AUTOREFERAT

MASHA (MARIIA) VLASENKO

Adres: Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa
Email: m.vlasenko@impan.pl
www: http://www.imath.kiev.ua/~mariyka

Dyplomy i stopnie naukowe

2001 Magister Matematyki Stosowanej, Narodowy Uniwersytet Techniczny Ukrainy w Kijowie
Praca magisterska *Equations with random Gaussian operators with an unbounded mean*
promotor: Prof. Andrii Dorogovtsev

2005 Doktor Nauk Matematycznych, Instytut Matematyki Ukraińskiej Akademii Nauk w Kijowie
Praca doktorska *On representations of Temperley–Lieb relations*
promotor: Prof. Yuri Samoilenko

Dotychczasowe zatrudnienie

2004–2005 *Pracownik naukowy*, Institute of Mathematics, Kyiv
2005–2006 *Postdok*, Max Planck Institute for Mathematics, Bonn
2007–2008 *Postdok*, Institut des Hautes Études Scientifiques, Bures-sur-Yvette
2008–2009 *Postdok*, Max Planck Institute for Mathematics, Bonn
2009–2011 *Pracownik naukowy*, Max Planck Institute for Mathematics, Bonn
2011–2013 *Assistant Professor*, Trinity College Dublin
2013–2015 *Assistant Professor*, University College Dublin
2015–teraz *Adiunkt*, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

Osiągnięcie habilitacyjne:

ARYTMETYKA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH PICARDA–FUCHSA

[Hab1] A. Mellit, M. Vlasenko, *Dwork's congruences for the constant terms of powers of a Laurent polynomial*, International Journal of Number Theory, vol. 12, no. 2 (2016) 313–321

[Hab2] M. Vlasenko, *Higher Hasse–Witt matrices*, Indagationes Mathematicae 29 (2018), 1411–1424

[Hab3] M. Vlasenko, *Formal groups and congruences*, Transactions of the AMS, vol. 371, no. 2 (2019), 883–902

[Hab4] V. Golyshev, M. Vlasenko, *Equations D3 and spectral elliptic curves*, in *Feynman Amplitudes, Periods and Motives*, Contemporary Mathematics 648 (2015), 135–152

[Hab5] E. Shinder, M. Vlasenko, *Linear Mahler measures and double L-values of modular forms*, Journal of Number Theory 142 (2014), 149–182

Omówienie

1. Wstęp: własności geometrycznych operatorów różniczkowych

Okresy rozmaitości algebraicznej X zdefiniowanej nad ciałem $K \subset \mathbb{C}$ to z definicji liczby powstałe w wyniku całkowania zamkniętych algebraicznych form różniczkowych po cyklach topologicznych na rozmaitości różniczkowej punktów zespolonych $X(\mathbb{C})$. Na przykład,

$$2\pi i = \oint \frac{dx}{x}$$

jest okresem prostej afinicznej bez jednego punktu $X = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$. Pojęcie okresu zostało wprowadzone w geometrii algebraicznej przez Alexandra Grothendiecka. Maxim Kontsevich i Don Zagier pokazują podejście ze strony teorii liczb i popularyzują ten koncept w ważnej pracy [36].

Będziemy rozważali jednoparametrowe rodziny okresów, nazywane *funkcjami-okresami* (ang. *period function*). Klasycznym przykładem jest całka eliptyczna

$$\phi(z) = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}} = \pi \sum_{k\geqslant 0} \binom{2k}{k}^2 \frac{z^k}{16^k}, \tag{1}$$

będąca funkcją-okresem dla rodziny krzywych eliptycznych Legendre'a

$$y^2 = x(x-1)(x-z).$$

Zauważmy, że po podzieleniu przez π, rozwinięcie Taylora $\phi(z)$ w $z = 0$ ma wymierne współczynniki. Ponadto, po przeskalowaniu $z \longrightarrow 16z$ dostajemy szereg o całkowitych współczynnikach. To rozwinięcie pokazuje też, że

$$\frac{1}{\pi}\phi(z) \;=\; {}_2F_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; z)$$

jest jedną z funkcji hipergeometrycznych Gaussa, w związku z czym $\phi(z)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego.

$$z(1-z)\frac{d^2\phi}{dz^2} + (1-2z)\frac{d\phi}{dz} - \frac{1}{4}\phi = 0.$$

Równania różniczkowe spełniane przez funkcje-okresy nazywane są równaniami *Picarda–Fuchsa*, lub równaniami *geometrycznymi*. Ograniczymy się tu do rodzin gładkich rzutowych rozmaitości nad $U = \mathbb{P}^1 \setminus S$, gdzie S jest skończonym zbiorem punktów i wszystko jest zdefiniowane nad ciałem liczbowym. Stowarzyszone operatory różniczkowe Picarda–Fuchsa są liniowe o współczynnikach wielomianowych. Ponadto wiadomo, że mają one regularne osobliwości w punktach S, z kwazi-unipotentną lokalną monodromią ([29]).

Niech L będzie liniowym operatorem różniczkowym na $U = \mathbb{P}^1 \setminus S$ o współczynnikach wielomianowych. Nicholas Katz udowodnił, że jeżeli globalna reprezentacja monodromii grupy podstawowej $\pi_1(U(\mathbb{C}))$ odpowiadająca systemowi lokalnemu rozwiązań L jest *sztywna*, dwa konieczne warunki wymienione powyżej (regularne osobliwości i kwazi-unipotentna lokalna monodromia) są wystarczające dla geometryczności L ([31]). Rozważmy następujący przykład.

Twierdzenie Antoniusa Levelta [6] mówi, że hipergeometryczne operatory różniczkowe

$$L = \prod_{j=1}^{r}\Big(z\frac{d}{dz} - \alpha_j\Big) - z\prod_{j=1}^{r}\Big(z\frac{d}{dz} - \beta_j\Big)$$

na $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ są sztywne. Operator L ma regularne osobliwości, a wartości własne jego monodromii lokalnej dookoła $z = 0$ i $z = \infty$ to odpowiednio $\{\exp(2\pi i\alpha_j)\}$ oraz $\{\exp(2\pi i\beta_j)\}$; lokalna monodromia wokół $z = 1$ jest pseudo-odbiciem. Warunek kwazi-unipotentności dla lokalnych operatorów monodromii jest zatem równoważne z $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbb{Q}$. Podsumowując, twierdzenie

Katza implikuje w tym przypadku, że hipergeometryczny operator różniczkowy jest geometryczny wtedy i tylko wtedy, gdy jego parametry są liczbami wymiernymi.

Znalezienie warunków dostatecznych dla geometryczności niesztywnych operatorów różniczkowych jest trudnym problemem otwartym. Jedno z podejść polega na patrzeniu na arytmetyczne własności rozwiązań. Następujące pojęcie zostało wprowadzone przez Carla Ludwiga Siegela około 1929 ([45]). Szereg Taylora

$$\phi(z) = \sum_{k \geqslant 0} a_k z^k$$

jest *G-funkcją* jeśli

- wszystkie współczynniki a_k należą do ustalonego ciała liczbowego K;
- $\phi(z)$ spełnia liniowe równanie różniczkowe o współczynnikach wielomianowych;
- istnieje stała $c > 0$ dla której $H(a_0, \dots, a_n) = O(c^n)$, gdzie H jest funkcją wysokości zdefiniowaną jako $H(a_0, \dots, a_n) = \prod_\nu \max(|a_0|_\nu, \dots, |a_n|_\nu)$, gdzie iloczyn jest brany po wszystkich waluacjach $|\cdot|_\nu$ ciała K.

Na przykład, $-\log(1-z)$ jest G-funkcją zaś $\exp(z)$ nie jest G-funkcją. Klasyczne twierdzenie Gottholda Eisensteina (zob. [7, 17]) mówi, że funkcje algebraiczne o współczynnikach w ciele liczbowym są G-funkcjami. Innym przykładem z $K = \mathbb{Q}$ są funkcje hipergeometryczne z wymiernymi parametrami.

Szeregi potęgowe będące rozwiązaniami arbitralnie wybranego liniowego równania różniczkowego o współczynnikach w $\mathbb{Q}(z)$ zazwyczaj nie będą G -funkcjami. Istnienie rozwiązania będącego G-funkcją jest istotnym ograniczeniem dla operatora różniczkowego. Jest kilka hipotez w tym kierunku, zob. [10]. Hipoteza Bombieriego–Dworka mówi, że odpowiedni operator różniczkowy jest geometryczny. Implikacja w odwrotną stronę jest znana: funkcje-okresy są G-funkcjami ([2]).

Dla przykładu problemu geometryczności w przypadku niesztywnym, rozważmy operatory różniczkowe

$$L = D^2 - z(AD^2 + AD + \lambda) + Bz^2(D+1)^2, \quad D = z\frac{d}{dz} \tag{2}$$

z wymiernymi parametrami $A, B, \lambda \in \mathbb{Q}$. Załóżmy, że parametry te spełniają warunki

$$A^2 \neq 4B, \quad B \neq 0, \tag{3}$$

co jest równoważne temu, żeby L miało cztery punkty osobliwe w $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Z dokładnością do mnożenia przez stałą, istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $\phi(z) = \sum_{k \geqslant 0} a_k z^k$ analityczne w $z = 0$. Może ono zostać znormalizowane tak, by $a_0 = 1$, zaś jego dalsze współczynniki określone są rekurencyjnie przez

$$(k+1)^2 a_{k+1} - (Ak^2 + Ak + \lambda)a_k + Bk^2 a_{k-1} = 0,$$

co na pierwszy rzut oka sugeruje, że mianowniki a_k rosną jak $(k!)^2$. Zaskakująco, dla pewnych trójek (A, B, λ) otrzymujemy rekurencję całkowitą, tj. $\phi(z) \in \mathbb{Z}[\![z]\!]$. W [55], Zagier opisuje poszukiwania w odpowiednio wybranej dziedzinie stu milionów trójek wymiernych parametrów (A, B, λ), spośród których tylko 14 spełnia $\phi(z) \in \mathbb{Z}[\![z]\!]$. Te trójki podano w Tabeli 1. Zagier dowodzi, każdy z tych 14 operatorów pochodzi ze stabilnej rodziny krzywych eliptycznych z dokładnie czterema punktami osobliwymi. (Stabilna rodzina krzywych eliptycznych nad $\mathbb{P}^1$ to rodzina której włókna osobliwe mają tylko punkty podwójne za osobliwości. Dla takiej rodziny, minimalna liczba włókien osobliwych to cztery.) Wszystkie inne trójki zdają się nie posiadać rozwiązań, które są G-funkcjami, i zgodnie z hipotetycznie nie ma innych geometrycznych operatorów różniczkowych (2).

TABELA 1. Wszystkie znane geometryczne operatory różniczkowe postaci (2)-(3).

A	B	λ	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
7	-8	2	1	2	10	56	346	2252
9	27	3	1	3	9	21	9	-297
10	9	3	1	3	15	93	639	4653
11	-1	3	1	3	19	147	1251	11253
12	32	4	1	4	20	112	676	4304
17	72	6	1	6	42	312	2394	18756
0	-16	0	1	0	4	0	36	0

Dla każdej z pierwszych sześciu trójek (A, B, λ) istnieje trójka $(-A, B, -\lambda)$ z $a_k \to (-1)^k a_k$. Dla ostatniej trójki, jest jeszcze trójka $(0, 16, 0)$ z $a_k \to (-1)^{k/2} a_k$.

Ustalmy teraz liczbę pierwszą p i zbadajmy p-adyczne własności funkcji-okresów. Rozważmy jeszcze raz rodzinę Legendre'a krzywych eliptycznych. Normalizujemy jej funkcję-okres (1), aby miała współczynniki wymierne:

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k}^2 \frac{z^k}{16^k}.$$

Niech $p \neq 2$, dzięki czemu współczynniki są p-adycznymi liczbami całkowitymi i $\phi(z)$ jest p-adyczną funkcją analityczną w otwartym p-adycznym dysku jednostkowym $B_{<1} = \{z : |z|_p < 1\}$. W [15, §5], Bernard Dwork zauważył, że suma początkowa

$$\phi_p(z) = \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{2k}{k}^2 \frac{z^k}{16^k} \mod p$$

daje niezmiennik Hassego rodziny Legendre'a. To oznacza, że krzywa należąca do tej rodziny odpowiadająca $z \in \mathbb{F}_p \setminus \{0, 1\}$ jest zwyczajna wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi_p(z) \neq 0$. Dwork pokazuje, że istnieje p-adyczne przedłużenie analityczne funkcji $\alpha(z) = \phi(z)/\phi(z^p) \in \mathbb{Z}_p[\![z]\!]$, zdefiniowanej na $B_{<1}$, na większą dziedzinę

$$\mathcal{D} = \{z : |z|_p \leqslant 1, \left|\phi_p(z)\right|_p = 1\}.$$

(Mamy $B_{<1} \subset \mathcal{D} \subset B_{\leqslant 1}$; $\alpha(z)$ nie przedłuża się do całego $B_{\leqslant 1} = \{z : |z|_p \leqslant 1\}$.) Dwork dowodzi też, że dla zwyczajnego włókna w rodzinie odpowiadającego

$$z \in \mathbb{F}_p \setminus \{0, 1\}, \quad \phi_p(z) \neq 0$$

wartość

(4) $$\lambda = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \alpha\big(\mathrm{Teich}(z)\big) \in \mathbb{Z}_p^\times$$

w odpowiednim podniesieniu Teichmüllera $\mathrm{Teich}(z) \in \mathbb{Z}_p^\times$ jest odwrotnością jedynego pierwiastka funkcji dzeta tego włókna będącego p-adyczną jednością. Przypomnijmy, że funkcja dzeta krzywej eliptycznej $\mathcal{E}$ nad $\mathbb{F}_p$ jest zdefiniowana jako

$$\mathcal{Z}(\mathcal{E}/\mathbb{F}_p;T) = \exp\Big(\sum_{k\geqslant 1} \frac{\#\mathcal{E}(\mathbb{F}_{p^k})}{k} T^k\Big) = \frac{1-a_pT+pT^2}{(1-T)(1-pT)}.$$

Tutaj $a_p = p+1-\#\mathcal{E}(\mathbb{F}_p)$. Krzywa ta jest zwyczajna wtedy i tylko wtedy, gdy $p \nmid a_p$, i w tym przypadku mamy rozkład $1 - a_pT + pT^2 = (1-\lambda T)(1-p\lambda^{-1}T)$ gdzie $\lambda \in \mathbb{Z}_p^\times$ jest odwrotnością jedynego pierwiastka będącego p-adyczną jednością. Dwork zauważa też, że współczynnik $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$ w (4) jest odwrotnością pierwiastka funkcji dzeta włókna osobliwego rodziny Legendre'a w $z = 0$, która jest równa

$$\frac{1-(-1)^{\frac{p-1}{2}}T}{(1-T)(1-pT)}.$$

Obliczanie lokalnych funkcji dzeta włókien rodziny korzystając z funkcji-okresów znane jest jako metoda deformacyjna Dworka. Jej rozwinięcie przez samego Dworka jest opisane w [25, 26]. Metoda dała początek pojęciu struktury Frobeniusa w teorii p-adycznych równań różniczkowych [30, 31]. Kilka stosunkowo niedawnych rezultatów w teorii deformacji funkcji dzeta otrzymał Alan Lauder (zob. [35, 36]). Jednym z wyników tej teorii są efektywne algorytmy obliczające funkcje dzeta. Jednakże powyższy przykład jest rzadkim przypadkiem kiedy istnieje jawny p-adyczny wzór dla funkcji dzeta jak (4). Mówimy, że wzór (4) jest jawny ponieważ p-adyczne przedłużenie analityczne szeregu potęgowego $\alpha(z)$ jest otrzymane w wyniku przybliżania przez funkcje wymierne. Takie przybliżenie zostało podane w sposób jawny w [15, §5] korzystając z silnych kongruencji p-adycznych spełnianych przez współczynniki funkcji-okresów $\phi(z)$. Granice p-adyczne funkcji wymiernych są nazywane sztywnymi funkcjami analitycznymi (ang. *rigid analytic function*). Są one jednym z centralnych pojęć współczesnej geometrii p-adycznej.

