Andrzej Palczewski
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Recenzja
w postępowaniu habilitacyjnym
dr Michała Barskiego

Wniosek dr Michała Barskiego o wszczęcie przewodu habilitacyjnego przez Radę Naukową Instytutu Matematycznego Polskiej Akademii Nauk jako osiągnięcia naukowego pod tytułem

Stochastyczne modele rynków obligacji z szumem Lévy'ego

określa cykl sześciu prac:

[BJZ] Barski M., Jakubowski J., Zabczyk J. – On incompleteness of bond markets with infinite number of random factors, *Mathematical Finance*, **21** (2011), 541–556.

[BZ1] Barski M., Zabczyk J. – Completeness of bond market driven by Lévy process, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **13** (2010), 635–656.

[BZ2] Barski M., Zabczyk J. – Forward rate models with linear volatilities, *Finance and Stochastics*, **16** (2012), 537–560.

[BZ3] Barski M., Zabczyk J. – Heath–Jarrow–Morton–Musiela equation with Lévy perturbation, *Journal of Differential Equations*, **253** (2012), 2657–2697.

[B1] Barski M. – Monotonicity of the collateralized debt obligations term structure model, *Stochastics*, **86** (2014), 835–864.

[B2] Barski M. – Incompleteness of the bond market with Lévy noise under the physical measure, *Advances in Mathematics of Finance, Banach Center Publications*, **104** (2015), 61–84.

Autor podzielił te 6 prac na 3 grupy: prace dotyczące zupełności rynku finansowego, prace dotyczące braku arbitrażu na rynku oraz prace (właściwie praca) dotycząca monotoniczności cen obligacji z możliwością bankructwa. Należy zaznaczyć, że praca [BJZ] nie dotyczy rynku z szumem Lévy'ego, ale z szumem Wienera. Oczywiście formalnie proces Wienera jest szczególnym przypadkiem procesu Lévy'ego, ale faktycznie jest to inny model. Z drugiej strony praca [BJZ] jest pierwszą z cyklu prac rozwiązujących problem zupełności rynku obligacji (mimo formalnie późniejszej daty publikacji jest to praca napisana wcześniej niż praca [BZ1]).

Zawartość merytoryczna poszczególnych prac została szczegółowo omówiona w "Autoreferacie" dr Barskiego. Znajdują się tam także odniesienia do innych prac poświęconych podobnym zagadnieniom. Dlatego recenzent nie uważa za stosowne powtarzanie, jakie wyniki znajdują się w poszczególnych pracach. W recenzji postanowiłem ograniczyć się do uwag dotyczących prac wchodzących w skład osiągnięcia naukowego oraz ich merytorycznej oceny.

Przed przejściem do komentowania poszczególnych prac chciałbym przedstawić ramy tematyki jakiej dotyczą prace stanowiące osiągnięcie naukowe. Wszystkie prace przyjmują jako punkt wyjścia model rynku stopy procentowej sformułowany przez Heatha–Jarrowa–Mortona (dalej oznaczany skrótem HJM). Model ten jest modelem stopy procentowej forward $f(t,T)$, gdzie t jest czasem bieżącym a T ma sens horyzontu czasowego. Aby dokładniej wyjaśnić sens zmiennej T napiszmy cenę obligacji zero-kuponowej

$$P(t,T) = \exp\Big(-\int_t^T f(t,u)du\Big),$$

gdzie nadal t oznacza czas bieżący a T jest terminem zapadalności obligacji.

W oryginalnej wersji modelu HJM $t \in [0,T]$ a $T \in [0,T^*]$, gdzie T^* jest horyzontem inwestycyjnym. W takim ujęciu $f(t,T)$ jest funkcją dwóch zmiennych, z których każda przebiega continuum. To oznacza, że w modelu mamy continuum obligacji o różnych terminach zapadalności. Jeśli chcemy modelować dynamikę stopy forward wprowadzając stochastyczny szum, to napotykamy podstawowe pytanie, jaki powinien być wymiar tego szumu. Ten problem nie występuje przy modelowaniu rynku akcji, gdzie mamy tylko skończoną liczbę akcji, więc szum może być też skończenie-wymiarowy. W przypadku modelu HJM szum w zasadzie powinien być nieskończenie-wymiarowy. Nawet gdyby ograniczyć się do szumu gaussowskiego, to wprowadzenie nieskończenie-wymiarowego szumu wymaga zaawansowanego aparatu matematycznego (procesy stochastyczne o wartościach w przestrzeniach Banacha/Hilberta). Ten krótki wstęp ma służyć pokazaniu, że prace dr Barskiego wymagają zaawansowanego aparatu już tylko po to, aby sformułować problem.

