

## AUTOREFERAT

KAROL PALKA

Adres: Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa  
Email: palka@impan.pl  
www: www.impan.pl/~palka

### Dyplomy i stopnie naukowe

- IX 2010 Magister Nauk Fizycznych, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski, *Calabi-Yau varieties and their role in String Theory*, promotorzy: dr V. Bouchard, dr hab. J. Pawełczyk
- V 2009 Doktor Nauk Matematycznych, z wyróżnieniem, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW, *Singular  $\mathbb{Q}$ -homology planes*, promotor: prof. Mariusz Koras
- IX 2004 Magister Nauk Matematycznych, z wyróżnieniem, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW, *Group homomorphisms inducing isomorphism on homology*, promotor: prof. Zbigniew Marciniak

### Dotychczasowe zatrudnienie

- X 2012- Adiunkt, Instytut Matematyczny PAN, Warszawa
- 2011-12 Staż podoktorski, University of Quebec (UQAM), Mathematics Department, Montreal
- 2010-11 Staż podoktorski, McGill University, Mathematics and Statistics Department, Montreal
- 2009-10 Research Assistant Professor, Concordia University, Mathematics Department, Montreal
- 2008-09 Adiunkt, Instytut Matematyczny PAN, Warszawa
- 2004-09 Doktorant, Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki Informatyki i Mechaniki, Warszawa



## Osiągnięcie habilitacyjne:

PROGRAM MODELI NIEMAL MINIMALNYCH  
I HIPOTEZA COOLIDGE’A-NAGATY

- [HAB1] Karol Palka, *Cuspidal curves, minimal models and Zaidenberg’s finiteness conjecture*, J. Reine Angew. Math. (online 2016), 28 pages, DOI 10.1515/crelle-2016-0021.
- [HAB2] Karol Palka, *The Coolidge–Nagata conjecture, Part I*, Adv. Math. **267** (2014), 1–43, DOI 10.1016/j.aim.2014.07.038.
- [HAB3] Mariusz Koras and Karol Palka, *The Coolidge–Nagata conjecture*, Duke Math. J. **166** (2017), 61 pages (to be assigned), DOI 10.1215/00127094-2017-0010.
- [HAB4] Karol Palka and Tomasz Pelka, *Classification of planar rational cuspidal curves. I.  $\mathbb{C}^{**}$ -fibrations*, Proc. London Math. Soc. (3) (online 2017), 55 pages, DOI 10.1112/plms.12049.

## OMÓWIENIE

## 1. WSTĘP: TEORIA I PROBLEMY POWIERZCHNI OTWARTYCH

1A. *Rozmaitości otwarte i log rozmaitości*

Przez *rozmaitość (otwartą)* rozumiem zespoloną quasi-rzutową normalną rozmaitość algebraiczną. Niech  $S$  będzie gładką rozmaitością. Dzięki twierdzeniu o rozwiązywaniu osobliwości możemy zanurzyć  $S$  w rozmaitość rzutową gładką  $X$  tak, że  $D = X \setminus S$  jest zredukowanym dywizorem o gładkich składowych nieredukowalnych i transwersalnych przecięciach (tzw. *snc-dywizor*). Mówimy wówczas, że  $(X, D)$  jest *gładkim uzupełnieniem*  $S$ . Dywizor  $D$  jest tutaj traktowany jako model nieskończoności dla  $S$ . Jeśli takie uzupełnienie nie dominuje nietrywialnie innego gładkiego uzupełnienia poprzez morfizm biwymierny uzupełnień, to mówimy, że jest (snc-) minimalne.

**Przykład 1.1.** Dla przykładu, pary  $(\mathbb{F}_n, F_\infty + C)$ , gdzie  $\mathbb{F}_n = \text{Proj}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$  jest  $n$ -tą powierzchnią Hirzebrucha,  $F_\infty$  włóknem rzutowania na  $\mathbb{P}^1$ , a  $C$  - dowolnym cięciem, są gładkimi uzupełnieniami  $\mathbb{C}^2$ , minimalnymi gdy  $C^2 \neq -1$ . Takich uzupełnień jest jednak dużo więcej [Mor73, Theorem 9] i mogą mieć brzeg o dowolnie dużej liczbie składowych w  $D$  i randze Picarda  $X$  (oznaczanej jako  $\rho(X)$ ).

Dzięki wynikom Iitaki [Iit82] wiemy, że tak, jak kluczową rolę dla  $X$  odgrywa klasa dywizora kanonicznego  $K_X$ , tak dla  $S$  kluczową rolę odgrywa klasa dywizora  $\log$  kanonicznego  $K_X + D$ . Pomimo że para  $(X, D)$  nie jest wyznaczona jednoznacznie przez  $S$ , wiadomo, że np. wymiary przestrzeni cięć  $H^0(m(K_X + D), X)$ ,  $m \geq 1$  nie zależą od wyboru gładkiego uzupełnienia. W szczególności, mamy dobrze zdefiniowany wymiar Kodairy

$$\kappa(S) := \kappa(K_X + D, X) \in \{-\infty, 0, 1, \dots, \dim S\}.$$

W ten sposób badanie rozmaitości otwartej  $S$  jest w istocie zamieniane na badanie pary  $(X, D)$ .

Ogólniej, nawet jeśli koncentrujemy się na rozmaitościach rzutowych, to do prowadzenia wielu rozumowań, w szczególności tych indukcyjnych względem wymiaru, nieodzowne staje się rozwijanie teorii par  $(X, D)$  i to w wersji gdzie  $X$  jest rozmaitością rzutową, niekoniecznie gładką, a  $D$  jest *dywizorem brzegowym*, tzn.  $\mathbb{Q}$ -dywizorem Weila, takim że w rozkładzie nieredukowalnym  $D = \sum d_i D_i$

współczynniki  $d_i$  są liczbami wymiernymi z przedziału  $[0, 1]$  oraz dywizor  $K_X + D$  jest  $\mathbb{Q}$ -Cartier. Taką parę nazywamy *log rozmaitością* i mówimy, że jest ona *ładka*, gdy  $X$  jest ładkie, a redukcja  $D$  jest snc-dywizorem.

Od lat 80-tych w geometrii algebraicznej święci triumfy program modeli minimalnych (program Mori, zob. [KM98]), dowodzone są w coraz ogólniejszych przypadkach fundamentalne hipotezy dotyczące istnienia log modeli minimalnych i ich własności. Analogi afiniczne są jednak często dużo trudniejsze. Na przykład, wiadomo że w wymiarze 3 ładka rozmaitość o ujemnym wymiarze Kodairy jest pokryta krzywymi tnącymi dywizor kanoniczny ujemnie ([MM86], por. [BDPaP13]; hipoteza o obfitości daje też uogólnienie na przypadek semi-log kanoniczny [Fuj00]), skąd dzięki trickowi „bend and break” Mori jest pokryta obrazami  $\mathbb{P}^1$ . Ale analogiczne pytanie dla rozmaitości otwartych: czy ładka quasi-rzutowa rozmaitość o ujemnym wymiarze Kodairy jest pokryta obrazami  $\mathbb{C}^1$ , jest w wymiarze 3 otwarte, a dowód dla powierzchni liczy 150 stron [KM99]. Na przeszkodzie stoi m.in. to, że logarytmiczna wersja tricku Mori, log bend-and-break (1.1 loc cit.), na razie również jest tylko hipotezą.

Dodatkowe problemy pojawiają się w odniesieniu do struktury afinicznej. Jeśli spojrzymy na listę fundamentalnych problemów dotyczących przestrzeni afinicznych [Kra96], okazuje się, że przez ostatnie dwadzieścia lat w porównaniu z geometrią rzutową postęp jest mały, a prawie wszystkie problemy sformułowane na liście Krafta pozostają otwarte już w wymiarze 3, hipoteza jakobianowa już w wymiarze 2. Logarytmiczny program modeli minimalnych stosowany do uzupełnienia rozmaitości afinicznej najczęściej już przy pierwszym ściągnięciu narusza afiniczność części otwartej (problemy pojawiają się już dla log powierzchni [DL08]). Struktura afiniczna okazuje się być zbyt subtelna do opanowania w tym języku i wymaga dodatkowych narzędzi. Egzystencjalne twierdzenia programu modeli minimalnych (istnieje model, istnieje ściągnięcie, ciąg flipów się kończy, pierścień ma skończoną liczbę generatorów) potrzebują tutaj wsparcia w postaci precyzyjnej kontroli procesu minimalizacji, którą udało się jak dotąd osiągnąć jedynie dla specjalnych klas log powierzchni („teoria obierania” [Miy01, §2.3], por. też [Kol97]). Praca [HAB1] uczyniła pewien postęp w tym ostatnim obszarze.

## 1B. *Krzywe ostrzowe*

Chociaż teoria powierzchni otwartych osiągnęła spore sukcesy (zob. [Miy07]), w pewnych obszarach istniejących narzędzi jest mało. **Dotyczy to w szczególności powierzchni wymiernych log ogólnego typu** (patrz Sekcja 1E), które z jednej strony mają bogatą geometrię biwymierną, a z drugiej dywizor log kanoniczny jest duży, co powoduje zachowania i ograniczenia analogiczne jak dla powierzchni rzutowych ogólnego typu. Żeby to zobrazować i opisać wkład, który wniosły prace przedstawiane jako osiągnięcie habilitacyjne, skoncentruję się na następującym klasycznym problemie:

**Problem 1.2.** Jaką geometrię mają krzywe płaskie o topologii prostej rzutowej? W szczególności:

- (a) ile mogą mieć osobliwości (ostrzy)?
- (b) jakie są ich klasy równoważności względem działania grupy Cremony  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ ?
- (c) jaka jest ich opis z dokładnością do wyboru współrzędnych?

Krzywa jak wyżej musi być wymierna, a jej osobliwości to ostrza (są lokalnie analitycznie nieredukowalne), a więc jest *wymierną krzywą ostrzową*. Krzywe te, mimo że ich topologia jest prosta, mogą być skomplikowane i mają liczne ciekawe własności algebraiczne. Od dawna wzbudzają więc zainteresowanie topologów i geometrów (zob. prace przeglądowe [MN07], [Moe08], [BBSdR16]). Problem 1.2 należy do szerokiej klasy problemów, gdzie przy założeniu znikania lub odpowiednio rozumianej trywialności topologicznej lub homologicznej, algebraiczna natura rozmaitości jest lepiej widoczna, często skomplikowana. Dla przykładu, podobne motywacje towarzyszą intensywnym badaniom

struktur egzotycznych na przestrzeniach afinicznych, badaniu rozmaitości ściąganych,  $\mathbb{Z}$ - lub  $\mathbb{Q}$ -acyklicznych albo też mających homologie przestrzeni rzutowej (fałszywe przestrzenie rzutowe).

Problem (c) jest najtrudniejszy. Rozwiązanie jego analogu w przypadku afinicznym wynika z ważnych twierdzeń Abhyankara-Moha i Suzuki [AM75], [Suz74] i Zaidenberga-Lina [ZL83]: na płaszczyźnie afinicznej każda krzywa o topologii linii afinicznej  $\mathbb{C}^1$  ma w pewnych współrzędnych równanie  $x^m = y^n$  dla pewnych względnie pierwszych  $n > m > 1$ , w szczególności ma co najwyżej 1 punkt osobliwy i jest Cremona-równoważna z  $\{x = 0\}$ . Dowód twierdzenia w przypadku osobliwym nie jest prosty. Mój niedawny dowód używający teorii powierzchni otwartych omawiam w Sekcji 3D.

### 1C. Powierzchnie nie będące log ogólnego typu

Problem 1.2(c) dzieli się naturalnie na cztery przypadki. Jego trudność wzrasta w miarę wzrostu  $\kappa$ . Przypomnijmy następujące twierdzenia strukturalne. Niech  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}^1 \setminus \{0\}$ .

**Twierdzenie 1.3** (Miyanishi-Sugie [MS80], Fujita [Fuj82], Kawamata [Kaw79]). *Niech  $S$  będzie gładką powierzchnią afiniczną.*

- (1) *Jeśli  $\kappa(S) = -\infty$ , to  $S$  zawiera cylinder  $\mathbb{C}^1 \times B$  dla pewnej krzywej  $B$ .*
- (2) *Jeśli  $\kappa(S) = 0$  oraz  $S$  nie zawiera linii afinicznych, to  $D$  jest cyklem krzywych wymiernych, gładką krzywą eliptyczną, widelcem wymiernym albo specjalnym drzewem wymiernym z dwoma składowymi rozgałęziającymi.*
- (3) *Jeśli  $\kappa(S) = 1$ , to  $S$  posiada  $\mathbb{C}^*$ -rozwłóknienie.*

Zauważmy, że krzywe  $\mathbb{C}^1$  i  $\mathbb{C}^*$  są afinicznymi odpowiednikami  $\mathbb{P}^1$  i krzywej eliptycznej, ich logarytmiczne wymiary Kodairy to odpowiednio  $-\infty$  i 0. Przy użyciu powyższych twierdzeń można rozwiązać Problem 1.2 w przypadkach  $\kappa = -\infty, 0, 1$  badając uzupełnienie rozwłóknienia do  $\mathbb{P}^1$ -rozwłóknienia i studiując jego włókna osobliwe. Pokazano, że przypadek  $\kappa = 0$  nigdy nie zachodzi [Tsu81b], a w przypadkach  $\kappa = -\infty, 1$  osiągnięto klasyfikację [Kas87], [Ton00a], [Ton01], [Ton00b]. W szczególności potwierdzono w przypadku  $\kappa \neq 2$  następujące hipotezy.

**Hipoteza A** (Hipoteza Coolidge'a-Nagaty). *Płaskie wymierne krzywe ostrzowe są Cremona-równoważne z linią.*

**Hipoteza B** (Orevkov-Piontkowski [Pio07]). *Płaskie wymierne krzywe ostrzowe mają co najwyżej cztery ostrza.*

Powyższy problem obrazuje dość ogólną sytuację: zawsze, gdy mamy do badania powierzchnię otwartą nieogólnego typu ( $\kappa \neq 2$ ), jej strukturę możemy określić opierając się na znanych twierdzeniach strukturalnych (dla powierzchni nieafinicznych można je znaleźć w monografii [Miy01]). Zauważmy jednocześnie, że istnieje wiele problemów, w których nawet pełne zrozumienie struktury danej powierzchni jest niewystarczające, żeby odpowiedzieć na pytania subtelniejszej natury. Hipoteza jakobianowa dla  $\mathbb{C}^2$  jest tutaj sztandarowym przykładem (por. Sekcja 3E).

### 1D. Modele niemal minimalne wg Miyanishi'ego (brzeg zredukowany)

Wygodnie będzie prowadzić rozumowania w języku logarytmicznego programu modeli minimalnych (czytelnik może porównać oryginalne konstrukcje w [Sak84, §7], [Kaw79]). Po niezbędne pojęcia teorii modeli minimalnych, w tym definicje osobliwości log kanonicznych odsyłamy do [Mat02]. Logarytmiczne modyfikacje wersji idei Mori były prawie od początku używane w teorii powierzchni otwartych ([MT84], [Rei86], por. [Miy07, §3.2]).

