

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym dra **Marii Vlasenko**
prowadzonym w Instytucie Matematycznym PAN

Dr Maria Vlasenko we wniosku o wszczęcie przewodu habilitacyjnego jako osiągnięcie naukowe określiła cykl złożony z pięciu powiązanych tematycznie opublikowanych prac zatytułowany

Arytmetyka równań różniczkowych Picarda-Fuchsa

i składający się z pięciu opublikowanych prac. Dwie prace wchodzące w skład osiągnięcia są samodzielne, pozostałe trzy wspólne z V. Golyshevem, A. Mellitem oraz E. Shinderem. W dokumentacji znajdują się oświadczenie współautorów, o proporcjonalnym udziale M. Vlasenko.

Głównym wynikiem pierwszej pracy cyklu jest dowód kongruencji Dworka dla ciągu współczynników wolnych potęg wielomianu Laurenta. Powyższa konstrukcja jest związana z konstrukcją różnorodności Calabi-Yau jako antykanonicznych hiperpowierzchni w torycznych różnorodnościach Fano (Batyrev-Borisov). Jeżeli wielościan Newtona jest refleksywnym wielościannem wymiaru cztery, a wielomian jest generyczny, otrzymujemy w wyniku trójwymiarową różnorodność Calabi-Yau. Funkcja generująca jest okresem głównym.

B. Dwork użył pewnej kongruencji w celu aproksymacji p -adycznej przy pomocy funkcji wymiernej i w konsekwencji p -adycznego przedłużenia. W ten sposób wyznaczył pierwiastek funkcji zeta, który jest p -adyczną jednością. Głównym wynikiem pracy [Hab1] jest dowód kongruencji Dworka dla ciągu wyrazów stałych potęg wielomianu Laurenta, którego wielościan Newtona zawiera jedyny punkt wewnętrzny 0. Praca wzmacnia wynik pracy van Straten i Samol.

Praca [Hab2] dotyczy ogólniejszej sytuacji, gdy topologiczne wnętrze wielościanu Newtona dla wielomianu Laurenta f zawiera więcej niż jeden punkt, w takiej sytuacji wielomianowi f przypisujemy ciąg macierzy zwanych (wyższymi) macierzami Hasse-Witta. Główny wynik pracy (Thm. 1) dotyczy kongruencji między macierzami Hasse-Witta indeksowanymi potęgami ustalonej liczby pierwszej.

W przypadku gdy macierz Hasse-Witta jest odwracalna (wiadomo, że dzieje się tak w pewnych sytuacjach geometrycznych) podobnie jak dla kongruencji Dworka otrzymujemy pewne zbieżności p -adyczne. M. Vlasenko formułuje przypuszczenie, że granice te są równe odpowiednio operatorowi Frobeniusa i konekcji Gaussa-Manina na kryształach "unit-root". Hipoteza ta została numerycznie zweryfikowana w pracy dla krzywej hipereliptycznej genusu 2.

W pracy [Hab3] badane są kongruencje związane z formalnym działaniem grupowym, czyli "infinitesimalną" wersją działania grupowego. Pierwszy główny wynik pracy podaje

kryterium całkowitości formalnego prawa grupowego w terminach kongruencji dla p -ciągu skojarzonego z ciągiem współczynników logarytmu. Drugi główny wynik tej pracy podaje kongruencje spełniane przez współczynniki formalnego prawa grupowego nad pierścieniem liczb całkowitych zupełnego, absolutnie nierozgałęzionego ciała waluacji dyskretnej mieszanej charakterystyki oraz analityczną p -adyczną formułę na jego wielomian charakterystyczny.

W pracy rozważane są przykłady praw grupowych mających pochodzenie geometryczne: formalne prawo grupowe przyporządkowane L -funkcji, formalna grupa Artina-Mazura (podobnie jak w innych sytuacjach Vlasenko rozważa hiperpowierzchnię w rozmaitości torycznej zadanej przez wielomian Laurenta, której wielościan Newtona ma jeden wewnętrzny punkt kratowy) oraz hipergeometryczne prawo grupowe.

W pracy [Hab4] badane są dwie klasy *wyznacznikowych* operatorów liniowych rzędu 2 i 3 oznaczanych przez D2 i D3. Dodatkowe założenie *modularności* pozwala przeprowadzić klasyfikację z dokładnością do operacji przesunięcia (równania). W szczególności wyznaczone operatory typu D2 zawierają znalezione przez D. Zagiera operatory odpowiadający ciągom rekurencyjnym liczb całkowitych takiego typu jak wykorzystane w dowodzie niewymierności $\zeta(2)$ oraz $\zeta(3)$.

W pracy [Hab5] dowiedziona jest formuła na logarytmiczną miarę Mahlera $m(1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$ funkcji liniowej $1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. W przypadku $n = 2, 3$ analogiczne wartości $m(1 + x_1 + \dots + x_n)$ są znane i wyrażają się przy pomocy wartości w 2 funkcji L dla charakteru Dirichleta χ_{-3} oraz $\zeta(3)$.

