldsteinem z UW);
- Polish-japanese Singularity Working Days, Bukowina 2005;
- Geometry and Topology of Caustics, CAUSTICS'06;
- Workshop on Geometric Control Theory, Warszawa 2006;
- Summer School on Global Analysis, Spiska Stara Ves, 2006;
- Polish-Japanese Singularity Working Days, Sopot, 2007;
- Control, Constraints and Quanta, Będlewo, 2007 (plakat);
- Referat w Bergen (Norwegia) 15.09.2010;

- Referat w Instytucie Mittag-Leffler (i KHT) 05.10.2011;
- Szkoła zimowa "Układy dynamiczne w fizyce", styczeń, 2014.

4.4. Organizacja konferencji, wykłady plenarne.

- W 2014 (listopad) w Paryżu, w ramach trymestru "Geometry, Analysis and Dynamics on sub-Riemannian Manifolds" organizuję razem z I. Markiną (Uniwersytet w Bergen, Norwegia) warsztaty z geometrii sublorentzowskiej;
- W 2014 (listopad) zostałem zaproszony do wygłoszenia wykładu plenarnego z geometrii sublorentzowskiej na konferencji "Geometric Control and Related Fields" będącej częścią semestru "New Trends in Calculus of Variations" w Linz (Austria).

4.5. Recenzje artykułów naukowych.

Recenzowałem artykuły dla następujących czasopism:

- Journal of Dynamical and Control Systems,
- Journal of Geometry and Physics,
- Journal of Complex Analysis and Operator Theory,
- Control and Cybernetics,
- Demonstratio Mathematica,
- Mathematica Scandinavica,
- Bulletin des Sciences Mathématiques.

Ponadto piszę dla Mathematical Reviews.

4.6. Recenzje prac doktorskich.

Byłem recenzentem pracy doktorskiej A. Korolko pt. "Sub-semi-Riemannian Geometry on Heisenberg-Type Groups" (2011, Department of Mathematics, University of Bergen, Norwegia).

Bibliografia

- [1] A. Agrachev, Y. Sakchov, *Control Theory from Geometric Viewpoint*, Encyclopedia of Mathematical Science, vol. 87, Springer 2004.
- [2] H. Baum, *Spin-Strukturen und Dirac-Operatoren über pseudoriemannschen Mannigfaltigkeiten*, Teubner, Leipzig, 1981.
- [3] J.K. Beem, P.E. Ehrlich, K.L. Easley, *Global Lorentzian Geometry*, Marcel Dekker, 1996.
- [4] E. Bierstone, P.D. Milman, *Semianalytic and Subanalytic Sets*, Publ. IHES 67 (1988), 5-42.
- [5] JM Bismut, *Large Deviations and the Malliavin Calculus*, Birkhauser, Boston 1984.
- [6] B. Bonnard and M. Chyba, *Singular Trajectories and their Role in Control Theory*. Springer-Verlag, Berlin (2003).
- [7] A. Bressan, B. Piccoli, *Introduction to the Mathematical Theory of Control*, AIMS Series on Applied Math., Vol. 2, 2007.
- [8] D. C. Chang, I. Markina, A. Vasil'ev, *Sub-Lorentzian geometry on anti-de Sitter space*, J. Math. Pures Appl. **90** (2008), no. 1, 82–110.
- [9] Y. Chitour, F. Jean, E. Trélat, *Genericity Result for Singular Curves*, Journal of Differential Geometry, Vol. 73, No. 1, 2006.
- [10] W.L. Chow, *Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*, Math. Ann. 117, 98–105 (1939).
- [11] E.A. Coddington, N. Levinson, *The Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, 1955.
- [12] M. Molina Godoy, A. Korolko, I. Markina, *Sub-semi-Riemannian geometry of general H-type groups*, Bull. Sci. Math. <http://dx.doi.org/10.1016/j.bulsci.2013.05.005>.
- [13] M. Grochowski, *Geodesics in the sub-Lorentzian Geometry*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Vol. 50, No. 2 (2002).
- [14] M. Grochowski, *Properties of Reachable Sets in the sub-Lorentzian Geometry*, Journal of Geometry and Physics, 59 (2009), pp. 885-900.
- [15] M. Grochowski, *Some remarks on the global sub-Lorentzian geometry*, Analysis and Mathematical Physics, Vol. 3, No. 4 (2013), 295–309.
- [16] M. Gromov, *Carnot-Carathéodory spaces seen from within*, Proc. Journées nonholonomes: géométrie sous-riemannienne, théorie du contrôle, robotique, Paris, France, June 30–July 1, 1992. A. Bellaïche ed., Prog. Math. 144 (1996), 79-323, Birkhäuser, Basel.
- [17] E. Grong, A. Vasil'ev, *Sub-Riemannian and sub-Lorentzian geometry on $SU(1,1)$ and on its universal cover*, J. Geom. Mech. **3** (2011), no. 2, 225–260.
- [18] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney 1964.
- [19] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, *The Large-Scale Structure of Space-time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [20] H. Hermes, *Local Controllability and Sufficient Conditions in Singular Problems*, Journal of Differential Equations Vol. 20, No. 1, pp. 213-232, 1976.
- [21] c. Donson Hill, P. Nurowski, *Differential Equations and Para CR Structures*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana (9) **3** (2010), no. 1, 25–91.
- [22] T. Huang, X. Yang, *Geodesics in the Heisenberg Group H^n with a Lorentzian Metric*, Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 18, No. 4, October 2012.
- [23] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [24] V. Jurdjevic, *Geometric Control Theory*, Cambridge University Press, 1997.
- [25] A. Korolko, I. Markina, *Nonholonomic Lorentzian geometry on some H-type groups*, J. Geom. Anal. **19** (2009), no. 4, 864–889.
- [26] A. Korolko, I. Markina, *Geodesics on H-type quaternion groups with sub-Lorentzian metric and their physical interpretation*, Complex Anal. Oper. Theory **4** (2010), no. 3, 589–618.
- [27] A. Korolko, I. Markina, *Semi-Riemannian geometry with nonholonomic constraints*, Taiwanese J. Math. **15** (2011), no. 4, 1581–1616.
- [28] V. R. Krym and N. N. Petrov, *Equations of Motion of a Charged Particle in a Five-Dimensional Model of the General Theory of Relativity with a Nonholonomic Four-Dimensional Velocity Space*, Vestnik St. Petersburg University: Mathematics, 2007, Vol. 40, No. 1, pp. 52–60.