**Definicja 1.4.** Niech  $(X, D)$  będzie powierzchnią log kanoniczną.

- (1) Krzywa  $\ell \subseteq X$  jest *log wyjątkowa*, jeśli  $\ell^2 < 0$  oraz  $\ell \cdot (K_X + D) < 0$ .
- (2)  $(X, D)$  jest *minimalna*, gdy nie ma na niej krzywych log wyjątkowych.

Zauważmy że, nieco niestandardowo, jeśli brać pod uwagę obecną terminologię, w (2) nie zakładamy  $\kappa(K_X + D) \geq 0$ . Wprowadźmy następujące dodatkowe definicje. W przypadku log powierzchni gładkiej ze zredukowanym brzegiem są one równoważne z oryginalnymi (konstruktywnymi) definicjami Miyanishi'ego [Miy01, §2.3].

**Definicja 1.5.** Niech  $(X, D)$  będzie powierzchnią log kanoniczną.

- (1) Każdy morfizm (biwymierny)  $\alpha: (X, D) \rightarrow (\alpha(X), \alpha_*D)$ , który jest złożeniem ściągnięć krzywych log wyjątkowych **zawartych w  $D$  i jego obrazach** oraz taki, że  $\alpha_*D$  nie zawiera już krzywych log wyjątkowych, nazywamy *morfizmem obierania*.
- (2)  $(X, D)$  jest **niemal minimalna**, gdy  $(\alpha(X), \alpha_*D)$  jest minimalna dla pewnego morfizmu obierania  $\alpha$ .
- (3) Krzywa  $L \subseteq X$  jest **niemal log wyjątkowa na  $(X, D)$** , gdy  $\alpha(L)$  jest log wyjątkowa na  $(\alpha(X), \alpha_*D)$  dla pewnego morfizmu obierania  $\alpha$ .

Dla przykładu, jeśli tylko dywizor brzegowy  $D$  zawiera krzywą wymierną  $L$  o ujemnym samo-przecięciu, która tnie pozostałą część  $D$  co najwyżej raz (tzw. końcówka wymierna), to powierzchnia  $(X, D)$  nie jest minimalna. Rzeczywiście, mamy bowiem

$$L \cdot (K_X + D) = L \cdot (K_X + L) + L \cdot (D - L) = 2(p_a(L) - 1) + 1 = -1 < 0.$$

Tak jest na przykład dla log powierzchni  $(\mathbb{F}_n, C_n)$ , gdzie  $\mathbb{F}_n = \text{Proj}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$ ,  $n \geq 2$  jest powierzchnią Hirzebrucha, a  $C_n$  jedyną ujemną krzywą na niej. Morfizm obierania jest tutaj ściągnięciem  $C_n$ . A więc znany fenomen, że model minimalny rozmaitości rzutowej gładkiej wymiaru 3 nie musi być gładki, występuje w wersji z brzegiem już w wymiarze 2. Dlatego też teoria powierzchni otwartych jest istotnie trudniejsza od teorii powierzchni zupełnych. Pojęcie i konstrukcja modelu **niemal minimalnego** [Miy01, §3.3.11] pozwalają uniknąć wprowadzania osobliwości. Dla geometrii obeznanego z rolą osobliwości w programie modeli minimalnych jest to rezultat zaskakujący (por. Twierdzenie 1.6).

Przypomnijmy, że dywizor zredukowany  $T = T_1 + \dots + T_k$  nazywamy *łańcuchem wymiernym*, gdy dla każdego  $i$  mamy  $T_i \cong \mathbb{P}^1$  oraz  $T_i \cdot T_j$  jest równe 1, gdy  $|i - j| = 1$  oraz jest równe 0 w przeciwnym przypadku. Poddywizor  $T$  dywizora zredukowanego  $D$  nazywamy jego *gałązką wymierną*, gdy  $T$  jest łańcuchem wymiernym,  $\beta_D(T_1) \leq 1$  oraz  $\beta_D(T_i) \leq 2$  dla  $i > 1$ , gdzie

$$(1.1) \quad \beta(T_i) := T_i \cdot (D - T_i).$$

Piszemy wówczas

$$(1.2) \quad T = [a_1, \dots, a_k],$$

gdzie  $a_i = -T_i^2$ . Będziemy potrzebować następującej charakteryzacji.

**Twierdzenie 1.6** ([Fuj82], [Miy01] §2). *Niech  $(X, D)$  będzie gładkim minimalnym uzupełnieniem gładkiej powierzchni afinicznej  $S$ . Załóżmy, że  $\kappa(S) \geq 0$ . Wówczas*

- (1) *Morfizm obierania  $\alpha: (X, D) \rightarrow (X', D')$  ściąga dokładnie maksymalne wymierne gałązki  $D$  (w szczególności, jest jednoznacznie wyznaczony).*
- (2) *Niech  $L$  będzie transformatą właściwą krzywej na  $(X', D')$ . Wówczas krzywa  $L \not\subseteq D$  jest niemal wyjątkowa wtedy i tylko wtedy, gdy  $L$  jest  $(-1)$ -krzywą taką, że  $L \cdot D = 1$  oraz punkt przecięcia należy do pewnej gałązki wymiernej  $D$ . W szczególności, jeśli taka krzywa istnieje, to  $S$  zawiera linię afiniczną.*

Zauważmy, że z powyższej charakteryzacji wynika, że krzywa niemal log wyjątkowa **nie jest** log wyjątkowa ( $L \cdot (K_X + D) = 0$ ). Ściąganie takich krzywych zachowuje jednak log gładkość powierzchni i jest używane w budowie modelu niemal minimalnego zdefiniowanego oryginalnie w przypadku zredukowanego dywizora brzegowego  $D$  [Miy01, §3.3.11]. Dodajmy, że dla powierzchni nieafinicznych krzywe niemal wyjątkowe są również  $(-1)$ -krzywymi, ale ich charakteryzacja jest bardziej skomplikowana.

## 1E. Powierzchnie log ogólnego typu

Nie ma twierdzeń strukturalnych dla powierzchni log ogólnego typu. Monografia Miyanishi'ego poświęca temu przypadkowi dwie strony [Miy01, str. 191-192]. Jedynym ogólnym narzędziem są logarytmiczne nierówności Bogomolova-Miyaoki-Yau i Noether (patrz [KNS89], [Lan03], [TZ92]). Przypomnijmy, że przy założeniu, że początkowa powierzchnia rzutowa jest nieosobliwa, *log rezolwenta* (odpowiednio: *słaba rezolwenta*) jest złożeniem ciągu rozdmuchań takiego, że transformata totalna (odpowiednio: właściwa) początkowego dywizora jest snc.

**Notacja 1.7.** Ustalmy następującą notację:

- $\bar{E} \subseteq \mathbb{P}^2$  jest wymierną krzywą ostrzową,
- $\pi: (X, D) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \bar{E})$  jest minimalną log rezolwentą, a  $E \subseteq X$  transformatą właściwą  $\bar{E}$ ,
- $\pi_0: (X_0, D_0) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \bar{E})$  to minimalna słaba rezolwenta,  $E_0 \subseteq X_0$  transformata właściwa  $\bar{E}$ ,
- $\kappa := \kappa(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{E}) = \kappa(K_X + D) \in \{-\infty, 0, 1, 2\}$ .

Interesują nas krzywe wymierne ostrzowe  $\bar{E} \subseteq \mathbb{P}^2$ , dla których  $\kappa(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{E}) = 2$ , bo dla nich Problem 1.2 jest najtrudniejszy i otwarty. Mamy następujący wynik.

**Lemat 1.8** ([MT92], [Zai06]). *Niech oznaczenia będą jak w Notacji 1.7. Jeśli  $\kappa(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{E}) = 2$ , to  $\mathbb{P}^2 \setminus \bar{E}$  nie zawiera linii afinicznej, a więc powierzchnia  $(X, D)$  jest niemal minimalna.*

Pomimo powyższego wyniku, okazało się, że wnioski płynące z logarytmicznego programu modeli minimalnych dla  $(X, D)$  są za słabe, żeby rozwiązać którykolwiek z problemów 1.2. Na przykład, przy użyciu nierówności log BMY i przy założeniu sztywności, Orevkov i Zaidenberg pokazali [ZO96], że  $\bar{E} \subseteq \mathbb{P}^2$  ma co najwyżej 10 ostrzy. Tymczasem krzywa (kwintyka) z największą znaną liczbą ostrzy ma ich 4 [Nam84, 2.3.10.7]. Sama liczba ostrzy nie mówi jednak nic o poziomie ich skomplikowania, który można mierzyć rozmiarem (liczbą składowych, w tym rozgałęzień) dywizora  $D$ . Znane serie przykładów mówią, że gałązki wymierne  $D$  mogą osiągać dowolnie dużą długość. Zaidenberg postawił jednak następującą hipotezę:

**Hipoteza C** (Hipoteza o skończoności, [Zai05]). *Niech oznaczenia będą jak w Notacji 1.7. W przypadku  $\kappa(\mathbb{P}^2 \setminus \bar{E}) = 2$  liczba możliwych typów topologicznych dywizora  $D$  (równoważnie: liczba możliwych diagramów Eisenbuda-Neumanna  $\bar{E}$ ) jest skończona.*

## 2. OSIĄGNIĘCIE HABILITACYJNE

Główny pomysł na nowe narzędzie jest prosty. Rozważmy, tak jak to jest w przypadku Problemu 1.2, gładką powierzchnię afiniczną  $S$ , która jest log ogólnego typu. Niech  $(X, D)$  będzie jej gładkim minimalnym uzupełnieniem (a więc dywizor  $D$  jest zredukowany). Używając klasycznego programu modeli niemal minimalnych (por. Twierdzenie 2.1) możemy zakładać, że  $(X, D)$  jest niemal minimalna (tak jest dla  $\mathbb{P}^2 \setminus \bar{E}$ , Lemat 1.8), a więc nie zawiera  $(-1)$ -krzywych nie zawartych w  $D$  i tnących  $D$  raz. Jeśli informacje uzyskane o  $(X, D)$  są niewystarczające, to należy

badać powierzchnie  $(X, rD)$ , gdzie  $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ .

Gdy zmniejszamy  $r$ , powyższa powierzchnia przestaje być niemal minimalna. Pojawiają się nowe krzywe niemal log wyjątkowe, a ich sukcesywne ściąganie prowadzi do mniejszego modelu, którego własności dają silniejsze ograniczenia na geometrię powierzchni  $(X, D)$ . Co kluczowe, można pokazać, że jeśli  $r$  nie jest za małe, to ściąganie krzywych niemal log wyjątkowych nie wprowadza log osobliwości, tzn. nie wprowadza nowych osobliwości powierzchni zupełnej oraz pchnięcie dywizora brzegowego ma normalne przecięcia w punkcie, który jest obrazem ściągniętej krzywej niemal wyjątkowej.

Dla  $r = 1$  mamy klasyczną teorię modeli niemal minimalnych opisaną wyżej. Dla  $r = 0$  mamy do czynienia ze zwykłym rzutowym programem modeli minimalnych dla  $X$ , który nie widzi  $D$  (por. Definicja 1.4(1)), tzn. przecięcie ściąganych  $(-1)$ -krzywych z  $D$  i jego obrazami jest kompletnie dowolne, co oznacza, że taki program jest bezużyteczny do badania geometrii  $D$ . W szczególności, nie zachowuje log gładkości.

W pracy [HAB1] badałem uogólnienie pojęcia powierzchni niemal minimalnej (Definicja 1.5) i pokazałem, że najbardziej skuteczne jest badanie powierzchni  $(X, \frac{1}{2}D)$ , gdzie współczynnik  $\frac{1}{2}$  jest dobrany w bardzo przemyślany sposób. Omówię teraz wyniki zawarte w [HAB1, §3-4]. Powierzchnia  $(X, D)$  jest niemal minimalna, ale powierzchnia  $(X, \frac{1}{2}D)$  taka być nie musi, trzeba więc zbudować jej model niemal minimalny w analogii do przypadku  $r = 1$  ([Miy01, §2.3]).

## 2A. Konstrukcja modelu niemal minimalnego dla $(X, \frac{1}{2}D)$

Niech oznaczenia będą jak w Notacji 1.7. Zakładamy, że  $\kappa := \kappa(K_X + D) = 2$ . Oczywiście, istnieje morfizm  $\varphi_0: (X, D) \rightarrow (X_0, D_0)$ , który polega na rozdmuchaniu punktów styczności  $E_0$  z  $D_0 - E_0$ . Konstrukcja modelu niemal minimalnego dla  $(X_0, \frac{1}{2}D_0)$  skutkuje następującym diagramem [HAB1, §3]:

$$\begin{array}{ccccc}
 (X, \frac{1}{2}D) & \xrightarrow{\psi'_1} & (X'_1, \frac{1}{2}D'_1) & \xrightarrow{\psi'_2} & \dots & \xrightarrow{\psi'_n} & (X'_n, \frac{1}{2}D'_n) & \text{log gładkie} \\
 \swarrow \pi & & \downarrow \varphi_0 & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_n & \\
 (\mathbb{P}^2, \frac{1}{2}\bar{E}) & \xleftarrow{\pi_0} & (X_0, \frac{1}{2}D_0) & \xrightarrow{\psi_1} & (X_1, \frac{1}{2}D_1) & \xrightarrow{\psi_2} & \dots & \xrightarrow{\psi_n} & (X_n, \frac{1}{2}D_n) & \text{styczności na } E_i \\
 & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_n & \\
 & & (Y_0, \frac{1}{2}D_{Y_0}) & \xrightarrow{\psi''_1} & (Y_1, \frac{1}{2}D_{Y_1}) & \xrightarrow{\psi''_2} & \dots & \xrightarrow{\psi''_n} & (Y_n, \frac{1}{2}D_{Y_n}) & \text{log terminalne}
 \end{array}$$

gdzie

- $\pi_0$  i  $\pi$  to odpowiednio minimalna słaba i minimalna log rezolwenta,
- powierzchnia  $(Y_n, \frac{1}{2}D_{Y_n})$  jest minimalna (Definicja 1.4),
- log osobliwości powierzchni  $(X_i, D_i)$  to punkty styczności  $E_i$  is  $D_i - E_i$  (jest to pozostałość z  $D_0$ ), gdzie  $E_i \subseteq X_i$  jest transformatą właściwą  $\bar{E}$ ,
- powierzchnie  $(X'_i, D'_i)$  są log gładkie, snc-minimalne, a  $\varphi_i$  są rozwiązaniami styczności  $E_i$  i  $D_i - E_i$ ,
- $\alpha_i$  są morfizmami obierania (Definicja 1.5),
- $\psi_{i+1}$  jest ściągnięciem **pojedynczej krzywej niemal log wyjątkowej**  $A_i \subseteq X_i$ , po którym następuje lokalna nc-minimalizacja, tzn. ściąganie nierozgałęziających  $(-1)$  krzywych w  $D_i$ , które powstały po ściągnięciu  $A_i$  (patrz Przykład 2.2),
- morfizmy  $\psi'_i$  i  $\psi''_i$  są indukowane przez  $\psi_i$ .

