Autoreferat

1. Imię i nazwisko: Jarosław Mederski

Adres:	Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa
E-mail:	`jmederski@impan.pl`
WWW:	`www.mat.umk.pl/~mastem`

2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

09.12.2009 **Doktor nauk matematycznych** (z wyróżnieniem), Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń.
Rozprawa doktorska: *Aproksymacje i niezmienniki homotopijne odwzorowań wielowartościowych z ograniczeniami*, promotor: prof. dr hab. Wojciech Kryszewski.

03.07.2006 **Magister informatyki**, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń.
praca magisterska: *Asynchroniczny algorytm dynamiki molekularnej i jego obiektowa implementacja*, promotor: prof. dr hab. Piotr Bała.

15.06.2005 **Magister matematyki**, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń.
praca magisterska: *Indeks punktów stałych dla odwzorowań typu Krasnosielskiego*, promotor: prof. dr hab. Wojciech Kryszewski.

3. Zatrudnienie w jednostkach naukowych

01.09.2016– ... **Adiunkt**, Zakład Równań Różniczkowych, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa.

01.10.2010– ... **Adiunkt** (urlop naukowy od 01.09.2016), Katedra Nieliniowej Analizy Matematycznej i Topologii, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń.

01.10.2011–30.09.2012 **Postdok**, Instytut Matematyczny, Uniwersytet Justusa Liebiga w Giessen, Niemcy, opiekun stażu: prof. dr. Thomas Bartsch.

01.10.2009–30.09.2010 **Asystent**, Katedra Nieliniowej Analizy Matematycznej i Topologii, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń.

4. Wskazanie osiągnięcia habilitacyjnego

Osiągnięcie habilitacyjne zatytułowane jest

4a. Teoria punktów krytycznych silnie nieokreślonych funkcjonałów oraz rozwiązania czasowo-harmonicznych równań Maxwella z nielinową polaryzacją o subkrytycznym wzroście

i składa się z następującego cyku 5 prac.

4b. Publikacje zawierające wskazane osiągnięcie

[BM1] T. Bartsch, J. Mederski: *Ground and bound state solutions of semilinear time-harmonic Maxwell equations in a bounded domain*,
Archive for Rational Mechanics and Analysis 215 (2015), no. 1, 283–306.

[M1] J. Mederski: *Ground states of time-harmonic semilinear Maxwell equations in* $\mathbb{R}^3$ *with vanishing permittivity*,
Archive for Rational Mechanics and Analysis 218 (2015), no. 2, 825–861.

[M2] J. Mederski: *Ground states of a system of nonlinear Schrödinger equations with periodic potentials*,
Communications in Partial Differential Equations 41 (2016), no. 9, 1426–1440.

[BM2] T. Bartsch, J. Mederski: *Nonlinear time-harmonic Maxwell equations in an anisotropic bounded medium*,
Journal of Functional Analysis 272 (2017), no. 10, 4304–4333.

[BM3] T. Bartsch, J. Mederski: *Nonlinear time-harmonic Maxwell equations in domains*,
Journal Fixed Point Theory and Applications 19 (2017), no. 1, 959–986.

Mój udział we współautorską pracę [BM1] wynosi około 50%, zaś w prace [BM2] oraz [BM3] wynosi około 60%. Odpowiednie oświadczenia zostały dołączone do wniosku.

4c. Omówienie publikacji oraz osiągnięcia habilitacyjnego

4c.1 Wstęp oraz motywacja fizyczna

Propagacja fali elektromagnetycznej jest opisana równaniami Maxwella dla pola elektrycznego $\mathcal{E}$, indukcji elektrycznej $\mathcal{D}$, pola magnetycznego $\mathcal{H}$ oraz indukcji magnetycznej $\mathcal{B}$. Są one polami wektorowymi zależnymi od czasu określonymi na dziedzinie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Mając dane natężenie prądu $\mathcal{J}$ oraz skalarny ładunek elektryczny ρ, *równania Maxwella* w postaci różniczkowej zapisujemy następująco

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{B} + \nabla \times \mathcal{E} = 0 & \text{(Prawo Faradaya)} \\ \nabla \times \mathcal{H} = \mathcal{J} + \partial_t \mathcal{D} & \text{(Prawo Ampere'a)} \\ \operatorname{div}(\mathcal{D}) = \rho & \text{(Prawo Gaussa dla elektryczności)} \\ \operatorname{div}(\mathcal{B}) = 0 & \text{(Prawo Gaussa dla magnetyzmu).} \end{cases}$$

Powyższe pola są związane dodatkowymi równaniami (ang. *constitutive relations*) wyznaczonymi przez materiał. Związek pomiędzy indukcją elektryczną, a polem elektrycznym jest dany przez równanie $\mathcal{D} = \varepsilon\mathcal{E} + \mathcal{P}_{NL}(x, \mathcal{E})$, gdzie $\varepsilon = \varepsilon(x) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ jest (liniowym) tensorem przenikalności elektrycznej materiału, zaś $\mathcal{P}_{NL}$ stanowi nieliniową część polaryzacji. Związek pomiędzy polem magnetycznym oraz indukcją magnetyczną opisuje się przez $\mathcal{B} = \mu\mathcal{H} - \mathcal{M}$, gdzie $\mu = \mu(x) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ oznacza tensor przenikalności magnetycznej oraz $\mathcal{M}$ jest magnetyzacją materiału. Tensory ε, μ są symetryczne oraz dodatnio określone. Jeśli materiał jest izotropiczny, to są one funkcjami skalarnymi, a w przypadku jednorodnych materiałów ε i μ są stałe. W liniowych ośrodkach mamy $\mathcal{P}_{NL} = 0$, co prowadzi do liniowych równań Maxwella.

Rozważmy sytuację bez prądów, ładunków i magnetyzacji materiału, tj. $\mathcal{J} = 0$, $\rho = 0$, $\mathcal{M} = 0$. Wówczas mnożąc prawo Faradaya przez μ^{-1}, stosując operator rotacji oraz wykorzystując powyższe związki, prawo Ampere'a prowadzi do *nieliniowego elektromagnetycznego równania falowego* postaci

$$\nabla \times (\mu(x)^{-1}\nabla \times \mathcal{E}) + \varepsilon(x)\partial_t^2\mathcal{E} + \partial_t^2\mathcal{P}_{NL}(x, \mathcal{E}) = 0 \tag{1}$$

dla pola elektrycznego $\mathcal{E}$. Rozwiązując powyższe równanie otrzymujemy $\mathcal{D} = \varepsilon\mathcal{E} + \mathcal{P}_{NL}(x, \mathcal{E})$ z powyższych związków, oraz $\mathcal{B}$ poprzez całkowanie prawa Faradaya. Ostatecznie $\mathcal{H} = \mu^{-1}\mathcal{B}$ jest również wyznaczone przez dodatkowe związki.

Równanie (1) jest szczególnie trudnym zagadnieniem i w literaturze możemy znaleźć różnego typu uproszczenia polegające na przybliżaniu nieliniowego elektromagnetycznego równania falowego. Najbardziej znaczącym przybliżeniem jest skalarne lub wektorowe nieliniowe rówananie Schrödingera; zob. Rozdział 5b.1. W celu uzasadnienia tego przybliżenia zakłada się, że składnik $\nabla(\operatorname{div}(\mathcal{E}))$ w $\nabla \times (\nabla \times \mathcal{E}) = \nabla(\operatorname{div}(\mathcal{E})) - \Delta\mathcal{E}$ można pominąć i używamy tzw. *slowly varying envelope approximation* [1, 28]. Jednakże takie podejście może prowadzić do niefizycznych rozwiązań; zob. [2, 32, 33, 48, 52, 53].

Celem prac [BM1], [M1], [M2], [BM2] and [BM3] jest znalezienie *dokładnych* rozwiązań równań Maxwella oraz rozwinięcie analitycznych narzędzi, które pozwolą na poszukiwanie *czasowo-harmonicznych pól* $\mathcal{E}$ postaci

$$\mathcal{E}(x,t) = u(x)\cos(\omega t) \quad \text{dla } x \in \Omega \text{ oraz } t \in \mathbb{R}$$

z częstotliwością $\omega > 0$. Przypomnijmy, że *intensywność* czasowo-harmonicznego pola wektorowego $\mathcal{E}$ jest zdefiniowana jako średnia czasowa

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\mathcal{E}(x,t)|^2 dt = \frac{1}{2}|u(x)|^2$$

wielkości $|\mathcal{E}(x,t)|^2$, gdzie $T = 2\pi/\omega$. Przypuśćmy teraz, że nieliniowa polaryzacja jest postaci

$$\mathcal{P}_{NL}(x,\mathcal{E}) = \chi\big(x, |u(x)|^2\big)\mathcal{E}$$

tj. skalarna podatność materiału χ zależy tylko od intensywności $\mathcal{E}$. Wtedy (1) redukuje się do równania, które jest przedmiotem naszych badań

$$\nabla \times \big(\mu(x)^{-1}\nabla \times u\big) - V(x)u = f(x,u) \qquad \text{w } \Omega, \tag{2}$$

gdzie $f(x,u) := \chi\big(x,|u|^2\big)u$ oraz $V(x) = \omega^2\varepsilon(x) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Zauważmy, że rozważana nieliniowość jest gradientem

$$f(x,u) = \nabla_u F(x,u),$$

gdzie $F(x,u) = \frac{1}{2}\psi\big(x,|u|^2\big)$ oraz $\psi(x,s) = \int_0^s \chi(x,r)dr$. Prawdopodobnie najbardziej znanym typem nieliniowości w literaturze fizycznej i inżynieryjnej jest *nieliniowość Kerra*

$$f(x,u) = \chi^{(3)}(x)|u|^2 u. \tag{3}$$

Innym przykładem f, który pojawiają się w zastosowaniach jest nieliniowość z *saturacją*

$$f(x,u) = \chi^{(3)}(x)\frac{|u|^2}{1+|u|^2}u. \tag{4}$$

Powyższe nieliniowości oraz więcej przykładów możemy znaleźć w pracach [67, 82, 83].

Jeśli zbiór Ω ma niepusty brzeg, to warunki brzegowe zależą od cech materiału dopełnienia $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$. W naszych rozważaniach pracujemy w przypadku, gdy Ω jest otoczone doskonałym przewodnikiem, co prowadzi do tzw. *metalicznych warunków brzegowych*

$$\nu \times u = 0 \qquad \text{na } \partial\Omega, \tag{5}$$

gdzie $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^3$ jest zewnętrznym wektorem normalnym.

Chcielibyśmy nadmienić, że liniowe czasowo-harmoniczne równania Maxwella, tj. $f = 0$ w (2), są intensywnie badane za pomocą metod numerycznych i analitycznych na ograniczonych i nieograniczonych dziedzinach; zob. np. [11, 26, 43, 55, 58, 66, 68, 70, 96] oraz znajdującą się tam bibliografię. Jednakże w nieliniowym przypadku w matematycznej literaturze znajdziemy tylko kilka analitycznych wyników dotyczących równania (2) z operatorem podwójnej rotacji curl-curl. Mianowicie, gdy $\Omega = \mathbb{R}^3$ Benci oraz Fortunato [21] zaproponowali ujednoliconą teorię pola klasycznej elektrodynamiki i rozważali równanie

$$\nabla \times (\nabla \times A) = W'(|A|)A \tag{6}$$

dla potencjału cechowania A związanego z polem magnetycznym $H = \nabla \times A$. Azzollini et al. [8] oraz D'Aprile i Siciliano [39] użyli cylindrycznej symetrii dziedziny $\mathbb{R}^3$ oraz równania (6) w celu znalezienia symetrycznych rozwiązań specjalnego typu. Przypomnijmy, że cylindryczna symetria pozwala na ograniczenie problemu do bezdywergencyjnych (solenoidalnych) pól wektorowych A, tj. $\operatorname{div}(A) = 0$, a wtedy

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\operatorname{div}(A)) - \Delta A = -\Delta A$$

gdzie ΔA jest trójwymiarowym wektorowym operatorem Laplace'a pola A. Stąd równanie (6) może być badane za pomocą standardowych metod wariacyjnych dostępnych dla operatora Laplace'a [80, 97].

Cylindrycznie symetryczne ośrodki były również rozważane w pracach Stuarta i Zhou [82]–[89] poświęconych rozwiązaniom specjalnego typu TE (ang. transverse electric) oraz TM (ang. transverse magnetic) równań Maxwella. Poszukiwanie takich rozwiązań redukuje równania do jednowymiarowego zagadnienia wariacyjnego lub równania różniczkowego zwyczajnego, które jest znacznie prostsze w analizie. Metody z prac [82]– [89] wydają się jednak niewystarczające, aby zbadać problem (2).

Zgodnie z naszą wiedzą prace [BM1] oraz [M1] są pierwszymi analitycznymi publikacjami dotyczącymi zagadnienia (2), które otworzyły drogę do nowatorskiego podejścia wariacyjnego dla nieliniowych równań Maxwella. Przypomnijmy, że (słabe) rozwiązania równania (2) są punktami krytycznymi funkcjonału

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \langle \mu(x)^{-1}\nabla \times u, \nabla \times u\rangle\, dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \langle V(x)u, u\rangle\, dx - \int_\Omega F(x,u)\, dx \tag{7}$$

zdefiniowanego na odpowiedniej podprzestrzeni X przestrzeni $H_0(\mathrm{curl};\Omega)$ takiej, że $F(x,u)$ oraz $\langle V(x)u, u\rangle$ są całkowalne. Dokładna definicja dziedziny J będzie podana w Rozdziale 4c.2. Przedstawmy główną trudność w analizie zagadnienia (2). Jeśli $u = \nabla\phi$ jest gradientem, to $\nabla \times u = 0$, stąd operator różniczkowy curl-curl

$$\nabla \times \left(\mu(x)^{-1} \nabla \times \cdot\right) \tag{8}$$

ma nieskończenie wymiarowe jądro. Jedną z konsekwencji jest silna nieokreśloność funkcjonału J, tj. indeksy Morse'a punktów krytycznych są nieskończone. Kolejną konsekwencją jest fakt, że warunek Palais-Smale'a nie jest spełniony. Trzecią trudnością jest brak słabej-słabej* ciągłości pochodnej $J' : X \to X^*$ nawet, gdy F ma subkrytyczny wzrost, tzn. na ogół $u_n \rightharpoonup u_0$ w X nie pociąga za sobą zbieżności $J'(u_n) \rightharpoonup J'(u_0)$ w X^*. Chociaż J ma geometrię zapętleń (ang. linking geometry) w duchu Benci i Rabinowitza [23], zagadnienie nie może być badane za pomocą standardowych metod wariacyjnych dla funkcjonałów silnie nieokreślonych jak w pracach [14, 23, 41, 57, 94].

Możemy teraz podsumować główne osiągnięcie habilitacyjne zawarte w pracach [BM1], [M1], [M2], [BM2] oraz [BM3].

- Wariacyjne podejście dla nieliniowego problemu (2) oraz własności funkcjonału J; zob. Rozdział 4c.2 oraz Rozdział 4c.6.
- Teoria punktów krytycznych dla silnie nieokreślonych funkcjonałów postaci (7); zob. Rozdział 4c.4.
- Rozwiązania w stanie podstawowym i w stanie związanym równania (2); zob. Rozdział 4c.5, Rozdział 4c.3 oraz Rozdział 4c.6.

Chcielibyśmy nadmienić, że [BM3] jest artykułem przeglądowym dotyczącym nieliniowych równań Maxwella, jednakże zawiera również nowe wyniki, w szczególności dotyczące problemu ze zjawiskiem saturacji (4); zob. szczegóły w kolejnych rozdziałach. Praca [M2] w istocie dotyczy układu nieliniowych równań Schrödingera, jednak w pracy [BM3] zauważyliśmy, że teoria punktów krytycznych oraz metody rozwinięte dla równań Schrödingera z [M2] mogą być zastosowane w problemie (2) w symetrycznej sytuacji; zob. Rozdział 4c.6.1.

4c.2 Podejście wariacyjne na ograniczonej dziedzinie

W tym rozdziale wprowadzimy oznaczenia i przestrzenie, które są niezbędne do zaprezentowania wyników z prac [BM1], [BM2] and [BM3] w przypadku ograniczonej dziedziny.

Na ograniczonej dziedzinie zawsze zakładamy poniższy warunek:

(L1) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ jest ograniczoną dziedziną z brzegiem Lipschitza. Pola tensorowe $\mu, V \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{3\times 3})$ spełniają: $\mu(x), V(x)$ są symetryczne i dodatnio określone jednostajnie ze względu na $x \in \Omega$.

Definiujemy przestrzeń Hilberta $H_0(\mathrm{curl};\Omega)$ będącą uzupełnieniem $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^3)$ ze względu na normę

$$\|u\|_{H_0(\mathrm{curl};\Omega)} := \left(|\nabla\times u|_2^2 + |u|_2^2\right)^{1/2}.$$

Rotację $\nabla\times u$ rozumiemy w sensie dystrybucyjnym, oraz $|\cdot|_q$ oznacza L^q-normę. Wprowadzając

$$\langle\nabla\times u_1, \nabla\times u_2\rangle_{\mu^{-1}} = \int_\Omega \langle\mu(x)^{-1}\nabla\times u_1, \nabla\times u_2\rangle dx$$

wraz ze stowarzyszoną półnormą $|\cdot|_{\mu^{-1}}$, oraz iloczyn skalarny

$$\langle u_1, u_2\rangle_V = \int_\Omega \langle V(x)u_1, u_2\rangle dx$$

wraz ze stowarzyszoną normą $|\cdot|_V$, wnosimy, że założenie (L1) implikuje równoważność norm $\|u\|_{H_0(\mathrm{curl};\Omega)}$ oraz

$$\|u\|_{\mu,V} := \left(|\nabla\times u|_{\mu^{-1}}^2 + |u|_V^2\right)^{1/2}.$$

Zauważmy, że elementy $H_0(\mathrm{curl};\Omega)$ nie muszą znikać na brzegu. Istotnie dla $u \in H_0^1(\Omega)$ twierdzimy, że $\nabla u \in H_0(\mathrm{curl};\Omega)$. Istnieją $\phi_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ zbiegające do u w $H^1(\Omega)$ takie, że $\nabla\phi_n$ dąży do ∇u w $L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$. Wówczas $\nabla\phi_n$ zbiega do ∇u w $H_0(\mathrm{curl};\Omega)$, gdyż rotacja gradientu wynosi 0. Pola wektorowe $u \in H_0(\mathrm{curl};\Omega)$ spełniają warunek brzegowy $\nu\times u = 0$ na $\partial\Omega$ w słabym sensie. Odsyłamy do prac [6,26,36,37,66], które zawierają więcej własności przestrzeni $H_0(\mathrm{curl};\Omega)$.

Następnie omówimy rozkład Helmholtza. Przestrzeń

$$\mathcal{V}_0 = \left\{v \in H_0(\mathrm{curl};\Omega) : \int_\Omega \langle V(x)v, \phi\rangle\, dx = 0 \text{ dla każdego } \phi\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^3) \text{ takiego, że } \nabla\times\phi = 0\right\}$$

składa się z pól wektorowych $v \in H_0(\mathrm{curl};\Omega)$ takich, że pole $V(x)v$ jest bezdywergencyjne w sensie dystrybucyjnym. Przestrzeń

$$\mathcal{W}_0 = \left\{w \in H_0(\mathrm{curl};\Omega) : \int_\Omega \langle w, \nabla\times\phi\rangle = 0 \text{ dla każdego } \phi\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^3)\right\}$$

składa się z pól bezwirowych $H_0(\mathrm{curl};\Omega)$ w sensie dystrybucyjnym. Dla każdego $\phi\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)$ liniowe odwzorowanie

$$u \mapsto \int_\Omega \langle u, \nabla\times\varphi\rangle dx$$

jest ciągłe na $H_0(\mathrm{curl};\Omega)$, więc przestrzeń $\mathcal{W}_0$ jest domkniętym dopełnieniem przestrzeni $\mathcal{V}_0$ w $H_0(\mathrm{curl};\Omega)$. Stąd mamy rozkład Helmholza

$$H_0(\mathrm{curl};\Omega) = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{W}_0. \tag{9}$$

Dlatego dowolne pole $u \in H_0(\mathrm{curl};\Omega)$ można rozłożyć $u = v + w$, gdzie $v \in \mathcal{V}_0$ oraz $w \in \mathcal{W}_0$, tzn. $V(x)v$ jest bezdywergencyjne, zaś w jest bezwirowe.

