AUTOREFERAT

1. IMIĘ I NAZWISKO

Panayotis Smyrnelis

2. POSIADANE DYPLOMY, STOPNIE NAUKOWE LUB ARTYSTYCZNE

• **Doktor matematyki**, Uniwersytet Arystotelesa w Salonikach (Grecja), lipiec 2012, uzyskana ocena: 'Celujący'.

Rozprawa doktorska pt. *Elliptic Systems of Partial Differential Equations with mixed boundary conditions*, promotorzy: prof. dr. Michel Marias i prof. dr. Nicholas Alikakos.

• **Dyplom z kompozycji muzycznej**, Schola Cantorum (Paryż, Francja), 2004.

• **Magister analizy, geometrii i modelowania**, Uniwersytet Piotra i Marii Curie (Paryż VI) (Francja), 1997.

Praca magisterska pt. *Central manifolds and Hopf bifurcations*, promotor: prof. dr. F. Aribaud.

3. INFORMACJA O DOTYCHCZASOWYM ZATRUDNIENIU W JEDNOSTKACH NAUKOWYCH LUB ARTYSTYCZNYCH

• Baskijskie Centrum Matematyki Stosowanej, grudzień 2019–sierpień 2020, i styczeń 2021–obecnie
Marie Skłodowska-Curie Individual Fellowship

• Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, październik 2018–listopad 2019, i wrzesień 2020–grudzień 2020
Adiunkt

• Centrum Modelowania Matematycznego, Uniwersytet Chile, sierpień 2015–wrzesień 2018
Post-doc.

• Uniwersytet w Atenach (Grecja), październik 2012–czerwiec 2015
Post-doc.

• Instytut Technologiczny w Pireusie (Grecja), październik 2008–czerwiec 2011
Wykładowca

4. OMÓWIENIE OSIĄGNIĘĆ, O KTÓRYCH MOWA W ART. 219 UST. 1 PKT. 2

Cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych pod wspólnym tytułem

Równania różniczkowe dotyczące przejść fazowych, (Differential equations of phase transition type).

Cykl składa się z następujących artykułów:

(S1) P. Antonopoulos, **P. Smyrnelis**: On minimizers of the Hamiltonian system $u'' = \nabla W(u)$, and on the existence of heteroclinic, homoclinic and periodic orbits. *Indiana University Mathematics Journal* **65** No. 5 (2016) pp.1503–1524.

(S2) **P. Smyrnelis**: Minimal heteroclinics for a class of fourth order O.D.E. systems. *Nonlinear Analysis*, **173** (2018) pp. 154–163.

(S3) M. G. Clerc, J. D. Dávila, M. Kowalczyk, **P. Smyrnelis**, E. Vidal-Henriquez: Theory of light-matter interaction in nematic liquid crystals and the second Painlevé equation. *Calculus of Variations and PDEs* (2017) **56**:93, DOI 10.1007/s00526-017-1187-8.

(S4) P. Bates, G. Fusco, **P. Smyrnelis**: Multiphase solutions to the vector Allen-Cahn equation: crystalline and other complex symmetric structures. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **225** No. 2, pp. 685–715 (2017).

(S5) M. G. Clerc, M. Kowalczyk, **P. Smyrnelis**: The connecting solution of the Painlevé phase transition model. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze,* Vol. **XXI**, issue special (2020), pp. 977–998.

(S6) **P. Smyrnelis**: Vortex filament solutions in the Ginzburg-Landau-Painlevé theory of phase transition. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, https://doi.org/10.1016/j.matpur.2021.05.003 (2021).

Poniżej opisujemy wspomniane osiągnięcia.

4.1. **Wprowadzenie do obszaru badawczego.**

4.1.1. *Model przejścia fazowego Allena-Cahna.* Najprostszy model przejścia fazowego jest zadany przez r.r.z. Allena-Cahna:

$$u'' = u^3 - u, \qquad \text{w } \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

które można inaczej zapisać

$$u''(x) = W'(u(x)) \qquad \text{w } \mathbb{R}, \tag{4.2}$$

gdzie $W(u) = \frac{1}{4}(u^2-1)^2$ jest podwójną studnią potencjału.

Strukturę rozwiązań (4.1) można łatwo zrozumieć patrząc na płaszczyznę fazową (4.1). W tym modelu u opisuje ułamek masowy dwóch faz substancji (np. stop metali) i przyjmuje wartości w przybliżeniu $+1$ lub -1 dla czystych faz. Równanie (4.1) ma strukturę wariacyjną. Niech

$$E_{\mathrm{AC}}(u,(a,b)) := \int_a^b \Big(\frac{1}{2}|u'|^2 + \frac{1}{4}(u^2-1)^2\Big) \tag{4.3}$$

będzie energią Allena-Cahna związaną z (4.1). Aby zminimalizować E_{AC} należy osiągnąć właściwą równowagę między wkładami energii kinetycznej $\frac{1}{2}|u'|^2$, a potencjałem. Z jednej strony składnik $\frac{1}{2}|u'|^2$ powstrzymuje u przed dużymi wahaniami, natomiast z drugiej strony potencjał $W(u) = \frac{1}{4}(u^2-1)^2$ wymusza, aby punkt minimalny znajdował się blisko jego globalnego minimum ± 1.