Konstrukcja i późniejsze obliczenia używają następującej charakteryzacji, odpowiednika Twierdzenia 1.6. Przez  $(-2)$ -gałązkę w  $D_i$  rozumiem łańcuch  $(-2)$ -krzywych, który jest gałązką  $D_i$ .

**Twierdzenie 2.1** ([HAB1] §3, Charakteryzacja obierania i krzywych niemal wyjątkowych).

- (1)  $\text{Exc } \alpha_i = \Delta_i + \Upsilon_i \subseteq D_i$ , gdzie
  - $\Delta_i$  składa się z maksymalnych  $(-2)$ -gałązek  $D_i$ ,
  - $\Upsilon_i$  jest sumą rozłączną  $(-1)$ -krzywych  $U$  takich, że albo  $\beta_D(U) = 3$  i  $U \cdot \Delta_i = 1$  (por. (1.1)), albo  $\beta_D(U) = 2$  i  $U$  tnie dokładnie jedną składową  $D_i$ .
- (2)  $\alpha_i^*(K_{Y_i} + \frac{1}{2}D_{Y_i}) = K_i + \frac{1}{2}D_i^b$ , gdzie  $D_i^b = D_i - \Upsilon_i - \Delta_i^+ - \text{Bk}_{D_i} \Delta_i^-$  oraz
  - $\Delta_i^+$  składa się z tych składowych spójnych  $\Delta_i$ , które tną  $\Upsilon_i$ ,
  - $\Delta_i^- = \Delta_i - \Delta_i^+$ ,



- $\text{Bk}_{D_i} \Delta_i^-$  jest efektywnym  $\mathbb{Q}$ -dywizorem o nośniku takim jak  $\Delta_i^-$ , zob. [HAB1, §2].
- (3)  $A_i \subseteq X_i$  jest krzywą niemal wyjątkową wtedy i tylko wtedy, gdy  $A_i$  jest  $(-1)$ -krzywą nie zawartą w  $D_i$ , taką że

$$A_i \cdot (\Upsilon_i + \Delta_i^+) = 0 \quad \text{oraz} \quad A_i \cdot (D_i - \Delta_i^-) = A_i \cdot \Delta_i^- = 1,$$

a składowa  $\Delta_i^-$  tnąca  $A_i$  jest końcówką  $\Delta_i^-$ .

**Przykład 2.2.** Niech  $T = [a_n, \dots, a_1, 1, b_1, \dots, b_k]$ ,  $a_i, b_j \geq 2$  będzie włóknem zdegenerowanym  $\mathbb{P}^1$ -rozwłóknienia powierzchni rzutowej  $X$ . Takie włókna można zrealizować dla dowolnego ciągu  $a_1, \dots, a_n$  dla  $a_i \geq 2$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Niech  $A_1$  będzie  $(-1)$ -krzywą w  $T$  i niech składowe spójne  $T - A_1$  będą gałązkami pewnego badanego dywizora brzegowego  $D$ . Łatwo pokazać, że  $a_1 = 2$  lub  $b_1 = 2$ , więc poza przypadkiem  $T = [2, 1, 2]$  krzywa  $A_1$  jest niemal log wyjątkowa na  $(X, D)$ , bo spełnia warunek (3). Widać, że morfizm  $\psi_1$  ściąga nie tylko  $A_1$ , ale cały łańcuch  $T_1$  poza jedną składową, a więc cała informacja o wagach  $T - A_1$  jest tracona przez morfizm  $\psi_1$ .

## 2B. Właściwości modelu niemal minimalnego

Z twierdzenia charakterystycznego 2.1 dostajemy następujący ważny wniosek:

**Wniosek 2.3.** [HAB1] Niech oznaczenia będą jak w Notacji 1.7. Niech  $S_i = X_i \setminus D_i$ .

- (1) Krzywa niemal wyjątkowa  $A_i$  tnie  $D_i$  transversalnie w dwóch punktach, z których dokładnie jeden należy do  $(-2)$ -gałązki  $D_i$ .
- (2) Część wspólna  $A_i$  oraz  $S_i$  jest izomorficzna z  $\mathbb{C}^*$ , w szczególności proces niemal minimalizacji **nie zmienia charakterystyki Eulera części otwartej**, tzn.  $e_{\text{top}}(S_i) = e_{\text{top}}(S_{i+1})$ .
- (3) Morfizm  $\psi_{i+1}$  nie wprowadza nowych log osobliwości.
- (4) W procesie niemal minimalizacji nie są dotykane składowe  $D_0$  które leżą nad ostrzami krotności 2 (bo są zawarte w  $\Delta_0^+ + \Upsilon_0$ ) oraz krzywe leżące poza (wymiernymi) gałązkami maksymalnymi  $D_0$ .
- (5)  $\kappa_{1/2} := \kappa(K_{X_i} + \frac{1}{2}D_i)$  nie zależy od  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

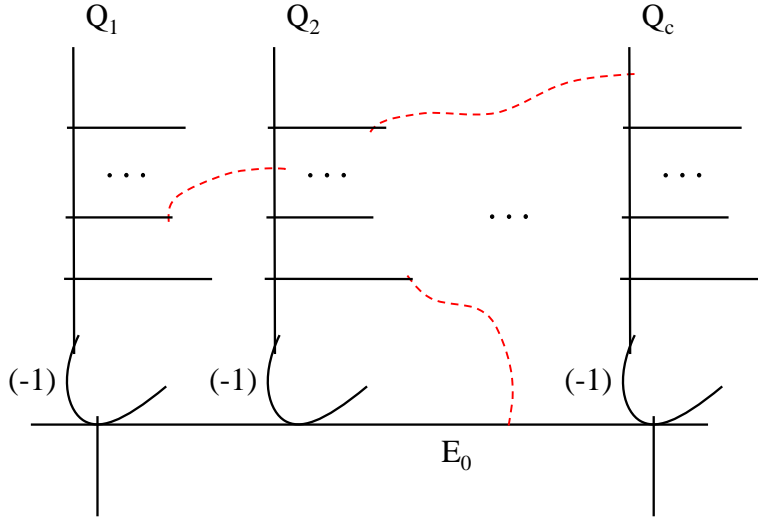
**Przykład 2.4.** Na Rysunku 1 poniżej zaznaczono schematycznie dywizor  $D_0 = E_0 + Q_1 + \dots + Q_c$ , gdzie  $Q_j$ ,  $j = 1, \dots, c = \# \text{Sing } \bar{E}$  to dywizor wyjątkowy minimalnej słabej rezolwenty  $\pi_0: (X_0, D_0) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \bar{E})$  nad  $j$ -tym ostrzem. Liniami przerywanymi zaznaczony możliwe wybory krzywej niemal log wyjątkowej  $A_1$ . Linia pozioma to  $E_0$ , inne linie proste są łańcuchami krzywych wymiernych.

Tak jak napisano powyżej, celem procesu niemal minimalizacji jest dojście do modelu niemal minimalnego, o którym wiadomo więcej dzięki teorii Mori. Zwróćmy jednak uwagę, że wykorzystanie tych informacji wymaga pełnego zrozumienia jak zmieniają się powierzchnie  $(X_i, D_i)$ , w szczególności dywizory  $\Delta_i$  i  $\Upsilon_i$ , ze wzrostem  $i$ . Odpowiednie techniczne lematy można znaleźć w [HAB1, §4]. Nie twierdzę, że  $n$ , tzn. liczba kroków w procesie minimalizacji, zależy tylko od powierzchni  $(X, D)$ . Pracuje się tutaj po prostu z wybranym, ustalonym procesem.

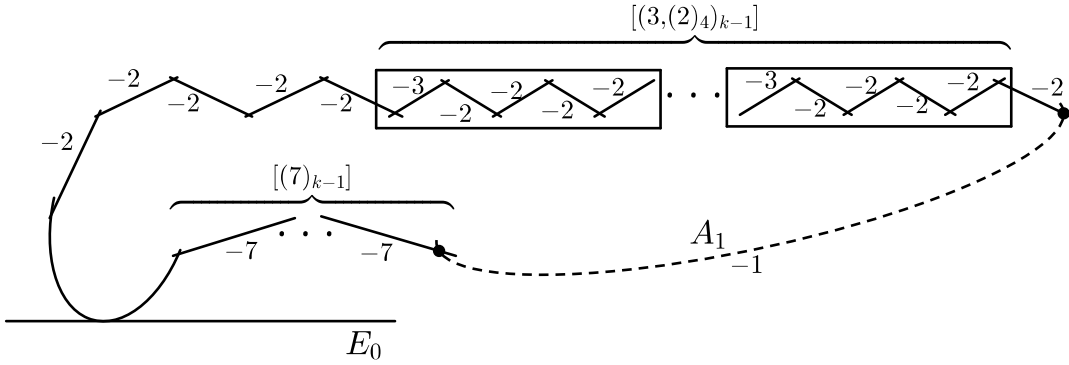
**Przykład 2.5** ([HAB4], Fig. 19). Na poniższym rysunku pozioma linia jest transformatą właściwą (wymiernej 1-ostrzowej) krzywej Orevkova [Ore02] typu  $\mathcal{OR}_1(k) = C_{4k}$ ,  $k \geq 1$  poprzez minimalną słabą rezolwentę. Krzywa  $A_1$  jest niemal log wyjątkowa na  $(X_0, D_0)$ . Widać tutaj indukcyjną strukturę grafów  $D_0 + A_1$ : ściągnięcie  $A_1$  i kolejnych  $(-1)$ -krzywych prowadzi do rezolwenty  $\mathcal{OR}_1(k - 1)$ , a ostatecznie do dywizora z jedynie 3 składowymi.

Przejdźmy teraz do obiecanych własności modelu niemal minimalnego. Niech  $\mathbb{C}^{**} = \mathbb{C}^1 \setminus \{0, 1\}$ ,  $K_i := K_{X_i}$  oraz  $K'_i = K_{X'_i}$ . Z programu Mori dostaje się następujący wniosek.

**Twierdzenie 2.6.** [HAB1] Niech  $(X_n, \frac{1}{2}D_n)$  będzie modelem niemal minimalnym  $(X_0, \frac{1}{2}D_0)$  jak wyżej. Wówczas zachodzi jedno z następujących:



RYSUNEK 1. Dywizor  $D_0$  i krzywe niemal log wyjątkowe.



RYSUNEK 2. Słaba rezolwenta dla krzywych Orevkova  $\mathcal{OR}_1(k)$ ,  $k \geq 1$ .

- (1)  $\kappa_{1/2} \geq 0$  oraz  $K_n + \frac{1}{2}D_n^b$  jest numerycznie efektywny (nef).
- (2)  $\kappa_{1/2} = -\infty$  oraz dywizor  $-(K_n + \frac{1}{2}D_n^b)$  tnie zerowo krzywe w  $\Delta_n + \Upsilon$ , a inne krzywe dodatnio. Powierzchnia  $(Y_n, \frac{1}{2}D_{Y_n})$  jest log del Pezzo rangi 1.
- (3)  $\kappa_{1/2} = -\infty$  oraz  $X_n \setminus \Delta_n$  posiada  $\mathbb{C}^{**}$ -rozwłóknienie bez punktów bazowych na  $X_n$ . Powierzchnia  $(Y_n, \frac{1}{2}D_{Y_n})$  jest log przestrzenią Mori nad krzywą.

W szczególności, jeśli powierzchnia  $\mathbb{P}^2 \setminus \bar{E} = X_0 \setminus D_0$  nie jest  $\mathbb{C}^{**}$ -rozwłókniona, dostajemy nierówność

$$(2.1) \quad (2K_n + D_n^b)^2 \geq 0.$$

Jak zobaczymy poniżej, współczynnik 2 przy dywizorze kanonicznym odgrywa kluczową rolę.

**Uwaga 2.7** (Uogólnienie). Niech  $(X, D)$  będzie gładkim minimalnym uzupełnieniem wymiernej powierzchni afinicznej log ogólnego typu, która nie zawiera  $(-1)$ -krzywych  $L$ , takich że  $L \cdot D \leq 1$ . Powyższa konstrukcja modelu niemal minimalnego dla powierzchni  $(X, \frac{1}{2}D)$  została przeprowadzona w szczególności w przypadku, gdy  $(X, D)$  jest rezolwentą wymiernej krzywej ostrzowej, ale geometrzy zaznajomieni z technikami powierzchni otwartych bez większego trudu powtórzą ją w ogólnym przypadku. Daje to nowe silne narzędzie badania wymiernych powierzchni log ogólnego typu.

**Uwaga 2.8.** Jednymi z czynników, które zmotywowały mnie do pracy nad powyższą techniką, były słaba hipoteza Flennera-Zaidenberga o sztywności dla powierzchni  $\mathbb{Q}$ -acyklicznych log ogólnego

typu, która mówi o znikaniu  $h^i(2K_X + D)$  dla  $i \geq 0$  (por. 2E), oraz dyskusje z M. Korasem, który pracując w duchu Lematu 4.4 z pracy Korasa-Russella [KR99], był w stanie produkować na powierzchniach afinicznych log ogólnego typu krzywe izomorficzne z  $\mathbb{C}^*$ , o ile  $2K_X + D \geq 0$ . Dywizory  $2K + E$  i  $2K + D$  pojawiają się też, nieco incydentalnie, w kryterium Mohana Kumara-Murthy'ego 2.14 oraz w pracy Tono [Ton05]. Użycie programu modeli minimalnych dla  $(X, \frac{1}{2}D)$  wydało mi się naturalnym krokiem. Program ten wprowadza osobliwości i nie może wiele powiedzieć o konkretnych krotnościach  $2K_X + D$ , więc należy raczej pracować z ustalonym wymiarem  $\kappa_{1/2} = \kappa(K_X + \frac{1}{2}D)$ . Z drugiej strony, do produkowania krzywych log wyjątkowych założenie  $\kappa_{1/2} \geq 0$  nie jest w tym programie potrzebne, a w prostszym przypadku brzegu zredukowanego geometrii afinicznej nauczyli się już omijać osobliwości.

## 2C. Zastosowanie 1: efektywna hipoteza Zaidenberga o skończoności

Niech oznaczenia będą jak w Notacji 1.7. Ze względu na istniejące wyniki klasyfikacyjne opisane powyżej zakładamy, że  $\kappa = 2$ . Używając logarytmicznej nierówności Noether, Tono [Ton05] pokazał, że  $D$  posiada co najwyżej 17 gałęzi maksymalnych, skąd wynika, że  $\bar{E}$  ma co najwyżej 8 ostrzy. Stąd można wywnioskować hipotezę Zaidenberga C (autor tego nie robi), jednak ograniczenie, które się otrzymuje na liczbę typów topologicznych jest za duże, żeby móc zrobić cokolwiek więcej. Typ topologiczny nie zawiera też informacji o samoprzecięciach składowych  $D$ , niezbędnych przy próbach klasyfikacji (Problem 1.2(c)).