2. Osiągnięcie habilitacyjne

Skupimy się na równaniach różniczkowych Picarda–Fuchsa stowarzyszonych z rodzinami hiperpowierzchni torycznych. Prace [Hab1, Hab2, Hab3] dotyczą p-adycznych własności ich funkcji-okresów w pobliżu punktu osobliwego. Wpisują się one w program rozpoczęty przez Bernarda Dworka.

W [Hab1] dowodzimy pewnej p-adycznej własności fundamentalnych funkcji-okresów (ang. *fundamental period functions*) dla jednoparametrowych rodzin torycznych hiperpowierzchni Calabiego–Yau, tak zwanych kongruencji Dworka. Zostały one zauważone po raz pierwszy przez Dworka w [16] dla pewnej klasy funkcji hipergeometrycznych. O wiele później, dzięki inspiracjom płynącym z modeli Landaua–Ginzburga w symetrii lustrzanej, Kira Samol i Duco van Straten [44] zauważyli, że te kongruencje zachodzą dla fundamentalnych funkcji-okresów torycznych hiperpowierzchni Calabiego–Yau. Osiągnięciem [Hab1] jest zaskakująca ogólność, gdyż nasz wynik pozbywa się praktycznie wszystkich założeń używanych przez wyżej wymieniona dwójkę autorów, oraz konceptualny dowód pokazujący kombinatoryczną naturę kongruencji Dworka. Nasze twierdzenie zostało wykorzystane w [12, 13, 37, 50].

Prace [Hab2] oraz [Hab3] rozwijają pomysły z [Hab1] w dwu różnych kierunkach. W [Hab2], pozbywamy się założenia Calabi–Yau i przestajemy ograniczać się do rodzin jednoparametrowych. Wynikiem tego jest jawny opis struktury Frobeniusa na części środkowych kohomologii p-adycznych hiperpowierzchni torycznej, obiekcie znanym jako kryształ jednostkowy (ang. *unit-root crystal*). Mówiąc dokładniej, w [Hab2] dowodzę kilku p-adycznych kongruencji dla współczynników potęg wielomianu Laurenta, które w granicy dają pewne macierze, i stawiam hipotezę, że te macierze graniczne opisują strukturę Frobeniusa na krysztale jednostkowym. Pod pewnymi geometrycznymi założeniami, moja hipoteza została udowodniona w niedawnym preprincie [23] przez Ana Huanga, Bonga Liana, Shing-Tunga Yau i Chenglonga Yu. Razem z Fritsem Beukersem, podajemy dowód z mniejszą liczbą założeń w [6].

Praca [Hab3] eksploruje związki pomiędzy teorią formalnych reguł grupowych (ang. *formal group laws*) i pewną strukturą kombinatoryczną wykorzystaną w [Hab1] w dowodzie kongruencji Dworka. Jej główny wynik mówi, że całkowitość jednoparametrowej formalnej reguły grupowej jest równoważna słabszej formie kongruencji Dworka dla współczynników rozwinięcia niezmienniczej formy różniczkowej. Kongruencje p-adyczne udowodnione w [Hab2] implikują całkowitość pewnych grup formalnych Artina–Mazura. Ich całkowitość dla gładkich rzutowych hiperpowierzchni została pokazana przez Jana Stienstrę w [47] korzystając ze związków pomiędzy kohomologiami krystalicznymi i funktorami Artina–Mazura. Przewagą [Hab2] jest to, że dowód jest natury elementarnej, co między innymi pozwala stowarzyszyć całkowite formalne reguły grupowe z hiperpowierzchniami torycznymi bez założenia gładkości. Susanne Müller wykorzystała moje wyniki o formalnych regułach grupowych do badania osobliwych hiperpowierzchni w swojej pracy doktorskiej [40].

Prace [Hab4, Hab5] są poświęcone zastosowaniom modularności operatorów różniczkowych. Modularne operatory różniczkowe to operatory Picarda–Fuchsa związane z rozmaitościami Kuga–Sato. W [Hab4] rozważamy problem geometryczności dla operatorów (2) i ich uogólnień na wyższe rzędy, tak zwanych wyznacznikowych operatorów różniczkowych. Jednym z wyników [Hab4] jest lista modularnych wyznacznikowych operatorów różniczkowych rzędów 2 i 3 które odpowiadają nowym formam (ang. *newform*). W szczególności, dla rzędu 2 otrzymujemy ponownie listę stworzoną eksperymentalnie przez Zagiera z Tabeli 1.

Praca [Hab5] stanowi podejście do pewnej hipotezy Fernandro Rodrigueza Villegasa dotyczącej miar Mahlera form liniowych. Dośc ogólnie, logarytmiczną miarę Mahlera wielomianu Laurenta wielu zmiennych $f(\mathrm{x})$ można obliczyć jako zregularyzowaną całkę z fundamentalnego okresu rodziny hiperpowierzchni $zf(\mathrm{x}) = 1$ pomiędzy $z = 0$ a $z = \infty$. Jeżeli operator Picarda–Fuchsa jest modularny, jawna parametryzacja modularna może zostać wykorzystana do analitycznego przedłużenia rozwiązań i obliczenia zregularyzowanej całki wymienionej powyżej. To pozwala nam wyrazić miarę Mahlera jako kombinację liniową wartości specjalnych L-funkcji form modularnych. W [42], ta metoda zostaje z powodzeniem zastosowana do kilku przypadków hipotez Boyda oraz form liniowych w co najwyżej pięciu zmiennych. Jednakże nie może ona zostać zastosowana do formy liniowej w pięciu zmiennych, ponieważ odpowiednie równanie Picarda–Fuchsa nie posiada modularnej parametryzacji. W [Hab5] proponujemy sposób na obejście tej przeszkody i wyrażenie odpowiedniej miary Mahlera jako kombinację liniową podwójnych wartości L-funkcji meromorficznych form modularnych.

Przejdźmy teraz do bardziej szczegółowego omówienia wyników z prac [Hab1-Hab5].

2.1. **Kongruencje Dworka.** Powiemy, że ciąg liczb całkowitych $\{a_n; n \geqslant 0\}$ z $a_0 = 1$ spełnia kongruencje Dworka dla ustalonej liczby pierwszej p, jeżeli dla każdego $s \geqslant 1$

$$\frac{A(t)}{A(t^p)} \equiv \frac{A_{p^s}(t)}{A_{p^{s-1}}(t^p)} \mod p^s\mathbb{Z}[\![t]\!], \tag{5}$$

gdzie

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \qquad A_N(t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n t^n$$

to odpowiednio funkcja tworząca danego ciągu oraz jej sumy początkowe. Z tej definicji wynika, że ciąg $\{a_n \mod p^s; n \geqslant 0\}$ jest jednoznacznie wyznaczony przez pierwsze p^s wyrazów za pomocą pewnej reguły. Dla $s = 1$, ta reguła jest zadana przez

$$a_n \equiv a_{n_0} \dots a_{n_r} \mod p \tag{6}$$

gdzie $0 \leqslant n_i \leqslant p-1$ to cyfry przedstawienia n przy podstawie p:

$$n = n_0 + n_1 p + \ldots + n_r p^r.$$

Kongruencja (6) dla ciągu $\{a_n; n \geqslant 0\}$ jest nazywana p-własnością Lucasa. W pracy „Théorie des Fonctions Numériques Simplement Périodiques" z 1878 r., Édouard Lucas pokazał, że współczynniki dwumianowe spełniają

$$\binom{n}{m} \equiv \prod_{i=0}^{r} \binom{n_i}{m_i} \mod p,$$

gdzie n_i i m_i to odpowiednio cyfry przedstawień n i m przy podstawie p. Korzystając z tej kongruencji można łatwo skonstruować wiele ciągów z p-własnością Lucasa, na przykład

$$a_n = \begin{cases} \binom{n}{n/2}, & n \text{ parzyste}, \\ 0, & n \text{ nieparzyste}. \end{cases} \tag{7}$$

Kongruencje Dworka (5) zdają się być bardzo silnym warunkiem i trudno jest znaleźć klasy ciągów o tej własności. Dzięki obserwacji poczynionej powyżej, w poszukiwaniu takich ciągów możemy ograniczyć się do ciągów z p-własnością Lucasa. Oto (być może jedyny oczywisty) przykład kongruencji Dworka. Wybierzmy liczbę całkowitą a i rozważmy ciąg $a_n = a^n$. Skoro $A(t) = (1-at)^{-1}$ oraz $A_{p^s}(t) = (1 - a^{p^s} t^{p^s})(1-at)^{-1}$, warunek do sprawdzenia to

$$A(t^p)^{-1} A_{p^{s-1}}(t^p) = 1 - a^{p^{s-1}} t^{p^s} \equiv 1 - a^{p^s} t^{p^s} = A_{p^s}(t) A(t)^{-1} \mod p^s, \tag{8}$$

co jest równoważne $a^{p^{s-1}} \equiv a^{p^s} \mod p^s$. Ta kongruencja dla potęg a wynika z małego twierdzenia Fermata $a \equiv a^p \mod p$ przez podniesienie do p-tej potęgi $s-1$ razy (zauważywszy, że z każdym razem modulus poprawia się o potęgę p).

W [16], Dwork pokazuje, że (5) zachodzi dla pewnych ilorazów symboli Pochhammera

$$a_n = \gamma^n \cdot \frac{\prod_i (\alpha_i)_n}{\prod_j (\beta_j)_n}.$$

Prawdopodobnie pierwszym źródłem, gdzie nazwa *kongruencje Dworka* się pojawia jest [44]. Głownym wynikiem [Hab1] jest

Twierdzenie 1. *Niech $f(\mathrm{x}) \in \mathbb{Z}_p[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_d^{\pm 1}]$ będzie wielomianem Laurenta. Niech $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ będzie wielościanem Newtona $f(\mathrm{x})$, zaś Δ° — topologicznym wnętrzem Δ. Jeśli $\mathbb{Z}^d \cap \Delta^\circ = \{0\}$, to wtedy ciąg*

$$a_n = \text{wyraz stały } f(\mathrm{x})^n$$

spełnia kongruencje (5).

Na przykład, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ daje ciąg (7) poprzez wzięcie stałych wyrazów potęg. Twierdzenie 1 implikuje zatem, że ciąg (7) spełnia kongruencje Dworka. W celu podania bardziej wyrafinowanych przykładów, wielomian Laurenta

$$f(\mathrm{x}) = \frac{(x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)(1-x_1-x_2+x_1x_2-x_1x_2x_3)}{x_1x_2x_3}$$

daje tak zwany ciąg Apéry'ego

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2.$$

Wszystkie ciągi w Tabeli 1 są ciągami stałych wyrazów potęg wielomianów Laurenta o współczynnikach w $\mathbb{Z}$. Na mocy Twierdzenia 1, każdy z nich spełnia kongruencje Dworka dla wszystkich liczb pierwszych p.

Wielościan Δ w twierdzeniu nie musi mieć maksymalnego wymiaru. Twierdzenie 1 jest ulepszoną wersją [44, Theorem 3.3]. Samol i van Straten nie byli w stanie kontrolować p-adycznych waluacji a_n w celu uzyskania podzielonej postaci ich kongruencji [44, Definition 1.1]. Ich definicja kongruencji Dworka jest bardziej restrykcyjna i nie zachodzi dla wszystkich ciągów wyrazów stałych. Z [44, Definition 1.1] można wywnioskować (5) używając [44, Theorem 1.2]. Jednakże, to właśnie (5) jest potrzebne w zastosowaniach, co wyjaśnimy poniżej.

Aby spojrzeć na nasz wynik pod kątem geometrii, załóżmy, że współczynniki $f(\mathrm{x})$ są w $\mathbb{Q}$ i rozważmy jednoparametrową rodzinę hiperpowierzchni torycznych

$$X_t = \{t \cdot f(\mathrm{x}) \;=\; 1\} \subset \mathbb{T}^d. \tag{9}$$

Pod pewnymi warunkami ($f(\mathrm{x})$ jest Δ-*regularny*, zob. [4]), są one gładkimi hiperpowierzchniami o naturalnych gładkich uzwarceniach $\mathfrak{X}_t \subset P_\Delta$ w rzutowej rozmaitości torycznej odpowiadającej wielościanowi Δ. Jeśli Δ jest wielościamem *refleksywnym*, rozmaitość rzutowa $\mathfrak{X}_t$ jest rozmaitością Calabiego–Yau. Warunek refleksywności wiąże się z posiadaniem dokładnie jednego wewnętrznego punktu całkowitego, tj. $\mathbb{Z}^d \cap \Delta^\circ = \{0\}$ jak w Twierdzeniu 1.

Szereg tworzący $A(t) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ jest funkcją-okresem rodziny (9), co możemy zobaczyć poprzez obliczenie całki

$$A(t) \;=\; \frac{1}{(2\pi i)^d} \int\!\!\cdots\!\!\int_{|x_1|=\cdots=|x_d|=1} \frac{1}{1-tf(\mathrm{x})} \frac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_d}{x_d} \tag{10}$$

włókno po włóknie (zob. [11, Theorem 3.2] dla dokładnego omówienia). Przedstawienie całkowe (10) pokazuje też, że szereg jest zbieżny w małym dysku o środku w zerze na płaszczyźnie zespolonej o współrzędnej t. Widzimy, że funkcja analityczna $A(t)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego Picarda–Fuchsa stowarzyszonego ze środkowymi kohomologiami tej rodziny. Natychmiastowym wnioskiem z tego faktu jest, że ciąg wyrazów stałych potęg $\{a_n; n \geqslant 0\}$ spełnia równanie rekurencyjne. Istotnie, równanie Picarda–Fuchsa jest równaniem różniczkowym na $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ o współczynnikach wielomianowych, w związku z czym mamy

$$\sum_{j=0}^{r} t^j P_j\Big(t\frac{d}{dt}\Big)A(t) = 0 \qquad \text{dla pewnych wielomianów } P_j \in \overline{\mathbb{Q}}[T], \tag{11}$$

co tłumaczy się na zależność

$$\sum_{j=0}^{r} P_j(n-j)a_{n-j} = 0.$$

Zauważmy, że istnienie rekurencji tego typu dla ciągu wyrazów stałych potęg nie jest oczywiste z elementarnego punktu widzenia.