Lemat 1. ([BM2, Corollary 3.3], [17, Theorem 4.7]) *Następujące zagadnienie wartości własnych z operatorem curl-curl*

$$
\begin{cases} \nabla \times (\mu(x)^{-1} \nabla \times v) = \lambda V(x) v & \text{in } \Omega, \\ \nu \times v = 0 & \text{on } \partial\Omega \\ v \in \mathcal{V}_0 \end{cases} \tag{10}
$$

posiada dyskretny ciąg $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ *(anizotropicznych) wartości własnych Maxwella o skończonej krotności. Forma kwadratowa* $Q : \mathcal{V}_0 \to \mathbb{R}$ *zdefiniowana wzorem*

$$
Q(v) := \int_\Omega \big(\langle \mu(x)^{-1} \nabla \times v, \nabla \times v \rangle - \langle V(x)v, v \rangle \big)\, dx, \tag{11}
$$

jest dodatnio określona na $\mathcal{V}^+ \subset \mathcal{V}_0$ *będącej sumą przestrzeni własnych stowarzyszonych z wartościami własnymi* $\lambda_k > 1$ *oraz jest pół ujemnie określona na* $\widetilde{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}_0$ *będącej sumą przestrzeni własnych stowarzyszonych z wartościami własnymi* $\lambda_k \le 1$.

Jeśli V spełnia warunek Lipschitza oraz Ω ma brzeg klasy $\mathcal{C}^2$, to na mocy [BM2, Proposition 3.1] przestrzeń $\mathcal{V}_0$ zanurza się w sposób zwarty w $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ dla $2 \le p < 6$. Przypomnijmy, że $6 = 2^*$ jest wykładnikiem krytycznym Sobolewa w wymiarze 3. Cała przestrzeń $H_0(\mathrm{curl};\Omega)$ nie może być jednak zanurzona w $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ dla $p > 2$. Dlatego funkcjonał J określony wzorem (7) będzie zdefiniowany na mniejszej podprzestrzeni $X \subset H_0(\mathrm{curl};\Omega)$, która zależy od nieliniowości F. Nasze podstawowe założenia o F są następujące.

- (F1) $F : \Omega \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna ze względu na $u \in \mathbb{R}^3$ oraz $f = \nabla_u F : \Omega \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest funkcją Carathéodory'ego (tj. mierzalna ze względu na $x \in \Omega$, ciągła ze względu na $u \in \mathbb{R}^3$ dla p.w. $x \in \Omega$). Ponadto $F(x, 0) = 0$ dla p.w. $x \in \Omega$.
- (F2) $|f(x, u)| = o(|u|)$, gdy $u \to 0$ jednostajnie ze względu na $x \in \Omega$.
- (F3) Istnieją $2 < p < 6$ oraz $c > 0$ takie, że

$$
|f(x, u)| \le c(1 + |u|^{p-1}) \qquad \text{dla każdych } x \in \Omega, u \in \mathbb{R}^3.
$$

Wówczas $J(u)$ jest dobrze określone dla $u \in X := H_0(\mathrm{curl};\Omega) \cap L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ i zauważmy, że w (F4) żądamy *subkrytycznego wzrostu*. Rozkład Helmholtza (9) indukuje rozkład Helmholtza $X = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, gdzie $\mathcal{V} := \mathcal{V}_0 \cap X$ oraz $\mathcal{W} := \mathcal{W}_0 \cap X$. Sformułujemy teraz wariacyjny charakter problemu (2).

Stwierdzenie 2. ([BM1], [BM2], [BM3]) *Funkcjonał* $J : X = H_0(\mathrm{curl};\Omega) \cap L^p(\Omega,\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ *dany wzorem* (7) *jest klasy* $\mathcal{C}^1$. *Ponadto* $u \in X$ *jest punktem krytycznym* J *wtedy i tylko wtedy, gdy* u *jest (słabym) rozwiązaniem* (2).

W celu znalezienia nietrywialnych rozwiązań problemu (2) przedstawiamy wariacyjne podejście składające się z trzech kroków.

(Krok 1) Rozpoznanie geometrii funkcjonału J oraz znalezienie ograniczonego ciągu Palais-Smale'a (u_n), tj. $J(u_n) \to c$ dla pewnego $c > 0$ oraz $J'(u_n) \to 0$.
(Krok 2) Na mocy refleksywności przestrzeni X wnosimy, że z dokładnością do podciągu $u_n \rightharpoonup u_0$, jednakże musimy zapewnić, że $u_0 \neq 0$.
(Krok 3) Ostatecznie pokazujemy, że u_0 jest nietrywialnym punktem krytycznym J, tj. u_0 rozwiązuje równanie (2).

Jest jasne, że jeżeli J spełnia warunek Palais-Smale'a, tzn. dowolny ciąg Palais-Smale'a zawiera podciąg zbieżny, to Kroki 2 oraz 3 są łatwe do otrzymania. Jednakże na ogół ten warunek nie zachodzi dla J. Rozważmy modelowy przykład $F(x,u) = \frac{1}{p}|u|^p$, ażeby zilustrować trudności w traktowaniu funkcjonału J, tj.

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \langle \mu(x)^{-1}\nabla\times u, \nabla\times u\rangle\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \langle V(x)u,u\rangle\,dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\,dx.$$

Wówczas J jest nieograniczony z dołu i z góry, więc klasyczne podejście rachunku wariacyjnego nie ma zastosowania w Kroku 1. Zauważmy, że $J|_{\mathcal{V}^+}$ ma geometrię górskiej przełęczy na podprzestrzeni $\mathcal{V}^+$, oraz $J|_{\mathcal{W}}$ jest ściśle wklęsła z 0 będącym globalnym punktem maksymalnym. Oczywiście za pomocą twierdzenia o górskiej przełęczy [5,97] można znaleźć punkt krytyczny $J|_{\mathcal{V}^+}$, jednakże nie wiemy, czy to jest punkt krytyczny wolnego funkcjonału (bez ograniczeń) J. Wszystkie nietrywialne punkty krytyczne J mają niekończony indeks Morse'a, gdyż dla $\psi \in \mathcal{W}$ zachodzi

$$J''(u)[\psi,\psi] = -\int_\Omega \langle V(x)\psi,\psi\rangle\,dx - (p-1)\int_\Omega |u|^{p-2}|\psi|^2\,dx \le 0.$$

Dodatkową trudnością jest to, że $J' : X \to X^*$ nie jest słabo-słabo* ciągła. Właściwie J ma geometrię zapętleń w duchu Benci i Rabinowitza [23], jednakże teoria punktów krytycznych dla silnie nieokreślonych funkcjonałów z prac [14,23,41,57] nie ma zastosowania ze względu na brak słabej-słabej* ciągłości. Nawet, gdy znajdziemy ograniczony ciąg Palais-Smale'a (u_n) jak w Kroku 1, to nie jest jasne, czy słaby punkt skupienia u_0 ciągu (u_n) jest nietrywialny oraz czy u_0 jest punktem krytycznym J. Mianowicie słaba zbieżność $u_n \rightharpoonup u_0$ na ogół nie pociąga za sobą zbieżności $J'(u_n) \rightharpoonup J'(u_0)$. Dlatego Kroki 1-3 nie mogą być wykonane za pomocą standardowych metod wariacyjnych i należy zaproponować nowe podejście.

4c.3 Rola cylindrycznej symetrii: przypadek ograniczonej dziedziny

Rozważmy pełną radialną symetrię, gdzie dziedzina $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ może być kulą, pierścieniem, dopełnieniem kuli lub całą przestrzenią $\mathbb{R}^3$. Przypuśćmy, że $f(x,u) = \Gamma(|x|)|u|^{p-2}u$ oraz $V(x) = V_0(|x|)\mathrm{id}_{3\times 3}$, gdzie $V_0, \Gamma : I \to \mathbb{R}$ oraz $I = \{|x| : x \in \Omega\} \subset [0,\infty)$. Wówczas następujące twierdzenie zachodzi.

Twierdzenie 3. ([BM3, Theorem 3.1]) *Przypuśćmy, że $p > 2$, $V_0, \Gamma \in L^\infty_{loc}(I)$ oraz $0 \le -V_0\Gamma^{-1} \in L^{\frac{p-1}{p-2}}_{loc}(\Omega)$. Jeśli $u \in L^{p-1}_{loc}(\mathbb{R}^3)$ jest dystrybucyjnym rozwiązaniem równania* (2) *takim, że $u(x) = M^T u(Mx)$ dla p.w. $x \in \Omega$ oraz dla każdego $M \in \mathcal{O}(3)$, to $\nabla \times u = 0$, $V_0(r)\Gamma(r) \le 0$ dla każdego $r \in I$, oraz istnieje mierzalna funkcja $s : I \to \{-1,1\}$ taka, że*

$$u(x) = s(|x|)\left(\frac{-V_0(|x|)}{\Gamma(|x|)}\right)^{\frac{1}{p-2}} \frac{x}{|x|}. \tag{12}$$

Na odwrót, każde pole u dane wzorem (12) *jest bezwirowe oraz rozwiązuje* (2).

W szczególności, jeśli $V_0(r) \ge 0$, $\Gamma(r) > 0$ dla każdego $r \in I$ zgodnie z naszą motywacją fizyczną, to nie istnieją nietrywialne rozwiązania radialne równania (2). Dlatego osłabimy pełną radialną symetrię i będziemy poszukiwać cylindrycznie symetrycznych rozwiązań na cylindrycznie symetrycznej dziedzinie. Takiego typu rozwiązania są bardzo ważne z punktu widzenia zjawiska dwójłomności i zastosowań w krystalografii [67,78,87]. Rozważamy również anizotropiczne materiały majce cylindryczną symetrię, a dokładniej wymagamy, aby problem był symetryczny ze względu na działanie cylindrycznej grupy symetrii

$$G = \mathcal{O}(2) \times \{1\} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{O}(3)$$

w następującym sensie:

(S) Ω jest niezmiennicze ze względu na G, oraz $F : \Omega \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest niezmiennicze ze względu na działanie grupy G na zmienne x oraz u, tj. $F(g_1x, g_2u) = F(x,u)$ dla każdego $x \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}^3$, $g_1, g_2 \in G$. Ponadto $\mu(x)$ oraz $V(x)$ komutują z G, oraz μ, V są niezmiennicze ze względu na G, tj. $g_2\mu(g_1x)g_2^{-1} = \mu(x)$ dla każdego $x \in \Omega$, $g_1, g_2 \in G$; podobnie dla V.

Niezmienniczość F ze względu na G jest równoważna następującemu stwierdzeniu

$$F(x,u) = F\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_3, \sqrt{u_1^2 + u_2^2}, u_3\right) \text{ dla } x = (x_1,x_2,x_3) \in \Omega,\ u = (u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Założenie, że tensor przenikalności magnetycznej $\mu(x)$ komutuje z G jest równoważne z postacią

$$\mu(x) = \begin{pmatrix} a(x) & 0 & 0 \\ 0 & a(x) & 0 \\ 0 & 0 & b(x) \end{pmatrix},$$

gdzie $a, b \in L^\infty(\Omega)$ są dodatnie, $\operatorname{ess\,inf}_{x\in\Omega} a(x), \operatorname{ess\,inf}_{x\in\Omega} b(x) > 0$, oraz są niezmiennicze ze względu na działanie G na Ω; podobnie założenia mamy dla $V(x)$, stąd również dla $\varepsilon(x)$.

Pierwszy wynik o istnieniu rozwiązań problemu (2) uwzględnia superliniowe nieliniowości, np. typu Kerra (3). Załóżmy, że następujący warunek Ambrosetti-Rabinowitza jest spełniony.

(F4) Istnieją $\beta > 2$ oraz $R > 0$ takie, że $\langle f(x,u), u\rangle \geq \beta F(x,u) > 0$ dla każdego $x \in \Omega$ oraz $u \in \mathbb{R}^3$ takiego, że $|u| \geq R$.

Twierdzenie 4. ([BM1, Theorem 2.3], [BM2, Theorem 2.5], [BM3, Theorem 3.2]) *Przypuśćmy, że warunki (L1), (S), (F1)-(F4) są spełnione oraz załóżmy, że F jest parzysta względem u: $F(x,-u) = F(x,u)$. Wówczas istnieje nieskończenie wiele rozwiązań u_n postaci*

$$u(x) = \alpha(r, x_3)\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \tag{13}$$

takich, że $J(u_n) \to \infty$.

Jeśli warunek (S) jest spełniony, to w [BM2, Lemma 6.2] pokazujemy, że dowolne G-współzmiennicze pole $u \in X$ ma jednoznaczny rozkład $u = u_\tau + u_\rho + u_\zeta$ ze składnikami postaci

$$u_\tau(x) = \alpha(r, x_3)\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_\rho(x) = \beta(r, x_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_\zeta(x) = \gamma(r, x_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Odwzorowanie

$$S : X^G \to X^G, \quad S(u_\tau + u_\rho + u_\zeta) := u_\tau - u_\rho - u_\zeta \tag{15}$$

jest liniową izometrią oraz J jest G- i S- niezmiennicze. W takim razie, na mocy zasady Palais o symetrycznej krytyczności [97][Theorem 1.28], wystarczy znaleźć punkty krytyczne J ograniczonego do zbioru punktów stałych

$$(X^G)^S := \{u \in X^G : S(u) = u\} = \{u \in X^G : u = u_\tau\} \subset \mathcal{V}, \tag{16}$$

mianowicie punkty krytyczne $J|_{(X^G)^S}$ są punktami krytycznymi wolnego funkcjonału J. Ponadto $J|_{(X^G)^S}$ spełnia warunek Palais-Smale'a w $(X^G)^S \subset \mathcal{V}$, gdyż przestrzeń $\mathcal{V}$ jest zwarto zanurzona w $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Stąd możemy wykonać Kroki 1 - 3 w sposób standardowy, stosujemy klasyczne symetryczne twierdzenie o górskiej przełęczy [5,75] oraz twierdzenie o fontannie [13, Theorem 2.5] i otrzymujemy Twierdzenie 4.

Możemy również rozważać asymptotycznie liniowe nieliniowości postaci (4) uwzględniające zjawisko saturacji i w podobny sposób znajdziemy rozwiązania postaci (13). W tym celu zakładamy poniższy warunek.

(F5) Istnieje $V_\infty \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{3\times 3})$ takie, że $V_\infty(x)$ jest symetryczna oraz $V_\infty(x) + C_\infty \mathrm{id}_{3\times 3}$ jest dodatnio określona jednostajnie ze względu na $x \in \Omega$ dla pewnej stałej $C_\infty \in \mathbb{R}$ oraz $f(x,u) = V_\infty(x)[u] + o(|u|)$ dla $|u| \to \infty$.

Podobnie jak powyżej poszukujemy punktów krytycznych $J|_{(X^G)^S}$ i stosując wyniki [34, Theorem 12] oraz [12] otrzymujemy następujący rezultat.

Twierdzenie 5. ([BM3, Theorem 3.3]) *Przypuśćmy, że warunki (L1), (S), (F1)-(F2), (F5) zachodzą oraz załóżmy, że F jest parzysta względem u. Ponadto załóżmy, że formy kwadratowe $Q_0, Q_\infty : (X^G)^S \to \mathbb{R}$ dane wzorami*

$$Q_0(v) := \int_\Omega \big(\langle \mu(x)^{-1}\nabla \times v, \nabla \times v\rangle - \langle V(x)v, v\rangle\big)\, dx,$$

and

$$Q_\infty(v) := \int_\Omega \big(\langle \mu(x)^{-1}\nabla \times v, \nabla \times v\rangle - \langle (V(x) + V_\infty(x))v, v\rangle\big)\, dx,$$

są niezdegenerowane z indeksami odpowiednio $i_0, i_\infty \in \mathbb{N}_0$. Wówczas istnieje co najmniej $|i_0 - i_\infty|$ nietrywialnych par rozwiązań $\pm u_n$ postaci (13).

W następnym rozdziale dowodzimy nowych twierdzeń o punktach krytycznych, ażeby znaleźć inne rozwiązania niż (13) oraz aby rozważać ogólniejsze nieliniowości lub sytuacje w których warunek (S) nie jest spełniony.

4c.4 Teoria punktów krytycznych dla funkcjonałów silnie nieokreślonych

W tym rozdziale prezentujemy abstrakcyjne ujęcie naszego problemu. Niech X będzie refleksywną przestrzenią Banacha z normą $\|\cdot\|$ oraz rozkładem na topologiczną sumę prostą $X = X^+ \oplus \widetilde{X}$, gdzie X^+ jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym. Dla $u \in X$

oznaczamy przez $u^+ \in X^+$ oraz $\widetilde{u} \in \widetilde{X}$ odpowiednie składniki takie, że $u = u^+ + \widetilde{u}$. Możemy założyć, że $\langle u, u\rangle = \|u\|^2$ dla każdego $u \in X^+$ oraz $\|u\|^2 = \|u^+\|^2 + \|\widetilde{u}\|^2$. Topologia $\mathcal{T}$ na przestrzeni X jest zdefiniowana jako produkt topologii wyznaczonej przez normę w X^+ oraz słabej topologii w $\widetilde{X}$. Stąd $u_n \xrightarrow{\mathcal{T}} u$ jest równoważne z $u_n^+ \to u^+$ oraz $\widetilde{u}_n \rightharpoonup \widetilde{u}$. Przypuśćmy, że J ma postać

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - I(u) \quad \text{dla } u = u^+ + \widetilde{u} \in X^+ \oplus \widetilde{X} \tag{17}$$

Oczywiście zbiór

$$\mathcal{M} := \{u \in X :\, J'(u)|_{\widetilde{X}} = 0\} = \{u \in X :\, I'(u)|_{\widetilde{X}} = 0\} \tag{18}$$

zawiera wszystkie punkty krytyczne funkcjonału J. Załóżmy, że następujące warunki są spełnione.

(I1) $I \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ oraz $I(u) \geq I(0) = 0$ dla każdego $u \in X$.
(I2) I jest $\mathcal{T}$-ciągowo dolnie półciągła: $u_n \xrightarrow{\mathcal{T}} u \implies \liminf I(u_n) \geq I(u)$.
(I3) Jeśli $u_n \xrightarrow{\mathcal{T}} u$ oraz $I(u_n) \to I(u)$, to $u_n \to u$.
(I4) $\|u^+\| + I(u) \to \infty$, gdy $\|u\| \to \infty$.
(I5) Jeśli $u \in \mathcal{M}$, to $I(u) < I(u+v)$ dla każdego $v \in \widetilde{X} \setminus \{0\}$.

Jest jasne, że warunek (I5) zachodzi dla ściśle wypukłego funkcjonału for I. Następujące stwierdzenie przedstawia własności J oraz $\mathcal{M}$.

Stwierdzenie 6. ([BM2, Proof of Theorem 4.4]) *Jeśli I spełnia warunki (I1)-(I5), to funkcjonał J postaci* (17) *oraz $\mathcal{M}$ określone wzorem* (18) *mają następujące własności.*

a) Dla każdego $u^+ \in X^+$ istnieje jedyny element $\widetilde{u} \in \widetilde{X}$ taki, że $m(u^+) := u^+ + \widetilde{u} \in \mathcal{M}$. Ponadto $m(u^+)$ jest punktem minimalnym funkcjonału I na $u^+ + \widetilde{X}$.

b) $m : X^+ \to \mathcal{M}$ jest homeomorfizmem z odwzorowaniem odwrotnym $\mathcal{M} \ni u \mapsto u^+ \in X^+$.

c) $J \circ m : X^+ \to \mathbb{R}$ jest klasy $\mathcal{C}^1$.

d) $(J \circ m)'(u^+) = J'(m(u^+))|_{X^+} : X^+ \to \mathbb{R}$ dla każdego $u^+ \in X^+$.

e) $(u_n^+)_n \subset X^+$ jest ciągiem Palais-Smale'a dla $J \circ m$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(m(u_n^+))_n$ jest ciągiem Palais-Smale'a dla J w $\mathcal{M}$.

f) $u^+ \in X^+$ jest punktem krytycznym $J \circ m$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m(u^+)$ jest punktem krytycznym J.

g) Jeśli funkcjonał J jest parzysty, to również $J \circ m$ jest parzysty.