Praca [BJZ] zajmuje się bardzo trudnym technicznie modelem rynku obligacji, na którym gaussowski szum modelowany jest cylindrycznym procesem Wienera w l^2. Takie podejście wymusza użycie zaawansowanego aparatu analitycznego do opisu modelu: ceny obligacji są elementami przestrzeni Sobolewa H^1 a strategie inwestycyjne rozpatrywane są w kilku różnych wariantach: jako inwestycje w przeliczalną liczbę obligacji, jako miary znakowe albo jako elementy przestrzeni sprzężonej do H^1. Praca [BJZ] została jak się wydaje zainspirowana wynikami pracy [1] (numery publikacji wg spisu literatury w "Autoreferacie"). Następujący cytat z tej pracy *"It follows from Corollary 3.8 that Theorem 4.1 in Aihara and Bagchi (2005) is false. It was pointed out by one of the reviewers that the market considered in Aihara and Bagchi (2005) is approximately complete but the limit passage, performed in the proof of Theorem 4.1 to get completeness, is not correct."* sugeruje, że jeden z autorów pracy [BJZ] był recenzentem pracy [1]. Ukazanie się tej pracy bez usunięcia błędu mogło sprowokować napisanie pracy [BJZ], w której wykazano, że w rozpatrywanym modelu rynku obligacji nie ma zupełności, mimo że zdyskontowane ceny obligacji są lokalnymi martyngałami. Ten negatywny wynik wzmacnia znaczenie otrzymanego w pracy [3] wyniku pozytywnego o "aproksymatywnej zupełności" rynku obligacji.

W pracy [BZ1] modelowano rynek obligacji z szumem skokowym (Lévy'ego). Jednocześnie część gaussowską szumu ograniczono do jednowymiarowego standardowego procesu Wienera. W modelu tym założono, że czasy zapadalności obligacji w modelu stanowią przeliczany podzbiór odcinka $[0, T^*]$. Taki wybór modelu został podyktowany chęcią odniesienia się do wyników pracy [8], w której wykazano istnienie dokładnie jednej miary martyngałowej dla tego modelu. Podobnie jak w pracy [BJZ] celem było zbadanie zupełności modelu. W pracy wykazano, że odpowiedź na pytanie o zupełność modelu zależy w sposób istotny od pewnych własności miary Lévy'ego: jeśli miara ta posiada punkt koncentracji, to rynek nie jest zupełny. Z drugiej strony pokazano, że jeśli nośnik miary jest skończony, to rynek jest zupełny. Aby zrozumieć znaczenie wyniku pracy [BZ1] należy przywołać model rynku akcji. W tym modelu dowodzi się, że istnienie dokładnie jednej miary martyngałowej jest równoważne zupełności modelu. Sugestia, że taka relacja nie zachodzi dla rynku obligacji znalazła się już w pracach [3,4], ale kompletny dowód został przedstawiony dopiero w pracy [BZ1].

Praca [BZ2] związana jest z bardzo ważnym problemem modelowania stóp forward. W praktyce rynkowej funkcjonuje od połowy lat siedemdziesiątych wzór Blacka używany do wyceny opcji na stopy procentowe (*cap/floor*). Wzór ten jest podobny do wzoru Blacka-Scholesa dla rynku akcji, co oznacza, że można go wyprowadzić w log-normalnym modelu stóp procentowych. Kiedy więc pojawił się ogólny model HJM naturalne było pytanie, czy w tym modelu można wyspecyfikować zmienność (*volatility*) jako liniową funkcję stopy forward. Niestety pytanie to ma negatywną odpowiedź: przyjęcie zmienności jako liniowej funkcji stopy forward prowadzi do wybuchu rozwiązania stochastycznego równania opisującego tę stopę a w efekcie do arbitrażu. Konsekwencją tego wyniku było poszukiwanie innego modelu stóp procentowych, w którym wzór Blacka wynikałby z założeń modelu (to doprowadziło do modelu stopy LIBOR opisanego w pracy [2]). Praca [BZ2] analizuje rozwiązanie równania stopy forward, w którym szum modelowany procesem Wienera został zastąpiony szumem Lévy'ego.