Zobaczmy jak działa tutaj przedstawiona wyżej konstrukcja modeli niemal minimalnych z Sekcji 2A. Dywizor  $K_n + D_n$  jest duży, więc używając twierdzenia Kawamaty-Viehwega o znikaniu kohomologii oraz formuły Noether łatwo wyliczyć, że  $(2K'_n + D'_n)^2 = 8 - \rho(X'_n) + 3h^0(2K_X + D) - n$ , a więc jeśli pominąć różnicę pomiędzy  $D'_i$  a  $D_i^b$ , którą można łatwo wyliczyć, dostajemy następujące ograniczenie na rangę Picarda (2.1)

$$\rho(X'_n) + n \leq 3h^0(2K_X + D) + 8.$$

Ponieważ proces niemal minimalizacji nie zmienia charakterystyki Eulera części otwartej powierzchni, logarytmiczna wersja nierówności Bogomolova-Miyaoki-Yau daje [HAB1, 4.3(iii)]

$$n + h^0(2K_X + D) \leq 5,$$

co po uwzględnieniu poprawek (różnica między  $D'_i$  a  $D_i^b$ ) prowadzi do następującego twierdzenia:

**Twierdzenie 2.9** ([HAB1], Theorem 1.1). *Niech oznaczenia będą jak w Notacji 1.7. Załóżmy, że  $\kappa = 2$  i  $(X'_n, \frac{1}{2}D'_n)$  jest zdefiniowane jak wyżej. Wówczas  $\mathbb{P}^2 \setminus \bar{E}$  posiada  $\mathbb{C}^{**}$ -rozwłóknione bez punktów bazowych na minimalnym gładkim uzupełnieniu lub  $\rho(X'_n) \leq 24 - 2n$ .*

Można też uzyskać ograniczenia na  $K'_n \cdot D$  i na samoprzecięcia składowych  $D_n$  [HAB1, Theorem 1.2]. Powierzchnie  $\mathbb{C}^{**}$ -rozwłóknione można dokładnie badać, możliwe zdegenerowane włókna są dobrze znane [MS91b], odpowiednie krzywe ostrzowe można więc opisać. Zwróćmy uwagę, że ze znanych przykładów krzywych ostrzowych wiadomo, że ranga Picarda minimalnego gładkiego uzupełnienia, tzn.  $(X, D)$ , nie jest ograniczona od góry. Jeśli jednak podzielimy  $D$  na sumę wymiernych gałęzi maksymalnych  $T$  oraz na rdzeń  $R = D - T$ , to dzięki Wnioskowi 2.3(4) wiemy, że proces minimalizacji nie dotyka  $R$ . Otrzymujemy w ten sposób efektywne ograniczenie na liczbę typów topologicznych  $D$  i nowe ograniczenie na liczbę ostrzy  $\bar{E}$ .

**Twierdzenie 2.10** ([HAB1] Corollary 1.1, Efektywna hipoteza Zaidenberga o skończoności). *Niech oznaczenia będą jak w Notacji 1.7. Jeśli  $\kappa = 2$ , to rdzeń  $D$  ma co najwyżej 20 składowych, a diagram Eisenbuda-Neumanna  $\bar{E}$  ma co najwyżej 31 wierzchołków.*

**Twierdzenie 2.11** ([HAB1], Theorem 1.4). *Wymierna płaska krzywa ostrzowa ma co najwyżej 6 ostrzy.*

Twierdzenie 2.11 polepsza wcześniejszy wynik Tono  $\# \text{Sing } \bar{E} \leq 8$  [Ton05]. Przy ostrożniejszych szacowaniach można podobną metodą udowodnić Hipotezę B. Prace nad tą hipotezą powinny się wkrótce zakończyć. Zamierzamy pokazać więcej, mianowicie, że istnieje tylko jedna wymierna krzywa ostrzowa z 4 ostrzami (kwintyka).

**Uwaga 2.12.** Metoda jak wyżej stosowana do powierzchni jak w Uwadze 2.7 prowadzi do uogólnionej efektywnej hipotezy Zaidenberga, postawionej oryginalnie tylko dla powierzchni  $\mathbb{Q}$ -acyklicznych [Zai05], tzn. uzyskuje się górne ograniczenie na liczbę typów topologicznych  $D$  w terminach charakterystyki Eulera  $X \setminus D$ . W szczególności, można uzyskać nowe ograniczenie na liczbę ostrzy dla krzywych płaskich ustalonego typu topologicznego (np. krzywych ostrzowych wyższego genusu). Pracuję obecnie nad tym zagadnieniem.

## 2D. Zastosowanie 2: Hipoteza Coolidge’a-Nagaty

Dwie (nieredukowalne) krzywe płaskie są *Cremona-równoważne*, gdy istnieje biwymierna transformacja  $\mathbb{P}^2$ , która przekształca jedną na drugą. Ze względu na badania rozpoczęte przez Coolidge’a i Nagatę [Coo59], [Nag60], pytanie jakie krzywe są Cremona-równoważne z linią jest znane jako *problem Coolidge’a-Nagaty*.

Wymierne krzywe ostrzowe są tutaj trudną do zrozumienia klasą krzywych płaskich (w pracy [Moe08, Chapters 5, 7] dokonano ciekawego przeglądu). Mogą mieć dowolnie wysoki stopień, znanych jest wiele nieskończonych rodzin, chociażby te powstałe przez domknięcia zanurzeń  $\mathbb{C}^*$  w  $\mathbb{C}^2$  [BZ10]. Konstrukcje różnych rodzin takich krzywych były robione przez wielu autorów (patrz sekcja 2E), najczęściej przy pomocy odpowiednio dobranych transformacji Cremony na innych krzywych ostrzowych niższego stopnia. Nie wiadomo jednak, czy istnieje ogólny mechanizm tego typu. Ponieważ ogólna krzywa wymierna stopnia  $d$  nie jest Cremona-równoważna z linią dla  $d > 5$ , przypuszczenie że mimo wszystko krzywe ostrzowe są zawsze Cremona-równoważne z linią (Hipoteza A) wydaje się nie tylko zaskakujące, ale też beznadziejne, jeśli brać pod uwagę naturalne metody atakowania go. Przypuszczenie to znane jest jako *hipoteza Coolidge’a-Nagaty*. Explicite sformułowano ją w [MS89, str. 234], ale geometrycy zajmujący się płaszczyzną wiedzą, że hipoteza ta jest dużo starsza.

Nieco ogólniej niż poprzednio, niech  $\bar{E} \subseteq \mathbb{P}^2$  będzie krzywą płaską,  $(X, D) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \bar{E})$  dowolną log rezolwentą i niech  $E \subseteq X$  oznacza transformatę właściwą  $\bar{E}$ . L.Coolidge wykazał kryterium numeryczne, które we współczesnym języku można sformułować następująco:

**Twierdzenie 2.13** (Coolidge [Coo59], Book IV, §II.2). *Krzywa  $\bar{E} \subseteq \mathbb{P}^2$  jest Cremona-równoważna z linią wtedy i tylko wtedy, gdy  $\kappa(K_X + E) = -\infty$ .*

Kryterium to zostało wzmocnione w latach 80’ych:

**Lemat 2.14** (Mohan Kumar-Murthy [MKM83]). *Krzywa wymierna  $\bar{E} \subseteq \mathbb{P}^2$  jest Cremona-równoważna z linią wtedy i tylko wtedy, gdy  $h^0(2K_X + E) = 0$ .*

Wróćmy teraz do krzywych ostrzowych i oznaczeń jak w Notacji 1.7. W przypadkach  $\kappa \leq 1$  Hipotezę A można wywnioskować z istniejącej klasyfikacji (patrz Sekcja 1C). W [HAB2, Proposition 2.5] pokazałem, że można to zrobić prościej używając kryterium 2.14 i Twierdzenia 1.6.

Odtąd możemy więc zakładać, że  $\kappa = 2$ . Pozwolę sobie pominąć dyskusję znanych częściowych rezultatów opartych na klasyfikacjach bardzo szczególnych przypadków (można ją znaleźć w [HAB3]). Jeśli chodzi o ogólniejsze wyniki, to Hipoteza A była udowodniona przez M. Korasa dla każdej krzywej z 2 ostrzami, która jest domknięciem  $\mathbb{C}^*$  w  $\mathbb{C}^2$  [Kor11]. W przypadku krzywych, które są domknięciami krzywej homeomorficznej z  $\mathbb{C}^1$  zawartej w  $\mathbb{C}^2$  hipoteza wynika natychmiast z wyników Abhyankara-Moha [AM75] i Suzuki [Suz74] oraz Zaidenberga-Lina [ZL83].

W krótkim prepryncie [PRE1], używając kryterium 2.14, łączonego z twierdzeniem Kawamaty-Viehwega i rozkładem Zariskiego-Fujity wykazałem, że jeśli istnieją wymierne krzywe ostrzowe z więcej niż 4 ostrzami, to muszą być Cremona-równoważne z linią. Był to pewien krok w stronę Hipotezy B, tzn. wykazania, że takich krzywych nie ma. Metoda jest ciekawa, ale dla mniejszej liczby ostrzy napotyka na trudności: uzyskane nierówności są słabe. Kombinując ją z metodami Borodzika-Livingstone'a odwołującymi się do homologii Heegaarda-Floera i badania półgrup skojarzonych z ostrzami [BL14] Liu osiągnął pewien postęp [Liu14, §3.5]: rozwiązał dodatkowo przypadek krzywych z 2 ostrzami, z których każda ma jedną parę Puiseux oraz inne dość specjalne przypadki.

Istotny postęp nastąpił w pracy [HAB2], opartej na konstrukcji modeli niemal minimalnych z Sekcji 2A.

**Twierdzenie 2.15** ([HAB2], Theorem 1.2). *Niech oznaczenia będą jak w Notacji 1.7. Hipoteza Coolidge'a-Nagaty zachodzi w każdym z poniższych przypadków:*

- (1)  $\bar{E}$  ma więcej niż dwa ostrza,
- (2)  $D$  ma więcej niż 6 gałązek maksymalnych,
- (3)  $\kappa \neq 2$ .

Zauważmy, że liczba gałązek maksymalnych  $D$  jest co najmniej dwa razy większa niż liczba ostrzy  $\bar{E}$ . Pomysł na dowód, prowadzony nie wprost, jest naturalny. Z kryterium 2.14 wiemy, że dywizor  $2K_X + E$  jest efektywny (z dokładnością do liniowej równoważności). W szczególności

$$\kappa(K_X + \frac{1}{2}D) \geq \kappa(K_X + \frac{1}{2}E) \geq 0.$$

Część (c) jest prosta i była już udowodniona wcześniej [HAB1, Proposition 2.6], możemy więc zakładać, że  $\kappa(K_X + D) \geq 2$ , skąd wnioskujemy, że powierzchnia  $(X, D)$  jest niemal minimalna (Twierdzenie 1.8). Działa więc konstrukcja modelu niemal minimalnego  $(X_n, \frac{1}{2}D_n)$  z Sekcji 2A i dostajemy, że  $2K_n + D_n^b$  jest numerycznie efektywny. Skoro  $2K_X + E$  jest efektywny, to i jego pchnięcie  $2K_n + E_n$  jest efektywne, a więc dostajemy kluczową nierówność

$$(2.2) \quad (2K_n + D_n^b)(2K_n + E_n) \geq 0.$$

Nierówność ta jest silna, ale problem w tym, że działa na powierzchni  $(X_n, D_n)$ , a nie na  $(X, D)$ . Abstrakcyjne opanowanie możliwych konfiguracji dywizora  $D$  i jego zachowania w procesie minimalizacji było fascynującym wyzwaniem i wymagało sporo wysiłku. Ponieważ potrzebna jest dużo dokładniejsza kontrola procesu minimalizacji niż ta uzyskana w [HAB1], wprowadzane są liczne numeryczne charakterystyki geometrii dywizorów  $D_i$ , takie jak: rząd styczności  $D_i - E_i$  z  $E_i$ , samoprzecięcie  $E_i$ , liczba  $\zeta = K_n \cdot (K_n + E_n)$ ,  $\eta_i$  mierzące liczbę nowych składowych  $\Upsilon_i$ ,  $\#\mathcal{C}_+$  mierzące liczbę  $(-1)$ -krzywych z  $D_0$  dotkniętych przez proces niemal minimalizacji, etc. Oprócz powyższej nierówności używa się tutaj wyników klasycznej teorii modeli niemal minimalnych, informacji o budowie dywizorów wyjątkowych nad ostrzami, logarytmicznej nierówności BMY, nierówności Matsuoki-Sakai, twierdzeń o znikaniu kohomologii, szacowań dla rozkładu Zariskiego-Fujity, par Hamburger-Noether opisujących osobliwości, klasyfikacji Kodairy włókien rozwłóknień eliptycznych i innych. Głównym wynikiem pracy jest w istocie następujące twierdzenie, którego dowód zajmuje większą część artykułu.

**Twierdzenie 2.16** ([HAB2], Theorems 1.1, 1.3). *Niech oznaczenia będą jak w Notacji 1.7. Jeśli  $\bar{E} \subseteq \mathbb{P}^2$  nie jest Cremona-równoważna z linią, to  $\kappa = 2$  oraz:*

- (1)  $n \leq 1$ , tzn. proces niemal minimalizacji ściąga co najwyżej jedną krzywą w  $\mathbb{P}^2 \setminus \bar{E}$ ,
- (2)  $h^0(2K_X + D) \in \{3, 4\}$ .

Przyjęte dodatkowe założenia z Twierdzenia 2.15(1)-(2) powodują, że liczba składowych dywizora  $D$  nie jest za mała. Mając powyższe twierdzenie i używając pomysłu z preprintu [PRE1] pokazuje

się, że dla krzywych nierównoważnych z linią w sensie Cremony mielibyśmy w istocie  $n = 0$ , a stąd nietrudno o sprzeczność.

W kolejnym artykule, który jest częścią cyklu habilitacyjnego, razem z M. Korasem udowodniliśmy Hipotezę A w pozostałych przypadkach.