Zauważmy, że m nie musi być klasy $\mathcal{C}^1$ oraz $\mathcal{M}$ nie musi być różniczkowalną rozmaitością, gdyż I' jest tylko ciągłe. W świetle Stwierdzenia 6 wystarczy znaleźć punkty krytyczne funkcjonału $J \circ m$. To wymaga dodatkowych założeń w celu zastosowania klasycznych twierdzeń o punktach krytycznych, np. twierdzenia o górskiej przełęczy dla $J \circ m$.

(I6) Istnieje $r > 0$ takie, że $a := \inf\limits_{u \in X^+, \|u\|=r} J(u) > 0$.

(I7) Istnieje $u^+ \in X^+$ takie, że $\sup_{v \in \widetilde{X}} J(u+v) < a$.

(I8) $I(t_n u_n)/t_n^2 \to \infty$, o ile $t_n \to \infty$, $u_n^+ \to u^+ \neq 0$ oraz $n \to \infty$.

Nie trudno sprawdzić, że warunek (I8) implikuje (I7). Mówimy, że funkcjonał J spełnia *$(PS)_c^{\mathcal{T}}$-warunek w $\mathcal{M}$*, o ile każdy $(PS)_c$-ciąg (u_n) wolnego (nieograniczonego) funkcjonału J taki, że $u_n \in \mathcal{M}$ zawiera podciąg zbieżny w topologii $\mathcal{T}$:

$$u_n \in \mathcal{M},\ J'(u_n) \to 0,\ J(u_n) \to c \qquad \Longrightarrow \qquad u_n \xrightarrow{\mathcal{T}} u \in X \ \text{ z dokładnością do podciągu.}$$

Poniżej zamiast $\mathcal{M}$ użyjemy również tego warunku dla innego podzbioru $\mathcal{N}$ przestrzeni X.

Twierdzenie 7. ([BM2, Theorem 4.4]), ([BM3, Theorem 4.2]) *Przypuśćmy, że warunki (I1)-(I7) są spełnione oraz niech*

$$c_{\mathcal{M}} := \inf_{\gamma \in \Gamma} J(\gamma(t))$$

gdzie

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathcal{M}) : \gamma(0) = 0,\ \|\gamma(1)^+\| > r,\ \text{oraz } J(\gamma(1)) < a\}.$$

Wówczas otrzymujemy:

a) $c_{\mathcal{M}} \geq a > 0$ oraz J posiada $(PS)_{c_{\mathcal{M}}}$-ciąg w $\mathcal{M}$.

b) Jeśli J spełnia $(PS)_{c_{\mathcal{M}}}^{\mathcal{T}}$-warunek w $\mathcal{M}$, to $c_{\mathcal{M}}$ jest osiągalne przez punkt krytyczny J.

c) Jeśli J spełnia (I8), $(PS)_c^{\mathcal{T}}$-warunek w $\mathcal{M}$ dla każdego c, oraz J jest parzyste, to istnieje nieograniczony ciąg wartości krytycznych funkcjonału J.

Założenie (I8) jest spełnione, gdy $I(u)$ ma superkwadratowy wzrost względem u takiego, że $|u| \to \infty$. Warunek ten implikuje, że $J(tu) \to -\infty$ dla $t \to \infty$ oraz $u \in X \setminus \widetilde{X}$. Łącznie z warunkiem (I6) uzyskujemy geometrię górskiej przełęczy funkcjonału $J \circ m$ i w świetle Stwierdzenia 6 dowodzimy wówczas a) oraz b) w Twierdzeniu 7. Warunek (I8) jest istotny dla użycia symetrycznego twierdzenia o górskiej przełęczy dla $J \circ m$ i otrzymania c).

Interesującym zagadnieniem jest znalezienie rozwiązań w stanie podstawowym, które są punktami minimalnymi na odpowiednim ograniczeniu. Rozmaitość Nehariego jest naturalnym ograniczeniem, które jest użyteczne w przypadku, gdy kwadratowa część funkcjonału jest dodatnio określona. Rozszerzenie tego podejścia dla funkcjonałów silnie nieokreślonych zostało zaproponowane przez Pankova [69] w kontekście nielinowych równań Schrödingera oraz niezależnie przez Pistoię i Ramosa [77] w kontekście układów eliptycznych. Abstrakcyjne podejście można znaleźć w [91] (por. [90]). Jednakże teoria punktów krytycznych z [91] pozwala na badanie problemów ze skończenie wymiarowym jądrem. W naszym przypadku operator (8) ma nieskończenie wymiarowe jądro i dlatego musimy rozbudować teorię punktów krytycznych dla szerszej klasy funkcjonałów na rozmaitości Nehariego-Pankova.

Rozważmy zbiór

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &:= \{u \in X \setminus \widetilde{X} : J'(u)|_{\mathbb{R}u \oplus \widetilde{X}} = 0\} \\ &= \{u \in \mathcal{M} \setminus \widetilde{X} : J'(u)[u] = 0\} \subset \mathcal{M}, \end{aligned} \tag{19}$$

który jest szczególnie użyteczny, gdy dla każdego $u^+ \in X^+ \setminus \{0\}$ funkcjonał J ma jedyny punkt krytyczny $n(u^+)$ na półprzestrzeni $\mathbb{R}^+u^+ + \widetilde{X}$, oraz, gdy $n(u^+)$ jest jedynym globalnym punktem maksymalnym J na półprzestrzeni $\mathbb{R}^+u^+ + \widetilde{X}$. Wówczas odwzorowanie

$$n : SX^+ = \{u^+ \in X^+ : \|u^+\| = 1\} \to \mathcal{N}$$

jest homeomorfizmem i zbiór $\mathcal{N}$ jest topologiczną rozmaitością, *rozmaitością Nehariego-Pankova*. Okazuje się, że wystarczy znaleźć punkty krytyczne funkcjonału J poprzez poszukiwanie punktów krytycznych $J \circ n : SX^+ \to \mathbb{R}$. Takie podejście jest inspirowane pracą Szulkina i Wetha [90, 91]. W celu realizacji tego podejścia narzucamy kolejny warunek na I:

(I9) $\frac{t^2-1}{2} I'(u)[u] + tI'(u)[v] + I(u) - I(tu+v) < 0$ dla każdych $u \in \mathcal{N}$, $t \geq 0$, $v \in \widetilde{X}$ takich, że $u \neq tu + v$.

Jest to techniczny warunek, jednak w następnych rozdziałach wskażemy przykłady.

Możemy teraz opisać rozmaitość Nehariego-Pankova.

Stwierdzenie 8. (BM2, Proposition 4.1) *Przypuśćmy, że warunki (I1)-(I4) oraz (I6), (I8), (I9) są spełnione. Wówczas dla każdego $u^+ \in SX^+ := \{u \in X^+ : \|u\| = 1\}$ funkcjonał J ograniczony do $\mathbb{R}u^+ + \widetilde{X} = \{tu^+ + v : t \in \mathbb{R},\ v \in \widetilde{X}\}$ ma dokładnie dwa punkty krytyczne o dodatniej energii: $u_1 = t_1 u + v_1$ oraz $u_2 = t_2 u + v_2$, gdzie $t_1 > 0 > t_2$, $v_1, v_2 \in \widetilde{X}$. Co więcej, u_1 jest jedynym globalnym punktem maksymalnym $J|_{\mathbb{R}^+u+\widetilde{X}}$, oraz u_2 jest jedynym globalnym punktem maksymalnym $J|_{\mathbb{R}^-u+\widetilde{X}}$. W dodatku u_1 oraz u_2 zależą w sposób ciągły od $u \in SX^+$. Kładąc $n(u^+) := u_1$ otrzymujemy $\mathcal{N} = \{n(u^+) : u^+ \in SX^+\}$.*

Rozmaitość Nehariego-Pankova $\mathcal{N}$ jest tylko topologiczną rozmaitością homeomorficzną z SX^+, ponieważ J nie musi być klasy $\mathcal{C}^2$.

Twierdzenie 9. ([BM1, Theorem 4.1], [BM2, Theorem 4.4 d)]) *Przypuśćmy, że $J \in \mathcal{C}^1(X,\mathbb{R})$ spełnia (I1)-(I4), (I6), (I8), (I9), oraz załóżmy, że J jest koercytywny na $\mathcal{N}$, tj. $J(u) \to \infty$, gdy $\|u\| \to \infty$ oraz $u \in \mathcal{N}$. Wówczas otrzymujemy:*

a) $c_{\mathcal{N}} := \inf_{\mathcal{N}} J \geq a > 0$ oraz J ma $(PS)_{c_{\mathcal{N}}}$-ciąg w $\mathcal{N}$.
b) Jeśli J spełnia $(PS)^{\mathcal{T}}_{c_{\mathcal{N}}}$-warunek w $\mathcal{N}$, to $c_{\mathcal{N}}$ jest osiągalne przez punkt krytyczny J.
c) Jeśli J spełnia $(PS)^{\mathcal{T}}_{c}$-warunek w $\mathcal{N}$ dla każdego c oraz J jest parzyste, to istnieje nieograniczony ciąg wartości krytycznych funkcjonału J.
d) Jeśli dodatkowo założymy (I5), to $c_{\mathcal{M}} = c_{\mathcal{N}}$.

Jeżeli warunki (I1)-(I6), (I8), (I9) są spełnione, to $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ dzieli $\mathcal{M}$ na dwie składowe. W istocie, dla $u \in SX^+$ istnieje jedyna liczba $t_u > 0$ taka, że $n(u) = t_u u + v$, gdzie $v \in \widetilde{X}$. W takim razie otrzymujemy

$$\mathcal{M} \setminus \mathcal{N} = \{m(tu) : u \in SX^+,\, 0 \leq t < t_u\} \cup \{m(tu) : u \in SX^+,\, t > t_u\}.$$

Funkcja $\beta_u : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ jest zdefiniowana wzorem $\beta_u(t) = J(m(tu))$ i osiąga maksimum w $t_u > 0$. Jeśli $\beta_u'(t) = J'(m(tu))[u] = 0$, to $J'(m(tu))|_{\mathbb{R}u \oplus \widetilde{X}} = 0$, stąd $m(tu) \in \mathcal{N}$ oraz $t = t_u$. Zatem $\beta_u(t)$ jest ściśle rosnąca na $[0, t_u]$ oraz ściśle malejąca na $[t_u, \infty)$. W takim wypadku punkt krytyczny otrzymany za pomocą twierdzenia o górskiej przełęczy dla $J \circ m$ jest punktem minimalnym dla $J \circ n$.

W ostatniej części tego rozdziału zaprezentujemy alternatywne podejście do poszukiwania punktów minimalnych J na $\mathcal{N}$. Osłabiamy (I9) i wprowadzamy następujący warunek:

(I10) $\frac{t^2-1}{2} I'(u)[u] + tI'(u)[v] + I(u) - I(tu+v) \leq 0$ dla każdych $u \in \mathcal{N}$, $t \geq 0$, $v \in \widetilde{X}$.

Zauważmy, że przy założeniu (I10) zamiast (I9), funkcjonał J może nie mieć jedynego punktu krytycznego $n(u^+)$ na półprzestrzeni $\mathbb{R}^+ u^+ + \widetilde{X}$. Stąd odwzorowanie $n : SX^+ \to \mathcal{N}$ nie jest dobrze określone i nowe podejście jest wymagane. Załóżmy dodatkowo, że $X = X^+ \oplus \widetilde{X}$ jest przestrzenią Hilberta, gdzie X^+ i $\widetilde{X}$ są ortogonalne ze względu na iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle$, oraz $\widetilde{X}$ jest ośrodkowa. W dodatku do topologii indukowanej przez normę $\|\cdot\|$ potrzebujemy jeszcze topologii $\mathcal{T}_2$ na X, która jest indukowana przez następującą normę

$$\|u\|_{\mathcal{T}_2} := \max\left\{ \|u^+\|, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} |\langle \widetilde{u}, e_k \rangle| \right\},$$

gdzie (e_k) stanowi bazę ortonormalną w $\widetilde{X}$. Zgodnie z [57] otrzymujemy

$$\|\widetilde{u}\| \leq \|u\|_{\mathcal{T}_2} \leq \|u\| \text{ dla } u \in X$$

oraz na ograniczonych podzbiorach X topologia $\mathcal{T}_2$ pokrywa się z topologią $\mathcal{T}$, tj. produktem normowej topologii w X^+ oraz słabej topologii w $\widetilde{X}$. Zbieżność ciągu w $\mathcal{T}_2$ oznaczmy przez $u_n \xrightarrow{\mathcal{T}_2} u$.

Rozważmy funkcjonał $J \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$, który nie musi mieć postaci (17). Zamiast tego zakładamy następujące warunki.

(J1) J jest $\mathcal{T}_2$-górnie półciągła, tj. $J_t := J^{-1}([t, \infty))$ jest $\mathcal{T}_2$-domknięte dla każdego $t \in \mathbb{R}$.
(J2) J' jest $\mathcal{T}_2$-słabo* ciągła w J_0, tj. $J'(u_n) \rightharpoonup J'(u_0)$, gdy $u_n \xrightarrow{\mathcal{T}_2} u_0$ oraz $(u_n)_{n\geq 0} \subset J_0$.

Geometria zapętleń (ang. linking geometry) funkcjonału J jest opisana warunkiem (I6) oraz następującym założeniem.

(J3) Dla każdego $u \in X \setminus \widetilde{X}$ istnieje $R(u) > r$ takie, że

$$\sup_{\partial M(u)} J \leq J(0) = 0, \tag{20}$$

gdzie $M(u) := \{tu + v \in X |\ t \geq 0,\ v \in \widetilde{X} \text{ oraz } \|tu + v\| \leq R(u)\}$.

Zgodnie z obserwacją w [BM1, komentarz na str. 295], warunki (I1), (I4), (I6) oraz (I8) implikują geometrię zapętleń, w szczególności (J3) jest spełniony. W literaturze wariant geometrii zapętleń został wprowadzony przez Benci i Rabinowitza [23], a później rozwijany był przez wielu autorów, np. [14,57,59,98]. Zazwyczaj w (J3) zakłada się, że (20) zachodzi dla pewnego $u \in X \setminus \widetilde{X}$, oraz otrzymuje się ciągi Palais-Smale'a lub ciągi Cerami na pewnych poziomach min-max. Jednakże na ogół nie wiemy czy the poziomy min-max pokrywają się z poziomem energii podstawowej $\inf_{\mathcal{N}} J$. W pracy [M2] odpowiedzieliśmy na ten problem. Wprowadzamy następujący poziom typu min-max

$$c = \inf_{u\in X\setminus\widetilde{X}} \inf_{h\in\Gamma(u)} \sup_{u'\in M(u)} J(h(u', 1)), \tag{21}$$

gdzie $\Gamma(u)$ składa się z ciągłych funkcji $h : M(u) \times [0, 1] \to X$ takich, że

(h1) h jest $\mathcal{T}_2$ -ciągła (ze względu na normę $\|\cdot\|_{\mathcal{T}_2}$);
(h2) $h(u, 0) = u$ dla każdego $u \in M(u)$;
(h3) $J(u') \geq J(h(u', t))$ dla każdego $(u', t) \in M(u) \times [0, 1]$;
(h4) Każdy element $(u', t) \in M(u) \times [0, 1]$ posiada otwarte otoczenie W w produktowej topologii $(X, \mathcal{T}_2)$ i $[0, 1]$ takie, że zbiór $\{v - h(v, s) : (v, s) \in W \cap (M(u) \times [0, 1])\}$ jest zawarty w skończenie wymiarowej podprzestrzeni X.

Warunki (h1)-(h4) są zaczerpnięte z pracy [59].

Mając $\mathcal{N}$ zdefiniowane wzorem (19) zakładamy dodatkowo

(J4) $J(u) \geq J(tu+v)$ dla każdych $u \in \mathcal{N}$, $t \geq 0$, $v \in \widetilde{X}$.

Jest jasne, że jeśli J ma postać (17), to (J4) jest równoważne z (I10). Ostatecznie nasze twierdzenie o zapętleniu przedstawia się następująco.

Twierdzenie 10. ([M2, Theorem 2.1]) *Przypuśćmy, że $J \in \mathcal{C}^1(X,\mathbb{R})$ spełnia (J1)-(J3) oraz (I6). Wówczas istnieje ciąg Cerami (u_n) na poziomie $c \geq a > 0$, tj. $J(u_n) \to c$ oraz $(1+\|u_n\|)J'(u_n) \to 0$. Jesli dodatkowo zachodzi warunek (J4), to $c \leq \inf_{\mathcal{N}} J$. W szczególności, gdy $c \geq J(u)$ dla pewnego punktu krytycznego $u \in X \setminus \widetilde{X}$, to*

$$c = \inf_{\mathcal{N}} J = J(u).$$

W pracy [M2] rozważaliśmy trochę ogólniejszą sytuację, jednak sformułowanie Twierdzenia 10 jest wystarczające dla naszych zastosowań w Rozdziale 4c.6.1. Zauważmy, że gdy $\widetilde{X} = \{0\}$, to warunki (J1) oraz (J2) są natychmiast spełnione dla funkcjonału J klasy $\mathcal{C}^1$. Ponadto (I6) oraz (J3) w tej sytuacji implikują klasyczną geometrię górskiej przełęczy i Twierdzenie 10 mówi, że poziom górskiej przełęczy c pokrywa się z minimum funkcjonału J na klasycznej rozmaitości Nehariego

$$\mathcal{N} = \{u \in X \setminus \{0\} : J'(u)(u) = 0\},$$

por. podobny wynik również w kontekście górskiej przełęczy w [97][Theorem 4.2].

4c.5 Zastosowania: przypadek ograniczonej dziedziny

W tym rozdziale zastosujemy Twierdzenie 7 oraz Twierdzenie 9 do równania (2) na ograniczonej dziedzinie Lipschitza Ω, i zaprezentujemy wyniki z prac [BM1], [BM2] oraz [BM3]. Przypomnijmy, że założenia (L1), (F1)-(F3) z Rozdziału 4c.2 implikują, że funkcjonał

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \langle \mu(x)^{-1}\nabla \times u, \nabla \times u\rangle\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \langle V(x)u,u\rangle\,dx - \int_\Omega F(x,u)\,dx$$

z równania (7) jest klasy $\mathcal{C}^1$ na przestrzeni $X = H_{V,0}(\mathrm{curl};\Omega) \cap L^p(\Omega,\mathbb{R}^3)$. Punkty krytyczne J są słabymi rozwiązaniami równania (2). Przypomnijmy również rozkład Helmholtza $H_0(\mathrm{curl};\Omega) = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{W}_0$ z (9) oraz odpowiedni rozkład Helmholtza $X = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, gdzie $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \cap X$ oraz $\mathcal{W} = \mathcal{W}_0 \cap X$. Potrzebujemy dodatkowego założenie dotyczącego tego rozkładu.

(L2) $\mathcal{V}_0$ jest zwarto zanurzona w $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$ dla $p \in (2,6)$ z warunku (F3).

Warunek ten implikuje oczywiście, że $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0$. W świetle [BM2, Proposition 3.1], (L2) jest spełniony pod warunkiem, że V spełnia warunek Lipschitza oraz Ω ma brzeg klasy $\mathcal{C}^2$. Inne przykłady można znaleźć w [6, 36, 37, 49], [BM2, Section 3] oraz w cytowanych tam pracach.