Konstrukcja rodzin rozmaitości Calabiego–Yau wspomniana powyżej została wykorzystana w niedawnej pracy kilku autorów w kontekście symetrii lustrzanej ([9, 11, 43]). Wyróżniona funkcja-okres (10) jest nazywana *okresem fundamentalnym* (np. [44, §3]) lub *okresem klasycznym* (np. [11, §3]). Zazwyczaj, $t = 0$ jest punktem osobliwym odpowiedniego równania Picarda–Fuchsa (11). Zatem Twierdzenie 1 traktuje o pewnych p-adycznych własnościach fundamentalnej funkcji-okresu, co wyjaśnimy poniżej.

Za [16, §3], kongruencje (5) pozwalają skontruować p-adyczne przedłużenie analityczne funkcji

$$\alpha(z) \;=\; \frac{A(z)}{A(z^p)}$$

jako funkcji p-adycznej zmiennej z. Jako że $\alpha(z)$ jest szeregiem potęgowym o współczynnikach całkowitych, definiuje on funkcję analityczną na otwartym dysku jednostkowym $B_{<1} \;=\; \{z : |z|_p < 1\}$.

Zazwyczaj, taka funkcja nie przedłuża się na cały dysk jednostkowy $B_{\leqslant 1} = \{z : |z|_p \leqslant 1\}$. Twierdzenie 1 daje jawne przybliżenie $\alpha(z)$ na $B_{<1}$ poprzez funkcje wymierne. Wynika stąd (zob. [Hab1, Lemma 1.3]), że $\alpha(t)$ w naturalny sposób rozszerza się do sztywnej funkcji analitycznej na większą dziedzinę

$$\mathcal{D} = \{z : |z|_p \leqslant 1, \left|A_p(z)\right|_p = 1\},$$

gdzie $A_p(z) = \sum_{n=0}^{p-1} a_n z^n$. (Mamy $B_{<1} \subset \mathcal{D} \subset B_{\leqslant 1}$.) Przydatność przedłużenia $\alpha(z)$ na brzeg p-adycznego koła jednostkowego bierze się z następującej hipotezy dotyczącej jej wartości szczególnych. Niech

$$\mathrm{Teich} : \mathbb{F}_p^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$$

będzie charakterem Teichmüllera. Skoro $\mathrm{Teich}(t) \equiv t \mod p$, jest jasne, że $\mathrm{Teich}(t) \in \mathcal{D}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A_p(t) \neq 0$, co pozwala nam zdefiniować p-adyczną jedność $\alpha(\mathrm{Teich}(t)) \in \mathbb{Z}_p^\times$.

Hipoteza 2. *Jeśli $t \cdot A_p(t) \neq 0$, to p-adyczna jedność $\alpha(Teich(t)) \in \mathbb{Z}_p^\times \cap \overline{\mathbb{Q}}$ jest odwrotnością pierwiastka (lub bieguna) funkcji dzeta redukcji X_t modulo p.*

W przypadku, gdy uzwarcenie $\mathfrak{X}_t$ jest rozmaitością Calabiego–Yau, istnieje co najwyżej jeden pierwiastek (lub biegun) funkcji dzeta będący p-adyczną jednością, odpowiadający środkowym kohomologiom $\mathfrak{X}_t$. Oczekujemy, że wartość $\alpha(Teich(t))$ równa się tej wyróżnionej p-adycznej jedności.

Przypadek rodzin 3-rozmaitości Calabiego–Yau jest rozważany w [43]. Mianowicie, [43, Proposition 2.7] mówi, że Hipoteza 2 zachodzi pod założeniem, że (silniejsze) kongruencje Dworka zachodzą dla okresu fundamentalnego (zob. [43, Conjecture 2.2]). Jest wielce prawdopodobne, że kongruencje z Twierdzenia 1 są wystarczające do dowodu tego wyniku, co dowodziłoby Hipotezy 2 w przypadku 3-rozmaitości.

Dalsze rozwinięcie pomysłów z [Hab2] oraz dowód hipotezy tam postawionej w preprintach [23] and [6] powinny dawać Hipotezę 2, chociaż pewne szczegóły pozostają do sprawdzenia. Planuję poświęcić pracę temu tematowi w przyszłości.

2.2. **Podnoszenie macierzy Hassego–Witta do charakterystyki 0.** Niech R będzie przemiennym pierścieniem charakterystyki zero, tj. $R \to R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ jest iniekcją. Niech $f(\mathrm{x}) \in R[x_1^{\pm 1}, \dots, x_d^{\pm 1}]$ będzie wielomianem Laurenta. Niech $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ będzie wielościanem Newtona $f(\mathrm{x})$. Rozważmy zbiór wewnętrznych punktów całkowitych wielościanu Newtona

$$J = \Delta^\circ \cap \mathbb{Z}^d.$$

Oznaczmy przez $g = \#J$ ich liczbę — zakładamy, że jest ona dodatnia. Rozważmy następujący ciąg macierzy $\{\beta_m; m \geqslant 0\}$ rozmiaru $g \times g$ o współczynnikach w R, o wierszach i kolumnach indeksowanych elementami J:

$$(\beta_m)_{\mathrm{u},\mathrm{v} \in J} = \text{współczynnik } \mathrm{x}^{m\mathrm{v}-\mathrm{u}} \text{ w } f(\mathrm{x})^{m-1}. \tag{12}$$

Zgodnie z konwencją, β_1 to macierz identycznościowa.

Ustalmy liczbę pierwszą p. *Podniesieniem (p-tego) homomorfizmu Frobeniusa* $\sigma : R \to R$ nazywamy homomorfizm pierścieni spełniający that $\sigma(r) \equiv r^p \mod pR$ dla każdego $r \in R$. Na przykład, dla pierścienia liczb całkowitych $R = \mathbb{Z}$ homomorfizm identycznościowy $\sigma(r) = r$ jest podniesieniem Frobeniusa, zaś dla pierścienia wielomianów $R = \mathbb{Z}[t]$ można wziąć $(\sigma r)(t) = r(t^p)$. *Różniczkowaniem* $\delta : R \to R$ nazywamy odwzorowanie addytywne spełniające $\delta(r_1 \cdot r_2) = \delta(r_1) r_2 + r_1 \delta(r_2)$. Poniżej, podniesienia Frobeniusa oraz różniczkowania są stosowane do macierzy $g \times g$ wyraz po wyrazie. Głownym wynikiem [Hab2] jest następujące

Twierdzenie 3. *Dla każdego podniesienia Frobeniusa $\sigma : R \to R$ i każdego $s \geqslant 1$ mamy*

$$\beta_{p^s} \equiv \beta_p \cdot \sigma(\beta_p) \cdot \ldots \cdot \sigma^{s-1}(\beta_p) \mod p. \tag{13}$$

Jeżeli macierz β_p jest odwracalna modulo p, to dla każdego $s \geqslant 1$ zachodzą kongruencje

$$\beta_{p^{s+1}} \cdot \sigma(\beta_{p^s})^{-1} \equiv \beta_{p^s} \cdot \sigma(\beta_{p^{s-1}})^{-1} \mod p^s \tag{14}$$

oraz

$$\delta(\beta_{p^s}) \cdot \beta_{p^s}^{-1} \equiv \delta(\beta_{p^{s-1}}) \cdot \beta_{p^{s-1}}^{-1} \mod p^s \tag{15}$$

dla każdego różniczkowania $\delta : R \longrightarrow R$.

Niech $\bar{R} = R/pR$. Ważną rolę w twierdzeniu spełnia macierz

$$(\bar{\beta}_p)_{u,v\in J} = \text{współczynnik } x^{pv-u} \text{ in } \bar{f}(x)^{p-1}, \tag{16}$$

macierz Hassego–Witta wielomianu $\bar{f} = f \mod p \in \bar{R}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_d^{\pm 1}]$. Oznaczmy przez $\bar{\sigma}(r) = r^p$ (p-ty) homomorfizm Frobeniusa pierścienia $\bar{R}$. Jeśli $\bar{R} = \mathbb{F}_q$ to ciało skończone o p^k elementach, 'odwrotny' wielomian charakterystyczny

$$\det\Big(1 - T \cdot \bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\sigma}(\bar{\beta}_p) \cdot \ldots \cdot \bar{\sigma}^{k-1}(\bar{\beta}_p)\Big) \in \mathbb{F}_p[T] \tag{17}$$

przystaje modulo p do czynnika funkcji dzeta

$$Z(X_{\bar{f}}/\mathbb{F}_q; T) = \exp\Big(\sum_{m\geqslant 1} \#X_{\bar{f}}(\mathbb{F}_{q^m})\frac{T^m}{m}\Big),$$

hiperpowierzchni torycznej $X_{\bar{f}} = \{\bar{f}(\mathrm{x}) = 0\} \subset \mathbb{T}^d$. Trzeba tu wspomnieć, że (16) jest macierzą $\bar{\sigma}$-liniowego operatora (operacji Hassego–Witta), która może być zdefiniowana w terminach geometrycznych. Czytelnik znajdzie szczegółowe wyjaśnienie tego faktu dla gładkich rzutowych hiperpowierzchni w [51, §1] i odnosnikach tamże. Podobne wyniki istnieją dla torycznych hiperpowierzchni. Zauważymy tu tylko, że w związku z $\bar{\sigma}$-liniowością, macierz s-tej iteracji operacji Hassego–Witta jest zadana przez $\bar{\beta}_p \cdot \bar{\sigma}(\bar{\beta}_p) \cdot \ldots \cdot \bar{\sigma}^{s-1}(\bar{\beta}_p)$, co jest równe $\beta_{p^s} \mod p$ dzięki pierwszej kongruencji w Twierdzeniu 3. Wiadomo, że dla ogólnej gładkiej rzutowej hiperpowierzchni nad ciałem skończonym, macierz Hassego–Witta (16) jest odwracalna (zob. [32, 39] lub [1] dla elementarnego dowodu).

Kiedy macierz Hassego–Witta (16) jest odwracalna, Twierdzenie 3 implikuje istnienie p-adycznych granic

$$F_\sigma = \lim_{s\to\infty} \beta_{p^{s+1}} \cdot \sigma(\beta_{p^s})^{-1} \tag{18}$$

and

$$N_\delta = -\lim_{s\to\infty} \delta(\beta_{p^s}) \cdot \beta_{p^s}^{-1}. \tag{19}$$

Są one macierzami rozmiaru $g \times g$ o współczynnikach w p-adycznym uzupełnieniu $\widehat{R} = \varprojlim R/p^s R$. Zauważmy, że dzięki pierwszej kongruencji w Twierdzeniu 3,

$$F_\sigma \mod p = \bar{\beta}_p.$$

Zatem F_σ jest podniesieniem macierzy Hassego–Witta do charakterystyki zero. W [Hab2], postawiłam następującą hipotezę.

Hipoteza 4. *Kiedy macierz Hassego–Witta* (16) *jest odwracalna, macierze* (18) *oraz* (19) *opisują odpowiednio operator Frobeniusa oraz koneksję Gaussa–Manina na krysztale jednostkowym stowarzyszonym z f.*

Zobaczmy, co ta hipoteza mówi dla F_σ kiedy $R = \mathbb{Z}_q$, $q = p^k$. Jak wspomnieliśmy wcześniej, (17) przystaje modulo p do czynnika funkcji dzeta $\mathcal{Z}(X_{\bar f}/\mathbb{F}_q;T)$. Twierdzimy teraz, że owa kongruencja podnosi się do stwierdzenia, że

$$\det\Big(1 - T\cdot F_\sigma \cdot \sigma(F_\sigma)\cdot \ldots \cdot \sigma^{k-1}(F_\sigma)\Big) \in \mathbb{Z}_p[T] \tag{20}$$

jest faktycznym czynnikiem $\mathcal{Z}(X_{\bar f}/\mathbb{F}_q;T)$. Zauważmy, że z konstrukcji wynika, że odwrotności pierwiastków (20) są p-adycznymi jednościami. Hipoteza stanowi, że są one wartościami własnymi q-tego odwzorowania Frobeniusa na pewnej części środkowych p-adycznych kohomologii torycznej hiperpowierzchni $X_{\bar f}$. Kiedy $f(x_1,\ldots,x_d) = F(1,x_1,\ldots,x_d)$ jest obcięciem wielomianu jednorodnego definiującego gładką rzutową hiperpowierzchnię $X_F \subset \mathbb{P}^d$, stwierdzenie to można udowodnić łącząc (14) z uogólnionymi kongruencjami Atkina i Swinnertona-Dyera udowodnionymi przez Jana Stienstrę ([48]). Kongruencje Stienstry można sformułować następująco. Jeżeli redukcja modulo p, $X_{\overline{F}}$, jest gładka oraz

$$\det(1 - T\cdot Frob_q | H^{d-1}_{crys}(X_{\overline{F}})) = 1 + c_1 T + \ldots + c_h T^h \in \mathbb{Z}[T] \tag{21}$$

jest odwrotnym wielomianem charakterystycznym q-tego operatora Frobeniusa na środkowych kohomologiach krystalicznych $X_{\bar F}$, z [48, Theorem 0.1 and Remark 0.5] istnieje stała $\gamma > 0$ taka, że

$$\beta_m + c_1\beta_{m/q} + c_2\beta_{m/q^2} + \ldots + c_k\beta_{m/q^h} \equiv 0 \mod p^{\gamma\cdot \mathrm{ord}_p(m)} \tag{22}$$

jeśli tylko $\mathrm{ord}_p(m)$ jest dostatecznie duże. Podstawiamy $m = p^s$, mnożymy przez $\beta^{-1}_{m/q^h} = \beta^{-1}_{p^{s-kh}}$ z lewej i bierzemy $s \to \infty$. Skoro $\sigma^k = id$, to kongruencje (14) pozwalają na obliczenie p-adycznej granicy

$$\Phi = \lim_{s\to\infty} \beta_{p^s}\beta^{-1}_{p^{s-k}} = F_\sigma \cdot \sigma(F_\sigma)\cdot \ldots \cdot \sigma^{k-1}(F_\sigma),$$

która dzięki (22) spełnia $\Phi^k + c_1\Phi^{k-1} + \ldots + c_h = 0$. Wnioskujemy stąd, że wartości własne Φ są odwrotnościami pierwiastków (21) – lub, równoważnie, wartościami własnymi $Frob_q$.

Aby wyjaśnić sformułowanie Hipotezy 4 w ogólności, niech $X_f = \{f = 0\} \subset \mathbb{T}^d$ będzie hiperpowierzchnią miejsc zerowych f. Kiedy X_f jest nieosobliwa, jej kohomologie de Rhama $H_f = H_{dR}(X_f)$ są R-modułem wyposażonym w następującą strukturę. Po pierwsze, H_f ma koneksję Gaussa–Manina ∇. Jest to naturalna koneksja powstała przez zastosowanie różniczkowań $\delta : R \to R$ do współczynników form różniczkowych korzystając z reguł rachunku różniczkowego. Dodatkowo, dla każdego endomorfizmu Frobeniusa $\sigma : R \to R$ dany jest homomorfizm koneksji $F_\sigma : H_{\sigma(f)} \otimes_R \widehat{R} \to H_f \otimes_R \widehat{R}$. To odwzorowanie istnieje dzięki porównaniu $H_f \otimes_R \widehat{R}$ z kohomologiami p-adycznymi $X_{\bar f}$. Moduł nad pierścieniem R z tego typu strukturą nazywamy *kryształem* (zob. [28]). Hipoteza 4 stwierdza, że jeśli $\det \bar\beta_p$ jest odwracalna, wtedy istnieje wolna część $H_f \otimes_R \widehat{R}$ rangi g zachowywana przez wszystkie odwzorowania Frobeniusa F_σ i koneksji $\nabla(\delta)$, a ich macierze w pewnej bazie są zadane przez odpowiednio (18) oraz (19).