Zgodnie przypuszczeniem Rodrigueza-Villegasa poszukiwana wartość powinna być równa $6(\frac{\sqrt{-15}}{2\pi i})^5 L(f_{15}, 4)$, gdzie f_{15} jest formą modularną wagi 3. Vlasenko i Shinder dowodzą innego wyrażenia zawierającego specjalne podwójne L -wartości pewnych form modularnych wagi 4. Konstrukcja odbicia lustrzanego została po raz pierwszy dokładnie zbadana w przypadku rodziny Dworka kwintyk. Pojawiający się operator różniczkowy jest hipergeometrycznym operatorem rzędu 4. Operatory różniczkowe (a dokładniej ich rozwiązania holomorfiniczne) o współczynnikach wielomianowych odpowiadają rekurencjom ciągów współczynników.

Ocena osiągnięcia naukowego.

Prace wchodzące w skład cyklu przedstawionego jako osiągnięcie habilitacyjne zostały opublikowane w dobrych i bardzo dobrych czasopismach naukowych (m.in. Transactions of AMS, Journal of Number Theory), podana przez kandydatkę liczba cytowań w basie Science Citation 20 h-index 4, liczby te nie obejmują prac do doktoratu z analizy funkcjonalnej) są w mojej ocenie bardzo przyzwoite biorąc pod uwagę czas, że p. Vlasenko zmieniła po doktoracie tematykę i teorię liczb zajmuje się od niespełna 15 lat.

Publikacje włączone do podlegającego ocenie osiągnięcia dotyczą zagadnień związanych z zastosowaniem równań różniczkowych zwyczajnych (równań Picarda-Fuchsa) w teorii liczb, a szczególnie tzw. kongruencji Dworka. Jest to niezwykle trudna i zaawansowana technicznie tematyka wymagająca opanowania zaawansowanych technik z zakresu teorii liczb (w tym algebraicznej teorii liczb), geometrii algebraicznej, analizy p -adycznej.

Tematyka ta została zapoczątkowana pracami B. Dworka dotyczącymi wymierności funkcji zeta Weila rozmaitości algebraicznej. Znaczenie tej tematyki jest również związane z wywodzącą się z fizyki hipotezą symetrii lustrzanej, a dokładniej przypadkiem modeli jednoparametrowych. W sytuacji tej mamy doczynienia z rodziną $\mathcal{X} = (X_t)_{t \in B}$ rozmaitości Calabi-Yau z liczbą Hodge'a $h^{1,2}(X_t) = 1$. Ponieważ topologicznie rodzina X_t jest trywialna

więc możemy w niej wybrać “stałą” rodzinę cykli $\gamma_t \in H_3(X_t)$. Ustalając formę kanoniczną (zespolony element objętości) $\omega_t \in H^{3,0}(X_t)$ otrzymujemy funkcję holomorficzną całek okresów $f(t) = \int_{\gamma_t} \omega_t : B \rightarrow \mathbb{C}$. Tak określona całka okresów jest w oczywisty sposób zdefiniowana lokalnie i zależy od poczynionych wyborów, w szczególności relatywna forma kanoniczna ω może być pomnożona przez dowolną funkcję holomorficzną na B . Ponieważ formy różniczkowe $\omega_t, \frac{d}{dt}\omega_t, \dots, \frac{d^4}{dt^4}\omega_t \in H^3(X_t) \cong \mathbb{C}^4$, więc są one liniowo zależne. A zatem całka okresów spełnia równanie różniczkowe liniowe jednorodne rzędu 4. W przypadku, gdy krzywa bazowa $B = \mathbb{P}^1 \setminus \Sigma$, gdzie Σ jest zbiorem skończonym, w konsekwencji otrzymane równanie będzie miało współczynniki wielomianowe. Otrzymane równanie nazywamy równaniem Picarda-Fuchsa. Oczywiście podany opis jest bardzo nieformalny, właściwszym językiem do uzyskania równania Picarda-Fuchsa jest koneksja Gaussa-Manina. Można wykazać, że równanie Picarda-Fuchsa rodziny trójwymiarowych rozmaitości Calabi-Yau ma wyłącznie regularne punkty osobliwe i posiada szereg dodatkowych własności (typu symetria symoli Riemanna). Oryginalne równanie Picarda-Fuchsa jest równanie rzędu 2 spełnianym przez całkę okresów $\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{x(t-x)(1-x)}} = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^2 \left(\frac{t}{16}\right)^n$ i było rozważane przez L. Eulera. Jest to równanie skojarzone z rodziną Legendre’a krzywych eliptycznych $y^2 = x(x-1)(x-t)$. Dwork rozważał inną rodzinę krzywych eliptycznych $x^3 + y^3 + z^3 = txyz$. Bezpośrednim uogólnieniem powyższej rodziny na przypadek rozmaitości Calabi-Yau jest tzw. pęk kwintyk Dworka $x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 = tx_0x_1x_2x_3x_4$ badany przez Candelasa, de la Ose, Greena i Parkes.