Chcemy zastosować teorię punktów krytycznych z Rozdziału 4c.4 dla funkcjonału J. Najpierw musimy znaleźć rozkład $X = X^+ \oplus \widetilde{X}$ taki, że $J(u) = \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - I(u)$ ma postać (17). Jest on oczywiście określony przez część kwadratową J. Mianowicie, ze względu na Lemat 1, forma kwadratowa

$$Q(v) = \int_\Omega \big(\langle \mu(x)^{-1}\nabla \times v, \nabla \times v\rangle - \langle V(x)v, v\rangle\big)\, dx$$

z równania (11) jest dodatnio określona na $X^+ := \mathcal{V}^+$ oraz pół ujemnie określona na $\widetilde{\mathcal{V}}$. Dla $v \in \mathcal{V}$ oznaczamy przez $v^+ \in \mathcal{V}^+$ i $\widetilde{v} \in \widetilde{\mathcal{V}}$ odpowiadające składniki takie, że $v = v^+ + \widetilde{v}$. Przyjmując $\widetilde{X} = \widetilde{\mathcal{V}} \oplus \mathcal{W}$ funkcjonał J przyjmuje postać

$$J(v+w) = \frac{1}{2}Q(v^+) + \frac{1}{2}Q(\widetilde{v}) - \frac{1}{2}\int_\Omega \langle V(x)w, w\rangle\, dx - \int_\Omega F(x, v+w)$$

W konsekwencji Lematu 1 możemy zdefiniować nową równoważną normę na X^+ przez $\|v\|^2 := Q(v)$, a więc J ma postać $J(v+w) = \frac{1}{2}\|v^+\|^2 - I(v+w)$ zgodnie z (17), gdzie

$$I(v+w) = -\frac{1}{2}Q(\widetilde{v})^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \langle V(x)w, w\rangle\, dx + \int_\Omega F(x, v+w)$$

Zauważmy, że I jest (ściśle) wypukła, o ile $F(x,u)$ jest (ściśle) wypukła ze względu na $u \in \mathbb{R}^3$, ponieważ Q jest pół ujemnie określona na $\widetilde{\mathcal{V}}$. Jeśli Q jest nawet ujemnie określona na $\widetilde{\mathcal{V}}$, tj. (10) nie ma wartości własnej 1, to dla każdego $u_0 \in X$, funkcjonał $I(u_0 + \cdot)$ jest ściśle wypukły na $\widetilde{X}$ i warunek (I5) jest spełniony przy założeniu tylko wypukłości F względem u.

Nasz pierwszy główny rezultat tego rozdziału dotyczy superliniowych nieliniowości. Oprócz (F1)-(F4), żądamy dwóch dodatkowych założeń.

(F6) Istnieje $\gamma > 2$ takie, że $\langle f(x,u), u\rangle \geq \gamma F(x,u) \geq 0$ dla każdego $u \in \mathbb{R}^3$, oraz $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega, |u|=r} F(x,u) > 0$ dla pewnego $r > 0$.

(F7) $F(x,u)$ jest wypukła względem u dla p.w. $x \in \Omega$, oraz ściśle wypukła względem u dla p.w. x, o ile 1 jest wartością własną (10).

Zauważmy, że (F6) implikuje

(F8) $F(x,u) \geq 0$ dla p.w $x \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}^3$ oraz istnieją stałe $\gamma > 2$ oraz $d > 0$ takie, że $\liminf_{|u|\to\infty} \dfrac{F(x,u)}{|u|^\gamma} \geq d$ dla p.w. $x \in \Omega$.

Twierdzenie 11. ([BM2, Theorem 2.2]) *Przypuśćmy, że warunki (L1)-(L2) oraz (F1)-(F3), (F6)-(F7) są spełnione.*

a) Równanie (2) *ma nietrywialne rozwiązanie* $u \in X$.

b) Jeśli F *jest parzysta względem* u, *to* (2) *ma ciąg rozwiązań* u_n *takich, że* $J(u_n) \to \infty$.

Twierdzenie 11 wynika z Twierdzenia 7. Szczegóły dowodu założeń (I1)-(I8) Twierdzenia 7 mogą być znalezione w [BM2, Section 5]. W istocie, w pracy [BM2] dopuszczamy nawet sytuację w której $F(x,u) = 0$ dla małych $|u| > 0$. Taka nieliniowość modeluje materiały, gdzie polaryzacja jest liniowa, gdy intensywność pola elektrycznego $\mathcal{E}$ jest mała. Rozważamy również istnienie stanów podstawowych zdefiniowanych jako rozwiązanie równania (2) o dodatniej energii, które ma najniższą z możliwych dodatnich energii pośród wszystkich rozwiązań. To wymaga dodatkowego założenia o F; zob. szczegóły w [BM2].

Zgodnie z Rozdziałem 4c.4, podejście z użyciem rozmaitości Nehariego-Pankova wymaga innego typu założenia, które przedyskutujemy poniżej.

(F9) $\frac{t^2-1}{2}\langle f(x,u),u\rangle + t\langle f(x,u),v\rangle + F(x,u) - F(x,tu+v) \le 0$ dla każdych $t \ge 0$, $u,v \in \mathbb{R}^3$, p.w. $x \in \Omega$, oraz nierówność ostra zachodzi, gdy $u \neq tu+v$.

Pragniemy wspomnieć, że w przypadku skalarnym udowodniono w [90, Lemma 2.2], że warunek (F9) wynika z faktu, że $f(x,u) = o(u)$, gdy $u \to 0$ oraz:

$$\mathbb{R} \ni u \mapsto \frac{f(x,u)}{|u|} \in \mathbb{R} \quad \text{jest ściśle rosnąca na } (-\infty,0) \text{ oraz na } (0,\infty).$$

To jest typowy warunek dla zdefiniowania rozmaitości Nehariego w skalarnym przypadku, a (F9) może być rozważane jako jego wektorowa wersja. Podobnie jak w [M2, Remark 3.3], warunek (F9) implikuje, że

(*) F ściśle wypukła względem $u \in \mathbb{R}^3$, oraz $\langle f(x,u),u\rangle > 2F(x,u)$ dla każdych $x \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}^3$, $u \neq 0$.

(**) Jeśli $\langle f(x,u),v\rangle = \langle f(x,v),u\rangle > 0$, to $F(x,u) - F(x,v) \le \dfrac{(\langle f(x,u),u\rangle)^2 - (\langle f(x,u),v\rangle)^2}{2\langle f(x,u),u\rangle}$. Jeśli dodatkowo $F(x,u) \neq F(x,v)$, to ostra nierówność zachodzi.

Z drugiej strony warunki (F1), (F8), (*), (**) pociągają za sobą (F9); zob. również [BM3, Remark 5.4].

Następujące twierdzenie zostało udowodnione w [BM1] dla jednospójnej dziedziny Ω,

$V(x) = \lambda \mathrm{id}_{3\times 3}$ oraz zakładając trochę mocniejszy warunek niż (**). Jednakże uwzględniając uwagę [M2, Remark 3.3] ulepszyliśmy ten wynik w pracach [BM2] oraz [BM3].

Twierdzenie 12. ([BM1, Theorem 2.2], [BM2, Theorem 2.2], [BM3, Theorem 5.5]) *Przypuśćmy, że (L1)-(L2) oraz (F1)-(F3), (F8)-(F9) są spełnione.*

a) Równanie (2) *ma rozwiązanie w stanie podstawowym $u \in X$, tj. u jest punktem minimalnym funkcjonału J na rozmaitości Nehariego-Pankova $\mathcal{N}$.*

b) Jeśli F jest parzysta względem u, to (2) *ma ciąg rozwiązań u_n takich, że $J(u_n) \to \infty$.*

Twierdzenie 12 jest konsekwencją Twierdzenia 9; zob. dowód własności (I1)-(I4), (I6)-(I8) oraz koercytywności J na $\mathcal{N}$ w [BM2, Section 5]. Chcielibyśmy zwrócić uwagę, że w [BM1][Theorem 2.2] potrafimy również zbadać sytuację, gdy $V = 0$. Kolejne wyniki związane z Twierdzeniem 12 można znaleźć w pracy [74].

Teraz zajmiemy się asymptotycznie liniowymi nieliniowościami. Jak dotąd ten przypadek był rozważany w pracy [73]. Poniżej przedstawiamy wariant głównego twierdzenia [73, Theorem 1.1] wyrażony w naszym ujęciu. Główną różnicą jest to, że $V(x) \equiv \lambda \mathrm{id}_{3\times 3} > 0$ jest odwzorowaniem stałym w [73] oraz w naszym wyniku potrafimy oszacować wielokrotność rozwiązań.

(F10) Istnieje $V_\infty \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{3\times 3})$ takie, że $f(x,u) = V_\infty(x)[u] + f_\infty(x,u)$ dla p.w. $x \in \Omega$ i każdego $u \in \mathbb{R}^3$. Co więcej, $\langle f(x,u), f_\infty(x,u)\rangle < 0$ dla $u \neq 0$, oraz $|f_\infty(x,u)| = o(|u|^\sigma)$, gdy $|u| \to \infty$ dla pewnej liczby $\sigma \in (0,1)$ jednostajnie ze względu na $x \in \Omega$.

(F11) $\frac{1}{2}\langle f(x,u), u\rangle - F(x,u) \to \infty$, gdy $|u| \to \infty$ jednostajnie ze względu na $x \in \Omega$.

Podobnie jak w Twierdzeniu 5 rozważamy formy kwadratowe

$$Q_0(v) := \int_\Omega \big(\langle \mu(x)^{-1}\nabla \times v, \nabla \times v\rangle - \langle V(x)v, v\rangle\big)\, dx,$$

oraz

$$Q_\infty(v) := \int_\Omega \big(\langle \mu(x)^{-1}\nabla \times v, \nabla \times v\rangle - \langle (V(x) + V_\infty(x))v, v\rangle\big)\, dx,$$

na przestrzeni $\mathcal{V}$.

Twierdzenie 13. ([BM3, Theorem 5.7]) *Przypuśćmy, że warunki (L1), (F1), (F2), (F9)-(F11) są spełnione. Ponadto załóżmy, że formy kwadratowe $Q_0, Q_\infty : V \to \mathbb{R}$ są niezdegenerowane z indeksami odpowiednio $i_0, i_\infty \in \mathbb{N}_0$. Wówczas $i_0 \leq i_\infty$, oraz jeśli $i_0 < i_\infty$ to istnieje nietrywialne rozwiązanie $u \in X$ równania* (2)*. Jeśli dodatkowo F jest parzysta względem u, to* (2) *ma co najmniej $i_\infty - i_0$ różnych rozwiązań $\pm u_n$.*

Główną obserwacją w [73] jest fakt, że rozmaitość Nehariego-Pankova $\mathcal{N}$ postaci (19) nie jest homeomorficzna ze sferą jednostkową SX^+, lecz z jej otwartym podzbiorem $\mathcal{O} \subset SX^+$, którego można określić wzorem. Podobnie jak powyżej, określamy homeomorfizm $n : \mathcal{O} \to \mathcal{N}$ i wystarczy znaleźć punkty krytyczne funkcjonału $J \circ n$, który jest ograniczony z dołu i spełnia warunek Palais-Smale'a. Wówczas Twierdzenie 13 wynika z minimalizacji J na $\mathcal{N}$ oraz ze standardowej teorii Lusternika-Schnirelmanna dla wielokrotności rozwiązań; zob. pracę [BM3] oraz bibliografię w niej zawartą.

Kończymy ten rozdział krótką dyskusją dotyczącą symetrycznych rozwiązań, tj., gdy warunek (S) z Rozdziału 4c.3 zachodzi w dodatku do założeń Twierdzeń 11, 12, 13.

Twierdzenie 14. ([BM2, Theorem 2.5]) *Przypuśćmy, że warunki (L1)-(L2), (F1)-(F3), (F6)-(F7) oraz (S) są spełnione.*

a) Równanie (2) *ma nietrywialne rozwiązanie* $u \in X$ *postaci*

$$u(x) = \beta(r, x_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma(r, x_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

b) Jeśli F *jest parzysta względem* u*, to* (2) *ma ciąg rozwiązań* u_n *postaci* (22) *takich, że* $J(u_n) \to \infty$*.*

Dowód Twierdzenia 14 jest podobny do argumentacji w Twierdzeniu 11. Używamy działania grupy $G = \mathcal{O}(2) \times \{1\} \subset \mathcal{O}(3)$ na X oraz rozkładu (14). Definiujemy liniową izometrię

$$T : X^G \to X^G, \quad T(u_\tau + u_\rho + u_\zeta) := -u_\tau + u_\rho + u_\zeta,$$

oraz podprzestrzeń punktów stałych $(X^G)^T$ składającą się z pół wektorowych postaci (22). Założenie (S) implikuje, że J jest niezmiennicza względem G oraz T. Stąd wystarczy znaleźć punkty krytyczne funkcjonału $J|_{(X^G)^T}$. Inne warianty Twierdzeń 12, 13 z rozwiązaniami postaci (22) można znaleźć w [BM3].

4c.6 Zastosowania: $\Omega = \mathbb{R}^3$

W tym rozdziale przedstawimy przypadek $\Omega = \mathbb{R}^3$ oraz zaprezentujemy wyniki z prac [M1] oraz [BM3]. Skupmy się na przypadku $\mu(x) = \mathrm{id}_{3\times 3}$ oraz $V(x) = V_0(x)\mathrm{id}_{3\times 3}$ dla $x \in \mathbb{R}^3$, gdzie $V_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest pewną funkcją mierzalną. W takim razie poszukujemy rozwiązań równania

$$\nabla \times \nabla \times u - V_0(x)u = f(x, u) \qquad \text{w } \mathbb{R}^3. \tag{23}$$

Przypomnijmy, w przypadku $V_0 = 0$ oraz $F(x,u) = \frac{1}{2}W(|u|^2)$, gdzie $W : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ rośnie superkwadratowo dla $|u| \le 1$ i subkrytycznie dla $|u| > 1$, powyższe równanie przyjmuje postać równania (6), które ma inną motywację fizyczną inspirowaną teorią Borna-Infelda; zob. [21]. W istocie (6) zostało rozwiązane w pracach [8, 39] używając analogicznego rozkładu (14). Zauważmy, że w tej sytuacji $\mu(x) = \mathrm{id}_{3\times 3}$, $V_0 = 0$ oraz $F(x,u) = \frac{1}{2}W(|u|^2)$ spełniają warunek (S) z $\Omega = \mathbb{R}^3$. Rozwiązania postaci (13) zostały otrzymane w [8], a rozwiązania postaci (22) w [39], oczywiście pod odpowiednimi założeniami narzuconymi na W. Podstawą podejścia w tych pracach jest minimalizacja funkcjonału J na zbiorze $\{u : W(|u|^2) = 1\}$ w odpowiedniej podprzestrzeni $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Taki punkt minimalny v dostarcza mnożnik Lagrange'a w równaniu, który może być usunięty przez odpowiednie skalowanie $u(x) = v(\alpha x)$ dla pewnego $\alpha > 0$. Takie podejście nie pracuje dla równania (23) w nieautonomicznym przypadku lub w niesymetrycznym przypadku i dlatego użyjemy ponownie teorii punktów krytycznych z Rozdziału 4c.4. Główną trudnością na nieograniczonej dziedzinie $\Omega = \mathbb{R}^3$ jest brak zwartości ciągów Palais-Smale'a, nawet na ograniczeniach $\mathcal{M}$ lub $\mathcal{N}$, gdyż nie jesteśmy w stanie otrzymać wariant warunku (L2).

Opiszemy teraz ujęcie wariacyjne problemu (23) i wyjaśnimy trudności kryjące się w tym problemie. Przypomnijmy warunki narzucone na nieliniowość f.

(F1) $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna względem $u \in \mathbb{R}^3$, oraz $f = \nabla_u F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest funkcją Carathéodory'ego (tj. mierzalna względem $x \in \mathbb{R}^3$, ciągła względem $u \in \mathbb{R}^3$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}^3$). Ponadto $F(x,0) = 0$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}^3$.

(F9) $\frac{t^2-1}{2}\langle f(x,u), u\rangle + t\langle f(x,u), v\rangle + F(x,u) - F(x, tu+v) \le 0$ dla każdych $t \ge 0$, $u, v \in \mathbb{R}^3$, p.w. $x \in \mathbb{R}^3$, oraz ostra nierówność zachodzi, gdy $u \ne tu + v$.

Żądamy następujących dodatkowych warunków na V_0 oraz F.

(V) $V_0 \in L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^3) \cap L^{\frac{q}{q-2}}(\mathbb{R}^3)$, $V_0(x) \ge 0$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}^3$ oraz $|V_0|_{\frac{3}{2}} < S$, gdzie S jest klasyczną stałą Soboleva zanurzenia $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ w $L^6(\mathbb{R}^3)$, tj.

$$S := \inf\Big\{ \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2\, dx : |u|_6 = 1 \Big\}.$$

(F12) F jest $\mathbb{Z}^3$-okresowa względem x, tj. $F(x,u) = F(x+y, u)$ dla $x, u \in \mathbb{R}^3$ oraz $y \in \mathbb{Z}^3$.

(F13) Istnieją $2 < p < 6 < q$ oraz stałe $c_1, c_2 > 0$ takie, że

$$F(x,u) \ge c_1 \min(|u|^p, |u|^q)$$

oraz

$$|f(x,u)| \le c_2 \min(|u|^{p-1}, |u|^{q-1})$$

dla każdych $x, u \in \mathbb{R}^3$.

(F14) Jeśli $V_0 = 0$ p.w. na $\mathbb{R}^3$, to F jest *jednostajnie ściśle wypukła* ze względu na $u \in \mathbb{R}^3$, tj. dla dowolnego zwartego $A \subset (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \setminus \{(u,u): \ u \in \mathbb{R}^3\}$:

$$\inf_{\substack{x\in\mathbb{R}^3\\(u_1,u_2)\in A}} \left(\frac{1}{2}\big(F(x,u_1)+F(x,u_2)\big) - F\left(x, \frac{u_1+u_2}{2}\right)\right) > 0.$$

Jest jasne, że (F13) pociąga za sobą (F2) oraz (F3). Modelowymi nieliniowościami są następujące przykłady:

$$F(x,u) = \begin{cases} \Gamma(x)\big(\frac{1}{p}|Mu|^p + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\big) & \text{gdy } |Mu| > 1, \\ \Gamma(x)\frac{1}{q}|Mu|^q & \text{gdy } |Mu| \le 1, \end{cases} \tag{24}$$

oraz

$$F(x,u) = \Gamma(x)\frac{1}{p}\big((1+|Mu|^q)^{\frac{p}{q}} - 1\big),$$

gdzie $\Gamma \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ jest $\mathbb{Z}^3$-okresowa oraz $\inf \Gamma > 0$, $M \in GL(3)$ jest odwracalną macierzą wymiaru 3×3. Wówczas założenia (F1), (F9), (F12)-(F13) są spełnione. Ponadto F jest jednostajnie ściśle wypukła ze względu na $u \in \mathbb{R}^3$. Zauważmy, że te funkcje nie są radialne, gdy M nie jest ortogonalną macierzą. Jeśli $M = \mathrm{id}_{3\times 3}$, to z (24) otrzymujemy

$$f(x,u) = \Gamma(x)\min\{|u|^{p-2}, |u|^{q-2}\}u. \tag{25}$$

W zastosowaniach dla małych intensywności $|u|$ zjawisko Kerra jest często liniowe, gdyż nieliniowa polaryzacja $\mathcal{P}_{NL}$ jest pomijana i wtedy możemy założyć, że $\mathcal{P}_{NL}$ szybko znika dla $|u| \to 0$. W istocie (25) modeluje to zjawisko i przypadek $p = 4$ odpowiada zjawisku Kerra dla silnych pól u.