Jawna konstrukcja kryształu jednostkowego dla hiperpowierzchni rzutowej została podana przez Nicholasa Katza w [28]. Właściwie, główny wynik [28, Theorem 6.2] stanowi transponowaną wersję kongruencji z Theorem 3 dla macierzy stworzonych z pewnych współczynników rozwinięć form różniczkowych na X_f. Analogia naszych wyników i pracy Katza było jedną z motywacji dla postawienia hipotezy. Pod pewnymi geometrycznymi założeniami, Hipoteza 4 została udowodniona w niedawnym preprincie [23]. W [6] pokazujemy inny dowód, praktycznie bez założeń o hiperpowierzchni X_f, używając wariantu konstrukcji p-adycznych kohomologii wymyślonej przez Dworka. Oba dowody rzucają światło na związki pomiędzy kongruencjami w Twierdzeniu 3 a [28, Theorem 6.2].

Kongruencje w twierdzeniu 3 mają związki z teorią formalnych reguł grupowych. Macierze (12) pojawiły się w [47] jako współczynniki logarytmów jawnych układów współrzędnych grup formalnych Artina–Mazura gładkich rzutowych hiperpowierzchni i zupełnych przecięć. W [48], Stienstra dowiódł całkowitości tych grup formalnych Artina–Mazura i wykorzystał związek pomiędzy kohomologiami krystalicznymi a funktorami Artina–Mazura do dowodu kongruencji Atkina i Swinnertona-Dyera wspomnianych powyżej (22). Drugim głównym wynikiem [Hab2] jest fakt, że z każdym wielomianem Laurenta można stowarzyszyć całkowitą formalną regułę grupową:

Twierdzenie 5. [1] *Rozważmy ciąg macierzy $\beta_m \in \mathrm{Mat}_{g\times g}(R)$, $m \geqslant 0$ zadany przez wzór (12) i zdefiniujmy g-krotkę formalnych szeregów potęgowych $l(\tau) = (l_u(\tau))_{u\in J}$ od g zmiennych $\tau = (\tau_v)_{v\in J}$ poprzez*

$$l(\tau) \;=\; \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \frac{\tau^m}{m}\,.$$

Wtedy g-wymiarowa formalna reguła grupowa $G_f(\tau,\tau') = l^{-1}(l(\tau) + l(\tau'))$ ma współczynniki w R.

Dowód Twierdzenia 5 jest oparty na lemacie Hazewinkela o równaniu funkcyjnym oraz na jawnych kongruencjach (podobnych do tych w Twierdzeniu 3). Dla gładkich rzutowych hiperpowierzchni dostajemy układy współrzędnych dla grup Artina–Mazura obliczone przez Stienstrę. Zastosowanie Twierdzenia 5 w tych przypadkach daje właściwie elementarny dowód ich całkowitości. Co ważniejsze, twierdzenie to stosuje się do ogólnych hiperpowierzchni torycznych, bez założenia gładkości.

2.3. **Arytmetyka formalnych reguł grupowych.** W [Hab3] skupiamy się na formalnych regułach grupowych wymiaru 1 i podajemy kryterium na ich całkowitość w terminach kongruencji spełnianych przez współczynniki kanonicznej niezmienniczej różniczki.

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z jednością. Formalną regułą grupową wymiaru 1 nad R nazywamy formalny szereg potęgowy dwu zmiennych $F(x,y) \in R[\![x,y]\!]$ spełniający warunki

$$\begin{aligned} F(x,0) \;&=\; F(0,x) \;=\; x\,, \\ F(F(x,y),z) \;&=\; F(x,F(y,z))\,. \end{aligned}$$

Formalna reguła grupowa jest przemienna jeżeli $F(x,y) = F(y,x)$. Można otrzymać przykłady nad ciałem liczb rzeczywistych ($R = \mathbb{R}$) z jednowymiarowych grup Liego poprzez wzięcie parametru lokalnego w pobliżu elementu neutralnego i rozwinięcie reguły grupowej w szereg potęgowy dwu zmiennych. Można skonstruować formalne reguły grupowe nad $R = \mathbb{Q}$ czy nawet $R = \mathbb{Z}$ robiąc to samo dla grupy algebraicznej. Kilka przykładów podamy poniżej.

Dla dwu formalnych reguł grupowych F_1 i F_2 nad R oraz pierścienia $R' \supseteq R$, homomorfizmem $h \in \mathrm{Hom}_{R'}(F_1,F_2)$ nazywamy formalny szereg potęgowy $h \in xR'[\![x]\!]$ taki, że $h(F_1(x,y)) = F_2(h(x),h(y))$. Odwracalny homomorfizm nazywamy izomorfizmem. Izomorfizm h nazywamy *ścisłym* jeśli $h(x) \equiv x$ modulo stopnie $\geqslant 2$.

Zakładamy odtąd, że R jest pierścieniem charakterystyki zero. W tym przypadku, każda formalna reguła grupowa $F \in R[\![x,y]\!]$ jest przemienna i ściśle izomorficzna nad $R\otimes\mathbb{Q}$ z addytywną formalną regułą grupową $\mathbb{G}_a(x,y) = x+y$. Jedyny ścisły izomorfizm $f \in \mathrm{Hom}_{R\otimes\mathbb{Q}}(F,\mathbb{G}_a)$ nazywamy *logarytmem* F. Logarytm spełnia

$$F(x,y) = f^{-1}(f(x) + f(y)) \tag{23}$$

i może być wyrażony w postaci

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n} x^n \tag{24}$$

[1] W [Hab2], ten wynik jest sformułowany w innej formie: dana liczba pierwsza p nie pojawia się w mianownikach jeżeli istnieje podniesienie p-tego Frobeniusa na pierścieniu R. Aby uzyskać podane łatwiejsze sformułowanie, piszemy $f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{u}} f_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ i stosujemy [Hab2, Theorem 2] do pierścienia $\mathbb{Z}[f_{\mathbf{u}}, \mathbf{u} \in \mathrm{supp}(f)]$, gdzie $f_{\mathbf{u}}$ są zmiennymi. Ten pierścień posiada podniesienie Frobeniusa $f_{\mathbf{u}} \mapsto f_{\mathbf{u}}^p$ dla każdego p, w związku z czym współczynniki macierzowe G_f są wielomianami od $f_{\mathbf{u}}, \mathbf{u} \in \mathrm{supp}(f)$.

z $b_n \in R$, $b_0 = 1$. Przesunięcie w indeksach (b_{n-1} w miejsce b_n) wygląda bardziej naturalnie w myśl tego, że $f'(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\, dx$ jest kanoniczną niezmienniczą różniczką dla F ([22], [20, §5.8]).

Przykład 1. *Niech $\mathcal{E}$ będzie krzywą eliptyczną nad $\mathbb{Q}$ o modelu Nérona*

$$Y^2 + c_1XY + c_3Y = X^3 + c_2X^2 + c_4X + c_6 \tag{25}$$

(tutaj $c_1, c_2, c_3, c_4, c_6 \in \mathbb{Z}$ a wyróżnik jest najmniejszy możliwy). Rozwijając regułę grupową na $\mathcal{E}$ jako szereg potęgowy w parametrze lokalnym $x = X/Y$ w zerze dostajemy całkowitą formalną regułę grupową $F_{\mathcal{E}}$, zwaną formalnym modelem minimalnym *dla $\mathcal{E}$. Jej logarytm jest zadany przez* $\log_{F_{\mathcal{E}}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n} x^n$*, gdzie współczynniki pochodzą z rozwinięcia niezmienniczej formy różniczkowej*

$$-\frac{dX}{2Y + c_1X + c_3} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) dx.$$

Scharakteryzujemy teraz ciągi $\{b_n; n \geqslant 0\}$ o wartościach w R które są ciągami współczynników kanonicznych różniczek na jednowymiarowych formalnych regułach grupowych nad R. To pytanie jest trywialne gdy $R = R \otimes \mathbb{Q}$, kiedy to każdy ciąg $\{b_n; n \geqslant 0\}$ daje formalną regułę grupową nad R poprzez wzory (23) oraz (24).

Ustalmy liczbę pierwszą p i załóżmy, że R posiada podniesienie p-tego endomorfizmu Frobeniusa $\sigma : R \to R$ (tj. $\sigma(r) \equiv r^p \mod pR$). Głowny wynik [Hab3] (Twierdzenie 6 poniżej) daje warunek konieczny i dostateczny na to, by dla ciągu $\{b_n; n \geqslant 0\}$ liczba pierwsza p nie pojawiała się w mianownikach podwójnego szeregu potęgowego (23). Aby sformułować to kryterium musimy wpierw zdefiniować pewną transformatę ciągu $\{b_n; n \geqslant 0\}$. Pewna wersja tej definicji pojawiła się w [Hab1], gdzie była głownym kombinatorycznym narzędziem w dowodzie kongruencji Dworka.

Dla nieujemnej liczby całkowitej n oznaczmy przez $\ell(n) = \min\{s \geqslant 1 : n < p^s\}$ długość zapisu n przy podstawie p. Dla dwu nieujemnych liczb całkowitych n, m oznaczmy przez $n * m$ liczbę całkowitą, której rozwinięcie przy podstawie p jest konkatenacją zapisów kolejno n i m, czyli $n * m = n + m\,p^{\ell(n)}$. Zauważmy, że $n * 0 = n$ oraz $\ell(n * m) = \ell(n) + \ell(m)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m > 0$.

Definicja. *Dla ciągu $\{b_n; n \geqslant 0\}$ o wartościach w R z $b_0 = 1$ definiujemy jego p-ciąg jako jedyny ciąg $\{c_n; n \geqslant 0\}$ o wartościach w R taki, że dla każdego n mamy*

$$b_n = \sum_{m*k=n} c_m\, \sigma^{\ell(m)}\big(b_k\big). \tag{26}$$

Rozszerzamy σ na wielomiany $R[x]$ i formalne szeregi potęgowe $R[\![x]\!]$ poprzez $\sigma(x) = x^p$. Zauważmy, że $x^m \sigma^{\ell(m)}(x^k) = x^{m*k}$, w związku z czym powyższa definicja może być sformułowana w zwięzły sposób w terminach $B(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$ jako

$$B(x) = \sum_{s \geqslant 1} \Big(\sum_{\ell(k)=s} c_k x^k\Big) \sigma^s B(x).$$

Można udowodnić, że p-ciąg jest jednoznacznie wyznaczony i zadany wzorem

$$c_n = \sum_{\substack{n = n_1 * \ldots * n_k \\ n_1 \geqslant 0, n_2, \ldots, n_k > 0}} (-1)^{k-1}\, b_{n_1} \cdot \sigma^{\ell(n_1)}(b_{n_2}) \cdot \sigma^{\ell(n_1)+\ell(n_2)}(b_{n_3}) \cdot \ldots \cdot \sigma^{\ell(n_1)+\ldots+\ell(n_{k-1})}(b_{n_k}),$$

gdzie suma obejmuje wszystkie możliwe podziały zapisu n przy podstawie p na krotkę zapisów liczb nieujemnych. Zauważmy, że $c_0 = 1$ oraz że pierwotny ciąg $\{b_n\}$ może być odzyskany z p-ciągu $\{c_n\}$ poprzez wzór (26), w związku z czym branie p-ciągu jest bijektywną operacją na zbiorze ciągów z wyrazem początkowym 1.

Możemy wreszcie sformułować kryterium p-całkowitości dla jednowymiarowych grup formalnych:

Twierdzenie 6. *Niech R będzie pierścieniem charakterystyki zero wyposażonym w podniesienie p-tego morfizmu Frobeniusa $\sigma : R \to R$. Niech $\{b_n; n \geqslant 0\}$ będzie ciągiem elementów R z $b_0 = 1$. Połóżmy $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n} x^n$. Wtedy formalna reguła grupowa $F(x,y) = f^{-1}(f(x) + f(y))$ ma współczynniki w $R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$ wtedy i tylko wtedy, gdy p-ciąg $\{c_n; n \geqslant 0\}$ stowarzyszony z $\{b_n; n \geqslant 0\}$ spełnia*

$$c_{mp^k-1} \in p^k R \quad \text{dla wszystkich} \quad m > 1, k \geqslant 0\,. \tag{27}$$

Ponieważ $\cap_p (R \otimes \mathbb{Z}_{(p)}) = R$, otrzymujemy stąd natychmiast następujące globalne kryterium całkowitości:

Wniosek. *Załóżmy, że R jest wyposażony w podniesienie p-tego morfizmu Frobeniusa dla każdej liczby pierwszej p. Wtedy $F(x,y) \in R[\![x,y]\!]$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego p odpowiedni p-ciąg $\{c_n; n \geqslant 0\}$ stowarzyszony z $\{b_n; n \geqslant 0\}$ spełnia* (27).

Dowód Twierdzenia 6 jest oparty na lemacie Hazewinkela o równaniu funkcyjnym ([20, §2.2]). Na mocy [20, Proposition 20.1.3], każda formalna reguła grupowa nad $\mathbb{Z}_{(p)}$-algebra jest *typu równania funkcyjnego* (ang. *of functional equation type*). W naszym przypadku oznacza to, żę $F(x,y)$ ma współczynniki w $R \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg elementów $v_1, v_2, \ldots \in R \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ taki, że szereg

$$g(x) \;=\; f(x) \;-\; \frac{1}{p}\sum_{s=1}^{\infty} v_s \cdot (\sigma^s f)(x) \tag{28}$$

ma współczynniki w $R \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. Tego typu ciąg $\{v_s; s \geqslant 1\}$ nie jest jednoznacznie wyznaczony. Nasz dowód pokazuje, że jednym z możliwych wyborów jest $v_s = \frac{c_{p^s-1}}{p^{s-1}} \in R$.

Podejście do całkowitości formalnych reguł grupowych poprzez równania funkcyjne jest klasyczne. Podstawy tej tematyki zostały opracowane przez Tairę Hondę w [22], i została ona wyrażona w najogólniejszej formie dzięki lematowi Hazewinkela o równaniu funkcyjnym i kryterium p-całkowitości ([20, §2, 20]). Twierdzenie 6 można rozumieć jako algorytmiczną wersję tego podejścia: dokonujemy transformacji ciągu współczynników kanonicznej niezmienniczej różniczki, sprawdzamy odpowiednie kongruencje i otrzymujemy jedno z równań funkcyjnych o ile istnieje. Mimo że p-ciąg jest nowym obiektem kombinatorycznym, pojawia się on w naturalny sposób w powyższym kontekście. W [14], podobny pomysł został zastosowany przez Berta Dittersa do klasyfikacji przemiennych formalnych reguł grupowych nad p-dziedzinami Hilberta.