Jasne jest, że trywialne rozwiązania ± 1 są dwoma globalnymi punktami minimalnymi E_{AC}. Dlatego bardziej istotne jest zbadanie istnienia *lokalnych punktów minimalnych*, które nazywane są również rozwiązaniami *minimalnymi*. Podczas gdy rozwiązania (4.1) są punktami krytycznymi E_{AC}, rozwiązanie minimalne u równania (4.1) spełnia silniejszy warunek:

$$E_{\mathrm{AC}}(u, \operatorname{supp}\phi) \leq E_{\mathrm{AC}}(u+\phi, \operatorname{supp}\phi)$$

dla wszystkich $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ (tzn. każda perturbacja u ze zwartym nośnikiem ma energię większą bądź równą). Okazuje się, że z dokładnością do translacji i zamiany x na $-x$, jedynym minimalnym rozwiązaniem (4.1) jest *orbita heterokliniczna* $e(x) = \tanh(x/\sqrt{2})$ łącząca w $\pm\infty$ dwie fazy ± 1.

O wiele bardziej wymagającym problemem jest opisanie wszystkich ograniczonych rozwiązań r.r.cz. Allena-Cahna:

$$\Delta u = u^3 - u, \qquad \text{w } \mathbb{R}^n \tag{4.4}$$

związanego z funkcjonałem

$$E_{\mathrm{AC}}(u,\Omega) := \int_\Omega \big(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{4}(u^2-1)^2\big),\ \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{4.5}$$

De Giorgi w 1978 [15] zasugerował uderzające porównanie z teorią powierzchni minimalnej, które doprowadziło do znaczących postępów w równaniach różniczkowych cząstkowych i rachunku wariacyjnym, przedstawiając następującą hipotezę dotyczącą ograniczonych rozwiązań na $\mathbb{R}^n$:

Hipoteza (De Giorgi). Niech $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ będzie rozwiązaniem (4.4) takim, że

(i) $|u| < 1$,
(ii) $\frac{\partial u}{\partial x_n} > 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$.

Czy prawdą jest, że wszystkie poziomice u są hiperpłaszczyznami, przynajmniej dla $n \leq 8$?

Związek z problemem Bernsteina dla grafów minimalnych jest powodem, dla którego $n \leq 8$ pojawia się w sformułowaniu hipotezy. Szczegółowy opis można znaleźć w artykułach popularnonaukowych Fariny i Valdinoci [18] oraz Savina [40]. Ghoussoub i Gui udowodnili hipotezę w [21] dla $n = 2$, Ambrosio i Cabré w [7] dla $n = 3$, a Savin w [39] dla $4 \leq n \leq 8$ przy założeniu dodatkowego warunku

$$\lim_{x_n \to \pm\infty} u(x_1, \dots, x_n) = \pm 1. \tag{4.6}$$

Jeśli odrzucimy wymóg monotoniczności oraz (4.6) i zapytamy o strukturę rozwiązań minimalnych[1] (4.4), to wiemy z [39], że dla $n \leq 7$ każde rozwiązanie minimalne u równania (4.4) jest albo trywialne, tj. $u \equiv \pm 1$ albo jednowymiarowe, tj. $u(x) = e((x - x_0)\cdot \nu)$ dla pewnego $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i pewnego wektora jednostkowego $\nu \in \mathbb{R}^n$. Stąd orbita heterokliniczna e równania (4.1) odgrywa kluczową rolę dla wszystkich rozwiązań (4.4).

W celu skonstruowania łączących rozwiązań równania (4.4) należy nałożyć dodatkowe wymagania. Dla przykładu, gdy $n = 2$, to (4.4) posiada jednoznaczne *siodłowe* rozwiązanie u (por. [14]) spełniające następujące własności:

- $u(x_1, x_2)$ ma ten sam znak co iloczyn $x_1 x_2$,
- u jest funkcją nieparzystą względem x_1 i x_2,
- $\lim_{x_1 \to \infty} u(x_1, x_2) = e(x_2)$.
- $\lim_{\lambda \to \infty} u(\lambda \cos\theta, \lambda \sin\theta) = 1$, $\forall \theta \in (0, \pi/2)$.