- [29] V. R. Krym and N. N. Petrov, *The Curvature Tensor and the Einstein Equations for a Four-Dimensional Nonholonomic Distribution*, Vestnik St. Petersburg University. Mathematics, 2008, Vol. 41, No. 3, pp. 256–265.
- [30] A. J. Krener and H. Schättler, *The structure of small-time reachable sets in low dimensions*, SIAM J. Control Optim., 27, No. 1 (1989).
- [31] C. Lobry, *Contrôlabilité des systèmes non-linéaires*, SIAM J. Control, Vol. 8, 1970.
- [32] S. Lojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*, Inst. Hautes Études Sci., Bures-sur-Yvette, France, 1964.
- [33] R. Montgomery, *A Survey of Singular Curves in sub-Riemannian Geometry*, J. Dynam. Control Systems Vol. 1, No. 1, 49–90 (1995).
- [34] R. Montgomery, *A Tour of sub-Riemannian Geometries, their Geodesics and Applications*, Mathematical Surveys and Monographs, 91. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [35] G.L. Naber, *The Geometry of Minkowski Spacetime*, Springer-Verlag New York, 1992.
- [36] P. Nurowski, G.A. Sparling, *A 3-Dimensional Cauchy-Riemann Structures and Second-Order Ordinary Differential Equations*, Classical Quantum Gravity 20 (2003), No. 23, 4995–5016.
- [37] B. O’Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Pure and Applied Ser., Vol 103. Academic Press, New York, 1983.
- [38] K.R. Payne, *Singular Metrics and Associated Conformal Groups Underlying Differential Operators of Mixed and Degenerate Types*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 185 (2006), no. 4, 613–625.
- [39] R. Penrose, *Techniques of Differential Topology in Relativity*, Regional Conf. Ser. Appl. Math. 7 SIAM, Philadelphia (1972).
- [40] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1972.
- [41] E. Sontag, *Mathematical Control Theory. Deterministic finite-dimensional systems*, Texts in Applied Mathematics, 6. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [42] N.E. Steenrod, *The Topology of Fiber Bundles*, Princeton Mathematical Series 14, Princeton Univ. Press, 1951.
- [43] R.S. Strichartz, *Sub-Riemannian Geometry*, J. Differ. Geom. 24, 221–263 (1986); Correction, ibid. 30, 595–596 (1989).
- [44] H. Sussmann, *Orbits of Families of Vector Fields and Integrability of Distributions*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 180, (Jun., 1973), pp. 171–188.
- [45] M. Tamm, *Subanalytic Sets in the Calculus of Variations*, Acta Math. 146, No. 3–4, 167–199 (1981).
- [46] J. Zabczyk, *Zarys matematycznej teorii sterowania*, Wydawnictwo naukowe PWN, Warszawa 1991.