Związek Twierdzenia 6 z naszymi poprzednimi wynikami jest następujący. Jeżeli $\{b_n; n \geqslant 0\}$ jest ciągiem stałych współczynników potęg wielomianu Laurenta w d zmiennych dla którego $0 \in \mathbb{R}^d$ jest jedynym wewnętrznym punktem całkowitym wielościanu Newtona, wówczas dla każdej liczby pierwszej p i dla każdego podniesienia p-tego morfizmu Frobeniusa $\sigma : R \to R$, odpowiedni p-ciąg spełnia

$$c_n \in p^{\ell(n)-1} R$$

dla wszystkich $n \geqslant 0$. (Zob. [Hab1, Lemma 1.2] oraz [Hab3, Proposition 4].) Zauważmy, że ten warunek jest silniejszy od (27). Zatem $\{b_n; n \geqslant 0\}$ daje całkowitą formalną regułę grupową. Twierdzenie 5 jest uogólnieniem tego faktu na przypadek, gdy wnętrze wielościanu Newtona ma więcej punktów całkowitych.

Kongruencje spełniane przez współczynniki logarytmu całkowitej formalnej reguły grupowej pozwalają na podanie p-adycznych analitycznych wzorów na jej lokalne niezmienniki dla każdego p. Dla uproszczenia, wyjaśnimy tę zasadę dla formalnych reguł grupowych nad $\mathbb{Z}$. Ustalmy liczbę pierwszą p i rozważmy niezmienniki klasy izomorfizmu naszej formalnej reguły grupowej nad $\mathbb{Z}_p \supset \mathbb{Z}$.

Pierwszym ważnym niezmiennikiem jednoparametrowej formalnej reguły grupowej $F(x,y)$ nad $\mathbb{Z}_p$ jest wysokość $h = ht(\overline{F})$ jej redukcji $\overline{F} = F \mod p$, zdefiniowana następująco. Dla każdego niezerowego homomorfizmu $g \in \mathrm{Hom}_k(G_1, G_2)$ pomiędzy grupami formalnymi nad ciałem k charakterystyki p istnieje dokładnie jedna liczba całkowita $m \geqslant 0$ oraz szereg formalny $\tilde{g} \in xk[x]$ taki, że $g \neq 0 \mod x^2k[\![x]\!]$ oraz $g(x) = \tilde{g}(x^{p^m})$. Definiujemy wysokość $ht(g) = m$. Wysokość homomorfizmu zerowego to $ht(0) = \infty$, zgodnie z konwencją. Wysokość formalnej reguły grupowej $G(x,y)$ nad k jest zdefiniowana jako $ht(G) = ht([p]_G)$, gdzie $[p]_G \in \mathrm{End}_k(G)$ jest endomorfizmem mnożenia przez p

$$[p]_G(x) = \underbrace{x +_G x +_G \ldots +_G x}_{p} = G(x, G(x, \ldots G(x,x\underbrace{) \ldots))}_{p}.$$

Łatwo zauważyć, że $[p]_G(x) \in x^2k[\![k]\!]$, zatem $ht(G) > 0$.

Stwierdzenie–Definicja. *Dla formalnej reguły grupowej $F(x,y) \in \mathbb{Z}_p[\![x,y]\!]$ wysokości $h < \infty$ istnieje dokładnie jeden ciąg elementów $\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1} \in p\mathbb{Z}_p$ oraz $\alpha_h \in \mathbb{Z}_p^\times$ taki, że logarytm F spełnia*

$$f(x) - \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{h} \alpha_i f(x^{p^i}) \in \mathbb{Z}_p[\![x]\!].$$

([22, Proposition 3.5], [20, Theorem 20.3.12]). Wielomian Eisensteina

$$\Psi_F(T) = p - \sum_{i=1}^{h} \alpha_i T^i \in \mathbb{Z}_p[T]$$

nazywamy wielomianem charakterystycznym $F(x,y)$.

Wielomian charakterystyczny można rozumieć jako najkrótsze równanie funkcyjne typu (28). Wspomnijmy kilka własności wielomianu charakterystycznego. Dwie grupy formalne nad $\mathbb{Z}_p$ są ściśle izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam wielomian charakterystyczny. Pierścień endomorfizmów $End_{\mathbb{F}_p}(\overline{F})$ redukcji $\overline{F} \in \mathbb{F}_p[\![x,y]\!]$ modulo p jest $\mathbb{Z}_p$-algebrą i endomorfizm Frobeniusa $\xi_{\overline{F}}(x) = x^p$ jest anihilowany przez wielomian charakterystyczny $\Psi_F(T)$.

Następujące twierdzenie z [Hab3] jest jawną i ogólną formą kongruencji Atkina i Swinnertona-Dyera dla jednoparametrowych formalnych reguł grupowych. Dla uproszczenia, formułujemy je tutaj dla reguł grupowych nad $R = \mathbb{Z}_p$:

Twierdzenie 7. *Niech $F(x,y) \in \mathbb{Z}_p[\![x,y]\!]$ będzie formalną regułą grupową wysokości h. Jeśli $h < \infty$, oznaczamy przez $\Psi_F(T) = p - \sum_{i=1}^h \alpha_i T^i \in \mathbb{Z}_p[T]$ wielomian charakterystyczny F. Niech $\{b_n; n \geqslant 0\}$ będzie ciągiem elementów $\mathbb{Z}_p$ z $b_0 = 1$ takim, że*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n} x^n$$

jest logarytmem F.

(i) *Jeśli $h = \infty$, to $\mathrm{ord}_p(b_{p^n-1}) \geqslant n$ dla każdego n.*
Jeśli $h < \infty$, to $\mathrm{ord}_p(b_{p^n-1}) \geqslant n - \lfloor \frac{n}{h} \rfloor$, z równością gdy $h|n$.

(ii) *Jeśli $h < \infty$, rozważmy elementy $\beta_n = b_{p^n-1}/p^{n-\lfloor \frac{n}{h} \rfloor} \in \mathbb{Z}_p$. Mamy*

$$\beta_{kh} \equiv \beta_h^k \mod p.$$

(iii) *Jeśli $h < \infty$, rozważmy dla każdego $k \geqslant 1$ macierz rozmiaru $h \times h$ o współczynnikach w $\mathbb{Z}_p$ zadaną przez*

$$D_k = \left(p^{\varepsilon_{ij}} \beta_{kh-1+i-j}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant h-1} \quad z \quad \varepsilon_{ij} = \begin{cases} 0, & j < i \text{ or } j = h-1, \\ 1, & i \leqslant j < h-1. \end{cases}$$

Wedy $\det D_k \equiv (-1)^{h-1}\beta_h^{kh-1} \not\equiv 0 \mod p$ *oraz*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1/p \\ \alpha_2/p \\ \vdots \\ \alpha_{h-1}/p \\ \alpha_h \end{pmatrix} \equiv D_k^{-1} \begin{pmatrix} \beta_{kh} \\ \beta_{kh+1} \\ \vdots \\ \beta_{kh+h-2} \\ \beta_{kh+h-1} \end{pmatrix} \mod p^k. \tag{29}$$

Na przykład, z (i) wynika, że wysokość jest równa 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $p \nmid b_{p-1}$. W tym przypadku mamy $p \nmid b_{p^k-1}$ dla każdego $k \geqslant 1$ oraz istnieje dokładnie jedna jedność $\alpha_1 \in R^\times$ taka, że dla każdego $k \geqslant 1$

$$b_{p^k-1}/b_{p^{k-1}-1} \equiv \alpha_1 \mod p^k. \tag{30}$$

Wielomian charakterystyczny jest zadany przez $\Psi_F(T) = p - \alpha_1 T$. Zastosujmy wzór (30) do przykładów.

Przykład 1 (ciąg dalszy). Lokalne wielomiany charakterystyczne formalnego modelu minimalnego $F_{\mathcal{E}}$ mogą zostać obliczone jako wielomiany minimalne automorfizmu Frobeniusa redukcji $\mathcal{E}$ modulo p. Są one podane w Tabeli 2.

TABELA 2. Wielomiany charakterystyczne formalnego modelu minimalnego $F_{\mathcal{E}}$.

typ redukcji w p	wielomian charakterystyczny $\Psi_{F_{\mathcal{E}}}(T)$ w p
dobra zwyczajna ($p \nmid a_p$)	$p - uT$
dobra supersingularna ($p \mid a_p$)	$p - a_pT + T^2$
multyplikatywna	$p - \varepsilon_p T$
addytywna	1

Dla liczby pierwszej p w której $\mathcal{E}$ ma dobrą redukcję oznaczamy $a_p = p + 1 - \#\mathcal{E}(\mathbb{F}_p)$, zaś gdy $p \nmid a_p$ oznaczamy przez $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ jedyne rozwiązanie równania $u^2 - a_pu + p = 0$ będące p-adyczną jednością. Dla liczby pierwszej p w której redukcja $\mathcal{E}$ ma zwyczajny punkt podwójny, kładziemy $\varepsilon_p = 1$ lub $\varepsilon_p = -1$ w zależności od tego, czy odpowiednio styczne w tym punkcie są wymierne czy nie.

Dla każdej dobrej zwyczajnej liczby pierwszej p, klasyczne kongruencje Atkina i Swinnertona-Dyera mówią, że współczynniki $\{b_n\}$ kanonicznej niezmienniczej różniczki na $\mathcal{E}$ spełniają

$$b_{p^{k+1}-1} - a_p b_{p^k-1} + p\, b_{p^{k-1}-1} \equiv 0 \mod p^k \tag{31}$$

dla każdego $k \geqslant 1$. Widzimy, że niezmiennicza różniczka 'wie' ile punktów leży na krzywej nad każdym ciałem skończonym $\mathbb{F}_p$. To zjawisko zostało wpierw zaobserwowane w [3]. Pierwszy dowód został podany przez Tairę Hondę w [21], korzystając z formalnych reguł grupowych. Zmotywowany swoją pracą dotyczącą krzywych eliptycznych, Honda położył fundamenty pod arytmetyczną teorię formalnych reguł grupowych w [21, 22].

Nasze podejście jest nieco dokładniejsze, ponieważ kontrolujemy dokładne potęgi p dzielące b_{p^k-1}. W przypadku zwyczajnej redukcji, wszystkie b_{p^k-1} są p-adycznymi jednościami, zatem (31) może zostać podzielone przez $b_{p^{k-1}-1}$, dając w granicy

$$\alpha_1^2 - a_p\alpha_1 + p = 0,$$

gdzie $\alpha_1 = \lim_k b_{p^k-1}/b_{p^{k-1}-1}$ jest p-adyczną jednością z (30). Odwrotnie, wiedząc że $\alpha_1 = u$ jest pierwiastkiem $T^2 - a_pT + p$ będącym p-adyczną jednością, natychmiast dostajemy (31) z (30).

Przykład 2. Oznaczmy przez X podwójne nakrycie płaszczyzny rzutowej $\mathbb{P}^2$ zadane przez

$$Y^2 = T_0T_1T_2(T_1 - T_2)(T_1T_2 - T_0^2).$$

W [49], Beukers i Stienstra pokazują, że X jest powierzchnią K3 oraz, dla każdego $p \neq 2$, lokalny wielomian charakterystyczny grupy formalnej Artina–Mazura stowarzyszonej ze jej środkowymi kohomologiami jest zadany przez

$$\Psi(T) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } p \equiv 3 \mod 4, \\ p - uT, & \text{jeśli } p \equiv 1 \mod 4 \ (u^2 + A_p u + p^2 = 0, u \in \mathbb{Z}_p^\times). \end{cases} \tag{32}$$

gdzie

$$A_p = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } p \equiv 3 \mod 4, \\ 2p - 4a^2, & \text{jeśli } p \equiv 1 \mod 4 \ (p = a^2 + 4b^2, a, b \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Z drugiej strony, na mocy [47, Theorem 2] współczynniki logarytmu pewnego układu współrzędnych dla tej grupy formalnej są zadane przez

$$\begin{aligned} b_n &= \begin{cases} 0, & n \text{ parzyste}, \\ \text{współczynnik } T_0^nT_1^nT_2^n \text{ w } (T_0T_1T_2)^{n/2}(T_1 - T_2)^{n/2}(T_1T_2 - T_0^2)^{n/2}, & n \text{ parzyste}, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & 4 \nmid n, \\ \binom{n/2}{n/4}^2, & 4 \mid n. \end{cases} \end{aligned}$$

Stosujemy wzór (30) aby otrzymać p-adyczny analityczny wzór na pierwiastek $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ w (32) jeśli $p \equiv 1 \mod 4$:

$$u = \lim_{k\to\infty} \frac{b_{p^k-1}}{b_{p^{k-1}-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\Gamma_p\left(\frac{p^k-1}{2}+1\right)^2}{\Gamma_p\left(\frac{p^k-1}{4}+1\right)^4} = \frac{\Gamma_p(\frac{1}{2})^2}{\Gamma_p(\frac{3}{4})^4} = \frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}}{\Gamma_p(\frac{3}{4})^4} = -\Gamma_p(\tfrac{1}{4})^4,$$

gdzie Γ_p jest p-adyczną funkcją gamma Mority (zob. np. [33]). Mamy też

$$A_p = -u - pu^{-1} = \Gamma_p(\tfrac{1}{4})^4 + p\Gamma_p(\tfrac{3}{4})^4.$$

Rozumując podobnie jak Przykładzie 2 można otrzymać p-adyczne odpowiedniki wzorów Deuringa dla krzywych eliptycznych z mnożeniem zespolonym. Na przykład, dla krzywej $\mathcal{E}$ zadanej przez $y^2+y = x^3$ i dowolnej liczby pierwszej $p \neq 3$ mamy

$$p + 1 - \#\mathcal{E}(\mathbb{F}_p) = \begin{cases} -\Gamma_p(\frac{1}{3})^3 + p\Gamma_p(\frac{2}{3})^3, & \text{jeśli } p \equiv 1 \mod 3, \\ 0, & \text{jeśli } p \equiv 2 \mod 3. \end{cases}$$

2.4. Modularność wyznacznikowych operatorów różniczkowych. Niech $\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C} : Im(\tau) > 0\}$ będzie górną półpłaszczyzną i niech $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ będzie podgrupą kongruencji. Iloraz $Y_\Gamma = \mathcal{H}/\Gamma$ jest rzutową krzywą ze skończoną liczbą nakłuć; jest nazywany *krzywą modularną*, zaś nakłucia są nazywane *ostrzami* (ang. *cusps*). W przypadku, gdy krzywa modularna Y_Γ ma genus zero, wtedy *Hauptmodul* $z : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ jest Γ-niezmienniczą funkcją (*funkcją modularną*) taką, że $z(\tau_1) = z(\tau_2)$ implikuje, że obrazy τ_1, τ_2 w Y_Γ są równe.

Dla dowolnej niezerowej funkcji modularnej $z(\tau)$ i formy modularnej $f(\tau)$ wagi k na Γ, można wyrazić $f(\tau) = \phi(z(\tau))$ gdzie $\phi(z)$ jest wielowartościową funkcją holomorficzną na $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus S$ dla pewnego skończonego zbioru S. Ponadto, wielowartościowa funkcja $\phi(z)$ jest rozwiązaniem liniowego równania różniczkowego $L\phi = 0$ rzędu $k+1$ o współczynnikach będących funkcjami algebraicznymi. W następnym akapicie zobaczymy, że współczynniki tego operatora różniczkowego są funkcjami wymiernymi jeżeli $z(\tau)$ jest Hauptmodulem. Tego typu operatory różniczkowe będziemy nazywali modularnymi. Wszystkie modularne operatory różniczkowe są geometryczne.