Okazuje się, że w przypadku szumu Lévy'ego, liniowość zmienności jako funkcji stopy forward nie musi prowadzić do eksplozji rozwiązania. W pracy wykazano, że wybuch rozwiązania zależy od zachowania się w nieskończoności pochodnej "exponenty Laplace'a procesu Lévy'ego". Dokładne wzory opisujące to zachowanie znajdują się w "Autoreferacie": wzór (14) opisuje zachowanie, dla którego nie ma wybuchu, a wzór (15) zachowanie, które powoduje wybuch. Niestety otrzymany wynik dotyczący braku wybuchów rozwiązania nie daje możliwości przejścia do wspomnianego wcześniej wzoru Blacka. Co więcej w pracy pokazano, że jeśli tylko dyfuzja zawiera niezerową część Wienerowską to wybuch rozwiązania musi nastąpić.

Praca [BZ3] poświęcona jest problemowi istnienia rozwiązań równania HJM z szumem Lévy'ego. Równanie to analizowano w tzw. parametryzacji Musieli, która w sposób jawny pokazuje, że równanie jest cząstkowym stochastycznym równaniem różniczkowym. Nakładając silne warunki gwarantujące ciągłość lipschitzowską współczynnika dryfu i dyfuzji autorzy dowodzą istnienia lokalnych oraz globalnych rozwiązań w odpowiednich przestrzeniach funkcyjnych. Wynik jest interesujący i nowy, ale trzeba pamiętać, że lokalny warunek Lipschitza gwarantuje istnienie rozwiązań dla równań zwyczajnych w przestrzeniach Banacha. Oczywiście z tego nie wynika bezpośrednio rozszerzenie istnienia rozwiązań do równań stochastycznych, ale fakt uzyskania takiego rozszerzenia nie jest zaskakujący. W drugiej części pracy [BZ3] autorzy zajmują się problemem liniowej dyfuzji, czyli problemem rozpatrywanym w pracy [BZ2]. Wiedząc o istnieniu wybuchów rozwiązania autorzy pokazują, że nawet kiedy wybuch następuje istnieją lokalne rozwiązania. Pracę [BZ3] należy traktować jako ważne uzupełnienie badań nad modelem HJM z szumem Lévy'ego, w której w sposób systematyczny zbadano kwestię lokalnego oraz globalnego istnienia rozwiązań wskazując przestrzenie funkcyjne, w których te rozwiązania istnieją.

Praca [B1] dotyczy modelu kontraktów CDO (collateralized debt obligations). Kontrakty takie można traktować jako obligacje zagrożone możliwością bankructwa. Model takich obligacji prócz standardowego czasu bieżącego t oraz czasu zapadalności T uwzględnia także wielkość straty w momencie zapadalności (mierzonej parametrem x). Z ekonomicznego punktu widzenia cena obligacji jako funkcja T powinna być funkcją malejącą (obligacje zapadające później powinny być tańsze) a ze względu na parametr x funkcją rosnącą (obligacje z mniejszą stratą powinny być droższe). Praca zajmuje się konstrukcją modelu, w którym te naturalne ekonomicznie warunki są spełnione. Rozpatrywany model matematyczny jest podobny do modelu z pracy [BZ3], tj. równanie HJM z szumem Lévy'ego w parametryzacji Musieli. W pracy wykorzystywane są wyniki z [BZ3] dotyczące istnienia rozwiązań oraz dowodzone warunki monotoniczności cen obligacji po T oraz x. Dowody polegają na rozwinięciu pomysłów z prac [10], [18] oraz [21].

Praca [B2] zajmuje się podobnym problemem jak praca [BZ1], tj. kwestią zupełności rynku obligacji w modelu HJM z z szumem Lévy'ego. W przeciwieństwie do pracy [BZ1] w tej pracy problem rozpatrywany jest w mierze rynkowej (którą autor nazywa miarą fizyczną). Wynik uzyskany w tej pracy jest analogiczny do wyniku pracy [BZ1], ale uzyskanie tego wyniku wymagało znacznej dodatkowej pracy związanej z przejściem od miary rynkowej do miary martyngałowej, co jest niezbędne przy badaniu zupełności. W przypadku modelu z szumem Wienera przejście to jest załatwiane twierdzeniem Girsanowa. Niestety dla szumu Lévy'ego zamiana miary wynikająca z twierdzenia Girsanowa nie przekształca procesu Lévy'ego w inny proces Lévy'ego. Ten fakt wymusza wyprowadzenie od podstaw formuły o reprezentacji martyngałowej, która stanowi kluczowy krok w dowodzie zupełności rynku. W pracy przeprowadzono tę konstrukcje bazując na pomysłach Kunity [15]. Zarówno uzyskany wynik jak stosowane techniki dowodowe w istotny sposób bazują na wynikach pracy [BZ1] oraz pomysłach Kunity, chociaż w tym ostatnim przypadku ich realizacja wymagała sporego nakładu oryginalnej pracy.