**Twierdzenie 2.17** ([HAB3]). *Każda wymierna krzywa ostrzowa (równoważnie, każda linia homologiczna) zawarta w płaszczyźnie rzutowej jest Cremona-równoważna z linią.*

Dowód opiera się na strategii wypracowanej w [HAB2]. Zgodnie z Twierdzeniami 2.16 i 2.15 możemy zakładać, że  $\bar{E} \subseteq \mathbb{P}^2$  ma co najwyżej dwa ostrza oraz  $n \leq 1$ . Praca dzieli się na dwie części, w których bada się przypadki  $n = 1$  i  $n = 0$ . Przypadek  $n = 1$ , tzn. gdy proces minimalizacji ściąga dokładnie jedno  $\mathbb{C}^*$  w części afinicznej, badany jest w Sekcji 3 przy użyciu metod z [HAB2]. Przypadek  $n = 0$ , w którym już początkowa powierzchnia  $(X_0, \frac{1}{2}D_0)$  jest niemal minimalna, jest trudny. Okazuje się bowiem, że wnioski z teorii Mori są tutaj znów nieco za słabe. W Sekcji 4 pracy badamy więc inny proces minimalizacji, tym razem dla powierzchni  $(X_0, E_0)$ . Proces ten produkuje nowe  $(-1)$ -krzywe, ale ich przecięcia z dywizorem  $D_0 - E_0$  są trudne do kontrolowania. Kluczem jest dodatkowa nierówność [HAB3, Lemma 4.3] uzyskana z przecięcia pchnięć dywizorów  $D_0 - E_0$  (efektywny) i  $K_0 + E_0$  (nef na odpowiednim modelu minimalnym). Najwięcej wysiłku wymagały sytuacje, gdy dywizor  $D_0$  miał małą liczbę składowych (por. krzywa stopnia 11 ze strony 54, Rys. 5).

## 2E. Zastosowanie 3: klasyfikacja wymiernych krzywych ostrzowych

Krzywe ostrzowe wzbudzają spore zainteresowanie zarówno geometrów algebraicznych jak i topologów (tych ostatnich głównie ze względu na związki ze sferami homologicznymi). Znane i atakowane są również inne hipotezy niż te, które przedstawiliśmy powyżej, patrz [MN07], [BN14], [BL14]. Inne współczesne badania dotyczące płaskich krzywych ostrzowych to na przykład [Wak78], [Kas87], [Yos88], [Tsu81a], [MS89], [tD95], [FZ96], [ZO96], [Fen99a], [Fen99b], [FZ00], [ST00], [Ton00a], [Ton01], [Ore02], [FdBLMHN06], [Moe08], [CNKR09], [ST00], [BZ10], [Ton12], [DS15a], [DS15b], [Ulu16]. Nieco ogólniejsze badania w odniesieniu do problemu równoważności krzywych płaskich w sensie Cremony prowadzili również Iitaka, Kojima, Takahashi, Blanc-Vust, Mella-Polastri, Calabri-Ciliberto i inni.

Po udowodnieniu hipotezy Coolidge'a-Nagaty wydawało się możliwe podjąć próbę klasyfikacji wymiernych krzywych ostrzowych poprzez pokazanie, że transformacja Cremony sprowadzające krzywą ostrzową  $\bar{E} \subseteq \mathbb{P}^2$  do linii może być rozłożona na elementarne transformacje (niekoniecznie kwadratowe) przeprowadzające  $\bar{E}$  kolejno na krzywe ostrzowe coraz niższych stopni. I chociaż jest to możliwe we wszystkich znanych seriach, jak dotąd nie udało się tego wykazać w ogólności. W tej sytuacji zaproponowałem inne podejście. Najpierw przypomnijmy pewne hipotezy.

Niech  $S$  będzie gładką powierzchnią, a  $(X, D)$  jej minimalnym gładkim uzupełnieniem. Oznaczmy przez  $\mathcal{T}_X(-\log D)$  logarytmiczny snop styczny na  $(X, D)$ .

**Hipoteza D** (Hipoteza o sztywności [FZ94]). *Jeśli  $S$  jest  $\mathbb{Q}$ -acykliczna i  $\kappa(S) = 2$ , to uzupełnienie  $(X, D)$  jest sztywne i nie ma przeszkód do deformacji infinitesimalnych, tzn.  $h^i(\mathcal{T}_X(-\log D)) = 0$  dla  $i \geq 0$ .*

**Hipoteza E** (Słaba hipoteza o sztywności [FZ96]). *Jeśli  $S$  jest  $\mathbb{Q}$ -acykliczna i  $\kappa(S) = 2$ , to  $\chi(\mathcal{T}_X(-\log D)) = 0$ . Równoważnie,  $K_X \cdot (K_X + D) = 0$ .*

Zauważmy, że powierzchnie  $\mathbb{P}^2 \setminus \bar{E}$  są tutaj szczególnym przypadkiem. Z twierdzenia Kawamaty-Viehwega wynika, że  $K_X \cdot (K_X + D) = h^0(2K_X + D)$  (zob. [HAB1, Lemma 4.3(i)]), w szczególności widać więc, że słaba hipoteza o sztywności w przypadku  $S = \mathbb{P}^2 \setminus \bar{E}$  implikuje  $h^0(2K_X + E) = 0$ , czyli hipotezę Coolidge'a-Nagaty dla  $\bar{E} \subseteq \mathbb{P}^2$ . Hipoteza ta, szczególnie w formie  $h^0(2K_X + D) = 0$ , wydaje

się bardziej przystępna, ale nadal nie widać, jak jej dowód miałby pomóc w pełnym zrozumieniu krzywych ostrzowych. Zaproponowałem więc następującą hipotezę (założenie  $\kappa = 2$  jest tu zbędne), która implikuje Hipotezę E:

**Hipoteza F** (Hipoteza o ujemności, [HAB1] 4.7). *Jeśli  $(X, D)$  jest gładkim uzupełnieniem powierzchni  $\mathbb{Q}$ -acyklicznej, to*

$$\kappa(K_X + \frac{1}{2}D) = -\infty.$$

Hipoteza została sprawdzona dla wszystkich znanych powierzchni  $\mathbb{Q}$ -acyklicznych (zachodzi na przykład automatycznie dla tych, które posiadają  $\mathbb{C}^1$ ,  $\mathbb{C}^{*-}$ , lub  $\mathbb{C}^{**}$ -rozwłóknienie), ale pozostaje otwarta. Tym niemniej jej charakter wydaje się znakomicie pasować do metod modeli niemal minimalnych używanych w pracach [HAB1], [HAB2] i [HAB3]. Być może w klasie powierzchni  $\mathbb{Q}$ -acyklicznych podejście indukcyjne będzie zresztą bardziej owocne niż w sztywnej klasie uzupełnień krzywych ostrzowych. Zostawiając to jednak na boku, za kluczowe uważam fakt, że przy założeniu Hipotezy F **otwiera się droga do klasyfikacji** powierzchni  $\mathbb{Q}$ -acyklicznych log ogólnego typu. Opiszę program klasyfikacji i osiągnięte wyniki w interesującym nas przypadku  $S = \mathbb{P}^2 \setminus \bar{E}$ , tzn. dla dopełnień krzywych ostrzowych. Przede wszystkim, z Twierdzenia 2.6 mamy następujący wniosek:

**Wniosek 2.18.** *Niech  $(X, D)$  będzie gładkim uzupełnieniem powierzchni  $\mathbb{Q}$ -acyklicznej  $S$  log ogólnego typu. Jeśli spełniona jest Hipoteza F, to zachodzi jedno z poniższych:*

- (A)  *$S$  posiada  $\mathbb{C}^{**}$ -rozwłóknienie bez punktów bazowych na  $X$ ,*
- (B) *dywizor  $-(K_X + \frac{1}{2}D)$  jest szeroki na pewnym modelu minimalnym  $(X, \frac{1}{2}D)$ .*

Zatem jeśli hipoteza o ujemności zachodzi, to program modeli minimalnych pokazuje istnienie silnych dodatkowych struktur geometrycznych lub własności numerycznych. Zauważmy, że ponieważ  $D$  jest nośnikiem dywizora szerokiego, pchnięcie  $D$  w przypadku (B), gdy model minimalny jest powierzchnią log del Pezzo, jest niezerowe. Powierzchnie tego typu, chociaż intensywnie badane w ostatnich latach, nie są niestety sklasyfikowane. Jeśli ograniczymy się do przypadku krzywych ostrzowych, problem klasyfikacji krzywych spełniających hipotezę o ujemności (hipotetycznie wszystkich) daje się prawdopodobnie rozwiązać. W pracy z moim doktorantem, mgr. Tomaszem Pełką, w pełni rozwiązaliśmy przypadek (A):

**Twierdzenie 2.19** ([HAB4], Theorems 1.2, 1.3). *Niech oznaczenia będą jak w Notacji 1.7. Jeśli  $\mathbb{P}^2 \setminus \bar{E}$  posiada  $\mathbb{C}^{**}$ -rozwłóknienie, to z dokładnością do rzutowej równoważności  $\bar{E}$  jest jednoznacznie wyznaczone przez ciągi krotności (równoważnie: przez lokalną topologię) swoich osobliwości, których lista jest przedstawiona w Tabeli 1, str. 4 w [HAB4]. W szczególności, zachodzi jedno z poniższych:*

- (1)  *$\bar{E}$  ma 1 ostrze i jest jedną z krzywych Orevkova [Ore02, Theorem C].*
- (2)  *$\bar{E}$  ma 2 ostrza i jest domknięciem pewnego zanurzenia (gładkiego lub osobliwego)  $\mathbb{C}^*$  w  $\mathbb{C}^2$ . Istnieje więc linia rzutowa tnąca  $\bar{E}$  w dokładnie dwóch punktach.*
- (3)  *$\bar{E}$  ma 3 ostrza, jest jedną z krzywych Flennera-Zaidenberga  $\mathcal{FZ}_1$  pierwszego rodzaju [FZ96, 3.5], a więc jest domknięciem pewnego zanurzenia osobliwego  $\mathbb{C}^*$  w  $\mathbb{C}^2$ .*

*Zachodzi również implikacja przeciwna, tzn. w każdym z powyższych przypadków mamy  $\kappa = 2$  oraz  $\mathbb{P}^2 \setminus \bar{E}$  posiada  $\mathbb{C}^{**}$ -rozwłóknienie.*

Zauważmy, że wszystkie krzywe z powyższego twierdzenia są sztywne, nie mają deformacji. Krzywych typu (2) jest bardzo dużo, są 4 serie zależne od 3 naturalnych dyskretnych parametrów:  $\mathcal{A}(\gamma, p, s)$ ,  $\mathcal{B}(\gamma, p, s)$ ,  $\mathcal{C}(\gamma, p, s)$ ,  $\mathcal{D}(\gamma, p, s)$ , oraz 3 serie zależne od jednego dyskretnego parametru:  $\mathcal{E}(k)$ ,  $\mathcal{F}(k)$ ,  $\mathcal{G}(\gamma)$ . Seria  $\mathcal{G}(k)$ ,  $k \geq 1$  jest nową, nieznaną wcześniej klasą krzywych 2-ostrzowych, która pojawiła się jednak w latach 90'tych w prywatnej korespondencji T. tom Diecka i H. Flennera (zob. dyskusja [HAB4, §4D]).

Geometryzy zaznajomieni z tematyką zauważają, że na liście [HAB4, Table 1] nie pojawiają się pewne znane serie krzywych ostrzowych z dopełnieniem log ogólnego typu, mianowicie:

- dwie kwintyki z 3 i 4 ostrzami krotności 2 [Moe08, §6],
- krzywe 3-ostrzowe Flennera-Zaidenberga drugiego rodzaju  $\mathcal{FZ}_2(\gamma)$  [FZ00],
- krzywe 3-ostrzowe Fenske  $\mathcal{FE}(\gamma)$  [Fen99b],
- krzywe 2-ostrzowe które są domknięciami pewnych zanurzeń  $\mathbb{C}^*$  w  $\mathbb{C}^2$  [CNKR09, (ii.3)].

Wszystkie te krzywe są typu 2.18(B). Obecnie zajmujemy się ich klasyfikacją. Fakt, że dywizor log kanoniczny jest antyszeroki na modelu minimalnym jest bardzo silnym ograniczeniem. Wstępne wyniki mówią, że oprócz powyższych krzywych jest jeszcze tylko jedna, nieznaną wcześniej seria krzywych 2-ostrzowych, oraz pewne pojedyncze przypadki krzywych 2-ostrzowych nie należące do żadnej serii.

**Uwaga 2.20.** Zwróćmy uwagę, że w momencie, gdy program klasyfikacji krzywych spełniających Hipotezę F, podjęty razem z T. Pełką, się zakończy, Hipoteza F zostanie właściwie jedyną hipotezą do udowodnienia w tym obszarze. W szczególności, poprzez klasyfikację implikuje ona również silną hipotezę o sztywności, tzn. Hipotezę D. Sądzę, że ten wynik potwierdzi siłę metody polegającej na badaniu modeli niemal minimalnych dla powierzchni  $(X, rD)$ , opisanej w Sekcji 2A. Jest to nowe narzędzie badania powierzchni log ogólnego typu i jestem przekonany, że można dzięki niemu uzyskać w szczególności nowe ograniczenia na liczbę osobliwości krzywych płaskich o ustalonej topologii (por. [Ton05]), niekoniecznie wymiernych czy ostrzowych.

### 3. INNE WYNIKI

Opiszę teraz wyniki nie wchodzące w skład cyklu przedstawianego jako osiągnięcie habilitacyjne.

#### 3A. *Powierzchnie $\mathbb{Q}$ -acykliczne: typ nieogólny* ( $\kappa(S_0) \leq 1$ )

Jeśli rozmaitość normalna  $S'$  ma homologie wymierne  $H_i(-, \mathbb{Q})$  takie jak płaszczyzna  $\mathbb{C}^2$ , tzn. zerowe dla  $i > 0$ , to nazywamy ją **płaszczyzną  $\mathbb{Q}$ -homologiczną**. Dzielimy je na typ szczególny i ogólny, zależnie od tego czy wymiar Kodairy ich części gładkiej  $S_0$  jest mniejszy czy równy 2. Ich badanie, z powodu ich podobieństwa do prawdziwej płaszczyzny, przyczyniło się i przyczynia do rozwoju teorii powierzchni otwartych i przestrzeni afinicznych. Zrozumienie ich struktury jest ważnym obszarem testowym dla rozwoju teorii powierzchni otwartych. Szczegóły można znaleźć w monografii Miyanishi'ego [Miy01], a związki z poszczególnymi problemami m.in. w pracach [Zai98] (struktury egzotyczne), [KR99], [GKR08] (ilorazy działań grup reduktywnych), [KR07] (powierzchnie ściągalne), [Miy07] (przegląd). Badania płaszczyzn homologicznych prowadzili m.in. D.Daigle, T.t.Dieck, T. Fujita, R.V.Gurjar, T.Kishimoto, H.Kojima, S.Kaliman, M.Koras, K.Masuda, T.Petrie., S.Ramanujam, P.Russell, A.Shastry, T.Sugie, S.Tsunoda, M.Zaidenberg.