Naszkicujmy konstrukcję modularnego operatora różniczkowego

$$L = \sum_{i=0}^{k+1} c_i(z)\left(\frac{d}{dz}\right)^i, \quad c_i(z) \in \overline{\mathbb{C}(z)} \tag{33}$$

dla pary $z(\tau), f(\tau)$ według [54]. Warunek określający przestrzeń rozwiązań L jest taki, żeby funkcje

$$f(\tau), \tau f(\tau), \dots, \tau^k f(\tau) \tag{34}$$

rozpinały jądro cofnięcia L do górnej półpłaszczyzny $\mathcal{H}$ względem $z : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$. Jasne jest, że operator

$$\left(\frac{d}{d\tau}\right)^{k+1} \frac{1}{f(\tau)}$$

anihiluje system lokalny rozpinany przez (34). Chcielibyśmy podzielić ten operator przez $z'(\tau) \cdot f(\tau)$ (dlaczego, wyjaśnimy w następnym zdaniu), podstawić $\frac{d}{d\tau} = z'(\tau)\frac{d}{dz}$ i zapisać wynik jako

$$\frac{1}{z'(\tau)\cdot f(\tau)}\left(\frac{d}{d\tau}\right)^{k+1}\frac{1}{f(\tau)} = \sum_{i=0}^{k+1} g_i(\tau)\left(\frac{d}{dz}\right)^i$$

dla pewnych funkcji meromorficznych $g_i(\tau)$ na $\mathcal{H}$. W wyniku podzielenia przez $z'(\tau) \cdot f(\tau)$, współczynniki $g_i(\tau)$ stają się funkcjami modularnymi dla Γ, co można udowodnić korzystając z teorii nawiasów Rankina–Cohena, w związku z czym każdy z nich może zostać przedstawiony jako funkcja algebraiczna od $z(\tau)$:

$$g_i(\tau) = c_i\big(z(\tau)\big), \quad c_i(z) \in \overline{\mathbb{C}(z)}.$$

Jeśli $z(\tau)$ jest Hauptmodulem, w tym ostatnim kroku dostajemy funkcje wymierne $c_i(z) \in \mathbb{C}(z)$.

W Części 1 rozważaliśmy problem znajdowania geometrycznych operatorów różniczkowych postaci (2). Hipotetycznie, wszystkie przypadki geometryczne podano w Tabeli 1. Wszystkie z nich są modularne z jawną parametryzacją modularną podaną w [55]. Na przykład, operator z $(A, B, \lambda) = (7, -8, 2)$ odpowiada parze

$$z(\tau) = \frac{\eta(\tau)^3\eta(6\tau)^9}{\eta(2\tau)^3\eta(3\tau)^9}, \qquad f(\tau) = \frac{\eta(2\tau)\eta(3\tau)^6}{\eta(\tau)^2\eta(6\tau)^3},$$

gdzie $\eta(\tau)$ jest funkcją eta Dedekinda.

Równania różniczkowe (2) to tak zwane wyznacznikowe równania różniczkowe rzędu 2 (równania $D2$, [18]). Wyznacznikowe równania różniczkowe zostały wprowadzone przez Vasilego Golysheva w [19] w kontekście symetrii lustrzanej dla rozmaitości Fano. Z rozmaitością Fano X można stowarzyszyć pewien szereg potęgowy, zwany okresem kwantowym X, którego współczynniki są zadane jako pewne niezmienniki Gromowa–Wittena. Kwantowy okres spełnia równanie różniczkowe zwyczajne z wielomianowymi współczynnikami ([11, Theorem 4.3]). Symetria lustrzana przewiduje, że transformata Fouriera–Laplace'a okresu kwantowego jest fundamentalnym okresem rodziny rozmaitości Calabiego–Yau. Rodzina ta, mimo że nie jest wyznaczona jednoznacznie, nazywa się lustrzaną do X (zob. [11, §4]).

Wyznacznikowe równania różniczkowe rzędu N (równania DN) pojawiają się jako transformaty Fouriera–Laplace'a kwantowego równania różniczkowego dla rozmaitości Fano wymiaru N. Zależą one od kilku parametrów, jak (A, B, λ) w (2). Byłoby bardzo interesujące wiedzieć, które wartości parametrów odpowiadają rozmaitościom Fano. Dla $N = 2$, istnieje 10 klas powierzchni del Pezzo, ich rodziny lustrzane są stabilnymi rodzinami krzywych eliptycznych, zaś odpowiadające im równania Picarda–Fuchsa wymieniono w Tabeli 1. Dla $N = 3$, istnieje 17 klas rozmaitości Fano z drugą liczbą Bettiego równą 1, zaś odpowiednia lista równań $D3$ jest podana w [19]. Wszystkie z tych wyznacznikowych równań różniczkowych zdają się być modularne. Celem [Hab4] jest znaleźć wszystkie modularne wyznacznikowe operatory różniczkowe rzędów 2 i 3, co udało nam się zrobić pod pewnymi założeniami dotyczącymi pary modularnej $(z(\tau), f(\tau))$. Nasze założenie (zob. przypis do Twierdzenia 8) jest spełnione dla operatorów w Tabeli 1, i pokazano w [Hab4, §4], że ta tabela jest kompletna.

Wyjaśnijmy nasze podejście do klasyfikacji modularnych operatorów $D2$ i $D3$. Jedną z własności modularnych operatorów różniczkowych, wynikającą ze znajomości ich lokalny systemów rozwiązań (34), jest to, że L ma maksymalnie unipotentną monodromię dookoła punktu $z(i\infty) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, wartości $z(\tau)$ w ostrzu $i\infty$, oraz $f(\tau)$ odpowiada jedynemu rozwiązaniu niezmienniczemu ze względu na monodromię w tym punkcie. Wszystkie wyznacznikowe operatory różniczkowe mają maksymalnie unipotentną monodromię w $z = 0$ i niezmiennicze ze względu na lokalną monodromię rozwiązanie nie znika w zerze. Zakładając, że modularna parametryzacja L z pewnym $(z(\tau), f(\tau))$ istnieje, możemy założyć bez straty ogólności, że $z(i\infty) = 0$ oraz $f(i\infty) = 1$. Pierwsza obserwacja, istotna dla naszej klasyfikacji, mówi że para modularna może zostać zrekonstruowana znając L. Oznacza to, że współczynniki rozwinięć Fouriera

$$z(\tau) = \sum_{m\geqslant 1} a_m q^m,\ f(\tau) = \sum_{m\geqslant 0} b_m q^m, \quad q = \exp(2\pi i\tau) \tag{35}$$

można wyrazić jako jawne wielomiany od parametrów operatora różniczkowego. Na przykład, dla operatorów $D2$ (2) mamy

$$\begin{aligned} a_1 &= 1,\ a_2 = -A + 2\lambda,\ a_3 = A^2 - \frac{9}{2}A\lambda + \frac{19}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}B, \ \dots \\ b_0 &= 1,\ b_1 = \lambda,\ b_2 = -\frac{1}{4}A\lambda + \frac{9}{4}\lambda^2 - \frac{1}{4}B, \ \dots \end{aligned} \tag{36}$$

(Zob. [Hab 4, p.139], w naszej obecnej notacji $\beta = \lambda$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = B$, $\alpha_2 = -A$ i $t = z$.) Szereg (35) można obliczyć dla dowolnych wartości parametrów (A, B, λ), ale nie spodziewamy się, by miały one modularne własności w ogólnym przypadku. Aby znaleźć modularne operatory $D2$ można postąpić następująco. Z operatorem (2) stowarzyszamy krzywą eliptyczną zadaną jako podwójne nakrycie $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ rozgałęzione w czterech osobliwych punktach danego operatora. Nazywamy ją *krzywą spektralną*. Krzywa ta jest zdefiniowana nad $\mathbb{Q}$ jeśli $A, B, \lambda \in \mathbb{Q}$. W [Hab4] dowodzimy następującego rezultatu.

Twierdzenie 8. [2] *Załóżmy, że* (2) *z* $A, B, \lambda \in \mathbb{Q}$ *jest niezdegenerowane i modularne dla funkcji modularnej* $z(\tau)$ *i formy modularnej* $f(\tau)$ *wagi 1 na pewnej podgrupie kongruencji* $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. *Jeżeli forma*

[2] Zob. [Hab2, Theorem 4.2]. Dowód tego twierdzenia korzysta z kongruencji Atkina i Swinnertona-Dyera dla krzywych eliptycznych wspomnianych w Części 2.3. Bycie nowoformą jest technicznym założeniem, mówiącym że forma nie pochodzi z większej podgrupy kongruencji. Usunięcie tego założenia dałoby pełną klasyfikację modularnych operatorów $D2$.

modularna wagi 2

$$\left(\sqrt{z(1-Az+Bz^2)}f^2\right)(2\tau)=\sum_{m\geqslant 1}c_m q^m$$

jest nowoformą (ang. newform*), wtedy jej L-funkcja* $\sum_{m=1}^{\infty}c_m m^{-s}$ *jest L-funkcją Hassego–Weila krzywej spektralnej operatora* (2).

Twierdzenie to jest kluczowym krokiem dla znajdowania modularnych operatorów $D2$: wynika z niego, że współczynniki c_m spełniają $c_{m_1m_2}=c_{m_1}c_{m_2}$ jeśli $(m_1,m_2)=1$. Wzory (36) dają jawne wielomianowe wyrażenia $c_m\in\mathbb{Q}[A,B,\lambda]$, i możemy znaleźć trójki (A,B,λ) dające modularne równania $D2$ rozwiązując równania multyplikatywności

$$c_{m_1m_2}(A,B,\lambda)\;=\;c_{m_1}(A,B,\lambda)\cdot c_{m_2}(A,B,\lambda)$$

dla dostatecznie wielu par względnie pierwszych m_1 i m_2.

Podobna strategia działa dla niezdegenerowanych operatorów $D3$, zob. [Hab4, §6 - §7].

2.5. **Modularne miary Mahlera.** Logarytmiczna miara Mahlera niezerowego wielomianu Laurenta

$$P(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{C}[x_1^{\pm1},\ldots,x_n^{\pm1}]$$

jest zdefiniowana jako

$$m(P)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|x_1|=\cdots=|x_n|=1}\log|P(x_1,\ldots,x_n)|\,\frac{dx_1}{x_1}\cdots\frac{dx_n}{x_n}. \tag{37}$$

Można pokazać, że ta całka jest zawsze zbieżna. Dla unormowanego wielomianu jednej zmiennej $P\in\mathbb{C}[x]$, można obliczyć $m(P)$ ze wzoru Jensena

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|x|=1}\log|P(x)|\,\frac{dx}{x}\;=\;\sum_{\alpha:P(\alpha)=0}\max(0,\log|\alpha|)\,, \tag{38}$$

gdzie suma bierze pod uwagę krotność pierwiastków. Nie są znane wzory dla wielomianów wielu zmiennych. Jest jasne z Definicji (37), że dla $P(\mathrm{x})$ ze współczynnikami w $\overline{\mathbb{Q}}$ miara Mahlera $m(P)$ jest *naiwnym okresem*, czyli okresem w sensie Kontsevicha–Zagiera [34]. Mimo że wszystkie naiwne okresy są *okresami homologicznymi* ([24]), czyli okresami w sensie wspomnianym na początku Części 1, nie jest obecnie znana żadna konceptualna homologiczna interpretacja miary Mahlera (37). Liczne przykłady w literaturze pokazują, że miary Mahlera są związane z regulatorami w K-teorii hiperpowierzchni zer $P(\mathrm{x})$, zob. [42]. Ten związek sugeruje, że $m(P)$ może zostać wyrażone jako kombinacja liniowa specjalnych wartości L-funkcji.

Skupimy się na miarach Mahlera form liniowych $m(1+x_1+\cdots+x_n)$. W 1981, Christopher Smyth zauważył ([46]), że

$$m(1+x_1+x_2)\;=\;\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}L(\chi_{-3},2) \tag{39}$$

gdzie $\chi_{-3}(n)=\left(\frac{-3}{n}\right)$, $L(\chi_{-3},s)\;=\;\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\chi_{-3}(n)}{n^s}\;=\;1-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}-\frac{1}{5^s}+\ldots$, oraz

$$m(1+x_1+x_2+x_3)\;=\;\frac{7}{2\pi^2}\zeta(3)\,. \tag{40}$$

Te wzory można udowodnić bezpośrednio za pomocą całkowania. Obliczenie następnej liniowej miary Mahlera w terminach specjalnych wartości L-funkcji jest problemem otwartym:

Hipoteza 9. *(F. Rodriguez Villegas, [8], zob. też [57])*

$$m(1+x_1+x_2+x_3+x_4) \;=\; 6\left(\frac{\sqrt{-15}}{2\pi i}\right)^5 L(f_{15},4)$$

gdzie

$$f_{15}(\tau) \;=\; \eta(3\tau)^3\eta(5\tau)^3+\eta(\tau)^3\eta(15\tau)^3$$

jest CM formą modularną wagi 3*, poziomu* 15 *oraz Nebentypusu* $\left(\frac{-15}{\cdot}\right)$.