Potrzebujemy następująca przestrzeń, ażeby rozważać powyższe nieliniowości:

$$L^{p,q} := L^p(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3) + L^q(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$$

z normą

$$|u|_{p,q} = \sup\left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^3} \langle u, v\rangle\, dx}{|v|_{\frac{p}{p-1}} + |v|_{\frac{q}{q-1}}} : v \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3) \cap L^{\frac{q}{q-1}}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3), \ v \neq 0 \right\},$$

która pokrywa się ze zwykłą przestrzenią Lebesgue'a $L^p(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, gdy $p = q$; zob. więcej własności $L^{p,q}$ w [10]. Rozważmy uzupełnienie $X = \mathcal{D}(\mathrm{curl}, p, q)$ przestrzeni $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ ze względu na normę

$$\|u\|_{\mathrm{curl},p,q} := (|\nabla \times u|_2^2 + |u|_{p,q}^2)^{1/2}.$$

Niech $\widetilde{X} := \mathcal{W}$ będzie domknięciem $\{\nabla\varphi : \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)\}$ w $\mathcal{D}(\mathrm{curl}, p, q)$. Podprzestrzeń bezdywergencyjnych pól wektorowych jest zdefiniowana wzorem

$$\begin{aligned} X^+ := \mathcal{V} &= \left\{ u \in \mathcal{D}(\mathrm{curl}, p, q) : \int_{\mathbb{R}^3} \langle u, \nabla\varphi\rangle \, dx = 0 \text{ for any } \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3) \right\} \\ &= \{u \in \mathcal{D}(\mathrm{curl}, p, q) : \mathrm{div}\,(u) = 0\} \end{aligned}$$

gdzie $\mathrm{div}\,(u)$ rozumiemy w sensie dystrybucyjnym. W świetle [M1, Lemma 3.2] każde pole $u \in \mathcal{D}(\mathrm{curl}, p, q)$ ma rozkład Helmholtza $u = v + w$, gdzie $v \in \mathcal{V}$ oraz $w \in \mathcal{W}$. Ponadto norma $\|\cdot\|_{\mathrm{curl},p,q}$ w $\mathcal{V}$ jest równoważna z normą

$$\|v\| = \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v|^2 \, dx \Big)^{1/2} \qquad \text{dla } v \in \mathcal{V}.$$

Wówczas możemy wprowadzić równoważną normę

$$\|v + w\| = (\|v\|^2 + \|w\|_{\mathrm{curl},p,q})^{1/2} = (\|v\|^2 + |w|_{p,q})^{1/2}$$

w X. Poszukujemy punktów krytycznych funkcjonału $J : X = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ danego przez

$$\begin{aligned} J(u) = J(v + w) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \times v|^2 \, dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} V_0(x)|v + w|^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^3} F(x, v + w) \, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v|^2 \, dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} V_0(x)|v + w|^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^3} F(x, v + w) \, dx \\ &= \frac{1}{2}\|v\|^2 - I(v + w), \end{aligned}$$

który jest klasy $\mathcal{C}^1$ i ma postać (17), gdzie

$$I(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} V_0(x)|u|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} F(x, u) \, dx. \tag{26}$$

Zgodnie z Rozdziałem 4c.4 rozmaitość Nehariego-Pankova określona jest następująco

$$\mathcal{N} := \{u \in \mathcal{D}(\mathrm{curl}, p, q) \setminus \mathcal{W} : J'(u)|_{\mathbb{R}u \oplus \mathcal{W}} = 0\}. \tag{27}$$

Prezentujemy główny wynik tego rozdziału.

Twierdzenie 15. ([M1, Theorem 2.1]) *Przypuśćmy, że warunki (V) oraz (F1), (F9), (F12)-(F14) są spełnione. Wówczas istnieje rozwiązanie* (23). *Jeśli $V_0 < 0$ p.w. na $\mathbb{R}^3$ lub $V_0 = 0$, to równanie* (23) *posiada rozwiązanie w stanie podstawowym, tzn. istnieje punkt krytyczny $u \in \mathcal{N}$, który jest punktem minimalnym J na $\mathcal{N}$.*

W celu udowodnienia Twierdzenia 15 stosujemy Twierdzenie 9 a) i otrzymujemy $(PS)_{c_{\mathcal{N}}}$-ciąg w $\mathcal{N}$ oraz $c_{\mathcal{N}} := \inf_{\mathcal{N}} J > 0$. Jednakże $(PS)^{\mathcal{T}}_{c_{\mathcal{N}}}$-warunek nie jest spełniony, gdyż $X^+ = \mathcal{V}$ nie jest zwarto zanurzona w $L^{p,q}$. Ponadto brak słabej-słabej* ciągłości J' powoduje, że ten problem nie może być zbadany za pomocą techniki koncentracji zwartości w duchu Lionsa [61, 62] w przestrzeni $X = \mathcal{D}(\mathrm{curl}, p, q)$. Nasze podejście polega na nowej dokładnej analizie ograniczonych ciągów (u_n) rozmaitości Nehariego-Pankova wraz z możliwie nieskończonymi rozkładami (ang. splittings) granicy $\lim_{n\to\infty} I(u_n)$. Mianowicie mamy następujący rezultat.

Twierdzenie 16. ([M1, Theorem 2.2]) *Przypuśćmy, że warunki (V) oraz (F1), (F9), (F12)-(F14) są spełnione. Jeśli $(u_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{N}$ jest ograniczony, to z dokładnością do podciągu istnieją $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\bar{u}_0 \in \mathcal{D}(\mathrm{curl}, p, q)$ oraz ciągi $(\bar{u}_i)_{i=1}^{N} \subset \mathcal{N}_0$ i $(x_n^i)_{n \geq i} \subset \mathbb{Z}^3$ z $x_n^0 = 0$ takie, że następujące warunki są spełnione:*

$$u_n(\cdot + x_n^i) \rightharpoonup \bar{u}_i \text{ w } \mathcal{D}(\mathrm{curl}, p, q) \text{ oraz } u_n(\cdot + x_n^i) \to \bar{u}_i \text{ p.w. w } \mathbb{R}^3, \text{ gdy } n \to \infty, \tag{28}$$

dla każdego $0 \leq i < N + 1$, oraz

$$u_n - \sum_{i=0}^{\min\{n,N\}} \bar{u}_i(\cdot - x_n^i) \to 0 \text{ w } L^{p,q}, \text{ gdy } n \to \infty. \tag{29}$$

Ponadto

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = I(\bar{u}_0) + \sum_{i=1}^{N} I_0(\bar{u}_i) < \infty,$$

gdzie I_0 i $\mathcal{N}_0$ są określone wzorami (26) i (27) pod założeniem $V_0 = 0$.

Na ogół J' nie jest słabo-słabo* ciągła w $\mathcal{D}(\mathrm{curl}, p, q)$, jednakże Twierdzenie 16 pozwala nam na uzyskanie tej ciągłości na rozmaitości Nehariego-Pankova $\mathcal{N}$, tj. jeśli $(u_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{N}$ oraz $u_n \rightharpoonup u_0$ w $\mathcal{D}(\mathrm{curl}, p, q)$, to $J'(u_n) \rightharpoonup J'(u_0)$; zob. [M1, Corollary 5.3]. Ponadto w duchu wyniku o globalnej zwartości (ang. global compactness result) Struwe [81] lub Coti Zelati i Rabinowitza [38], otrzymujemy skończone rozkłady poziomów energii ze względu na ciąg Palais-Smale'a w $\mathcal{N}$.

Twierdzenie 17. [M1, Theorem 2.3] *Przypuśćmy, że warunki (V) oraz (F1), (F9), (F12)-(F14) są spełnione. Jeśli $(u_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{N}$ jest $(PS)_c$-ciągiem na poziomie $c > 0$, tj. $J(u_n) \to c$ oraz $J'(u_n) \to 0$, to z dokładnością do podciągu istnieją $\bar{u}_0 \in \mathcal{D}(\mathrm{curl}, p, q)$ oraz skończony ciąg punktów krytycznych $(\bar{u}_i)_{i=1}^{N} \subset \mathcal{N}_0$ funkcjonału J_0 takie, że (28), (29) zachodzą oraz*

$$c = J(\bar{u}_0) + \sum_{i=1}^{N} J_0(\bar{u}_i),$$

gdzie J_0 jest funkcjonałem energii J pod założeniem $V_0 = 0$.

Zauważmy teraz, że jeśli $0 < c < \inf_{\mathcal{N}_0} J_0$, to $N = 0$, $J(\bar{u}_0) = c$ oraz $\bar{u}_0$ jest punktem krytycznym J. W ten sposób porównanie poziomów energii implikuje istnienie nietrywialnych rozwiązań; zob. szczegóły dowodu Twierdzenia 15 w [M1].

4c.6.1 Cylindrycznie symetryczny przypadek

W sytuacji cylindrycznie symetrycznej zakładamy warunek (S), tj. $V_0(x) = V_0(r, x_3)$ oraz $F(x) = F(r, x_3)$, gdzie $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, i okazuje się, że możemy rozważać inne klasy funkcji V_0 oraz F. Mianowicie zakładamy

(P) $V_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ oraz F są 1-okresowe względem x_3, tj. $V_0(r, x_3) = V_0(r, x_3+1)$, $F(r, x_3, |u|, u_3) = F(r, x_3 + 1, |u|, u_3)$ dla p.w. $r > 0, x_3 \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^3$.

W dodatku do (F1) potrzebujemy następujących warunków.

(F2) $|f(x, u)| = o(|u|)$, gdy $u \to 0$ jednostajnie względem $x \in \mathbb{R}^3$.

(F3) Istnieją $2 < p < 6$ oraz stała $c > 0$ takie, że

$$|f(x, u)| \le c(1 + |u|^{p-1}) \qquad \text{dla każdych } x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R}^3.$$

(F9') $\frac{t^2-1}{2}\langle f(x, u), u\rangle + t\langle f(x, u), v\rangle + f(x, u) - f(x, tu + v) \le 0$ dla każdych $t \ge 0$, $u, v \in \mathbb{R}^3$, p.w. $x \in \mathbb{R}^3$.

(F15) $F(x, u)/|u|^2 \to \infty$, gdy $|u| \to \infty$ jednostajnie względem $x \in \mathbb{R}^3$.

Zauważmy, że (F9') jest słabszym warunkiem niż (F9). Rozważmy przykład. Niech $F(x, u) = \Gamma(x)W(|u|^2)$, gdzie $\Gamma \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ jest cylindrycznie symetryczna, 1-okresowa względem x_3, $\inf_{x\in\mathbb{R}^3} \Gamma(x) > 0$, $W \in \mathcal{C}^0([0, \infty)) \cap \mathcal{C}^1((0, \infty))$, $W(0) = \lim_{t\to 0^+} W'(t) = 0$, oraz $W'(t)$ jest niemalejąca na $(0, +\infty)$. Ponadto zakładamy $\lim_{t\to\infty} W(t)/t = \infty$ oraz $W'(t) \le c(1+t^{\frac{p-2}{2}})$ dla pewnych $2 < p < 6$ oraz $c > 0$. Wówczas założenia (F1)-(F3), (F9') oraz (F15) są spełnione; zob. [M2, Przykład na str. 1428 oraz Remark 3.3. a)]. W szczególności możemy podać przykład nielinowości $f(x, u)$ mającej zachowanie typu Kerra (3) dla u blisko 0 oraz nieskończoności, która jest liniowa dla $\rho < |u| < M$ dla ustalonych stałych $0 < \rho < M$.

W celu zaprezentowania naszych wyników przypomnijmy wariacyjne ujęcie dla takich nieliniowości F oraz dla V_0. Niech $X = \mathcal{D}(\mathrm{curl}, p, p) \cap L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ z p danym w (F3). Warunek (S) zachodzi, więc podobnie jak w Rozdziale 4c.3 rozważamy działanie grupy $G = \mathcal{O}(2)\times\{1\} \subset \mathcal{O}(3)$ na X oraz izometrii $S : X^G \to X^G$ danej wzorem (15). Jeśli dodatkowo F jest parzysta względem u, to podobnie jak powyżej wystarczy znaleźć punkty krytyczne funkcjonału J

ograniczonego do zbioru punktów stałych

$$
\begin{aligned}
(X^G)^S := \{u \in X^G : S(u) = u\} &= \{u \in X^G : u = u_\tau\} \\
\subset \{u \in X : \operatorname{div}(u) = 0\} &= \{u \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) : \operatorname{div}(u) = 0\}.
\end{aligned}
$$

Podobnie definiujemy podprzestrzenie

$$
(H^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)^G)^S \subset \{u \in H^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) : \operatorname{div}(u) = 0\}
$$

oraz

$$
(L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)^G)^S \subset L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3).
$$

Funkcja $V_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, więc w świetle [16, Lemma 4.4], operator $\mathcal{L} := (\nabla \times \nabla \times) + V_0$ zdefiniowany na

$$
D(\mathcal{L}) = (H^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)^G)^S \subset (L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)^G)^S \to (L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)^G)^S
$$

jest samosprzężony i przez $\sigma(\mathcal{L}) \subset \mathbb{R}$ oznaczmy jego spektrum. Następujący rezultat został udowodniony w [16][Theorem 1.3] w szczególnym przypadku $F(x,u) = \Gamma(x)|u|^p$, gdzie $\Gamma = \Gamma(r, x_3) \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ jest cylindrycznie symetryczna, 1-okresowa względem x_3 i $\inf_{x\in\mathbb{R}^3} \Gamma(x) > 0$.

Twierdzenie 18. ([BM3, Theorem 6.1, Remark 6.2 b)]) *Przypuśćmy, że warunki (S), (P) są spełnione, F jest parzysta względem u oraz spełnia (F1)-(F3), (F9'), (F15). Jeśli* $0 \notin \sigma(\mathcal{L})$*, to równanie* (23) *ma rozwiązanie w stanie podstawowym w* $(X^G)^S$*, które jest punktem minimalnym* J *na stowarzyszonej rozmaitości Nehariego-Pankova* $\mathcal{N} \subset (X^G)^S$*.*

Jak zwykle wystarczy znaleźć punkty krytyczne funkcjonału J ograniczonego do $(X^G)^S$. Warunek $0 \notin \sigma(\mathcal{L})$ implikuje, że istnieje rozkład na sumę prostą $(X^G)^S = X^+ \oplus \widetilde{X}$ taki, że

$$
Q(u) := \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \times u|^2 - V_0(x)|u|^2 \, dx
$$

jest dodatnia na X^+, ujemna na $\widetilde{X}$, oraz $\|u\| = (Q(u^+) - Q(\widetilde{u}))^{1/2}$ definiuje równoważną normę $u = u^+ + \widetilde{u} \in (X^G)^S = X^+ \oplus \widetilde{X}$. Zauważmy teraz, że $J : (X^G)^S \to \mathbb{R}$ przyjmuje postać $J(u) = \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - I(u)$ jak w (17), gdzie $I(u) = Q(\widetilde{u}) + \int_{\mathbb{R}^3} F(x,u)\, dx$. Następnie sprawdzamy, że funkcjonał J jest koercytywny na $\mathcal{N}$ i spełnia (I1)-(I4), (I6), (I8), gdzie

$$
\mathcal{N} = \{u \in (X^G)^S \setminus \widetilde{X} : J'(u)|_{\mathbb{R}u \oplus \widetilde{X}} = 0\}.
$$

Jednakże (I9) nie jest spełniony, gdy założymy (F9'). Wówczas Twierdzenie 9 nie może być zastosowane. Zamiast tego warunek (I10) zachodzi oraz możemy zastosować Twierdzenie 10 w celu udowodnienia Twierdzenia 18. Zauważmy, że $(X^G)^S \subset H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ jest lokalnie zwarto zanurzona w $L^p(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ i wówczas łatwo sprawdzić, że J' jest słabo-słabo* ciągła w

$(X^G)^S$. Stąd założenia (J1)-(J4) są spełnione i znajdujemy ciąg Cerami (u_n) na poziomie $0 < c \leq \inf_{\mathcal{N}} J$; por. podobną argumentację dla układu równań Schrödingera w [M2. Section 3]. W naszym podejściu pracujemy z ciągami Cerami, gdyż ciągi Palais-Smale'a mogą być nieograniczone [30, 51, 63]. Stosując technikę koncentracji zwartości zauważamy, że z dokładnością do podciągu i z dokładnością do $\mathbb{Z}$-translacji względem x_3, u_n zbiega w słabej topologii do nietrywialnego punktu krytycznego u_0 funkcjonału J. Zatem $u_0 \in \mathcal{N}$ jest rozwiązaniem w stanie podstawowym. Poziom tego rozwiązania może być także scharakteryzowany w terminach nieskończenie wymiarowego poziomu min-max w $(X^G)^S$ zgodnie z (21).

Dalsze wyniki w symetrycznej sytuacji równania (23) zostały otrzymane przez Hirscha i Reichela [50], przez Pluma i Reichela [71] w subkrytycznym przypadku, oraz przez Zenga [100] w krytycznym przypadku.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo - badawczych

5b. Publikacje napisane po doktoracie, które nie wchodzą w skład głównego osiągnięcia habilitacji

[Pub1] J. Mederski: *Graph approximations of set-valued maps under constraints*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 39 (2012), no. 2, 361–389.

[Pub2] J. Mederski: *Equilibria of nonconvex valued maps under constraints*, J. Math. Anal. Appl. 389 (2012), no. 2, 701–704.

[Pub3] J. Mederski: *Vietoris-Begle theorems for nonclosed maps*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 41 (2013), no. 1, 191–205.

[Pub4] J. Mederski: *Solutions to a nonlinear Schrödinger equation with periodic potential and zero on the boundary of the spectrum*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 46 (2015), no. 2, 755–771.

[Pub5] P. d'Avenia, J. Mederski: *Positive ground states for a system of Schrödinger equations with critically growing nonlinearities*, Calc. Var. Partial Differential Equations 53 (2015), no. 3-4, 879–900.

[Pub6] Q. Guo, J. Mederski: *Ground states of nonlinear Schrödinger equations with sum of periodic and inverse-square potentials*, J. Differential Equations 260 (2016), no. 5, 4180–4202.

[Pub7] J. Mederski: *Nonlinear time-harmonic Maxwell equations in $\mathbb{R}^3$: recent results and open questions*, Lecture Notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica Vol. 13 (2016), 47–57.

[Pub8] B. Bieganowski, J. Mederski: *Nonlinear Schrödinger equations with sum of periodic and vanishig potentials and sign-changning nonlinearities*, praca zaakceptowana w Commun. Pure Appl. Anal. (2017), arXiv:1602.05078.

[Pub9] P. d'Avenia, J. Mederski, A. Pomponio: *Vortex ground states for Klein-Gordon-Maxwell-Proca type systems*, praca zaakceptowana w J. Math. Phys. (2017), arXiv:1603.04649.

[Pub10] J. Mederski: *The Brezis-Nirenberg problem for the curl-curl operator*, praca w recenzji, arXiv:1609.03989.

5b. Omówienie pozostałych wyników

Publikacje [Pub1]-[Pub3] zostały napisane po doktoracie, jednak zawierają one wyniki głównie z rozprawy doktorskiej, ich rozszerzenia oraz pewne nowe wyniki. Ten obszar badawczy nie jest związany z osiągnięciem habilitacyjny, dlatego tylko krótko opiszemy wyniki z prac

[Pub1]-[Pub3].

Celem pracy [Pub1] jest znalezienie wykresowych aproksymacji górnie półciągłych odwzorowań wielowartościowych o zwartych wartościach. Rozważamy odwzorowanie wielowartościowe $\varphi : X \multimap Y$, gdzie X oraz Y są przestrzeniami metrycznymi, które każdemu elementowi $x \in X$ przypisuje niepusty i zwarty podzbiór $\varphi(x)$ przestrzeni Y. Wykresem φ jest zbiór $\mathrm{Gr}(\varphi) := \{(x, y) \in X \times Y : y \in \varphi(x)\}$. Mówimy, że odwzorowanie wielowartościowe φ jest górnie półciągłe, gdy dla dowolnego podzbioru otwartego $U \subset Y$, mały przeciwobraz $\{x \in X : \varphi(x) \subset U\}$ jest otwarty. Klasyczny wynik Celliny [29] mówi, że dla dowolnego górnie półciągłego odwzorowania φ o wypukłych wartościach, każde otwarte otoczenie $\mathcal{U}$ wykresu $\mathrm{Gr}(\varphi)$ zawiera wykres $\mathrm{Gr}(f)$ funkcji ciągłej $f : X \to Y$. Ten wynik został rozszerzony przez wielu autorów dla ściągalnych wartości, R_δ-wartości oraz pewnych UV^n topologicznych własności; zob. [46, 56] i literaturę tam cytowaną. Z drugiej strony dolnie półciągłe odwzorowanie $C : X \multimap Y$, tj. $\{x \in X : C(x) \cap U \neq \emptyset\}$ jest otwarty dla każdego otwartego $U \subset Y$, posiada ciągłą selekcję $f : X \to Y$, tzn. $f(x) \in \varphi(x)$. Jest to znany wynik Michaela [64, 65]. W przypadku selekcji musimy założyć wypukłość $\varphi(x)$ [64] lub topologiczną equi-LC^n własność [65]. Praca [Pub1] zawiera twierdzenia, które łączą obydwa problemy. Mianowicie wprowadzamy topologiczne warunki, które gwarantują istnienie ciągłego odwzorowania $f : X \to Y$ takiego, że $\mathrm{Gr}(f) \subset \mathcal{U}$ oraz jednocześnie $f(x) \in C(x)$ dla $x \in X$. Te wyniki zostały zastosowane w pracy [Pub2] w celu znalezienia zer (ang. equilibria) odwzorowań wielowartościowych $\varphi : X \to Y$ na zawartych $\mathcal{L}$-retraktach $X \subset Y$ przestrzeni Banacha Y z nietrywialną charakterystyką Eulera $\chi(X) \neq 0$. Mianowicie, jeśli $\varphi(x) \cap C(x) \neq \emptyset$ dla każdego $x \in X$, gdzie $C(x)$ jest stożkiem stycznym w sensie Clarke'a do X w punkcie x, to znajdziemy $x \in X$ taki, że $0 \in \varphi(x)$. Dla odwzorowań o wypukłych wartościach φ, istnienie zer zostało udowodnione przez Ben-El-Mechaiekha i Kryszewskiego [20]. W pracy [Pub2] zaproponowaliśmy topologiczne warunki dla istnienia zer odwzorowań o niewypukłych wartościach i odpowiedzieliśmy na hipotezę [20][Conjecture 6.3]. Ostatecznie w pracy [Pub 3] twierdzenie Vietorisa-Begle'a [19, 95] oraz twierdzenie Białynickiego-Biruli [18] zostały uogólnione dla niekoniecznie domkniętych odwzorowań. Pewne związki z problemami odwzorowań wielowartościowych [Pub1,Pub2] zostały również zaprezentowane.