Poza 6 pracami wchodzącymi w skład "osiągnięcia naukowego" dr Barski jest współautorem monografii oraz autorem 8 prac naukowych. Kilka z tych prac zostało opublikowane w dobrych czasopismach międzynarodowych a pozostałe w dobrych czasopismach krajowych. Co prawda nie jestem entuzjastą pisania przez młodych badaczy monografii naukowych, nawet jeśli monografie te powstają we współpracy ze starszym i doświadczonym kolegą (a może nawet szczególnie, gdy monografia powstaje w wyniku takiej współpracy). Ponieważ jednak monografia ma być dopiero opublikowana pod koniec tego roku, nie mogę na jej temat mieć własnego zdania. 5 spośród 8 prac autorstwa dr Barskiego dotyczy problemu zabezpieczenia kwantylowego (*quantile hedging*) instrumentów pochodnych. Tematyka ta jest kontynuacją problemów, które stanowiły przedmiot pracy doktorskiej dr Barskiego (2 spośród tych 5 prac zawierają wyniki doktoratu). Najnowsza z tych 5 prac, tj. [QH1] istotnie rozszerza wyniki uzyskane dla zabezpieczenia kwantylowego przez wprowadzenie górnego ograniczenia strat. Także praca [AsPr] jest w pewnym stopniu kontynuacją tematyki zabezpieczenia kwantylowego. W pracy tej badano problem wyceny instrumentów pochodnych na tzw. "dużym rynku finansowym" kiedy liczba akcji dostępnych na rynku dąży do nieskończoności. Główne wyniki dotyczą relacji między cenami zdefiniowanymi w różny sposób (w tym także jako wielkości zabezpieczenia kwantylowego). Zupełnie inna jest tematyka pracy [APPR]. Praca ta dotyczy aproksymacji rozwiązań stochastycznych równań różniczkowych z szumem Lévy'ego. Otrzymano schematy aproksymacyjne dla zadanego z góry rzędu zbieżności, w szczególności uzyskano uogólnienie znanych z aproksymacji równań Ito schematów Eulera-Maruyamy oraz Milsteina. Praca jest niewątpliwie bardzo interesująca, a to czego w niej brakuje recenzentowi, to empirycznych testów numerycznych, które mogłyby potwierdzić skuteczność proponowanych aproksymacji w praktyce.

Prace skradające się na osiągnięcie naukowe stanowią jednotematyczny cykl publikacji poświęconych badaniu modeli stóp procentowych z szumem Lévy'ego. Prace te ukazały się w bardzo dobrych czasopismach międzynarodowych. Problemy rozwiązane w tych pracach są ważne z punktu widzenia matematyki finansowej, przy czym istotne jest głównie znaczenie uzyskanych wyników dla kompletności matematycznych aspektów rozpatrywanych modeli. W "Autoreferacie" dr Barski szczegółowo opisał swój wkład w powstanie poszczególnych prac, co znajduje pełne potwierdzenie w oświadczeniach współautorów prac. Z tego opisu wynika istotny wkład habilitanta w powstanie wszystkich prac (waha się on od 40% do 70%). Od strony matematycznej prace są trudne technicznie. Uzyskanie głównego wyniku jest często poprzedzone budowaniem oryginalnego aparatu pomocniczego. Nie mam wątpliwości, że matematyczna wartość prac stanowiących osiągnięcie naukowe w pełni spełnia wymagania oczekiwane od prac habilitacyjnych.