Przykład ten zarysowuje również hierarchiczną strukturę (4.4), ponieważ biorąc granicę rozwiązania w nieskończoności wzdłuż pewnych kierunków otrzymywane są rozwiązania o niższych wymiarach (por. Chapter 8 **(S7-Book)**).

4.1.2. *Modele przejść fazowych w przypadku wektorowym.* W przypadku skalarnym $m = 1$ widzieliśmy, że nieliniowością modelu jest podwójna studnia potencjału $W(u) = \frac{1}{4}(u^2-1)^2$. Ponadto problem skalarny modeluje współistnienie dwóch faz i wiąże się z faktem, że z punktu widzenia minimalizacji obwodu interfejsu hiperpłaszczyzny optymalnie dzielą przestrzeń na dwie części, przynajmniej w niskich wymiarach.

W przypadku wektorowym $m \geq 2$ zachowanie rozwiązań równania

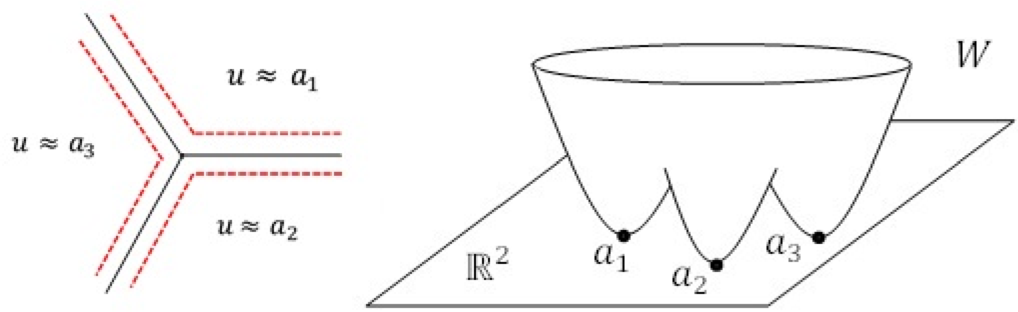
$$\Delta u(x) = \nabla W(u(x)),\ u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, W \in C^2(\mathbb{R}^m, [0,\infty)) \tag{4.7}$$

ściśle zależy od stopnia spójności zerowej poziomicy potencjału, $A := \{u \in \mathbb{R}^m : W(u) = 0\}$.

Z jednej strony *wielokrotne studnie potencjału* $W : \mathbb{R}^m \to [0,\infty)$ znikające na skończonym zbiorze $A = \{a_1, a_1, \dots, a_N\}$ dla $N \geq 3$, są istotne przy modelowaniu współistnienia trzech lub więcej faz [33,

[1] Ponownie, powiemy, że rozwiązanie u jest minimalne jeśli $E_{\mathrm{AC}}(u, \operatorname{supp}\phi) \leq E_{\mathrm{AC}}(u+\phi, \operatorname{supp}\phi)$ dla wszystkich $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

§1.7] w substancji. Odpowiednie obiekty opisujące *interfejsy* oddzielające regiony, w których $u \approx a_i$, to pojedyncze minimalne stożki (por. Rysunek 1). Te na rysunku są minimalne i nieorientowalne. W ogólności mogą mieć strukturę cylindryczną i być rozwarstwione na stożki o niższych wymiarach. Ze względu na analogię do równania skalarnego (4.4) układ (4.7) z W jako wielokrotną studnią potencjału jest nazywany *równaniem wektorowym Allena-Cahna*.



Rysunek 1. Interfejsy punktu potrójnego, które modelują współistnienie trzech faz dla potrójnej studni potencjału W (po prawej stronie).

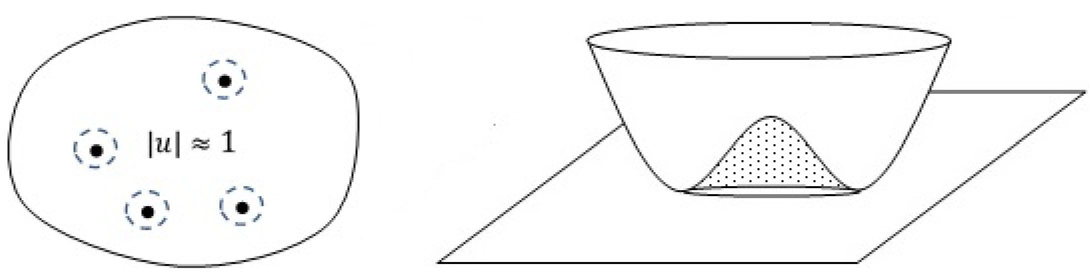
Z kolei, w przypadku gdy $\{W = 0\}$ jest zbiorem spójnym, problem jest mniej geometryczny, a związany zamiast tego z funkcjami harmonicznymi. Funkcjonały postaci