Podczas stażu podoktorskiego na Uniwersytecie Justusa Liebiga w Giessen, w 2012 roku zmieniłem zainteresowania badawcze i zająłem się metodami wariacyjnymi oraz nieliniowymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Osiągnięcie habilitacyjne [BM1]–[BM3], [M1], [M2] jak również [Pub4]–[Pub10] dotyczą nowej tematyki badawczej. W następnych rozdziałach przedstawimy wyniki z prac [Pub4]–[Pub10].

5b.1 Równanie Schrödingera

Zajmujemy się *nieliniowym równaniem Schrödingera*

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(x,u) & \text{dla } x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in X, \end{cases} \tag{30}$$

gdzie $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ jest potencjałem, $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest nieliniową funkcją oraz $X \subset \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ jest przestrzenią Banacha, $N \geq 1$. Problem (30) pojawia się w fizyce matematycznej, gdy studiujemy *fale stojące* zależnego od czasu równania Schrödingera. Przypomnijmy, że w nieliniowej optyce używając pewnych aproksymacji możemy badać propagację fal elektromagnetycznych w nieliniowych ośrodkach; zob. (1) Rozdział 4c.1. Oczywiście w takiej sytuacji występowanie f jest spowodowane nieliniową polaryzacją np. w *ośrodka typu Kerra* (3) lub w *nieliniowych ośrodkach z saturacją* (4). Jeśli potencjał V jest okresowy, to (30) jest szczególnie badane ze względu na szerokie zastosowania np. w kryształach fotonicznych, gdzie rozważa się okresowe optyczne struktury. Jeśli periodyczna struktura ma defekt, tj. dodatkową strukturę łamiącą okresowość, to kryształ fotoniczny może prowadzić światło wzdłuż tego defektu. W takim przypadku potencjał przyjmuje następującą postać

$$V = V_{per} + V_{loc}, \tag{31}$$

gdzie V_{per} jest okresowa, zaś V_{loc} jest zlokalizowanym potencjałem znikającym w nieskończoności.

Wspomnijmy, że równanie (30) pojawia się również w innych obszarach fizyki matematycznej, np. w mechanice kwantowej, fizyce jądrowej, kosmologii kwantowej oraz w fizyce materii skondensowanej, gdzie kondensaty Bosego-Einsteina są badane.

Naszym zasadniczym celem jest rozwiązanie (30) pod różnymi założeniami o nieliniowości f oraz z potencjałami postaci (31). Jeśli $V = V_{per}$ jest okresowa, to spektrum $\sigma(-\Delta + V)$ operatora $-\Delta + V$ jest ciągłe i może zawierać przerwy (ang. gaps), tj. otwarte przedziały poza spektrum (zob. [72]). Jeśli $\inf \sigma(-\Delta + V) > 0$ lub gdy 0 znajduje się w przerwie spektralnej spektrum $\sigma(-\Delta + V)$, to nielinowe równanie Schrödingera były studiowane przez wielu autorów (zob. [3, 27, 38, 42, 57, 76, 94] i literaturę tam zawartą) i nietrywialne rozwiązania (30) zostały otrzymane. Rozwiązania w stanie podstawowym, tj. nietrywialne rozwiązania z najniższą możliwą energią wśród wszystkich nietrywialnych rozwiązań, odgrywają ważną rolę w fizyce i ich istnienie zostało zbadane np. w [60, 63, 69, 90]; zob. również [M2], gdzie rozważamy układ nieliniowych równań Schrödingera. Jeśli $V = 0$, to $\sigma(-\Delta + V) = [0, +\infty)$ i problem był dyskutowany w klasycznej pracy [24] oraz w ostatnich pracach [4] (zob. również literaturę tam zawartą). Jeśli V jest funkcją stałą i ujemną, to 0 jest punktem wewnętrznym spektrum $\sigma(-\Delta+V)$ i rozwiązania (30) zostały znalezione w [44].

W pracy [Pub4] skupiamy się na sytuacji, gdy 0 leży w spektrum operatora $-\Delta+V$ i jest lewym końcem przerwy spektralnej. Zakładamy następujące warunki.

(V_1) $V \in C^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, V jest $\mathbb{Z}^N$-okresowa, tj. $V(x+y) = V(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^N$ i $y \in \mathbb{Z}^N$, $0 \in \sigma(-\Delta+V)$ oraz istnieje $\beta > 0$ taka, że $(0,\beta] \cap \sigma(-\Delta+V) = \emptyset$.

(A1) $f \in C^0(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, f jest $\mathbb{Z}^N$-okresowa względem $x \in \mathbb{R}^N$.

(A2) Istnieją $a > 0$ oraz $2 < \mu \le p < 2^*$ takie, że

$$|f(x,u)| \le a(|u|^{\mu-1} + |u|^{p-1}) \text{ dla wszystkich } u \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^N.$$

(A3) Istnieje $b > 0$ takie, że

$$F(x,u) \ge b|u|^\mu \text{ dla wszystkich } |u| \le 1,\ x \in \mathbb{R}^N,$$

gdzie F funkcją pierwotną f ze względu na u, tj. $F(x,u) = \int_0^u f(x,t)dt$.

(A4) $F(x,u)/|u|^2 \to \infty$ jednostajne ze względu na x, gdy $|u| \to \infty$.

(A5) $u \mapsto f(x,u)/|u|$ jest ściśle rosnąca na $(-\infty,0)$ oraz na $(0,\infty)$.

Nadmieńmy, że nasze założenia są istotnie słabsze niż warunki rozważane w poprzednich pracach [15, 98, 99] dotyczących przypadku (V_1). W szczególności jesteśmy w stanie rozważać nieliniowość typu

$$f(x,u) = \Gamma(x) u \ln(1 + |u|^{p-2}),\ \Gamma(x) \ge \inf_{\mathbb{R}^N} \Gamma > 0,$$

gdzie $\Gamma : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, $\mathbb{Z}^N$-okresową oraz $2 < \mu = p < 2^*$.

Założenia (V_1), (A1)–(A5) pozwalają na znalezienie przestrzeni Banacha $X = E_{2,\mu}$ na której funkcjonał energii stowarzyszony z (30)

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)|u|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)\,dx$$

jest dobrze określony i klasy $\mathcal{C}^1$. Konstrukcja $H^1(\mathbb{R}^N) \subset X \subset \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ bazuje na teorii spektralnej dla $-\Delta+V$; sob. [Pub4, Section 2.1]. Ponadto otrzymujemy rozkład $X = X^+ \oplus \widetilde{X}$ taki, że J przyjmuje postać (17). Rozważamy również rozmaitość Nehariego-Pankova $\mathcal{N} \subset X = E_{2,\mu}$ jak w (19) .

Główny wynik pracy [Pub4] jest następujący.

Twierdzenie 19. ([Pub4, Theorem 1.1]) *Jeśli warunki* (V_1), *(A1)–(A5) są spełnione, to* (30) *ma rozwiązanie w stanie podstawowym* u, *tj.* $u \in \mathcal{N}$ *jest punktem krytycznym* J *takim, że* $J(u) = \inf_{\mathcal{N}} J > 0$. *Ponadto* $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap L^t(\mathbb{R}^N)$ *dla* $\mu \le t \le 2^*$.

W pracy [Pub4] budujemy ujęcie wariacyjne problemu, które pozwala na zastosowanie Twierdzenia 9 a) i otrzymujemy ciąg Palais-Smale'a $(u_n) \subset \mathcal{N}$ taki, że $J(u_n) \to \inf_{\mathcal{N}} J > 0$. Technika koncentracji zwartości w duchu Lionsa [61] pozwala na znalezienie punktu minimalnego u funkcjonału J na $\mathcal{N}$. Ponadto inspirując się pracą [90] za pomocą teorii Lusternika-Schnirelmanna otrzymujemy nieskończenie wiele goemotrycznie różnych rozwiązań.

Twierdzenie 20. ([Pub4, Theorem 1.2]) *Jeśli założenia* (V_1), *(A1)–(A5) są spełnione,* f *jest nieparzysta względem* u, *to* (30) *ma nieskończenie wiele par rozwiązań* $\pm u_n$, *które są geometrycznie różne, tzn.* $u_n(\cdot + y_1) \neq u_m(\cdot + y_2)$ *dla* $n \neq m$ *oraz* $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}^N$. *Ponadto znajdują się one w przestrzeni* $H^2_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap L^t(\mathbb{R}^N)$ *dla każdego* $\mu \leq t \leq 2^*$.

Wspomnijmy, że przed pracą [Pub4] rozwiązania w stanie podstawowym równania (30) pod założeniem (V_1) nie były znane.

W następnej pracy [Pub6] studiujemy sytuację ze zlokalizowanym potencjałem Hardy'ego $V_{loc} = -\frac{\mu}{|x|^2}$ w (31), tj.

$$V(x) = V_{per}(x) - \frac{\mu}{|x|^2},$$

gdzie $\mu < \overline{\mu} := \frac{(N-2)^2}{4}$ oraz $N \geq 3$. Jeśli $0 \leq \mu \leq \overline{\mu}$, to możemy rozważyć następującą formę dwuliniową

$$B_\mu(u,v) := \int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla u, \nabla v \rangle + \Big(V(x) - \frac{\mu}{|x|^2} \Big) uv \, dx \tag{32}$$

i zgodnie z naszą wiedzą wszystkie wyniki dotyczące (30) z parametrem $\mu > 0$ wymagały dodatniej określoności B_μ w odpowiedniej przestrzeni funkcyjnej, w której poszukiwano rozwiązań. Jednakże, jeśli $\mu \neq 0$, V_{per} okresowa i być może zmieniająca znak, to B_μ może być silnie nieokreśloną formą i wymaga subtelnego podejścia. Ponadto osobliwy potencjał $-\frac{\mu}{|x|^2}$ nie należy do klasy Kato [72] i nie może być rozważany jako zaburzenie niższego rzędu operatora $-\Delta + V_{per}$.

Zakładamy następujące warunki

- (V_2) $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, V jest $\mathbb{Z}^N$-okresowa oraz $0 \notin \sigma(-\Delta + V)$.
- (A6) $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mierzalna względem $x \in \mathbb{R}^N$ oraz ciągła względem $u \in \mathbb{R}$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}^N$. Ponadto f jest $\mathbb{Z}^N$-okresowa względem x.
- (A7) Istnieją $a > 0$ oraz $2 < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$ takie, że

$$|f(x,u)| \leq a(1 + |u|^{p-1}) \text{ dla wszystkich } u \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^N.$$

- (A8) $f(x,u) = o(u)$ jednostajnie ze względu na x, gdy $|u| \to 0$.

(A9) $u \mapsto f(x,u)/|u|$ jest niemalejąca na $(-\infty, 0)$ oraz na $(0, +\infty)$.

Teoria spektralna dostarcza nam ortogonalnego rozkładu $X := H^1(\mathbb{R}^N) = X^+ \oplus \widetilde{X}$ takiego, że forma $B_0(\cdot,\cdot)$ dana wzorem (32) z $\mu = 0$ jest dodatnio określona na X^+ oraz ujemnie określona na $\widetilde{X}$. Jeśli 0 znajduje się w przerwie spektralnej, to przestrzenie X^+ oraz $\widetilde{X}$ są nieskończenie wymiarowe i problem jest silnie nieokreślony.

Wprowadzamy następującą stałą

$$\mu(V)^+ := \sup\Big\{M > 0 : \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)|u|^2\,dx \geq M \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx \text{ dla każdego } u \in X^+\Big\},$$

która odgrywa ważna rolę w przypadku $\mu \neq 0$ oraz, gdy (32) jest nieokreślona. Pokazujemy, że $\mu(V)^+ > 0$ i gdy $V(x) \geq 0$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}^N$, to $\mu(V)^+ = 1$ oraz $\widetilde{X} = \{0\}$; zob. [Pub6, Lemma 2.1].

Podobnie jak powyżej definiujemy rozmaitość Nehariego-Pankova $\mathcal{N}$ i nasz wynik przedstawia się następująco.

Twierdzenie 21. ([Pub6, Theorem 1.1]) *Jeśli założenia* (V_2)*, (A4), (A6)–(A9) są spełnione oraz* $0 \leq \mu < \frac{(N-2)^2}{4} \min\{\mu(V)^+, 1\}$*, to* (30) *ma rozwiązanie w stanie podstawowym.*

Zachowanie rozwiązań w stanie podstawowym w granicy $\mu \to 0^+$ oraz nieistnienie takich rozwiązań dla $\mu < 0$ są zaprezentowane w [Pub6, Lemma 3.3]. W celu udowodnienia Twierdzenia 21, stosujemy Twierdzenie 10 i otrzymujemy ciąg Cerami na poziomie minmax. W [Pub6, Theorem 1.1] dowodzimy rozkładu ciągów Cerami ze względu na potencjał Hardy'ego i otrzymujemy rozwiązanie w stanie podstawowym.

Niech teraz $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia (A6)–(A8), oraz zamiast (A4) i (A5) żądamy

(A10) $G(x,u)/|u|^q \to \infty$ jednostajnie względem x, gdy $|u| \to \infty$, gdzie G jest funkcją pierwotną g ze względu na u.

(A11) $u \mapsto g(x,u)/|u|^{q-1}$ jest ściśle rosnąca na $(-\infty, 0)$ oraz na $(0, \infty)$.

Wówczas nasza nieliniowość przyjmuje postać

$$f(x,u) := g(x,u) - \Gamma(x)|u|^{q-2}u,$$

gdzie

(Γ) $\Gamma \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ jest $\mathbb{Z}^N$-okresowa, $\Gamma(x) \geq 0$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}^N$.

Zauważmy, że gdy $q = 2$, to $\Gamma(x)|u|^{q-2}u = \Gamma(x)u$ może być włączone do potencjału V. Jeśli $\Gamma \neq 0$ oraz $q > 2$, to nieliniowa cześć funkcjonału energii

$$I(u) := \int_{\mathbb{R}^N} \Big(G(x,u) - \frac{1}{q}\Gamma(x)|u|^q \Big)\, dx$$

zmienia znak, ponadto $u \mapsto \big(g(x,u) - \Gamma(x)|u|^{q-2}u\big)/|u|$ nie jest rosnąca na $(-\infty, 0)$ oraz na $(0,\infty)$. Stąd Twierdzenie 9 a) nie może być zastosowane. W dodatnio określonym przypadku, tzn. $X = X^+$ oraz $\widetilde{X} = \{0\}$ uogólniamy Twierdzenie 9 a).

Twierdzenie 22. ([Pub8, Theorem 2.1]) *Przypuśćmy, że X jest przestrzenią Hilberta, $J \in \mathcal{C}^1(X,\mathbb{R})$ ma postać (17), gdzie $X = X^+$ oraz $\widetilde{X} = \{0\}$. Ponadto załóżmy, że funkcjonał J jest koercytywny na $\mathcal{N}$, spełnia (I6), (I9), oraz następujący warunek zachodzi:*

(I11) Istnieje $q \geq 2$ takie, że $I(t_n u_n)/t_n^q \to \infty$ dla $t_n \to \infty$ oraz $u_n \to u \neq 0$, gdy $n \to \infty$.

Wówczas $c_{\mathcal{N}} := \inf_{\mathcal{N}} J > 0$ oraz J ma ograniczony $(PS)_{c_{\mathcal{N}}}$-ciąg w $\mathcal{N}$.

Warunek (I11) jest ogólniejszy niż (I8) w przypadku $X = X^+$ i pozwala na rozważanie nieliniowości I zmieniających znak. Zauważmy, że w Twierdzeniu 22 warunek (I1) nie jest wymagany.

W pracy [Pub8] rozważamy potencjał postać (31) oraz pracujemy z następującymi założeniami

(V_3) $V_{per} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ jest $\mathbb{Z}^N$-okresowa, $V_{loc} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ oraz $V_{loc}(x) \to 0$, gdy $|x| \to \infty$.

Zauważmy, że jeśli V_{loc} znika dostatecznie szybko, to jest zwartym zaburzeniem operatora $-\Delta + V_{per}$; zob. [72]. Wówczas istotne spektrum

$$\sigma_{ess}(-\Delta + V) = \sigma_{ess}(-\Delta + V_{per}) = \sigma(-\Delta + V_{per}).$$

Jednakże całkowite spektrum $\sigma(-\Delta + V)$ nie musi być ciągłe i może zawierać wartości własne poniżej istotnej części $\sigma_{ess}(-\Delta + V) = \sigma(-\Delta + V_{per})$.

Nasz wynik przedstawia się następująco.

Twierdzenie 23. ([Pub8, Theorem 1.1]) *Przypuśćmy, że warunki (V_3), (Γ), (A6)-(A8), (A10), (A11) są spełnione oraz $\inf \sigma(-\Delta + V) > 0$. Jeśli $V_{loc}(x) < 0$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}^N$ lub $V_{loc} \equiv 0$, to (30) ma rozwiązanie w stanie podstawowym $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Ponadto u jest funkcją ciągłą oraz istnieją stałe $\alpha, C > 0$ takie, że*

$$|u(x)| \leq C \exp(-\alpha|x|) \text{ dla } x \in \mathbb{R}^N.$$

Na koniec tego rozdziału wspomnimy, że w pracy [Pub9] zajmujemy się nieliniowym równaniem Schrödingera połączonym z potencjałem cechowania (ϕ, A):

$$\begin{cases} -\Delta u + \big([m^2 - (\omega - q\phi)^2] + |\ell\nabla\theta - qA|^2\big)u = f(x,u), \\ -\Delta\phi + \mu^2\phi = q(\omega - q\phi)u^2, & \text{w } \mathbb{R}^3, \\ \nabla\times(\nabla\times A) + \mu^2 A = q(\ell\nabla\theta - qA)u^2, \end{cases}$$

gdzie

$$\theta : \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma \to \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}), \qquad \theta(x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{Im}\log(x_1 + ix_2),$$

$\ell \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ oraz $m, \omega, q, \mu \in \mathbb{R}$. Wówczas $\psi(t,x) = e^{i(\ell\theta(x)-\omega t)}u(x)$ jest trójwymiarowym *vortex* rozwiązaniem układu Kleina-Gordona-Maxwella-Proci [22, 47]. W pracy [Pub9] znajdujemy symetryczne rozwiązanie w stanie podstawowym, jak również badamy zachowanie układu, gdy masa Proci μ znika.