Aby pokazać, czemu L-wartości form modularnych mogą się pojawić przy obliczaniu miar Mahlera, powinniśmy wytłumaczyć jak wyrazić $m(P)$ używając funkcji-okresów dla rodziny hiperpowierzchni $tP(\mathrm{x}) = 1$. Ta metoda jest opisana przez Fernando Rodrigueza Villegasa w [42]. Przypomnijmy, że fundamentalna funkcja-okres

$$a(t) \;=\; \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|x_1|=\dots=|x_n|=1}\frac{1}{1-tP(x_1,\dots,x_n)}\,\frac{dx_1}{x_1}\dots\frac{dx_n}{x_n},$$

którą już wspomnieliśmy w Części 2.1 (zob. (10)), jest funkcją tworzącą ciągu stałych wyrazów potęg $P(\mathrm{x})$:

$$\begin{aligned} a(t) \;&=\; \sum_{m=0}^{\infty} t^m\,\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|x_1|=\dots=|x_n|=1} P(x_1,\dots,x_n)^m\,\frac{dx_1}{x_1}\dots\frac{dx_n}{x_n}\\ &=\; \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m, \qquad a_m \;=\; \text{stały wyraz } P(\mathrm{x})^m. \end{aligned}$$

Załóżmy, że wielomian P przyjmuje tylko nieujemne rzeczywiste wartości na torusie $\{|x_i|=1\}$. Wtedy miara Mahlera $m(P)$ może zostać obliczona w następujący sposób. Dla małego rzeczywistego $t<0$ mamy

$$\begin{aligned} m(P-\tfrac{1}{t}) \;&=\; \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|x_i|=1}\log\Big(P(x_1,\dots,x_n)-\frac{1}{t}\Big)\,\frac{dx_1}{x_1}\dots\frac{dx_n}{x_n}\\ &=\; \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|x_i|=1}\log\Big(-\frac{1}{t}(1-tP(x_1,\dots,x_n))\Big)\,\frac{dx_1}{x_1}\dots\frac{dx_n}{x_n}\\ &=\; -\log(-t)-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^m}{m}\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|x_i|=1}P(x_1,\dots,x_n)^m\,\frac{dx_1}{x_1}\dots\frac{dx_n}{x_n}\\ &=\; -\log(-t)-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^m}{m}a_m \;=\; -\Big(t\frac{d}{dt}\Big)^{-1}a(t)\,. \end{aligned}$$

Mimo że wykonaliśmy powyższe obliczenie tylko dla małego rzeczywistego $t<0$, pierwsza całka i ostatnie wyrażenie są holomorficznymi funkcjami t oraz są zdefiniowane w pewnym otoczeniu rzeczywistej ujemnej półosi (poza być może skończenie wieloma punktami gdzie $a(t)$ ma osobliwości). Dlatego

$$m(P) \;=\; -\mathrm{Re}\,\Big(t\frac{d}{dt}\Big)^{-1}a(t)\Big|_{t=\infty}, \tag{41}$$

gdzie dokonujemy przedłużenia analitycznego wzdłuż $-\infty<t<0$, i gdzie dodaliśmy część rzeczywistą aby uniknąć zależności od wyboru gałęzi $\log(t)$ w całce nieoznaczonej

$$\Big(t\frac{d}{dt}\Big)^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}a_m t^m \;=\; a_0\log t+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m}t^m\,. \tag{42}$$

Założenie, że $P(\mathrm{x})$ przyjmuje tylko nieujemne rzeczywiste wartości na torusie $\{|x_i|=1\}$ nie jest poważnym ograniczeniem: dla każdego $P(\mathrm{x})$ mamy $m(P)=\frac{1}{2}m(Q)$, gdzie

$$Q(x_1,\dots,x_n)=P(x_1,\dots,x_n)\overline{P}(x_1^{-1},\dots,x_n^{-1}),$$

gdyż na torusie jednostkowym $\overline{x}_i = x_i^{-1}$. Ten ostatni wielomian na torusie spełnia $Q(\mathrm{x}) = |P(\mathrm{x})|^2 \geqslant 0$. W szczególności, aby obliczyć $m(1 + x_1 + \ldots + x_n)$ należy obliczyć całkę (42) fundamentalnego okresu rodziny

$$t\Big(1 + x_1 + \cdots + x_n\Big)\Big(1 + \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\Big) = 1 \tag{43}$$

w $t = \infty$. Dla $n = 2, 3$ odpowiednie operatory różniczkowe Picard–Fuchsa są modularne, co daje nam poręczne narzędzie do przedłużenia analitycznego rozwiązań. Dość ogólnie, w tym modularnym przypadku miara Mahlera $m(P)$ może zostać wyrażona jako liniowa kombinacja krytycznych L-wartości form modularnych. Stosujemy tę metodę w [Hab5,§3] do otrzymania wzorów (39) oraz (40).

Przeszkodą na drodze do udowodnienia Hipotezy 9 jest fakt, że równanie różniczkowe spełniane przez fundamentalny okres (43) dla $n = 4$ nie jest modularne, co można zauważyć badając odpowiednią globalną reprezentację monodromii ([57]). Forma modularna f_{15} z tej hipotezy pojawiła się w obliczeniu w [41] L-funkcji stowarzyszonej z częścią środkowych kohomologii powierzchni zadanej równaniami

$$\begin{cases} 1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 1 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 0. \end{cases}$$

Podejście przyjęte przez nas w [Hab5] sprowadza obliczenie $m(1 + x_1 + \ldots + x_4)$ do obliczenia iterowanej całki rozwiązań równania Picarda–Fuchsa (43) dla $n = 3$, które jest modularne. Oto sztuczka pozwalająca na redukcję z $n + 1$ do n. Stosując wzór Jensena (38) w zmiennej x_{n+1} poniżej daje

$$\begin{aligned} m(1 + x_1 + \ldots + x_{n+1}) &= \frac{1}{(2\pi i)^{n+1}} \int_{|x_i|=1} \log|1 + x_1 + \cdots + x_{n+1}| \frac{dx_1}{x_1} \cdots \frac{dx_{n+1}}{x_{n+1}} \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|x_i|=1, |1+x_1+\cdots+x_n|>1} \log|1 + x_1 + \cdots + x_n| \frac{dx_1}{x_1} \cdots \frac{dx_n}{x_n} \\ &= \int_{(n+1)^{-2}}^1 \log(t) a^*(t) dt, \end{aligned} \tag{44}$$

gdzie $a^*(t)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego Picarda–Fuchsa stowarzyszonego z rodziną (43). Granice całkowania to minimalna i maksymalna wartość funkcji

$$t = \Big(1 + x_1 + \cdots + x_n\Big)^{-1}\Big(1 + \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\Big)^{-1}$$

na torusie $\mathbb{T}^n = \{|x_1| = \ldots = |x_n| = 1\}$. Rozwiązanie $a^*(t)$ pojawia się w wyniku całkowania włókno po włóknie środkowego wiersza (44). Mówiąc dokładniej, korzystając z (43) możemy napisać

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \frac{dx_1}{x_1} \cdots \frac{dx_n}{x_n} = \omega_t \wedge dt,$$

gdzie ω_t jest pewną $(n - 1)$-formą na hiperpowierzchni (43), residuum formy znajdującej się po lewej stronie powyższej równości. W związku z tym dostajemy

$$a^*(t) = -2 \int_{\{t(1+x_1+\cdots+x_n)(1+\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n})=1\} \cap \mathbb{T}^n} \omega_t .$$

Używamy tu * w celu odróżnienia $a^*(t)$ od okresu fundamentalnego $a(t)$. Zauważmy, że nie musimy tutaj obliczać formy residualnej ω_t ani całkować jej po włóknie: w [Hab5], znajdujemy $a^*(t)$ w przypadku $n = 3$ wiedząc, że spełnia ono to samo równanie różniczkowe rzędu 3 co $a(t)$ i badając jego zachowanie asymptotyczne przy $t \longrightarrow 1$ oraz $t \longrightarrow \infty$ ([Hab5, Lemma 5.1]).

Zyskiem z powyższego rozumowania jest, że operator różniczkowy Picarda–Fuchsa dla $n = 3$ jest modularny. Niech $t(\tau)$ będzie odpowiadającą mu funkcją modularną, dla której $f(\tau) = a(t(\tau))$ jest formą modularną wagi 2 (zob. [Hab5,(1.4)]). Napotykamy dwa nowe problemy techniczne. Po pierwsze, spójrzmy na granice całkowania ostatniej całki w (44). Podczas gdy $t = (n+1)^{-2} = 1/16$ jest wartością ostrzową $t(\tau)$, drugi koniec $t = 1$ nie jest wartością ostrzową. W związku z Hipotezą 9, dobrą wiadomością jest, że $t(\tau_0) = 1$ jest wartością CM dla $t(\tau)$ dla pewnego $\tau_0 \in \mathbb{Q}(\sqrt{-15})$. Drugim problemem jest pojawienie się $\log(t)$ w ostatniej całce w (44). Można się go pozbyć za wprowadzając całkę iterowaną

$$m(1+x_1+x_2+x_3+x_4) = \int_{1/16}^{1} \log(t) a^*(t) dt = \int_{1/16<t<u<1} \frac{a^*(t)}{u} dt du ,$$

która używając parametryzacji modularnej $t(\tau)$ daje następujące *podwójne L-wartości*:

Twierdzenie 10. *Rozważmy formę modularną $g_1(\tau) = 2\pi i\, t'(\tau) f(\tau)$, dwie meromorficzne formy modularne tej samej wagi 4 zadane przez*

$$g_2 = \frac{t}{1-t} g_1 , \quad g_3 = \frac{t(212t^2+251t-13)}{(1-t)^3} g_1 .$$

oraz dwie liczby

$$L(g_j, g_1, 3, 1) = (2\pi)^4 \int_0^\infty g_1(is) \int_s^\infty \int_{s1}^\infty \int_{s2}^\infty g_j(is_3)\, ds_3\, ds_2\, ds_1\, ds , \quad j = 2,3. \tag{45}$$

Wtedy

$$\begin{aligned} m(1+x_1+x_2+x_3+x_4) &- \frac{4}{5} m(1+x_1+x_2+x_3) \\ &= \frac{3\sqrt{5}\Omega_{15}^2}{20\pi} L(g_3, g_1, 3, 1) - \frac{3\sqrt{5}}{10\pi^3 \Omega_{15}^2} L(g_2, g_1, 3, 1) , \end{aligned}$$

gdzie Ω_{15} jest okresem Chowli–Selberga dla ciała $K = Q(\sqrt{-15})$.

Nasze oznaczenia w (45) odzwierciedlają fakt, że gdyby wszystkie g_1, g_2, g_3 były formami ostrzowymi, ten wzór dawałby ich podwójne L-wartości (zob. [Hab5, §6]). Jednakże g_1 nie jest formą ostrzową, zaś g_2, g_3 są funkcjami meromorficznymi z dyskretnymi zbiorami biegunów należącymi do $\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$. Zrozumienie liczb $L(g_3, g_1, 3, 1)$ oraz $L(g_2, g_1, 3, 1)$ w Twierdzeniu 10 wymaga dalszej pracy. Przypomnijmy z (40), że $m(1+x_1+x_2+x_3)$ jest iloczynem wartości specjalnej $\zeta(3)$, potęgi π i liczby wymiernej. Zatem Twierdzenie 10 wyraża $m(1+x_1+x_2+x_3+x_4)$ w terminach L-wartości, mimo bycia mniej eleganckim od Hipotezy 9.

3. Inne wyniki

Omówię teraz pokrótce wyniki które nie są częścią zaprezentowanego osiągnięcia habilitacyjnego i które zostały opublikowane po pracy doktorskiej.

3.1. **M. Vlasenko, S. Zwegers, *Nahm's conjecture: asymptotic computations and counterexamples*, Communications in Number Theory and Physics 5 (2011), 617–642.** Sumy Nahma to funkcje holomorficzne w kole jednostkowym $|q| < 1$ zdefiniowane przez

$$F_{A,B,C}(q) = \sum_{n \in (\mathbb{Z}_{\geqslant 0})^r} \frac{q^{\frac{1}{2}n^T A n + n^T B + C}}{(q)_{n_1} \cdots (q)_{n_r}}$$

gdzie $r \geqslant 1$ jest dodatnią liczbą całkowitą, $A \in \mathbb{Q}^{r\times r}$ dodatnio określoną macierzą symetryczną, $B \in \mathbb{Q}^r$ oraz $C \in \mathbb{Q}$. Werner Nahm zauważył, że charaktery pewnych konforemnych teorii pola dają się zapisać w powyższej postaci i postawił problem opisania wszystkich A, B, C o wymiernych współczynnikach dla których $F_{A,B,C}(q)$ jest formą modularną. Dla $r = 1$, pełna lista modularnych sum Nahma została podana przez Michaela Terhoevena i Dona Zagiera; lista ta zawiera siedem trójek $(A, B, C) \in \mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Dla $r > 1$, problem ten jest nadal otwarty. Nahm i Zagier postawili hipotezę (zob. [53]), że dla danej macierzy A istnieją B i C dające modularne $F_{A,B,C}(q)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego rozwiązania systemu równań algebraicznych

$$1 - Q_i = \prod_{j=1}^{r} Q_j^{A_{ij}}, \qquad i = 1, \ldots, r$$

element $[Q_1] + \cdots + [Q_r]$ jest torsyjny w grupie Blocha $\mathcal{B}(F)$ ciała liczbowego $F = \mathbb{Q}(Q_1, \ldots, Q_r)$. Grupa Blocha jest ilorazem jądra odwzorowania $\mathbb{Z}[F^\times \setminus \{1\}] \to \Lambda^2 F^\times$ zadanego przez $[x] \mapsto x \wedge (1-x)$ względem pewnych relacji. Jest ona izomorficzna modulo torsje z grupą K-teorii $K_3(F)$ [?]. Ta hipoteza zachodzi dla $r = 1$, jednak nasza praca z Sanderem Zwegersem pokazuje, że jest ona fałszywa już dla $r = 2$: istnieją przykłady modularnego $F_{A,B,C}$ gdzie A jest takie, że pewne ale nie wszystkie rozwiązania powyższego układu równań dają torsyjne elementy grupy Blocha.

Badanie modularności sum Nahma jest oparte na ich rozwinięciach asymptotycznych w pierwiastkach z jedności. W 2012, Stavros Garoufalidis i Tudor Dimofte odkryli kwantowe niezmienniki węzłów zadane faktycznie współczynnikami w asymptotycznym rozwinięciu sum Nahma dla których trójka (A, B, C) jest wyznaczona korzystając z danych Neumanna–Zagiera stowarzyszonych z danym węzłem.

3.2. **M. Vlasenko, K. Hutchinson, *Lines crossing a tetrahedron and the Bloch group*, in Contributions to Algebraic Geometry (IMPANGA lecture notes), EMS Series of Congress Reports (2012), 297 – 304.** Wyższe grupy Chow $\mathrm{CH}^r(X, n)$ schematu algebraicznego X składają się z klas równoważności podschematów kowymiaru r w $X \times \Delta^n$, które przecinają ściany n-wymiarowego sympleksu Δ^n w sposób właściwy. Następująca definicja została wprowadzona przez Spencera Blocha w [?], gdzie pokazał on, że dla $n \geqslant 0$

$$K_n(X) \otimes \mathbb{Q} \cong \bigoplus_r \mathrm{CH}^r(X, n) \otimes \mathbb{Q},$$

gdzie $K_n(X)$ to grupy algebraicznej K-teorii X. W zastosowaniach do $X = \mathrm{Spec}(F)$, gdzie F jest ciałem liczbowym, mamy $\mathrm{CH}^r(\mathrm{Spec}(F), n) \otimes \mathbb{Q} = 0$ dla $n \neq 2r - 1$ (zob. [?]). W [?], Burt Totaro wyraził nadzieję, że grupy Chow dla ciała można obliczyć używając jedynie klas podprzestrzeni liniowych, podczas gdy obecna definicja używa właściwie wszystkich cykli algebraicznych na przestrzeniach afinicznych. W pracy dowodzimy rezultatu tego typu dla $K_3(F)$ modulo torsje. Dokładniej, definiujemy liniowe grupy Chow $\mathrm{CH}^r_{lin}(F, n)$, konstruujemy naturalne odwzorowanie z $\mathrm{CH}^2_{lin}(F, 3)$ do grupy Blocha $B(F)$ i pokazujemy, że jest ono surjektywne a jego jądro jest torsyjne. Andrei Suslin pokazał w [?], że $B(F) \otimes \mathbb{Q} \cong K_3(F) \otimes \mathbb{Q}$.