Pierwsze 4 prace wchodzące w skład osiągnięcia naukowego powstały we współpracy z prof. Zabczykiem. Jest rzeczą zupełnie oczywistą, że to prof. Zabczyk był inspiratorem tych badań (prof. Zabczyk jest znany z takiej współpracy z młodymi uczonymi nie tylko w Polsce). Jest też zupełnie oczywiste, że dr Barski zyskał na tej współpracy znacznie większe umiejętności techniczne a także głębsze spojrzenie na problemy matematyki finansowej. Powstaje jednak pytanie w jakim stopniu w wyniku tej współpracy dr Barski stał się samodzielnym badaczem mogącym w przyszłości kierować badaniami młodszych kolegów. W moim przekonaniu odpowiedź na to pytanie jest pozytywna. Świadczą o tym 2 ostatnie prace z cyklu, które są pracami samodzielnymi a także zawartość tych prac. W pracy [B1] autor rozwiązał problem, który wcześniej był atakowany w pracy współautorstwa prof. Zabczyka. Także praca [B2], mimo że wyrasta z problemu rozpatrywanego w [BZ1], oferuje nowe podejście do rozpatrywanego problemu. Wreszcie o samodzielności dr Barskiego świadczą prace nie wchodzące do osiągnięcia naukowego, które są wyłącznie pracami autorstwa dr Barskiego. W części z tych prac autor rozwiązuje nowe problemy nie związane z pracami wchodzącymi w cykl osiągnięcia naukowego.

Ten pozytywny obraz wyników naukowych dr Michała Barskiego jest niestety znaczenie osłabiony odbiorem jego prac w środowisku matematycznym. Zgodnie z Mathematical Review jego prace były cytowane jedynie 6 razy (bez autocytowań). Praca [BZ3] była cytowane 4 razy a prace [BJZ] i [BZ2] po 1 razie, łącznie w 5 publikacjach przy czym 3 z tych publikacji mają wspólnego współautora. Wynika stąd, że prace dr Barskiego dostrzegło zaledwie 3 matematyków. Jest to wynik wyjątkowo ubogi biorąc pod uwagę, że cześć z jego prac ukazało się już wystarczająco dawno (lata 2010-12) oraz w bardzo dobrych czasopismach, które mają szeroki odbiór w środowisku matematyków zajmujących się matematyką finansową. Jedynym wyjaśnieniem jakie widzi recenzent, to charakter prac dr

Barskiego. Część prac zawiera wyłącznie wynik negatywny (prace [BJZ], [BZ1], [B2]). Oczywiście wyniki negatywne są ważne w rozwoju matematyki, a w zastosowaniach matematyki szczególnie istotne, ponieważ wskazują one na granice stosowalności używanych modeli. Ale w matematyce finansowej, gdzie matematycy walczą ciągle o tworzenie modeli adekwatnych do opisu rzeczywistych rynków finansowych, wyniki negatywne nie tworzą postępu. Podobne wyjaśnienie stosuje się także do pracy [BZ2]. Jak to zostało już wcześniej powiedziane przy omawianiu tej pracy, istotą potrzeby modelowania zmienności jako liniowej funkcji stopy forward, nie było stworzenie takiego modelu, ale uzyskanie dzięki niemu wzory Blacka dla capletów. Praca [BZ2] tworzy model z liniową zmiennością, ale wzoru Blacka nie daje, stąd wynik taki jest raczej ciekawostką, która zadania tworzenia modeli zgodnych z rzeczywistością rynkową nie posuwa do przodu.

WNIOSKI KOŃCOWE

Podsumowując stwierdzam, że dorobek dr Michała Barskiego zawarty w cyklu prac "Stochastyczne modele rynków obligacji z szumem Lévy'ego" spełnia warunki do przyznania stopnia doktora habilitowanego wymagane w Ustawie o tytule naukowym i stopniach naukowych. Prace wchodzące w skład osiągnięcia naukowego wnoszą istotny wkład w wiedzę na temat modelowania rynku stóp procentowych szumem Lévy'ego. Prace te zostały w większości opublikowane w bardzo dobrych czasopismach z dziedziny matematyki finansowej. Także pozostały dorobek dr Barskiego stoi na dobrym poziomie. Słabą stroną osiągnięcia naukowego dr Barskiego jest jego bardzo mała zauważalność w środowisku matematycznym. Jak to zostało wyjaśnione wcześniej jest to w dużym stopniu efekt rodzaju uzyskanych rezultatów (wyniki negatywne). Mimo tych niedostatków uważam, że osiągnięcie naukowe dr Michała Barskiego spełnia warunki wymagane do przyznania stopnia doktora habilitowanego nauk matematycznych.

Warszawa, 9 listopada 2015 r.