5b.2 Problemy wariacyjne z nieliniowościami o krytycznym wzroście

Problemy wariacyjne z wykładnikiem krytycznym $p = 2^* = 2N/(N-2)$ dla $N \geq 3$ są szczególnie trudne ze względu na brak zwartych zanurzeń przestrzeni Sobolewa $H^1(\Omega)$ w $L^{2^*}(\Omega)$, nawet na ograniczonej dziedzinie Ω. Techniki wariacyjne rozważane w poprzednich rozdziałach nie mogą być zastosowane bezpośrednio. Na ogół ciągi Palais-Smale'a nie są zwarte. Jedna z wybitnych prac w tym kierunku należy do Brezisa i Nirenberga i dotyczy problemu [25]

$$-\Delta u + \lambda u = |u|^{2^*-2}u \quad \text{dla } u \in H_0^1(\Omega), \tag{33}$$

gdzie Ω jest ograniczoną dziedziną w $\mathbb{R}^N$. W świetle [25] równanie (33) posiada dodatnie rozwiązanie $u \in H_0^1(\Omega)$ dla $\lambda \in (-\lambda_1(\Omega), 0)$ oraz $N \geq 4$, gdzie $\lambda_1(\Omega)$ jest pierwszą wartością własną $-\Delta$ z warunkami brzegowymi Dirichleta. W przypadku $N = 3$ istnieje $0 < \varepsilon < \lambda_1(\Omega)$ takie, że dla każdego $\lambda \in (-\lambda_1(\Omega), -\lambda_1(\Omega) + \varepsilon)$ równanie (33) ma dodatnie rozwiązanie.

W pracy [Pub5] zajmujemy się następującym układem równań z krytycznymi wykładnikami

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u^{2^*-2}v & \text{w } \Omega, \\ -\Delta v = \mu v^{2^*-1} + u^{2^*-1} & \text{w } \Omega, \\ u > 0, v > 0 & \text{w } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{34}$$

gdzie Ω jest ograniczoną dziedziną $\mathbb{R}^N$, $N \geq 4$, $2^* = 2N/(N-2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ oraz $\mu \geq 0$.

Jeśli $\mu = 0$, to problem (34) jest N-wymiarowym wariantem problemu z krytycznym wykładnikiem studiowanym w literaturze np. [9], gdzie autorzy kontynuując klasyczne podejście używają tzw. metody redukcji. Mianowicie drugie równanie ma jednoznaczne rozwiązanie dla ustalonego u i możemy je wstawić do pierwszego równania i w ten sposób redukujemy układ równań do jednego *nielokalnego* równania. Jednakże w naszej sytuacji, gdy $\mu > 0$, metoda redukcji nie może być zastosowana, gdyż odwzorowanie $H_0^1(\Omega) \ni u \mapsto v_u \in H_0^1(\Omega)$, gdzie v_u jest rozwiązaniem drugiego równania(34), nie jest dobrze określone.

Poszukujemy rozwiązań (34) będących punktami krytycznymi funkcjonału $J : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^1$ danego wzorem

$$J(u,v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 + \frac{1}{2(2^*-1)}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \frac{\mu}{2^*(2^*-1)}\int_\Omega |v|^{2^*} - \frac{1}{2^*-1}\int_\Omega |u|^{2^*-1}v.$$

W szczególności jesteśmy zainteresowani dodatnimi rozwiązaniami w stanie podstawowym równania (34), tzn. rozwiązaniami, które minimalizują J na następującym wariancie rozmaitości Nehariego

$$\mathcal{N} := \left\{(u,v) \in (H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)) \setminus \{(0,0)\} : \mathbf{G}(u,v) = (0,0)\right\},$$

gdzie

$$\mathbf{G}(u,v) = \left(\|\nabla u\|_2^2 - \lambda\|u\|_2^2 - \int_\Omega |u|^{2^*-1}v, \|\nabla v\|_2^2 - \mu\|v\|_{2^*}^{2^*} - \int_\Omega |u|^{2^*-1}v\right).$$

Niech

$$\mathbb{I}_N = \begin{cases} [0, \sqrt{6}/9] & \text{, gdy } N = 4, \\ [0, \mu^*] & \text{, gdy } N = 5, \\ [0, 1] & \text{, gdy } N = 6, \\ [0, +\infty[& \text{, gdy } N \geq 7, \end{cases}$$

dla pewnego $\mu^* > 0$. Główny wynik pracy [Pub5] jest następujący.

Twierdzenie 24. ([Pub5, Theorem 1.1]) *Jeśli $\mu \in \mathbb{I}_N$ oraz $\lambda \in (0, \lambda_1(\Omega))$, to problem* (34) *ma rozwiązanie w stanie podstawowym.*

Ze względu na dwie nieliniowości o krytycznym wzroście w funkcjonale J, których suma może zmieniać znak, napotykamy na pewne trudności w oszacowaniu poziomu górskiej przełęczy dla którego ciągi Palais-Smale'a są zwarte. W takiej sytuacji klasyczne podejście Brezisa i

Nirenberga w [25] wydaje się trudne w zastosowaniu. W celu otrzymania Twierdzenia 24, przedstawiamy nasze podejście. Przede wszystkim rozważamy *przypadek graniczny* ($\Omega = \mathbb{R}^N$ oraz $\lambda = 0$), który jak zwykle odgrywa kluczową rolę w porównaniu poziomów w stanach podstawowych i konstruujemy rozwiązania w stanie podstawowym dla tego problemu za pomocą instantonów Aubin i Talenti [7, 92]. Wówczas ograniczamy nasze rozważania do zbioru $\mathcal{A}$ par *dopuszczalnych* [Pub5, (3.1)] takich, że każda para (u, v) z $\mathcal{A}$ może być zrzutowana na $\mathcal{N}$. Następnie zauważamy, że prawie wszystkie elementy ciągu Palais-Smale'a funkcjonału J są dopuszczalne i mogą być również zrzutowane na odpowiednią rozmaitość Nehariego problemu granicznego. To pozwala na porównanie poziomu w stanie podstawowym z poziomem górskiej przełęczy układu równań (34). Ostatecznie znajdujemy nietrywialny punkt skupienia w słabej topologii ciągu Palais-Smale'a, w którym J osiąga poziom w stanie podstawowym.

Wspomnijmy, że [Pub5, Theorem 1.2] jest poświęcone wynikom o nieistnieniu rozwiązań równania (34) w zależności od parametrów μ, λ oraz od topologii Ω.

Kolejny problem z wykładnikiem krytycznym Sobolewa był studiowany w pracy [Pub10], która dotyczy równania (2) z krytyczną nieliniowością

$$\nabla \times (\nabla \times u) + \lambda u = |u|^4 u \qquad \text{w } \Omega \tag{35}$$

razem z metalicznymi warunkami brzegowymi (5). W kontekście fizycznym nieliniowości krytyczne reprezentują skupiające zjawisko piątego stopnia (ang. focusing quintic effect) materiału, które przyjmuje zazwyczaj postać

$$f(x, u) = \chi^{(5)}(x)|u|^4 u - \chi^{(3)}(x)|u|^2 u,$$

gdzie $\chi^{(3)}$, $\chi^{(5)}$ są odpowiednimi parametrami podatności materiału. W pracy [Pub10] jesteśmy w stanie zbadać przypadek, gdy $\chi^{(5)}(x) > 0$ oraz $\chi^{(3)} = 0$. Przypomnijmy, że w Twierdzeniu 12 rozwiązaliśmy problem dla $\chi^{(5)}(x) = 0$ oraz $\chi^{(3)} \in L^\infty(\Omega)$, $\operatorname{ess\,inf}_{x\in\Omega}(-\chi^{(3)}(x)) > 0$. Z uwagi na fakt, iż $6 = 2^*$ jest wykładnikiem krytycznym dla $N = 3$, równanie (35) jest trójwymiarowym wariantem problemu Brezisa-Nirenberga (33).

W celu znalezienia ciągu Palais-Smale'a minimalizujemy stowarzyszony funkcjonał J_λ na rozmaitości Nehariego-Pankova $\mathcal{N}_\lambda$, podobnie jak w Rozdziale 4c.5. W obecnej sytuacji oznaczamy również zależność od parametru λ. Jednakże w krytycznym przypadku $p = 6$ warunek (L2) nie jest spełniony i na ogół $(PS)^{\mathcal{T}}_{c_{\mathcal{N}_\lambda}}$-warunek w $\mathcal{N}_\lambda$ nie zachodzi.

Zainspirowani pracą Brezisa i Nirenberga [25], wydawać by się mogło, że naturalnym podejściem do problemu (35) byłoby znalezienie ciągu Palais-Smale'a poniżej energii pewnego rozwiązania o najniższej energii $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ następującego problemu granicznego

$$\nabla \times (\nabla \times u) = |u|^4 u \quad \text{w } \mathbb{R}^3, \tag{36}$$

i pokazanie, że warunek Palais-Smale'a zachodzi w tej sytuacji. Przypomnijmy, że odpowiednie porównywanie poziomów energii problemów minimalizacyjnych dotyczących (33) w [25] silnie bazuje na kształcie wszystkich rozwiązań problemu granicznego $-\Delta u = |u|^{2^*-2}u$ dla $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, zwanych instantonami Aubin i Talenti [7,92], które są radialne i określone wzorami jawnymi. Ponadto problem (33) w najniższym wymiarze $N = 3$ jest najtrudniejszy do porównywania odpowiednich problemów minimalizacyjnych i do otrzymania zwartości ciągów Palais-Smale'a. Zatem, aby przystosować to podejście dla naszego problemu powinniśmy mieć dokładną informację o kształcie rozwiązań (36). Podobnie jak w Twierdzeniu 3 pokazujemy, że nie istnieją rozwiązania radialne i metody równań różniczkowych zwyczajnych nie mają zastosowania do badania rozwiązań (36) i ich kształtów. Zamiast symetrii radialnej moglibyśmy poszukiwać rozwiązań cylindrycznie symetrycznych równani (36) postaci (13). Bezpośrednie rachunki pokazują, że pole wektorowe u postaci (13) rozwiązuje (36) wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi(x) = \alpha(r, x_3)$ rozwiązuje

$$-\Delta\phi + \frac{\phi}{r^2} = |\phi|^4\phi \quad \text{w } \mathbb{R}^3. \tag{37}$$

Ku naszemu zaskoczeniu, ostatnie równanie zostało otrzymane również przez Esteban i Lionsa w [45][Theorem 3.9] jako problem graniczny nieliniowego równania Schrödinera o krytycznym wzroście z zewnętrznym polem magnetycznym. Zgodnie z naszą wiedzą, nie ma dokładnej informacji o kształcie lub wzorach jawnych rozwiązań równania (37), które pozwoliłyby na zastosowanie podejścia [25].

Wprowadzamy inne podejście niż w [25] lub w powiązanych pracach [12, 31, 35, 40, 79]. Mianowicie analizujemy monotoniczność poziomów w stanie podstawowym

$$c_\lambda := \inf_{\mathcal{N}_\lambda} J_\lambda \quad \text{ for } \lambda \in (-\infty, 0],$$

i pokazujemy, że jeśli c_λ jest ściśle rosnąca w pewnym otwartym przedziale $I \subset (-\infty, 0]$, to znajdziemy ciąg Palais-Smale'a w $\mathcal{N}_\lambda$ na poziomie c_λ z nietrywialnym punktem skupienia w słabej topologii dla każdego $\lambda \in I$. Przypuśćmy, że Ω ma brzeg klasy $\mathcal{C}^{1,1,}$. W świetle Lematu 1, istnieje ciąg wartości własnych

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_k \to \infty$$

operatora $\nabla \times (\nabla \times (\cdot))$ w $\mathcal{V}_0$ i nasz pierwszy wynik jest następujący.

Twierdzenie 25. ([Pub10, Theorem 2.2]) *Niech $-\lambda_n < \lambda \le -\lambda_{n-1}$ dla pewnego $n \ge 1$. Wówczas $c_\lambda > 0$ oraz, gdy $\lambda < -\lambda_n + S\mu(\Omega)^{\frac{2-p}{p}}$, to $c_\lambda < c_0$ oraz istnieje ciąg Palais-Smale'a $(u_n) \subset \mathcal{N}_\lambda$ taki, że $J_\lambda(u_n) \to c_\lambda > 0$ oraz $u_n \rightharpoonup u_0 \ne 0$ w $X = H_0(\mathrm{curl};\Omega) \cap L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$, gdzie $\mu(\Omega)$ jest miarą Lebesgue'a zbioru Ω oraz*

$$S := \inf_{|v|_p = 1,\ v \in \mathcal{V}_0} \int_\Omega |\nabla \times v|^2\, dx.$$

W przypadku krytycznym nie wiemy, czy punkt skupienia u_0 jest punktem krytycznym, ze względu na brak slabej-słabej* ciągłości J'_λ nawet na $\mathcal{N}_\lambda$. W celu znalezienia punktów krytycznych funkcjonału J_λ i rozwiązania (35) ograniczamy nasze podejście do podprzestrzeni $X^{cyl} := (X^G)^S \subset \mathcal{V}_0 = \mathcal{V}$ cylindrycznie symetrycznych pól wektorowych postaci (16). Podobnie jak powyżej istnieje ciąg wartości własnych

$$0 < \lambda_1^{cyl} \leq \lambda_2^{cyl} \leq \cdots \leq \lambda_k^{cyl} \to \infty$$

operatora $\nabla \times (\nabla \times (\cdot))$ w X^{cyl} z odpowiadającymi krotnościami $m(\lambda_k^{cyl}) \in \mathbb{N}$. Oznaczmy przez $\mathcal{N}_\lambda^{cyl}$ rozmaitość Nehariego-Pankova dla $J_\lambda|_{X^{cyl}}$ oraz

$$c_\lambda^{cyl} := \inf_{\mathcal{N}_\lambda^{cyl}} J.$$

Ostatecznie nasze twierdzenie o istnieniu rozwiązań dla (35) jest następujące.

Twierdzenie 26. ([Pub10, Theorem 2.3]) *Przypuśćmy, że Ω jest G-niezmiennicza oraz $-\lambda_n^{cyl} < \lambda \leq -\lambda_{n-1}^{cyl}$ dla pewnego $n \geq 1$. Wówczas $c_\lambda^{cyl} > 0$ oraz istnieje*

$$\varepsilon_n \in [S\mu(\Omega)^{\frac{2-p}{p}}, \lambda_n^{cyl}]$$

takie, że następujące warunki są spełnione:
a) Jeśli $\lambda \in (-\lambda_n^{cyl}, -\lambda_n^{cyl} + \varepsilon_n)$, to istnieje symetryczne rozwiązanie w stanie podstawowym równania (2), tj. c_λ^{cyl} jest osiągalne przez punkt krytyczny J_λ. Ponadto $c_\lambda^{cyl} < c_0^{cyl}$.
b) Jeśli $\varepsilon_n < \lambda_n^{cyl} - \lambda_{n-1}^{cyl}$, to c_λ^{cyl} nie jest osiągalne dla $\lambda \in (-\lambda_n^{cyl} + \varepsilon_n, -\lambda_{n-1}^{cyl}]$, oraz $c_\lambda^{cyl} = c_0^{cyl}$ dla $\lambda \in [-\lambda_n^{cyl} + \varepsilon_n, -\lambda_{n-1}^{cyl}]$.
c) $c_\lambda^{cyl} \to 0$, gdy $\lambda \to -\lambda_n^{cyl-}$, oraz funkcja

$$(-\lambda_n^{cyl}, -\lambda_n^{cyl} + \varepsilon_n] \cap (-\lambda_n^{cyl}, -\lambda_{n-1}^{cyl}] \ni \lambda \mapsto c_\lambda^{cyl} \in (0, +\infty)$$

jest ciągła i ściśle rosnąca
d) Jeśli $\lambda \in I := (-\lambda_n^{cyl}, -\lambda_n^{cyl} + S\mu(\Omega)^{\frac{2-p}{p}})$, to istnieje co najmniej $m(\lambda_n^{cyl})$ par rozwiązań $\pm u$ równania (2) postaci (13). Ponadto, jeśli $\mu_n \to \mu_0$ w I dla $n \to \infty$, oraz u_n jest symetrycznym rozwiązaniem w stanie podstawowym J_{μ_n} dla $n \geq 1$, to z dokładnością do podciągu (u_n) dąży do rozwiązania w stanie podstawowym u_0 funkcjonału J_{μ_0} w mocnej topologii X. W szczególności zbiór rozwiązań w stanie podstawowym funkcjonału J_λ jest zwarty dla $\lambda \in I$.

5b.3 Uwagi

Nadmieńmy, że [Pub7] jest pracą krótką pracą przeglądową dotyczącą problemu (23), w szczególności zawiera Twierdzenie 15 z [M1]. Prace [BM1] oraz [M1] będące pierwszymi analitycznymi publikacjami dotyczącymi problemu (2), otworzyły drogę dla nowatorskiego wariacyjnego podejścia do nieliniowych równań Maxwella i pozostawiły szereg otwartych pytań. W [Pub7, Section 4] oraz w [BM3, Section 7] przedstawiamy listę otwartych problemów, które wydają się ważne z fizycznego punktu widzenia i stanowią wyzwanie ze strony matematycznej. Kolejnym interesującym obszarem badań będzie studiowanie, czy nieliniowe elektromagnetyczne równanie falowe zależne od czasu (1) jest dobrze postawione (ang. well-posed) oraz czy rozwiązania wykazują wybuchy (ang. blow-up phenomena) w duchu prac [54, 93].

5b. Nagrody, stypendia i granty badawcze

- Stypendium naukowe dla wybitnych młodych naukowców, przyznane przez Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego na 3 lata, 11.2016–10.2019.
- Indywidualna Nagroda I stopnia Rektora Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu za osiągnięcia naukowe w 2015 roku. Nagroda przyznana 26.10.2016.
- Kierownik i główny wykonawca grantu Sonata 8, Narodowe Centrum Nauki (NCN), *Stany podstawowe i stany związane nieliniowych równań Schrödingera*, 07.2015–07.2018.
- Wykonawca w grancie Opus 5 (NCN), *Dynamika nieliniowych równań ewolucyjnych - podejście topologiczne*, kierownik: Prof. dr hab. Wojciech Kryszewski, 02.2014–02.2017.
- Stypendium podoktorskie "Wzmocnienie potencjału dydaktycznego UMK w Toruniu w dziedzinach matematyczno-przyrodniczych", 2011 – 2012.
- Indywidualne wyróżnienie Rektora Uniwersytetu Mikołaja Kopernika za rozprawę doktorską, 2010.
- Wykonawca w grancie KBN, *Niezmienniki topologiczne w analizie nieliniowej*, kierownik: Prof. dr hab. Lech Górniewicz, 2009 – 2012.
- Stypendium dla doktorantów – Step in the Future, ZPORR, 2009.
- Nagroda zespołowa Rektora Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, 2007.
- Stypendium Ministra Edukacji Narodowej za osiągnięcia w nauce, 2002 – 2005.
- 4-te miejsce w zawodach międzynarodowych International Baltic Way Mathematical Team Contest, Reykjavik, Islandia 1999.
- Laureat 3 nagrody w Olimpiadzie Matematycznej, Bielsko-Biała, 1999.
- Stypendysta Krajowego Funduszu na rzecz Dzieci, 1998 – 2000.

5b. Pobyty naukowe

- Karlsruhe, Niemcy, 5–10.02.2017, pobyt naukowy w Instytucie Technologii w Karlsruhe (KIT), zaproszenie Prof. Wolfganga Reichela.
- Giessen, Niemcy, 29.01–3.02.2017, 1–4.06.2016, 9–16.05.2014, 3 pobyty naukowe na Uniwersytecie Justusa Liebiga, zaproszenie Prof. Thomasa Bartscha.
- Bari, Włochy, 5–17.06.2016, 15–20.03.2015, 2 pobyty naukowe na Politechnice w Bari, zaproszenie Prof. Pietro d'Avenii.
- Xi'an, Chiny, 4–31.10.2013 pobyt naukowy na Northwestern Polytechnical University, zaproszenie Prof. Qianqiao Guo.
- Paryż, Francja, 2–15.06.2013, udział w trymestrze *Variational and Spectral Methods in Quantum Mechanics* w Instytucie Henri Poincaré.
- Triest, Włochy, 15–27.05.2011, udział w trymestrze *Nonlinear hyperbolic PDEs, dispersive and transport equations: Analysis and Control*, SISSA.