Znane były następujące rezultaty (por. przegląd wyników w [Miy01, §3.4]):

**Theorem 3.1.** *Niech  $S'$  będzie płaszczyzną  $\mathbb{Q}$ -homologiczną, a  $S_0$  jej częścią gładką. Załóżmy, że  $S'$  ma osobliwości co najwyżej ilorazowe, równoważnie, jest log terminalna.*

- (1) (i)  $S'$  jest powierzchnią afiniczną [Fuj82] wymierną [GPS97], [PS97], [GP99],  
(ii) dywizor brzegowy dowolnego uzupełnienia log gładkiego w nieskończoności jest drzewem krzywych wymiernych,  
(iii)  $H_i(S', \mathbb{Z}) = 0$  dla  $i \neq 0, 1$ .
- (2) Jeśli  $\kappa(S_0) = -\infty$ , to albo  $S' \cong \mathbb{C}^2/G$  dla pewnej małej, skończonej, ale niecyklicznej grupy  $G < GL(2, \mathbb{C})$ , albo  $S'$  posiada  $\mathbb{C}^1$ -rozwłóknienie, dla którego redukcje wszystkich włókien są izomorficzne z  $\mathbb{C}^1$ . Grupa  $H_1(S', \mathbb{Z})$  może być dowolną skończoną grupą abelową [MS91a].
- (3) Jeśli  $S'$  jest gładkie i  $\kappa(S') = 1$ , to  $S'$  posiada  $\mathbb{C}^*$ -rozwłóknienie. Rozwłóknienia te są dokładnie zbadane [MS91a].
- (4) Jeśli  $S'$  jest gładkie i  $\kappa(S') = 0$ , to albo  $S'$  posiada  $\mathbb{C}^*$ -rozwłóknienie albo jest izomorficzna z jedną z trzech powierzchni wyjątkowych Fujity  $Y\{a_1, a_2, a_3\}$ , gdzie  $\sum 1/a_i = 1$  [Fuj82].



Mój doktorat dotyczył osobliwych powierzchni  $\mathbb{Q}$ -acyklicznych o dowolnych osobliwościach. W pierwszym okresie po doktoracie dopracowałem i opublikowałem uzyskane w nim wyniki, które miały na celu uogólnienie powyższych twierdzeń. Kładłem tutaj nacisk na kompletność rozwiązań. Podsumowaniem jest następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 3.1.** *Niech  $S'$  będzie osobliwą płaszczyzną  $\mathbb{Q}$ -homologiczną, a  $S_0$  jej częścią gładką.*

- (1) [PUB2, Theorems 1.1, 1.2]. *Jeśli  $S'$  zawiera osobliwość nie-ilorazową, to jest izomorficzna z ilorazem stożka afinicznego nad krzywą rzutową przez działanie grupy skończonej, które jest wolne na dopełnieniu wierzchołka i zachowuje zbiór tworzących. W szczególności  $S'$  jest topologicznie ściągalna, ma 1 punkt osobliwy,  $S_0$  posiada  $\mathbb{C}^*$ -rozwłóknienie,  $S'$  jest biwymierna z  $C \times \mathbb{C}^1$  dla pewnej krzywej gładkiej  $C$ , niekoniecznie wymiernej.*
- (2) [PUB1]. *Jeśli  $S'$  ma osobliwości ilorazowe oraz  $\kappa(S_0) = 0, 1$ , to albo  $S'$  posiada  $\mathbb{C}^*$ -rozwłóknienie, albo jest izomorficzne z jedną z dwóch osobliwych płaszczyzn wyjątkowych  $Y\{3, 3, 3\}/\mathbb{Z}_3$  lub  $Y\{2, 4, 4\}/\mathbb{Z}_2$ .*
- (3) [PUB3, Theorems 1.1, 1.3] *W przypadku (2), gdy  $S'$  posiada  $\mathbb{C}^*$ -rozwłóknienie, podany jest opis wszystkich możliwych  $\mathbb{C}^*$ -rozwłóknień, ich liczba (są co najwyżej 4), struktura włókien osobliwych oraz osobliwości  $S'$  (nie muszą być cykliczne).  $S'$  zawiera co najwyżej 2 linie afiniczne.*

Na szczególną uwagę zasługuje następujące kryterium na algebraiczną ściągłość dywizora na powierzchni rzutowej. Kryterium to jest wywnioskowane z dowodu kryterium Nakai-Moishezon oraz argumentu Fujity. Przez  $NS_{\mathbb{Q}}$  oznaczamy grupę Nerona-Severiego pomnożoną tensorowo przez  $\mathbb{Q}$  nad  $\mathbb{Z}$ .

**Wniosek 3.2** ([PUB2], Corollary 2.6). *Niech  $H$  i  $E$  będą efektywnymi dywizorami na gładkiej zupełnej powierzchni  $X$ , które mają rozłączne nośniki. Załóżmy, że  $H$  ma spójny nośnik a  $E$  ujemnie określoną macierz przecięć, oraz że  $NS_{\mathbb{Q}}(X - H - E) = 0$ . Wówczas powierzchnia  $(X - H)/E$  jest algebraiczna i normalna.*

Zwróćmy uwagę, że przeciwnie niż w znanym kryterium Artina [Art66], powstała osobliwość nie musi być wymierna [PUB2, Example 4.8].

W analogii do przypadku gładkiego [FZ94] skonstruowałem też ciekawy przykład moduli powierzchni  $\mathbb{Q}$ -homologicznych:

**Twierdzenie 3.3** ([PUB3], §3B). *Istnieją dowolnie wysoko-wymiarowe rodziny nieizomorficznych płaszczyzn  $\mathbb{Q}$ -homologicznych, mających część gładką ujemnego wymiaru Kodairy i mających te same osobliwości, typ homeomorfizmu oraz typ izomorfizmu dywizora w nieskończoności w minimalnym uzupełnieniu.*

### 3B. Powierzchnie $\mathbb{Q}$ -acykliczne: typ ogólny ( $\kappa(S_0) = 2$ )

Niech  $S'$  będzie płaszczyzną  $\mathbb{Q}$ -homologiczną, a  $S_0$  jej częścią gładką. Przez  $\pi: S \rightarrow S'$  oznaczmy minimalną rezolwentę a przez  $(\bar{S}, D)$  minimalne gładkie uzupełnienie  $S$ . Na podstawie wyników z Sekcji 3A można zakładać, że  $\kappa(S_0) = 2$ . Dobrze znanym przykładem jest powierzchnia Ramanujama [Ram71] (gładka, wymierna, topologicznie ściągalna, nieizomorficzna z  $\mathbb{C}^2$ ), która ma  $\kappa = 2$ . Pomimo założenia  $\kappa(S_0) = 2$ , wymiar Kodairy  $S'$ , definiowany jako  $\kappa(S') := \kappa(S) = \kappa(K_X + D)$ , może teoretycznie przyjmować dowolną wartość ze zbioru  $\{-\infty, 0, 1, 2\}$ . Nawet w przypadku gładkim nie ma ogólnych twierdzeń strukturalnych. Wprawdzie T. tom Dieck i T. Petrie [tDP93], [tDP89] opisali płaszczyzny  $\mathbb{Q}$ -homologiczne, dla których istnieje morfizm  $f: (\bar{S}, D) \rightarrow (\mathbb{P}^2, f_*D)$ , gdzie  $f_*D$  jest układem linii, ale wiadomo, że taki morfizm nie zawsze istnieje [tD90]. Klasa gładkich płaszczyzn  $\mathbb{Q}$ -homologicznych log ogólnego typu pozostaje więc w dużej mierze niezbadana. Hipotezy D, E stanowią tutaj ważną wskazówkę. Obecnie pracujemy nad opisem płaszczyzn  $\mathbb{Q}$ -homologicznych, które

spełniają moją hipotezę o ujemności, tzn. Hipotezę F. Sytuacja w przypadku dopełnień krzywych ostrzowych jest już opanowana (por. Sekcja 2E), ale w ogólności problem jest istotnie trudniejszy.

W przypadku płaszczyzn  $\mathbb{Q}$ -homologicznych osobliwych znany był następujący wynik Korasa-Russella, którego dowód oparty jest na metodach badania ilorazu  $\mathbb{C}^3/\mathbb{C}^*$  z pracy [KR99].

**Twierdzenie 3.4** ([KR07], Theorem 1.1). *Niech  $S'$  będzie płaszczyzną  $\mathbb{Q}$ -homologiczną z częścią gładką log ogólnego typu ( $\kappa(S_0) = 2$ ). Jeśli  $S'$  ma osobliwości ilorazowe oraz jest topologicznie ściągalna, to  $\kappa(S') \geq 0$ .*

Z logarytmicznej nierówności BMY można wywnioskować, że założenie o osobliwościach jest zbędne. Mianowicie, założenie  $\kappa(S_0) = 2$  implikuje, że  $S'$  posiada co najwyżej jedną osobliwość i musi być ona typu ilorazowego (obserwacja ta należy do R. Gurjara, odpowiednie obliczenie można znaleźć na przykład w [PUB2, Proposition 3.3(i)], jest ono nieznacznie poprawionym argumentem z dowodu [KR07, Proposition 5.1]). Razem z M. Korasem, usunęliśmy z powyższego twierdzenia założenie o ściągalności.

**Twierdzenie 3.5** ([PUB4]). *Niech  $S'$  będzie płaszczyzną  $\mathbb{Q}$ -homologiczną z częścią gładką log ogólnego typu ( $\kappa(S_0) = 2$ ). Wówczas  $\kappa(S') \geq 0$ .*

Twierdzenie to było głównym wynikiem mojej pracy doktorskiej (2009). Argumenty oparte są w części na metodach z [KR07], choć brak założenia o ściągalności wprowadza nowy, istotnie utrudniający dowód, stopień swobody. W szczególności, w Sekcji 7 (Proposition 7.6) wprowadzony jest nowy pomysł zasugerowany przez M. Korasa, rodzaj chirurgii na brzegu, służący do polepszenia szacowań w nierówności log BMY. Argument ten był niemal równolegle wprowadzony w [CNKR09] i później wykorzystywany w [GKMR14] i [PUB5] (w tym pierwszym do badania typu osobliwości ilorazowej  $S'$  przy silniejszym założeniu, że  $S'$  jest  $\mathbb{Z}$ -acykliczna).

**Uwaga 3.6** (Wyszukiwanie dobrych  $(-1)$ -krzywych). Na uwagę zasługuje kluczowa metoda stosowana w obu powyższych twierdzeniach ([KR07, Theorem 5.5.2, 5.10], [PUB4, Proposition 4.2]), która jest oparta na [KR99, Theorem 4.2]. Chodzi tutaj o wyszukiwanie i ściągnięcie nowych  $(-1)$ -krzywych na log powierzchni  $(\bar{S}, D + \text{Exc } \pi)$  o kontrolowanym względem brzegu położeniu. To ostatnie twierdzenie Korasa-Russella było dla mnie powodem nieprzespanych nocy, gdy jako doktorant próbowałem zrozumieć wagę założeń i ogólność metody. Obecnie jest jasne, że jest ono w istocie jednym z wielu objawień logarytmicznego programu modeli minimalnych. Krótki, nowoczesny dowód uogólnienia tej metody można znaleźć w [PRE3].

Pytanie o to, jak wyglądają osobliwe powierzchnie  $\mathbb{Q}$ -acykliczne z częścią gładką log ogólnego typu jest w dużej mierze otwarte. Wiadomo dzięki Twierdzeniu 3.5, że  $\kappa(S') \geq 0$ , ale nawet przypadki  $\kappa(S') = 0, 1$  nie są zbadane. Jak dotąd nie ma też sformułowanego analogu Hipotezy D czy F.

Opis stanu wiedzy i hipotez na temat płaszczyzn  $\mathbb{Q}$ -homologicznych (nie uwzględniający cyklu habilitacyjnego) zawierający podsumowanie powyższych prac, można znaleźć w moim artykule przeglądowym [PUB7].

### 3C. Zanurzenia $\mathbb{C}^*$ w $\mathbb{C}^2$

Jednym z ważnych kierunków badań dotyczących płaszczyzny  $\mathbb{C}^2$  jest badanie możliwych położenia krzywych ustalonego typu. Z powodu specjalnego wymiaru Kodairy za szczególnie istotne można uznać zrozumienie możliwych zanurzeń dla linii  $\mathbb{C}^1$  oraz dla nakłutej linii  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}^1 \setminus \{0\}$ . Przez *zanurzenie* rozumiem tutaj zanurzenie domknięte. Pierwszy przypadek został opisany w słynnych twierdzeniach Abhyankara-Moha-Suzuki [AM75], [Suz74] oraz Zaidenberg-Lina [ZL83]. Krzywe te są, z dokładnością do wyboru współrzędnych na płaszczyźnie, zadane jako  $\{x^n = y^m\}$  dla pewnych

względnie pierwszych  $n > m \geq 1$ . Zbadanie zanurzeń  $\mathbb{C}^*$  okazało się zaskakująco trudnym problemem. Wzbudzał on zainteresowanie wielu matematyków, w tym Sathaye, Kalimana i Zaidenberga, a kilka lat temu M. Borodzika i H. Żołądka [BZ10], którzy podali hipotetyczną listę zanurzeń (w tym również tzw. *zanurzeń osobliwych*, tzn. morfizmów algebraicznych, które są homeomorfizmami na obraz w topologii Euklidesowej). Lista ta jest oparta na założeniu o osobliwościach przestrzeni typu moduli dla odwzorowań  $\mathbb{C}^*$  w  $\mathbb{C}^2$ , które jak dotąd pozostaje hipotezą (Conjecture 2.40). W tej sytuacji M. Koras i P. Russell zapoczątkowali program bezwarunkowej klasyfikacji nieosobliwych zanurzeń  $\mathbb{C}^*$  w  $\mathbb{C}^2$ . Przypomnijmy następującą definicję:

**Definicja 3.7.** Niech  $U$  będzie obrazem (gładkiego) zanurzenia  $\mathbb{C}^*$  w  $\mathbb{C}^2$ . Mówimy, że:

- (1)  $U$  ma *dobrą asymptotę*, gdy istnieje krzywa  $A \subseteq \mathbb{C}^2$  izomorficzna z  $\mathbb{C}^1$ , taka że  $A \cdot U \leq 1$ .
- (2)  $U$  jest zanurzeniem *sporadycznym*, jeśli nie posiada dobrej asymptoty.

W powyższej definicji przecięcie liczone jest w  $\mathbb{C}^2$ . W [CNKR09] sklasyfikowano wszystkie zanurzenia z dobrą asymptotą i okazało się, że lista zawiera wszystkie nieosobliwe zanurzenia z listy [BZ10], poza następującymi (przeskalowane zanurzenia (s) i (t)):

$$(3.1) \quad \left(t^{2n}\left(t^2 + t + \frac{1}{2}\right), t^{-2n-4}\left(t^2 - t + \frac{1}{2}\right)\right), \quad t \in \mathbb{C}^*, n \in \mathbb{N}_+$$

$$(3.2) \quad \left(t^4\left(t^2 + t + \frac{2}{3}\right), t^{-8}\left(t^2 - t + \frac{1}{3}\right)\right), \quad t \in \mathbb{C}^*.$$

Szczególnie interesujące jest to ostatnie zanurzenie, które nie jest częścią żadnej większej serii. Z [BZ10] wynika więc następująca hipoteza.