Funkcja Zeta (Weila) rozmaitości rzutowej nad ciałem skończonym jest funkcją tworzącą kodującą liczby punktów tej rozmaitości nad wszystkimi rozszerzeniami skończonymi ciała bazowego, zaskakujące własności funkcji Zeta są przedmiotem tzw. hipotez Weila, których dowody są jednym z najważniejszych osiągnięć matematyki XX wieku. Jedną z jej części, tzw. wymierność mówi, że funkcja Zeta gładkiej rozmaitości rzutowej jest funkcją wymierną o współczynnikach całkowitych. Dokładniej jej licznik i mianownik są iloczynami “odwrotnych” wielomianów charakterystycznych morfizmu Frobeniusa na kohomologiach badanej rozmaitości. B. Dwork dowiódł słynnych kongruencji w celu p -adycznego przedstawienia pierwiastka wielomianu Frobeniusa, który jest jednością p -adyczną.

Prace dr Vlasenko są bardzo zaawansowane technicznie, dowodzą, że jest ona dojrzałym matematykiem o głębokiej znajomości uprawianej tematyki, uzyskane wyniki stanowią istotny wkład w tę niezwykle ważną, trudną i bardzo intensywnie rozwijaną dziedzinę matematyki.

Ocena istotnej aktywności naukowej. Aktywność naukowa dr Vlasenko utrzymuje się na bardzo wysokim poziomie, załączony spis publikacji zawiera pięć prac powstałych po doktoracie, a które nie zostały włączone do osiągnięcia habilitacyjnego.

W mojej ocenie najciekawsza z tej grupy jest praca (z D. Zagierem): *Higher Kronecker “limit” formulas for real quadratic fields*, opublikowana w Crelle. W pracy tej formuła Kroneckera opisująca zachowanie funkcji $\zeta(\mathcal{A}, s)$ dla $\mathcal{A}^+$ “wąskiej” klasy ideałów w otoczeniu punktu $s = 1$, zostaje rozszerzona na przypadek wyższych wartości ζ .

Najwyżej cytowana spośród prac po doktoracie nie włączonych do osiągnięcia habilitacyjnego jest praca (wspólna z S. Zwegersem) *Nahm’s conjecture: asymptotic computations and counterexamples*, (opublikowana w CNTP). W. Nahm zadał pytanie o modularność pewnych funkcji holomorficzných zadanych jako sumy zawierające liczbę wymierną, wektor i macierz

(dodatnio określoną) o współczynnikach wymiernych (sumy te wywodzą się z fizyki). W przypadku gdy rozmiar macierzy $r = 1$, pełna lista siedmiu sum modularnych została podana przez Zagiera oraz Terhoevena. Zagier i Nahm podali hipotezę charakteryzującą modularne sumy Nahma w terminach torsji grupy Blocha, w omawianej pracy Vlasenko i Zagier pokazali, że hipoteza ta nie zachodzi już dla $r = 2$.

Pozostałe prace dotyczą “generowania” grupy $K_3(\text{Spec}(F))$ (grupy algebraicznej K -teorii dla ciała liczbowego F) przez podprzestrzenie liniowe, asymptotyki pewnego uogólnienia liczb podziałowych oraz nieprzeziennych torusów z mnożeniem rzeczywistym.

Dużą część prac naukowych dr Vlasenko to prace współautorskie, pragnę podkreślić, że wśród jej współpracowników są m.in. F. Beukers, S. Bloch, D. Zagier.

Dr Vlasenko od 2005 roku przebywała jako post-doc w MPI w Bonn oraz w IHES w Bures-sur-Ivette, pracowała w Dublinie (Trinity College i University College), od 2015 roku jest pracownikiem IMPAN w Warszawie.

Dowodem uznania dla uzyskiwanych przez nią wyników naukowych były liczne wykłady na seminariach, konferencjach. Była organizatorem szkoły i warsztatów w ICTP w Trieście, trzytygodniowego programu w Melbourne i minisemestru Simonsa w Warszawie. Obecnie kieruje grantem Opus przyznany przez Narodowe Centrum Nauki.

Konkluzja. Moim zdaniem przedstawione osiągnięcie naukowe, aktywność naukowa oraz dydaktyczna z nawiązką spełniają wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane kandydatom w postępowaniu o nadanie stopnia doktora habilitowanego. Gorąco popieram wniosek dr Marii Vlasenko o nadanie jej stopnia doktora habilitowanego w zakresie matematyki.

Wnoszę również o wyróżnienie habilitacji dr Vlasenko.

Sławomir Cynk