5b. Wystąpienia na konferencjach (po doktoracie)

- *Emerging issues in nonlinear elliptic equations: singularities, singular perturbations and non local problems*, Będlewo, 18-24.06.2017, **zaproszony referat:** *TBA.*
- *International Conference on Elliptic and Parabolic Problems*, Gaeta, Włochy, 22-26.05.2017, **referat:** *The Brezis-Nirenberg problem for the curl-curl operator.*
- *International Conference on Partial Differential Equations*, The Silkroad Mathematics Center of Chinese Mathematical Society, Pekin, Chiny, 17-21.04.2017, plenary speaker, **zaproszony referat:** *Nonlinear time-harmonic Maxwell equations in a bounded domain.*
- *Nonlinear Partial Differential Equations and Mathematical Physics* w TSIMF, Yau Mathematical Sciences Center, Sanya, Chiny, 5-9.12.2016, **zaproszony referat:** *Nonlinear time-harmonic Maxwell equations in a bounded domain.*
- *11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications*, Orlando, USA, 1-5.07.2016, session speaker, **zaproszony referat:** *Time-harmonic solutions to nonlinear Maxwell equations on a bounded domain.*
- *Symposium on Nonlinear Analysis*, Toruń, 14-18.09.2015, session speaker, **zaproszony referat:** *Nehari manifold technique and ground states of Schrödiger equations.*
- *Workshop in Nonlinear PDEs*, Bruksela, Belgia, 7-11.09.2015, **zaproszony referat:** *Ground states of time-harmonic semilinear Maxwell equations in* $\mathbb{R}^3$.
- *Joint Meeting of the German Mathematical Society and the Polish Mathematical Society*, Poznań, 17-20.09.2014, session speaker, **zaproszony referat:** *Ground states of time-harmonic semilinear Maxwell equations.*
- *International Workshop on Variational Problems and PDE's*, Sao Paulo, Brazylia, 2-6.09.2013, **zaproszony referat:** *The Semilinear Maxwell Equation on a bounded domain.*
- *Variational methods and partial differential equations*, Louvain-la-Neuve, Belgia, 10-12.07.2013, **referat:** *Ground state solutions to a nonlinear Schrödinger equation with periodic potential.*
- *Symposium on Nonlinear Analysis*, Toruń, 7-9.2011, **referat:** *Equilibria of set-valued maps under constraints.*
- *International Conference on Differential and Difference Equations Applications*, Ponta Delgada, Portugalia, 4-8.07.2011, **referat:** *Equilibria of nonconvex-valued maps under constraints.*

5b. Działalność organizacyjna oraz inna działalność akademicka

- **Współorganizacja konferencji:**
  - *Symposium on Nonlinear Analysis SNA* 2011, Toruń.

– Joint Meeting of the German Mathematical Society (DMV) and the Polish Mathematical Society (PTM), section 38. *Variational Methods in Nonlinear Analysis*, Poznań 2014.
– *Symposium on Nonlinear Analysis SNA* 2015, Toruń.
– *International Conference on Elliptic and Parabolic Problems*, sesja *PDEs arising in nonlinear optics*, 2017 Gaeta, Włochy.

- **Recenzje dla czasopism:** Topological Methods in Nonlinear Analysis, Journal of Mathematical Physics, Open Mathematics (CEJM), Applicable Analysis, Journal of the London Mathematical Society, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP).
- **Opieka naukowa:** Opiekun naukowy doktoranta mgr. Bartosza Bieganowskiego od października 2015 roku na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika. Promotor pracy magisterskiej w latach 2013-2015, która została nagrodzona w konkursie im. Józefa Marcinkiewicza PTM. Pierwsza wspólna publikacja naukowa z mgr. Bieganowskim została przyjęta do druku [Pub8].
- Recenzje 5 prac magisterskich i 4 licencjackich z matematyki na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika.
- Członkostwo w Polskim Towarzystwie Matematycznym (PTM) od 2015 roku.

Literatura

[1] G. Agrawal: *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, 5th ed., (2012).

[2] N.N. Akhmediev, A. Ankiewicz, J.M. Soto-Crespo: *Does the nonlinear Schrödinger equation correctly describe beam propagation?*, Opt. Lett. **18** (1993), 411.

[3] S. Alama, Y.Y. Li, *On "multibump" bound states for certain semilinear elliptic equations*, Indiana Univ. Math. J. **41** (1992), no. 4, 983–1026.

[4] C.O. Alves, M.A.S. Souto, M. Montenegro, *Existence of solution for two classes of elliptic problems in $\mathbb{R}^N$ with zero mass*, J. Differential Equations **252** (2012), 5735–5750.

[5] A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz: *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. **14** (1973), 349–381.

[6] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge, V. Girault: *Vector potentials in three-dimensional nonsmooth domains*, Math. Methods Appl. Sci. **21** (1998), no. 9, 823–864.

[7] T. Aubin, *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, J. Differential Geom. **11** (1976), 573–598.

[8] A. Azzollini, V. Benci, T. D'Aprile, D. Fortunato: *Existence of Static Solutions of the Semilinear Maxwell Equations*, Ric. Mat. **55** (2006), no. 2, 283–297.

[9] A. Azzollini, P. d'Avenia: *On a system involving a critically growing nonlinearity*, J. Math. Anal. Appl. **387** (2012), 433–438.

[10] M. Badiale, L. Pisani, S. Rolando: *Sum of weighted Lebesgue spaces and nonlinear elliptic equations*, Nonlinear Differ. Equ. Appl. **18** (2011), 369–405.

[11] J. M. Ball, Y. Capdeboscq, B. Tsering-Xiao: *On uniqueness for time harmonic anisotropic Maxwell's equations with piecewise regular coefficients*, Math. Models Methods Appl. Sci. **22** (2012), no. 11, 1250036, 11 pp.

[12] P. Bartolo, V. Benci, D. Fortunato: *Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with strong resonance at infinity*, Nonlin. Anal. Theory Meth. Appl. **7** (1983), 981–1012.

[13] T. Bartsch: *Infinitely many solutions of a symmetric Dirichlet problem*, Nonlinear Analysis, Theory, Meth. Appl. **20** (1993), no. 12, 1205–1216.

[14] T. Bartsch, Y. Ding: *Deformation theorems on non-metrizable vector spaces and applications to critical point theory*, Mathematische Nachrichten **279** (2006), no. 12, 1267–1288.

[15] T. Bartsch, Y. Ding, *On a nonlinear Schrödinger equation with periodic potential*, Math. Ann. **313** (1999), no. 1, 15–37.

[16] T. Bartsch, T. Dohnal, M. Plum, W. Reichel: *Ground States of a Nonlinear Curl-Curl Problem in Cylindrically Symmetric Media*, Nonlin. Diff. Equ. Appl. **23:52** (2016), no. 5, 34 pp.

[17] S. Bauer, D. Pauly, M. Schomburg: *The Maxwell compactness property in bounded weak Lipschitz domains with mixed boundary conditions*, SIAM J. Math. Anal. **48**(4) (2016), 2912–2943.

[18] A. Białynicki-Birula: *On Vietoris mapping theorem and its inverse*, Fund. Math. **53** (1964) 135–145.

[19] E.G. Begle: *The Vietoris mapping theorem for bicompact spaces*, Ann. of Math. (2) **51**, (1950), 534–543.

[20] H. Ben-El-Mechaiekh, W. Kryszewski: *Equilibria of set-valued maps on nonconvex domains*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), no. 10, 4159–4179.

[21] V. Benci, D. Fortunato: *Towards a unified field theory for classical electrodynamics*, Arch. Rational Mech. Anal. **173** (2004), 379–414.

[22] V. Benci, D. Fortunato: *Spinning Q-Balls for the Klein-Gordon-Maxwell Equations*, Commun. Math. Phys. **295** (3) (2010), 639–668.

[23] V. Benci, P. H. Rabinowitz: *Critical point theorems for indefinite functionals*, Invent. Math. **52** (1979), no. 3, 241–273.

[24] H. Berestycki, P.L. Lions, *Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state*, Arch. Rational Mech. Anal. **82**, (1983), 313–345.

[25] H. Brezis, L. Nirenberg: *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 437–477.

[26] A. Buffa, H. Ammari, J. C. Nédélec: *Justification of Eddy Currents Model for the Maxwell Equations*, SIAM J. Appl. Math. **60** (5), (2000), 1805–1823.

[27] B. Buffoni, L. Jeanjean, C. A. Stuart, *Existence of a nontrivial solution to a strongly indefinite semilinear equation*, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), no. 1, 179–186.

[28] Y. Chen, J. Atai: *Maxwell's equations and the vector nonlinear Schrödinger equation*, Phys. Rev. E **55** (1997), 3652–3657.

[29] A. Cellina: *Approximation of set-valued functions and fixed-point theorems*, Ann. Mat. Pura Appl. **82** (1969) 17–24.

[30] G. Cerami: *On the existence of eigenvalues for a nonlinear boundary value problem*, Ann. Mat. Pura Appl. **124**, (1980), 161–179.

[31] G. Cerami, D. Fortunato, M. Struwe: *Bifurcation and multiplicity results for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponents*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **1** (1984), no. 5, 341–350.

[32] A. Ciattoni, B. Crossignani, P. Di Porto, A. Yariv: *Perfect optical solitons: spatial Kerr solitons as exact solutions of Maxwell's equations*, J. Opt. Soc. Am. B **22** (2005), 1384–94.

[33] A. Ciattoni, B. Crossignani, P. Di Porto, J. Scheuer, A. Yariv: *On the limit of validity of nonparaxial propagation equations in Kerr media*, Opt. Express **14** (2006), 5517–23.

[34] D. C. Clark: *A variant of Ljusternik-Schnirelmann theory*, Indiana Univ. Math. J. **22** (1972), 65–74.

[35] M. Comte M: *Solutions of elliptic equations with critical Sobolev exponent in dimension three*, Nonlinear Anal. **17**, (1995), 445–455.

[36] M. Costabel, M. Dauge, S. Nicaise: *Singularities of Maxwell interface problems*, Math. Model. Numer. Anal. bf 33, (1999), 627–649.

[37] M. Costabel: *A remark on the regularity of solutions of Maxwell's equations on Lipschitz domains*, Math. Methods Appl. Sci. **12**, (1990), 365–368.

[38] V. Coti Zelati, P.H. Rabinowitz: *Homoclinic type solutions for a semilinear elliptic PDE on $\mathbb{R}^N$*, Comm. Pure and Applied Math. **45**, no. 10, (1992), 1217–1269.

[39] T. D'Aprile, G. Siciliano: *Magnetostatic solutions for a semilinear perturbation of the Maxwell equations*, Adv. Differential Equations **16** (2011), no. 5–6, 435-466.

[40] G. Devillanova, S. Solimini: *Concentration estimates and multiple solutions to elliptic problems at critical growth*, Adv. Differ. Equ. **7**, (2002), 1257–1280 (2002).

[41] Y. Ding: *Variational Methods for Strongly Indefinite Problems*, Interdisciplinary Mathematical Sciences **7**, World Scientific Publishing 2007.

[42] Y. Ding, C. Lee, *Multiple solutions of Schrödinger equations with indefinite linear part and super or asymptotically linear terms*, J. Differential Equations **222** (2006), no. 1, 137–163.

[43] W. Dörfler, A. Lechleiter, M. Plum, G. Schneider, C. Wieners: *Photonic Crystals: Mathematical Analysis and Numerical Approximation*, Springer Basel 2012.

[44] G. Evequoz, T. Weth, *Real solutions to the nonlinear Helmholtz equation with local nonlinearity*, Arch. Rat. Mech. Anal. **211** (2014), 359–388.

[45] M. Esteban, P.-L. Lions: *Stationary solutions of nonlinear Schrödinger equations with an external magnetic field*, Partial differential equations and the calculus of variations, Vol. I, 401–449, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 1, (1989).

[46] L. Górniewicz, A.Granas, W. Kryszewski: *On the homotopy method in the fixed point index theory of multi-valued mappings of compact absolute neighborhood retracts*, J. Math. Anal. Appl. **161** (1991), no. 2, 457–473.

[47] E. Hebey, T.T. Truong: *Static Klein-Gordon-Maxwell-Proca systems in 4-dimensional closed manifolds*, J. Reine Angew. Math. **667** (2012), 221–248.

[48] C.V. Hile: *Comparisons between Maxwell's equations and an extended nonlinear Schrödinger equation*, Wave Motion **24** (1), (1996), 1–12.

[49] R. Hiptmair: *Finite elements in computational electromagnetism*, Acta Numerica **11**, (2002), 237–339.

[50] A. Hirsch, W. Reichel: *Existence of cylindrically symmetric ground states to a nonlinear curl-curl equation with non-constant coefficients*, arXiv:1606.04415.

[51] L. Jeanjean, *On the existence of bounded Palais-Smale sequences and application to a Landesman-Lazer-type problem set on* $\mathbb{R}^N$, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **129** (1999), no. 4, 787–809.

[52] M. Karlsson, D. Anderson, M. Desaix, M. Lisak: *Dynamic effects of Kerr nonlinearity and spatial diffraction on self-phase modulation of optical pulses*, Opt. Lett. **16** (1991), 1373.

[53] M. Karlsson, D. Anderson, M. Desaix: *Dynamics of self-focusing and self-phase modulation in a parabolic index optical fiber*, Opt. Lett. **17**, 22.

[54] C. E. Kenig, F. Merle: *Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case*, Invent. Math. **166** (2006), no. 3, 645–675.

[55] A. Kirsch, F. Hettlich: *The Mathematical Theory of Time-Harmonic Maxwell's Equations: Expansion-, Integral-, and Variational Methods*, Springer 2015.

[56] W. Kryszewski: *Graph-approximation of set-valued maps on noncompact domains*, Topology Appl. **83** (1998), no. 1, 1–21.

[57] W. Kryszewski, A. Szulkin: *Generalized linking theorem with an application to semilinear Schrödinger equation*, Adv. Diff. Eq. 3 (1998), 441–472.

[58] R. Leis: *Zur Theorie elektromagnetischer Schwingungen in anisotropen inhomogenen Medien*, Math. Z. **106** (1968), 213–224.

[59] G. Li, A. Szulkin: *An asymptotically periodic Schrödinger equation with indefinite linear part*, Commun. Contemp. Math. **4**, (2002), no. 4, 763–776.

[60] Y. Li, Z.-Q. Wang, J. Zeng, *Ground states of nonlinear Schrödinger equations with potentials*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **23** (2006), no. 6, 829–837.

[61] P.L. Lions: *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. Part I and II*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéare., **1**, (1984), 109–145; and 223–283.

[62] P.L. Lions: *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. Part I and II.*, Rev. Mat. Iberoamer. **1** (1985), no. 1, 145–201: and no. 2, 45–121.

[63] S. Liu, *On superlinear Schrödinger equations with periodic potential*, Calc. Var. Partial Differential Equations **45** (2012), no. 1-2, 1–9.

[64] E. Michael: *Continuous selections. I*, Ann. of Math. (2) **63** (1956), 361–382.

[65] E. Michael: *Continuous selections. II*, Ann. of Math. (2) **64** (1956), 562-580.

[66] P. Monk: *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*, Oxford University Press 2003.

[67] W. Nie: *Optical Nonlinearity: Phenomena, applications, and materials*, Adv. Mater. **5**, (1993), 520–545.

[68] T. Okaji: *Strong unique continuation property for time harmonic Maxwell equations*, J. Math. Soc. Japan **54** (2002), 89–122.

[69] A. Pankov: *Periodic Nonlinear Schrödinger Equation with Application to Photonic Crystals*, Milan J. Math. **73** (2005), 259–287.

[70] R. Picard, N. Weck, K.-J. Witsch: *Time-harmonic Maxwell equations in the exterior of perfectly conducting, irregular obstacles*, Analysis (Munich) 21 (2001), no. 3, 231–263.

[71] M. Plum, W. Reichel: *A Breather Construction for a Semilinear Curl-Curl Wave Equation with Radially Symmetric Coefficients*, J. Elliptic Parabol. Equ. (2016) 2: 371. doi:10.1007/BF03377410.

[72] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Analysis of Operators, Vol. IV*, Academic Press, New York, 1978.

[73] D. Qin, X. Tang: *Time-harmonic Maxwell equations with asymptotically linear polarization*, Z. Angew. Math. Phys. **67** (2016), no. 3, 719–740.

[74] D. Qin, X. Tang: *Ground state solutions for semilinear time-harmonic Maxwell equations*, J. Math. Phys. **57** (2016), no. 4, 041505.

[75] P. Rabinowitz: *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Vol. **65**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island 1986.

[76] P. Rabinowitz, *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, Z. Angew. Math. Phys. **43** (1992), 270–291.

[77] A. Pistoia, M. Ramos: *Locating the peaks of the least energy solutions to an elliptic system with Dirichlet boundary conditions*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **15** (2008), no. 1, 1-–23.

[78] B.E.A. Saleh, M.C. Teich: *Fundamentals of Photonics*, 2nd Edition, Wiley 2007.

[79] S. Solimini: *Multiplicity techniques for problems without compactness. Stationary partial differential equations*, Vol. II, 519–599, Handb. Differ. Equ., Elsevier/North-Holland, Amsterdam, (2005).

[80] M. Struwe: *Variational Methods*, Springer-Verlag 2008.

[81] M. Struwe: *A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities*, Math. Z. **187** (1984), no. 4, 511–517.

[82] C. A. Stuart: *Self-trapping of an electromagnetic field and bifurcation from the essential spectrum*, Arch. Rational Mech. Anal. **113** (1991), no. 1, 65–96.

[83] C. A. Stuart: *Guidance Properties of Nonlinear Planar Waveguides*, Arch. Rational Mech. Anal. **125** (1993), no. 1, 145–200.

[84] C. A. Stuart: *Modelling axi-symmetric travelling waves in a dielectric with nonlinear refractive index*, Milan J. Math. **72** (2004), 107–128.

[85] C.A. Stuart, H.S. Zhou: *A variational problem related to self-trapping of an electromagnetic field*, Math. Methods Appl. Sci. **19** (1996), no. 17, 1397–1407.

[86] C.A. Stuart, H.S. Zhou:*Existence of guided cylindrical TM-modes in a homogeneous self-focusing dielectric*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **18** (2001), no. 1, 69–96.

[87] C.A. Stuart, H.S. Zhou: *A constrained minimization problem and its application to guided cylindrical TM-modes in an anisotropic self-focusing dielectric*, Calc. Var. Partial Differential Equations **16** (2003), no. 4, 335–373.

[88] C.A. Stuart, H.S. Zhou: *Axisymmetric TE-modes in a self-focusing dielectric*, SIAM J. Math. Anal. **37** (2005), no. 1, 218–237.

[89] C.A. Stuart, H.S. Zhou: *Existence of guided cylindrical TM-modes in an inhomogeneous self-focusing dielectric*, Math. Models Methods Appl. Sci. **20** (2010), no. 9, 1681–1719.

[90] A. Szulkin, T. Weth: *Ground state solutions for some indefinite variational problems*, J. Funct. Anal. **257** (2009), no. 12, 3802–3822.

[91] A. Szulkin, T. Weth: *The method of Nehari manifold*, Handbook of nonconvex analysis and applications, 597–632, Int. Press, Somerville, 2010.

[92] G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **110** (1976), 353–372.

[93] T. Tao: *Nonlinear dispersive equations: local and global analysis*, CBMS (2006).

[94] C. Troestler, M. Willem, *Nontrivial solution of a semilinear Schrödinger equation*, Comm. Partial Differential Equations **21** (1996), 1431–1449.

[95] L. Vietoris: *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen*, Math. Ann. **97** (1927), no. 1, 454–472.

[96] V. Vogelsang: *On the strong unique continuation principle for inequalities of Maxwell type*, Math. Ann. **289** (1991), 285–295.

[97] M. Willem: *Minimax Theorems*, Birkhäuser Verlag 1996.

[98] M. Willem, W. Zou: *On a Schrödinger equation with periodic potential and spectrum point zero*, Indiana Univ. Math. J. **52**, (2003), no. 1, 109–132.

[99] M. Yang, W. Chen, Y. Ding, *Solutions for periodic Schrödinger equation with spectrum zero and general superlinear nonlinearities*, J. Math. Anal. Appl. **364** (2010), no. 2, 404–413.

[100] X. Zeng: *Cylindrically symmetric ground state solutions for curl-curl equations with critical exponent*, arXiv:1609.09598.

Jarosław Mederski