**Hipoteza G.** *Zanurzenia (3.1) i (3.2) są jedynymi zanurzeniami sporadycznymi  $\mathbb{C}^*$  w  $\mathbb{C}^2$ .*

Dowód powyższej hipotezy jest trudny. Pierwszym krokiem była praca [KR11], gdzie wykazano, że można tak dobrać współrzędne  $\mathbb{C}^2$ , żeby po wzięciu domknięcia w  $\mathbb{P}^2$  dwie gałęzie  $\mathbb{C}^*$  w nieskończoności były rozdzielone. W [Kor11] pokazano, że wszystkie zanurzenia  $\mathbb{C}^*$  w  $\mathbb{C}^2$  są Cremona-równoważne z linią. W ostatniej opublikowanej pracy z tej serii wykazaliśmy kolejne silne geometryczne ograniczenia na zanurzenia sporadyczne, dzieląc je w zależności od ich *typu w nieskończoności* (patrz [PUB5, Definition 1.2]).

**Twierdzenie 3.8** ([PUB5]). *Dla każdego sporadycznego  $\mathbb{C}^*$ -zanurzenia  $U \subset \mathbb{C}^2$  można wybrać współrzędne na  $\mathbb{C}^2$  tak, że jednocześnie mamy:*

- (1) *gałęzie  $U$  w nieskończoności są rozłączne oraz  $U$  ma w nieskończoności typ  $(1, \tilde{j})$  dla pewnego  $\tilde{j} \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ,*
- (2) *jeśli  $\bar{U}$  oznacza domknięcie  $U$  w  $\mathbb{P}^2 = \mathbb{C}^2 \cup L_\infty$ , to transformata właściwa  $\bar{U}$  poprzez minimalną log rezolwentę  $(\mathbb{P}^2, \bar{U} + L_\infty)$  ma samo-przecięcie między  $-2$  and  $-5$ .*

Dojście do konkretnych wzorów (3.1) i (3.2) na podstawie założeń o braku dodatkowych własności (brak dobrej asymptoty) jest zadaniem trudnym i wymaga precyzyjnej kontroli nad możliwymi typami osobliwości w nieskończoności. Oprócz technik geometrycznych dużą rolę odgrywają tutaj pary Hamburger-Noether, dobrze opisane w [Rus80], które stanowią zamienniki dla par Puiseux, ale mają bardziej bezpośredni związek z grafami ważonymi dywizorów wyjątkowych, powstających przy rozwiązywaniu osobliwości. Pracujemy obecnie nad szczegółami pełnego dowodu Hipotezy G. Praca ta zakończy długoletni wysiłek wielu autorów.

### 3D. *Nowy dowód twierdzeń Zaidenberga-Lina i Abhyankara-Moha-Suzuki*

W pracy [PUB6] pokazałem jak można udowodnić opisywane już wyżej twierdzenia Zaidenberga-Lina i Abhyankara-Moha-Suzuki o krzywych topologicznie ściągalnych na  $\mathbb{C}^2$ . O ile znanych jest wiele dowodów twierdzenia AMS, o tyle dowodów twierdzenia Zaidenberga-Lina jest tylko kilka,

każdy używa zaawansowanych wyników geometrycznych i topologicznych. Mój dowód używa programu modeli niemal minimalnych i prowadzony jest wspólnie dla obu twierdzeń. W szczególności, wykorzystany jest trick z chirurgią wspomniany w Sekcji 3B i logarytmiczna nierówność BMY. Ta metoda została niedawno wykorzystana przez J.Decaup i A.Dubouloza [DD17] do udowodnienia analogu twierdzenia AMS w przypadku  $\mathbb{P}^2 \setminus C$ , gdzie  $C$  jest stożkową. W sekcji 3 praca [PUB6] zawiera też drugi nowy (niezależny od pierwszego) dwustronicowy dowód samego twierdzenia AMS oparty na liczeniu homologii.

### 3E. (Uogólniona) hipoteza jacobianowa

Słynna hipoteza jacobianowa dla płaszczyzny opiera się jak dotąd wszelkim próbom dowodu. W związku z tym M.Miyanishi sformułował jej uogólnienie dla dowolnych rozmaitości [Miy85] i rozpoczął jej szczegółowe badanie dla powierzchni najbliższych płaszczyźnie, czyli dla omawianych już płaszczyzn  $\mathbb{Q}$ -homologicznych.

**Definicja 3.9** (Uogólniona Hipoteza Jakobianowa). Mówimy, że gładka rozmaitość zespolona  $S$  spełnia *uogólnioną hipotezę jacobianową*, gdy każdy jej étalny endomorfizm jest właściwy.

Przypomnijmy, że przekształcenie étale to takie, dla którego różniczka jest izomorfizmem w każdym punkcie (dla przykładu włożenie otwarte). Dla rozmaitości o niezerowej charakterystyce Eulera endomorfizm étalny jest właściwy wtedy i tylko wtedy, gdy jest izomorfizmem, co pokazuje, że hipoteza dla płaszczyzny jest równoważna oryginalnej hipotezie jacobianowej. R.Gurjar i M.Miyanishi osiągnęli pełne wyniki w wymiarach Kodairy  $\kappa = 2, 1$  (dla  $\kappa = 2$  jest to w istocie wniosek z ogólnych twierdzeń Iitaki [Iit82]) oraz częściowe w przypadkach  $\kappa = 0, -\infty$ . Im wymiar Kodairy jest mniejszy, tym jest trudniej. Oczywiście, możliwe że badanie uogólnionej wersji hipotezy jacobianowej nie pomoże wiele w badaniu oryginalnej hipotezy, tym niemniej osiągnięte wyniki okazały się wielce zaskakujące i w istotny sposób pomagają w rozumieniu założeń tej ostatniej hipotezy. Przypadek  $\kappa = -\infty$  jest najważniejszy, jako że  $\kappa(\mathbb{C}^2) = -\infty$ . Znany był następujący wynik:

**Twierdzenie 3.10** ([GM99] §3, §6, [Miy03] 2.4.3(2), 2.3.11). *Niech  $S$  będzie gładką płaszczyzną  $\mathbb{Q}$ -homologiczną o ujemnym wymiarze Kodairy. Jeśli grupa podstawowa  $S$  nie jest skończoną grupą cykliczną, to  $S$  ma jedno  $\mathbb{C}^1$ -rozwłóknienie i jest ono globalnie zachowywane przez endomorfizmy étalne  $S$ . Hipoteza jacobianowa dla  $S$  zachodzi, o ile  $\pi_1(S) \not\cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ .*

W przypadku  $\pi_1(S) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$  znany jest kontrprzykład [Miy03, 2.4.3(2), 2.3.11]. Przypadek, gdy  $\pi_1(S)$  jest skończoną grupą cykliczną, był otwarty.

Niech  $k, r$  będą dodatnimi liczbami naturalnymi. Gładkie powierzchnie afiniczne

$$(3.3) \quad \tilde{S}(k, r) = \{x^r y + z^k = 1\} \subseteq \text{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z])$$

są jednospójne (zob. [PRE2, Example 2.11]) i dla każdego  $a \in \{1, 2, \dots, k\}$  względnie pierwszego z  $k$  dopuszczają działanie  $\mathbb{Z}_k$ :

$$\varepsilon *_a (x, y, z) = (\varepsilon x, \varepsilon^{-r} y, \varepsilon^{-a} z),$$

gdzie identyfikujemy  $\mathbb{Z}_k$  z grupą  $k$ -tych pierwiastków z jednościami ( $\mathbb{Z}_1 \cong \{1\}$ ). Działanie jest wolne dla  $k \geq 2$ . Powierzchnię ilorazową oznacza się przez  $S(k, r, a)$ . Jest to płaszczyzna  $\mathbb{Q}$ -homologiczna o ujemnym wymiarze Kodairy i grupie podstawowej  $\mathbb{Z}_k$ .

Razem z A. Duboulozem wykazaliśmy m.in. następujące twierdzenia (artykuł jest recenzowany).

**Twierdzenie 3.11** ([PRE2], Theorem B). *Dla  $k, r \geq 2$  płaszczyzna  $\mathbb{Q}$ -homologiczna  $S(k, r, a)$  posiada  $\mathbb{C}^*$ -ekwiwariantny endomorfizm étalny stopnia  $d$  (a więc niewłaściwy dla  $d > 1$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(3.4) \quad d \equiv 1 \pmod{k(r-1)} \quad \text{lub} \quad k|r, a = 1 \quad \text{oraz} \quad d \equiv r \pmod{k(r-1)}.$$

*W szczególności, hipoteza jacobianowa jest fałszywa dla  $S(k, r, a)$  i dla  $\tilde{S}(k, r)$ .*

Fakt, że hipoteza jest fałszywa dla powierzchni  $\tilde{S}(k, r)$ ,  $k, r \geq 2$  jest zaskakujący, bo powierzchnia ta jest jednospójna i posiada  $\mathbb{C}^1$ -rozwłóknienie nad  $\mathbb{C}^1$  (skąd  $\kappa = -\infty$ ), więc jest z wielu względów podobna do płaszczyzny  $\mathbb{C}^2$ . Powyższe kontrprzykłady mają naturę dyskretną, ale można udowodnić dużo bardziej zaskakujący rezultat.

**Twierdzenie 3.12** ([PRE2], Theorem C). *Niech  $\bar{r} \geq 1, k \geq 2$ . Wówczas dla dowolnej liczby całkowitej  $N \geq 0$  istnieją dowolnie wysoko-wymiarowe rodziny niewłaściwych endomorfizmów étalnych powierzchni  $\mathbb{Q}$ -acyklicznej  $S = \tilde{S}(k, k\bar{r}, 1)$  stopnia  $k(N(\bar{r}k - 1) + \bar{r})$ , takie że wszystkie endomorfizmy w rodzinie są różne od siebie, nawet jeśli utożsamimy te, które różnią się o działanie grupy automorfizmów  $S$  poprzez składanie z lewej lub prawej strony.*

Formuły na rodziny kontrprzykładów w najprostszym przypadku powierzchni  $S(2, 2, 1) \cong \{u(1 + uv) = w^2\}$ , która ma grupę podstawową  $\mathbb{Z}_2$ , można znaleźć w [PRE2, Example 5.7].

#### LITERATURA

- [AM75] Shreeram S. Abhyankar and Tzuong Tsieng Moh, *Embeddings of the line in the plane*, J. Reine Angew. Math. **276** (1975), 148–166.
- [Art66] Michael Artin, *On isolated rational singularities of surfaces*, Amer. J. Math. **88** (1966), 129–136.
- [BBSdR16] Adam Baranowski, Maciej Borodzik, and Juan Serrano de Rodrigo, *Heegaard Floer homologies and rational cuspidal curves*, Winter Braids Lecture Notes, vol. 3, 2016, doi:10.5802/wbln.12, pp. 1–39.
- [BDPaP13] Sébastien Boucksom, Jean-Pierre Demailly, Mihai Păun, and Thomas Peternell, *The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension*, J. Algebraic Geom. **22** (2013), no. 2, 201–248.
- [BL14] Maciej Borodzik and Charles Livingstone, *Heegaard Floer homology and rational cuspidal curves*, Forum Math. Sigma **2** (2014), e1, 28, arXiv:1304.1062.
- [BN14] József Bodnár and András Némethi, *Lattice cohomology and rational cuspidal curves*, arXiv:1405.0437, 2014.
- [BZ10] Maciej Borodzik and Henryk Żołądek, *Complex algebraic plane curves via Poincaré-Hopf formula. II. Annuli*, Israel J. Math. **175** (2010), 301–347, arXiv:0708.1661.
- [CNKR09] Pierrette Cassou-Nogues, Mariusz Koras, and Peter Russell, *Closed embeddings of  $\mathbb{C}^*$  in  $\mathbb{C}^2$ . I*, J. Algebra **322** (2009), no. 9, 2950–3002.
- [Coo59] Julian Lowell Coolidge, *A treatise on algebraic plane curves*, Dover Publications Inc., New York, 1959.
- [DD17] Julie Decaup and Adrien Dubouloz, *Affine lines in the complement of a smooth plane conic*, Bollettino dell’Unione Matematica Italiana (2017).
- [DL08] Adrien Dubouloz and Stéphane Lamy, *Variations on log sarkisov program for surfaces*, arXiv:0802.2441 (2008).
- [DS15a] Alexandru Dimca and Gabriel Sticlaru, *Free divisors and rational cuspidal plane curves*, arXiv:1504.01242 (2015).
- [DS15b] Alexandru Dimca and Gabriel Sticlaru, *Nearly free divisors and rational cuspidal curves*, arXiv:1505.00666 (2015).
- [FdBLMHN06] Javier Fernández de Bobadilla, Ignacio Luengo, Alejandro Melle-Hernández, and Andras Némethi, *On rational cuspidal projective plane curves*, Proceedings of the London Mathematical Society **92** (2006), no. 1, 99–138.
- [Fen99a] Torsten Fenske, *Rational 1- and 2-cuspidal plane curves.*, Beiträge zur Algebra und Geometrie **40** (1999), no. 2, 309–329.
- [Fen99b] Torsten Fenske, *Rational cuspidal plane curves of type  $(d, d - 4)$  with  $\chi(\Theta_V\langle D \rangle) \leq 0$* , Manuscripta Math. **98** (1999), no. 4, 511–527.
- [Fuj82] Takao Fujita, *On the topology of noncomplete algebraic surfaces*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **29** (1982), no. 3, 503–566.
- [Fuj00] Osamu Fujino, *Abundance theorem for semi log canonical threefolds*, Duke Math. J. **102** (2000), no. 3, 513–532.
- [FZ94] Hubert Flenner and Mikhail Zaidenberg,  *$\mathbb{Q}$ -acyclic surfaces and their deformations*, Classification of algebraic varieties (L’Aquila, 1992), Contemp. Math., vol. 162, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 143–208.