3.3. **K. Bringmann, A. Holroyd, K. Mahlburg and M. Vlasenko, *k-run overpartitions and mock theta functions*, Quarterly Journal of Mathematics 64 (2013), 1009–1021.** Niech $p(n)$ dla całkowitego $n \geqslant 1$ będzie liczbą podziałów n na sumę liczb całkowitych dodatnich; przyjmujemy $p(0) = 1$. Funkcja tworząca liczb podziałów zdaje się być formą modularną wagi $-1/2$ (po pomnożeniu przez $q^{-1/24}$), odwrotnością funkcji eta Dedekinda:

$$\sum_{n \geqslant 0} p(n) q^n = \prod_{n \geqslant 1} \frac{1}{1 - q^n} = \frac{q^{1/24}}{\eta(q)}.$$

W [?], George Andrews pokazuje, że $\log p(n) \sim \pi \sqrt{\frac{2}{3} n}$ dla $n \to \infty$, używając rozwinięcia asymptotycznego funkcji tworzącej dla $q \to 1$. W omawianej pracy dokonujemy podobnego typu analizy dla ciągów liczb całkowitych $\overline{p}_k(n)$ zliczających tak zwane *k-run overpartitions*, $k \geqslant 1$. Pokazujemy, że funkcje tworzące tych ciągów można wyrazić jako pewne uogólnione sumy Nahma z charakterem. Stosujemy wersję metody punktu siodłowego w celu obliczenia asymptotyki tych funkcji przy $q \to 1$, co zostaje potem użyte do opisu asymptotyki $\overline{p}_k(n)$ przy $n \to \infty$.

3.4. **M. Vlasenko, D. Zagier, *Higher Kronecker "limit" formulas for real quadratic fields*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 679 (2013), 23–64.** Niech K będzie ciałem liczbowym i niech $\zeta_K(s)$ będzie funkcją dzeta Dedekinda K. Jednym z podstawowych wyników algebraicznej teorii liczb jest wzór liczby klas

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(s) = \frac{2^{r_1}\cdot(2\pi)^{r_2}\cdot Reg_K\cdot h_K}{\omega_K\cdot\sqrt{d_K}},$$

gdzie r_1 i $2r_2$ to odpowiednio liczba rzeczywistych i zespolonych zanurzeń $K \subset \mathbb{C}$, ω_K jest liczbą pierwiastków z jedności w K, d_K jest wyróżnikiem, $h_K = \#Cl_K$ jest liczbą klas i Reg_K jest regulatorem. Został on uogólniony przez Armanda Borela dła wartości szczególnych:

$$\zeta_K(m) \in \mathbb{Q}\pi^{m\cdot r_\pm}\cdot\sqrt{d_K}\cdot Reg_{m,K},$$

gdzie $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$, $\pm = (-1)^{m-1}$, $r_+ = r_2$ i $r_- = r_1+r_2$ oraz $Reg_{m,K}$ jest regulatorem $(2m-1)$-szej grupy algebraicznej K-teorii ciała K. Hipoteza Zagiera o polilogarytmach mówi, że $Reg_{m,K}$ można wyrazić za pomocą uniwersalnej funkcji $\mathcal{L}_m$ (analitycznego rzeczywistego odpowiednika m-tego polilogarytmu Li_m) ewaluowanej w argumentach należących do ciała K, zob. [56]. Funkcja dzeta Dedekinda może zostać rozbita na skończoną sumę

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathcal{A}\in Cl_K}\zeta(\mathcal{A},s)$$

funkcji dzeta klas ideałów. W większości przypadków, rozbijanie wspomnianych wyrażeń specjalnych wartości na poszczególne składniki odpowiadające klasom ideałów jest trudnym problemem.

W pracy rozważamy przypadek, gdy K jest rzeczywistym ciałem kwadratowym. Wprowadzamy uniwersalne funkcje dwu zmiennych $P_m(x,y)$ spełniające

$$\zeta(\mathcal{A},m) = d_K^{-\frac{m}{2}}\sum_{i=1}^{\ell(\mathcal{A})}P_m(w_i,w_i')$$

gdzie $\mathcal{A}$ jest wąską klasą ideałów (ang. *narrow ideal class*). Z $\mathcal{A}$ można w naturalny sposób stowarzyszyć długość *length* $\ell(\mathcal{A}) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ oraz krotkę liczb $w_i \in K$, $i = 1,\ldots,\ell(\mathcal{A})$ zdefiniowaną w terminach rozwinięcia w ułamek łańcuchowy, zob. [52]. Tutaj sprzężenie Galois elementu $w \in K$ jest oznaczane przez w'. Badamy równania funkcyjne spełnione przez $P_m(x,y)$ i podajemy naturalną interpretację powyższego wzoru w terminach parowania klasy uniwersalnego kocyklu dla grupy $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ w klasami w homologiach odpowiadającymi wąskim klasom ideałów $\mathcal{A}$ w rzeczywistych ciałach kwadratowych. Pokazujemy też, że wzór ten można w efektywny sposób wykorzystać do numerycznego sprawdzania hipotezy o polilogarytmach dla rzeczywistych ciał kwadratowych.

3.5. **The graded ring of quantum theta functions for noncommutative torus with real multiplication, International Mathematical Research Notices 2006, 1–19.** Praca nad tym artykułem zapoczątkowała przesunięcie się moich zainteresowań naukowych z teorii reprezentacji, do której należy temat mojego doktoratu, do teorii liczb.

Torusem kwantowym A_θ z niewymiernym parametrem $\theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nazywamy uniwersalną C*-algebrę generowaną przez dwa elementy unitarne U, V spełniające relację komutacji $UV = \exp(2\pi i\theta)VU$. Wiadomo, że kwantowe torusy z θ będącą niewymiernością kwadratową posiadają więcej endomorfizmów w sensie teorii Mority. Analogicznie do teorii mnożenia zespolonego dla urojonych ciał kwadratowych, Yuri Manin zasugerował w [38], że torusy kwantowe są obiektami geometrycznymi które, podobnie do krzywych eliptycznych, mogą zostać użyte do konstrukcji jawnej teorii ciał klas dla rzeczywistych ciał kwadratowych. W pracy rozważam elementy A_θ które według Manina powinny być odpowiednikami funkcji teta, oraz pokazuję, że pierścienie złożone z tych elementów mają specjalne własności gdy θ jest niewymiernością kwadratową.

LITERATURA

[1] Alan Adolphson and Steven Sperber. A-hypergeometric series and the Hasse-Witt matrix of a hypersurface. *Finite Fields Appl.*, 41:55–63, 2016.

[2] Yves André. *G-functions and geometry*. Aspects of Mathematics, E13. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1989.

[3] George E. Andrews. *The theory of partitions*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1976. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2.

[4] A. O. L. Atkin and H. P. F. Swinnerton-Dyer. Modular forms on noncongruence subgroups. pages 1–25, 1971.

[5] Victor V. Batyrev. Variations of the mixed Hodge structure of affine hypersurfaces in algebraic tori. *Duke Math. J.*, 69(2):349–409, 1993.

[6] Frits Beukers. Hypergeometric functions in one variable (school lecture notes).

[7] Frits Beukers and Masha Vlasenko. Dwork crystals, I. *in preparation*, 2018.

[8] Yuri Bilu and Alexander Borichev. Remarks on Eisenstein. *J. Aust. Math. Soc.*, 94(2):158–180, 2013.

[9] Spencer Bloch. Algebraic cycles and higher K-theory. *Adv. in Math.*, 61(3):267–304, 1986.

[10] David Boyd, Doug Lind, Fernando Rodriguez Villegas, and Christopher Deninger. The many aspects of Mahler's measure (final report of 2003 Banff workshop).

[11] Philip Candelas, Xenia de la Ossa, and Fernando Rodriguez Villegas. Calabi-Yau manifolds over finite fields. I. *arXiv:1308.4439v1 [math.AG]*, 2000.

[12] D. V. Chudnovsky and G. V. Chudnovsky. Transcendental methods and theta-functions. In *Theta functions—Bowdoin 1987, Part 2 (Brunswick, ME, 1987)*, volume 49 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 167–232. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.

[13] Tom Coates, Alessio Corti, Sergey Galkin, Vasily Golyshev, and Alexander M. Kasprzyk. Mirror symmetry and Fano manifolds. In *Proceedings of the European Congress of Mathematics (Kraków, 2-7 July, 2012)*, pages 285–300. 2012.

[14] Éric Delaygue. Arithmetic properties of Apéry-like numbers. *Compos. Math.*, 154(2):249–274, 2018.

[15] Éric Delaygue, Tanguy Rivoal, and Julien Roques. On Dwork's p-adic formal congruences theorem and hypergeometric mirror maps. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 246(1163):v+94, 2017.

[16] E. J. Ditters. On the classification of commutative formal group laws over p-Hilbert domains and a finiteness theorem for higher Hasse-Witt matrices. *Math. Z.*, 202(1):83–109, 1989.

[17] Bernard Dwork. A deformation theory for the zeta function of a hypersurface. In *Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962)*, pages 247–259. Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, 1963.

[18] Bernard Dwork. p-adic cycles. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 37:27–115, 1969.

[19] Gotthold Eisenstein. Uber eine allgemeine Eigenschaft der Reihen-Entwicklungen aller algebraischen Funktionen. *Bericht Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, pages 441–443, 1852.

[20] Vasily Golyshev and Jan Stienstra. Fuchsian equations of type DN. *Commun. Number Theory Phys.*, 1(2):323–346, 2007.

[21] Vasily V. Golyshev. Classification problems and mirror duality. In *Surveys in geometry and number theory: reports on contemporary Russian mathematics*, volume 338 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 88–121. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.

[22] Michiel Hazewinkel. *Formal groups and applications*, volume 78 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978.

[23] Taira Honda. Formal groups and zeta-functions. *Osaka J. Math.*, 5:199–213, 1968.

[24] Taira Honda. On the theory of commutative formal groups. *J. Math. Soc. Japan*, 22:213–246, 1970.

[25] An Huang, Bong Lian, Shing-Tung Yau, and Chenglong Yu. Hasse–Witt matrices, unit roots and period integrals. *arXiv:1801.01189 [math.AG]*, 2018.

[26] Annette Huber and Stefan Müller-Stach. *Periods and Nori motives*, volume 65 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer, Cham, 2017. With contributions by Benjamin Friedrich and Jonas von Wangenheim.

[27] Nicholas Katz. Travaux de Dwork. In *Séminaire Bourbaki, 24ème année (1971/1972), Exp. No. 409*, pages 167–200. Lecture Notes in Math., Vol. 317. Springer, Berlin, 1973.

[28] Nicholas M. Katz. On the differential equations satisfied by period matrices. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (35):223–258, 1968.

[29] Nicholas M. Katz. Nilpotent connections and the monodromy theorem: Applications of a result of Turrittin. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (39):175–232, 1970.
[30] Nicholas M. Katz. Internal reconstruction of unit-root F-crystals via expansion-coefficients. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 18(2):245–285, 1985. With an appendix by Luc Illusie.
[31] Nicholas M. Katz. *Rigid local systems*, volume 139 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
[32] Kiran S. Kedlaya. p-adic cohomology: from theory to practice. In *p-adic geometry*, volume 45 of *Univ. Lecture Ser.*, pages 175–203. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
[33] Kiran S. Kedlaya. *p-adic differential equations*, volume 125 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
[34] Neal Koblitz. p-adic variation of the zeta-function over families of varieties defined over finite fields. *Compositio Math.*, 31(2):119–218, 1975.
[35] Neal Koblitz. *p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 58.
[36] Maxim Kontsevich and Don Zagier. Periods. In *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, pages 771–808. Springer, Berlin, 2001.
[37] Alan G. B. Lauder. Deformation theory and the computation of zeta functions. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 88(3):565–602, 2004.
[38] Alan G. B. Lauder. Degenerations and limit Frobenius structures in rigid cohomology. *LMS J. Comput. Math.*, 14:1–33, 2011.
[39] Amita Malik and Armin Straub. Divisibility properties of sporadic Apéry-like numbers. *Res. Number Theory*, 2:Art. 5, 26, 2016.
[40] Yu. I. Manin. Real multiplication and noncommutative geometry (ein Alterstraum). In *The legacy of Niels Henrik Abel*, pages 685–727. Springer, Berlin, 2004.
[41] Leonhard Miller. Über gewöhnliche Hyperflächen. I. *J. Reine Angew. Math.*, 282:96–113, 1976.
[42] Susanne Müller. *The F-pure threshold of quasi-homogeneous polynomials*. PhD thesis, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 2017.
[43] C. Peters, J. Top, and M. van der Vlugt. The Hasse zeta function of a $K3$ surface related to the number of words of weight 5 in the Melas codes. *J. Reine Angew. Math.*, 432:151–176, 1992.
[44] M. Rapoport. Comparison of the regulators of Beĭlinson and of Borel. In *Beĭlinson's conjectures on special values of L-functions*, volume 4 of *Perspect. Math.*, pages 169–192. Academic Press, Boston, MA, 1988.
[45] Fernando Rodriguez Villegas. Modular Mahler measures. I. In *Topics in number theory (University Park, PA, 1997)*, volume 467 of *Math. Appl.*, pages 17–48. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.
[46] Kira Samol and Duco van Straten. Frobenius polynomials for Calabi-Yau equations. *Commun. Number Theory Phys.*, 2(3):537–561, 2008.
[47] Kira Samol and Duco van Straten. Dwork congruences and reflexive polytopes. *Ann. Math. Qué.*, 39(2):185–203, 2015.
[48] Carl L. Siegel. Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen [reprint of Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-mathematische Klasse 1929, Nr. 1]. In *On some applications of Diophantine approximations*, volume 2 of *Quad./Monogr.*, pages 81–138. Ed. Norm., Pisa, 2014.
[49] C. J. Smyth. On measures of polynomials in several variables. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 23(1):49–63, 1981.
[50] Jan Stienstra. Formal group laws arising from algebraic varieties. *Amer. J. Math.*, 109(5):907–925, 1987.
[51] Jan Stienstra. Formal groups and congruences for L-functions. *Amer. J. Math.*, 109(6):1111–1127, 1987.
[52] Jan Stienstra and Frits Beukers. On the Picard-Fuchs equation and the formal Brauer group of certain elliptic $K3$-surfaces. *Math. Ann.*, 271(2):269–304, 1985.
[53] Armin Straub. Multivariate Apéry numbers and supercongruences of rational functions. *Algebra Number Theory*, 8(8):1985–2007, 2014.
[54] A. A. Suslin. K_3 of a field, and the Bloch group. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 183:180–199, 229, 1990. Translated in Proc. Steklov Inst. Math. 1991, no. 4, 217–239, Galois theory, rings, algebraic groups and their applications (Russian).
[55] Burt Totaro. Milnor K-theory is the simplest part of algebraic K-theory. *K-Theory*, 6(2):177–189, 1992.
[56] Masha Vlasenko. On p-adic unit-root formulas (extended abstract), proceedings of the program 'Calabi–Yau differential equations and hypergeometric motives' held at the MATRIX institute in Creswick in January 8-28, 2017, available at https://www.matrix-inst.org.au/2017-matrix-annals/.
[57] Don Zagier. A Kronecker limit formula for real quadratic fields. *Math. Ann.*, 213:153–184, 1975.
[58] Don Zagier. The dilogarithm function. In *Frontiers in number theory, physics, and geometry. II*, pages 3–65. Springer, Berlin, 2007.

[59] Don Zagier. Elliptic modular forms and their applications. In *The 1-2-3 of modular forms*, Universitext, pages 1–103. Springer, Berlin, 2008.

[60] Don Zagier. Integral solutions of Apéry-like recurrence equations. In *Groups and symmetries*, volume 47 of *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 349–366. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[61] Don Zagier and Herbert Gangl. Classical and elliptic polylogarithms and special values of L-series. In *The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998)*, volume 548 of *NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 561–615. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[62] Wadim Zudilin. Arithmetic hypergeometric series. *Uspekhi Mat. Nauk*, 66(2(398)):163–216, 2011.

M. Vlasenko