- [FZ96] Hubert Flenner and Mikhail Zaidenberg, *On a class of rational cuspidal plane curves*, Manuscripta Math. **89** (1996), no. 4, 439–459.
- [FZ00] Hubert Flenner and Mikhail Zaidenberg, *Rational cuspidal plane curves of type  $(d, d - 3)$* , Math. Nachr. **210** (2000), 93–110.
- [GKMR14] R. V. Gurjar, M. Koras, M. Miyanishi, and P. Russell, *A homology plane of general type can have at most a cyclic quotient singularity*, J. Algebraic Geom. **23** (2014), no. 1, 1–62.
- [GKR08] R. V. Gurjar, Mariusz Koras, and Peter Russell, *Two dimensional quotients of  $\mathbb{C}^n$  by a reductive group*, Electron. Res. Announc. Math. Sci. **15** (2008), 62–64.
- [GM99] R. V. Gurjar and M. Miyanishi, *On the Jacobian conjecture for  $\mathbb{Q}$ -homology planes*, J. Reine Angew. Math. **516** (1999), 115–132.
- [GP99] R. V. Gurjar and C. R. Pradeep,  *$\mathbb{Q}$ -homology planes are rational. III*, Osaka J. Math. **36** (1999), no. 2, 259–335.
- [GPS97] R. V. Gurjar, C. R. Pradeep, and Anant. R. Shastri, *On rationality of logarithmic  $\mathbb{Q}$ -homology planes. II*, Osaka J. Math. **34** (1997), no. 3, 725–743.
- [HAB1] Karol Palka, *Cuspidal curves, minimal models and Zaidenberg’s finiteness conjecture*, J. Reine Angew. Math. (online 2016), 28 pages, DOI 10.1515/crelle-2016-0021.
- [HAB2] Karol Palka, *The Coolidge–Nagata conjecture, Part I*, Adv. Math. **267** (2014), 1–43, DOI 10.1016/j.aim.2014.07.038.
- [HAB3] Mariusz Koras and Karol Palka, *The Coolidge–Nagata conjecture*, Duke Math. J. **166** (2017), 61 pages (to be assigned), DOI 10.1215/00127094-2017-0010,.
- [HAB4] Karol Palka and Tomasz Pełka, *Classification of planar rational cuspidal curves. I.  $\mathbb{C}^{**}$ -fibrations*, Proc. London Math. Soc. (3) (online 2017), 55 pages, DOI 10.1112/plms.12049.
- [Iit82] Shigeru Iitaka, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 76, Springer-Verlag, New York, 1982, An introduction to birational geometry of algebraic varieties, North-Holland Mathematical Library, 24.
- [Kas87] Hiroko Kashiwara, *Fonctions rationnelles de type  $(0, 1)$  sur le plan projectif complexe*, Osaka J. Math. **24** (1987), no. 3, 521–577.
- [Kaw79] Yujiro Kawamata, *On the classification of noncomplete algebraic surfaces*, Algebraic geometry (Proc. Summer Meeting, Univ. Copenhagen, Copenhagen, 1978), Lecture Notes in Math., vol. 732, Springer, Berlin, 1979, pp. 215–232.
- [KM98] János Kollár and Shigefumi Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 134, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti, Translated from the 1998 Japanese original.
- [KM99] Seán Keel and James McKernan, *Rational curves on quasi-projective surfaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **140** (1999), no. 669, viii+153.
- [KNS89] Ryoichi Kobayashi, Shu Nakamura, and Fumio Sakai, *A numerical characterization of ball quotients for normal surfaces with branch loci*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **65** (1989), no. 7, 238–241.
- [Kol97] János Kollár, *Singularities of pairs*, Algebraic geometry—Santa Cruz 1995, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 62, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 221–287.
- [Kor11] Mariusz Koras,  *$\mathbb{C}^*$  in  $\mathbb{C}^2$  is birationally equivalent to a line*, Affine algebraic geometry, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, pp. 165–191.
- [KR99] Mariusz Koras and Peter Russell,  *$\mathbb{C}^*$ -actions on  $\mathbb{C}^3$ : the smooth locus of the quotient is not of hyperbolic type*, J. Algebraic Geom. **8** (1999), no. 4, 603–694.
- [KR07] Mariusz Koras and Peter Russell, *Contractible affine surfaces with quotient singularities*, Transform. Groups **12** (2007), no. 2, 293–340.
- [KR11] Mariusz Koras and Peter Russell, *Some properties of  $\mathbb{C}^*$  in  $\mathbb{C}^2$* , Affine algebraic geometry. Proceedings of the conference, Osaka, Japan, March 3–6, 2011. Dedicated to Professor Masayoshi Miyanishi on the occasion of his 70th birthday., Hackensack, NJ: World Scientific, 2011, arXiv:1202.4738v1, pp. 160–197 (English).
- [Kra96] Hanspeter Kraft, *Challenging problems on affine  $n$ -space*, Astérisque (1996), no. 237, Exp. No. 802, 5, 295–317, Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95.
- [Lan03] Adrian Langer, *Logarithmic orbifold Euler numbers of surfaces with applications*, Proc. London Math. Soc. (3) **86** (2003), no. 2, 358–396.
- [Liu14] Tiankai Liu, *On planar rational cuspidal curves*, Ph. D. thesis, <http://hdl.handle.net/1721.1/90190>, 2014.
- [Mat02] Kenji Matsuki, *Introduction to the Mori program*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002.

- [Miy85] Masayoshi Miyanishi, *Étale endomorphisms of algebraic varieties*, Osaka J. Math. **22** (1985), no. 2, 345–364.
- [Miy01] Masayoshi Miyanishi, *Open algebraic surfaces*, CRM Monograph Series, vol. 12, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [Miy03] Masayoshi Miyanishi, *Lectures on geometry and topology of polynomials*, arXiv:1504.07179, 2003.
- [Miy07] Masayoshi Miyanishi, *Recent developments in affine algebraic geometry: from the personal viewpoints of the author*, Affine algebraic geometry, Osaka Univ. Press, Osaka, 2007, pp. 307–378.
- [MKM83] N. Mohan Kumar and M. Pavaman Murthy, *Curves with negative self-intersection on rational surfaces*, J. Math. Kyoto Univ. **22** (1982/83), no. 4, 767–777.
- [MM86] Yoichi Miyaoka and Shigefumi Mori, *A numerical criterion for uniruledness*, Ann. of Math. (2) **124** (1986), no. 1, 65–69.
- [MN07] J. Fernández de Bobadilla; I. Luengo; A. Melle-Hernández and A. Némethi, *On rational cuspidal plane curves, open surfaces and local singularities.*, Singularity theory. Proceedings of the 2005 Marseille singularity school and conference, CIRM, Marseille, France, January 24–February 25, 2005. Dedicated to Jean-Paul Brasselet on his 60th birthday, Singapore: World Scientific, 2007, pp. 411–442 (English).
- [Moe08] Karoline Torgunn Moe, *Rational cuspidal curves*, M.Sc. thesis, [http://folk.uio.no/torgunnk/MOE\\_MASTER.pdf](http://folk.uio.no/torgunnk/MOE_MASTER.pdf), 2008.
- [Mor73] James A. Morrow, *Minimal normal compactifications of  $\mathbf{C}^2$* , Rice Univ. Studies **59** (1973), no. 1, 97–112, Complex analysis, 1972 (Proc. Conf., Rice Univ., Houston, Tex., 1972), Vol. I: Geometry of singularities.
- [MS80] Masayoshi Miyanishi and Tohru Sugie, *Affine surfaces containing cylinderlike open sets*, J. Math. Kyoto Univ. **20** (1980), no. 1, 11–42.
- [MS89] Takashi Matsuoaka and Fumio Sakai, *The degree of rational cuspidal curves*, Math. Ann. **285** (1989), no. 2, 233–247.
- [MS91a] M. Miyanishi and T. Sugie, *Homology planes with quotient singularities*, J. Math. Kyoto Univ. **31** (1991), no. 3, 755–788.
- [MS91b] Masayoshi Miyanishi and Tohru Sugie,  *$\mathbb{Q}$ -homology planes with  $\mathbf{C}^{**}$ -fibrations*, Osaka J. Math. **28** (1991), no. 1, 1–26.
- [MT84] Masayoshi Miyanishi and Shuichiro Tsunoda, *Noncomplete algebraic surfaces with logarithmic Kodaira dimension  $-\infty$  and with nonconnected boundaries at infinity*, Japan. J. Math. (N.S.) **10** (1984), no. 2, 195–242.
- [MT92] M. Miyanishi and S. Tsunoda, *Absence of the affine lines on the homology planes of general type*, J. Math. Kyoto Univ. **32** (1992), no. 3, 443–450.
- [Nag60] Masayoshi Nagata, *On rational surfaces. I. Irreducible curves of arithmetic genus 0 or 1*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math. **32** (1960), 351–370.
- [Nam84] M. Namba, *Geometry of projective algebraic curves*, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, M. Dekker, 1984.
- [Ore02] Stephan Yu. Orevkov, *On rational cuspidal curves*, Math. Ann. **324** (2002), no. 4, 657–673.
- [Pio07] Jens Piontkowski, *On the number of cusps of rational cuspidal plane curves*, Experiment. Math. **16** (2007), no. 2, 251–256.
- [PRE1] Karol Palka, *The Coolidge-Nagata conjecture holds for curves with more than four cusps*, arXiv:1202.3491, 2012.
- [PRE2] Adrien Dubouloz and Karol Palka, *The Jacobian Conjecture fails for pseudo-planes*, arXiv:1701.01425, 2017.
- [PRE3] Karol Palka, *On a lemma of Koras-Russell*, <http://www.impan.pl/~palka/KR-lemma-h.pdf> (2014).
- [PS97] C. R. Pradeep and Anant R. Shastri, *On rationality of logarithmic  $\mathbb{Q}$ -homology planes. I*, Osaka J. Math. **34** (1997), no. 2, 429–456. MR 1483859 (99b:14034)
- [PUB1] Karol Palka, *Exceptional singular  $\mathbb{Q}$ -homology planes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **61** (2011), no. 2, 745–774, arXiv:0909.0772.
- [PUB2] Karol Palka, *Classification of singular  $\mathbb{Q}$ -homology planes. I. Structure and singularities*, Israel J. Math. **195** (2013), 37–69, arXiv:0806.3110.
- [PUB3] Karol Palka, *Classification of singular  $\mathbb{Q}$ -homology planes II:  $\mathbf{C}^1$ - and  $\mathbf{C}^*$ -rulings*, Pacific J. Math. **258** (2012), no. 2, 421–457, arXiv:1201.2463.
- [PUB4] Karol Palka and Mariusz Koras, *Singular  $\mathbb{Q}$ -homology planes of negative Kodaira dimension have smooth locus of non-general type*, Osaka J. Math. **50** (2013), no. 1, 61–114, arXiv:1001.2256.
- [PUB5] Mariusz Koras, Karol Palka, and Peter Russell, *The geometry of sporadic  $\mathbf{C}^*$ -embeddings into  $\mathbf{C}^2$* , J. Algebra **456** (2016), 207–249, arXiv:1405.6872.



- [PUB6] Karol Palka, *A new proof of the theorems of Lin-Zaidenberg and Abhyankar-Moh-Suzuki*, J. Algebra Appl. **14** (2015), No. 8, arXiv:1405.5391.
- [PUB7] Karol Palka, *Recent progress in the geometry of  $\mathbb{Q}$ -acyclic surfaces*, Affine Algebraic Geometry: The Russell Festschrift, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, pp. 271–287, arXiv:1003.2395.
- [Ram71] C. P. Ramanujam, *A topological characterisation of the affine plane as an algebraic variety*, Ann. of Math. (2) **94** (1971), 69–88.
- [Rei86] Miles Reid, *Surfaces of small degree*, Math. Ann. **275** (1986), no. 1, 71–80.
- [Rus80] Peter Russell, *Hamburger-Noether expansions and approximate roots of polynomials*, Manuscripta Math. **31** (1980), no. 1-3, 25–95.
- [Sak84] Fumio Sakai, *Weil divisors on normal surfaces*, Duke Math. J. **51** (1984), no. 4, 877–887.
- [ST00] Fumio Sakai and Keita Tono, *Rational cuspidal curves of type  $(d, d-2)$  with one or two cusps*, Osaka J. Math. **37** (2000), no. 2, 405–415.
- [Suz74] Masakazu Suzuki, *Propriétés topologiques des polynômes de deux variables, complexes, et automorphismes algébriques de l'espace  $\mathbb{C}^2$* , J. Math. Soc. Japan **26** (1974), 241–257.
- [tD90] Tammo tom Dieck, *Symmetric homology planes*, Mathematische Annalen **286** (1990), no. 1-3, 143–152.
- [tD95] Tammo tom Dieck, *Letter to H. Flenner*, 1995.
- [tDP89] Tammo tom Dieck and Ted Petrie, *Homology planes: an announcement and survey*, Topological methods in algebraic transformation groups (New Brunswick, NJ, 1988), Progr. Math., vol. 80, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1989, pp. 27–48.
- [tDP93] Tammo tom Dieck and Ted Petrie, *Homology planes and algebraic curves*, Osaka J. Math. **30** (1993), no. 4, 855–886.
- [Ton00a] Keita Tono, *Defining equations of certain rational cuspidal curves. i*, manuscripta mathematica **103** (2000), no. 1, 47–62.
- [Ton00b] Keita Tono, *Defining equations of certain rational cuspidal plane curves*, Doctoral thesis, Saitama University, 2000.
- [Ton01] Keita Tono, *Rational unicuspidal plane curves with  $\bar{\kappa} = 1$* , Newton polyhedrons and Singularities, vol. 1233, RIMS Kokyuroku, 2001, pp. 82–89.
- [Ton05] Keita Tono, *On the number of the cusps of cuspidal plane curves*, Math. Nachr. **278** (2005), no. 1-2, 216–221.
- [Ton12] Keita Tono, *On a new class of rational cuspidal plane curves with two cusps*, arXiv:1205.1248, 2012.
- [Tsu81a] Shuichiro Tsunoda, *The complements of projective plane curves*, vol. 446, RIMS Kokyuroku, 1981, pp. 48–56.
- [Tsu81b] Shuichiro Tsunoda, *The structure of open algebraic surfaces and its application to plane curves*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **57** (1981), no. 4, 230–232.
- [TZ92] Shuichiro Tsunoda and De-Qi Zhang, *Noether's inequality for noncomplete algebraic surfaces of general type*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **28** (1992), no. 1, 21–38.
- [Ulu16] A. Muhammed Uludağ, *Fundamental groups of a class of rational cuspidal plane curves*, Internat. J. Math. **27** (2016), no. 12, 1650104, 37. MR 3575928
- [Wak78] Isao Wakabayashi, *On the logarithmic Kodaira dimension of the complement of a curve in  $P^2$* , Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **54** (1978), no. 6, 157–162.
- [Yos88] Hisao Yoshihara, *Plane curves whose singular points are cusps*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), no. 3, 737–740.
- [Zai98] Mikhail Zaidenberg, *Lectures on exotic algebraic structures on affine spaces*, arXiv:math/9801075 (1998).
- [Zai05] Mikhail Zaidenberg, *Selected problems*, arXiv:math/0501457 (2005).
- [Zai06] Mikhail Zaidenberg, *Affine lines on  $\mathbb{Q}$ -homology planes and group actions*, Transform. Groups **11** (2006), no. 4, 725–735.
- [ZL83] Mikhail. Zaidenberg and Vladimir Ya. Lin, *An irreducible, simply connected algebraic curve in  $\mathbb{C}^2$  is equivalent to a quasihomogeneous curve*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **271** (1983), no. 5, 1048–1052.
- [ZO96] M. G. Zaidenberg and S. Yu. Orevkov, *On rigid rational cuspidal plane curves*, Uspekhi Mat. Nauk **51** (1996), no. 1(307), 149–150.

Karol Palka