$$E_{\mathrm{GL}}(u, \Omega) := \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{4}(|u|^2 - 1)^2\Big), \ u : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^m \tag{4.8}$$

zostały pierwotnie wprowadzone przez V. Ginzburga and L. Landaua do badania problemów przejść fazowych występujących w nadprzewodnictwie; podobne modele są również stosowane w nadcieczach. Ponieważ studnia potencjału $W(u) = \frac{1}{4}(|u|^2 - 1)^2$ to $\mathbb{S}^{n-1}$, zachowywanie się rozwiązań układu Ginzburga-Landaua (który jest równaniem Eulera-Lagrange'a związanym z funkcjonałem E_{GL}):

$$\Delta u(x) = |u|^2 u - u, \ u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \tag{4.9}$$

różni się znacznie od przypadku, gdy W jest wielokrotną studnią potencjału (tzn. $\{W = 0\}$ jest zbiorem skończonym). Istotnie, dla rozwiązań $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ układu (4.9) obszar przejścia fazowego, gdzie $|u| < 1 - \epsilon$, występuje w małych otoczeniach punktów osobliwych zwanych *wirami* (zob. Rysunek 2). Równanie (4.9) było intensywnie badane ze względu na jego zastosowania fizyczne i bogactwo matematyczne – zobacz monografie [9, 29, 38] i zawarte w nich odniesienia.



Rysunek 2. Po lewej, wiry (tzn. miejsca zerowe) i obszar przejścia fazowego rozwiązania $u : \Omega \to \mathbb{R}^2$ równania (4.9). Po prawej, potencjał Ginzburga-Landaua.

Jeśli chodzi o *minimalne* rozwiązania, pierwszy przykład dwuwymiarowego minimalnego rozwiązania $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ układu (4.7) z podwójną studnią potencjału $W : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ podał Schatzman [41]. Zakładając, że $\{W = 0\} = \{a^-, a^+\}$ oraz, że istnieją (z dokładnością do translacji) *dokładnie* dwie minimalne heterokliniczne orbity $e^- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ i $e^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$:

$$e^{\pm}_{xx}(x) = \nabla W(e^{\pm}(x)), \ \lim_{x\to\pm\infty} e^{\pm}(x) = a^{\pm}, \tag{4.10}$$

które ponadto są niezdegenerowane[2], Schatzman skonstruował dwuwarstwowe minimalne rozwiązanie $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ równania $\Delta u(t, x) = \nabla W(u(t, x))$ takie, że

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ \lim_{t\to\pm\infty} u(t, x) = e^{\pm}(x - m^{\pm}) \text{ dla pewnych stałych } m^{\pm} \in \mathbb{R}, \tag{4.11a}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} : \ \lim_{x\to\pm\infty} u(t, x) = a^{\pm}. \tag{4.11b}$$

Oznacza to, że rozwiązanie u łączy w $t \to \pm\infty$ dwie minimalne orbity heterokliniczne $e^{\pm}$, natomiast w $x \to \pm\infty$ łączy dwa trywialne rozwiązania $a^{\pm}$. Co więcej, ze względu na niezdegenerowanie $a^{\pm}$ i $e^{\pm}$, zbieżność w (4.11b) oraz (4.11a) jest wykładnicza. Ta konstrukcja została pierwotnie wykonana przez Alamę, Bronsarda i Gui [1] dla potencjałów W niezmienniczych na odbicia zamieniające ze sobą $a^{\pm}$. Inne istotne łączące rozwiązania układu (4.7) z wielokrotnymi studniami potencjału zostaną omówione w sekcjach 4.5.1 i 4.5.2.

W przypadku układu (4.9) Ginzburga-Landaua potencjał W jest radialny. W konsekwencji (por. [25]) dla $n = m \geq 2$ układ (4.9) posiada jednoznaczne *standardowe wirowe* rozwiązanie $\eta \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ takie, że

$$\eta(x) = \eta_{\mathrm{rad}}(|x|)\frac{x}{|x|}, \ \forall x \neq 0, \ \text{gdzie } \eta_{\mathrm{rad}} \text{ jest funkcją posiadającą nieparzyste rozszerzenie w } C^{\infty}(\mathbb{R}), \tag{4.12a}$$

$$\eta_{\mathrm{rad}} \text{ jest rosnąca i zbieżna do 1 w } +\infty. \tag{4.12b}$$

Ponadto rozwiązanie η jest *minimalne* w sensie nierówności $E_{\mathrm{GL}}(\eta, \operatorname{supp}\phi) \leq E_{\mathrm{GL}}(\eta+\phi, \operatorname{supp}\phi)$ dla wszystkich $\phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Rzeczywiście, w wymiarze $n = 2$, Mironescu [27] wykazał (por. również [42]), że każde minimalne rozwiązanie (4.9) jest albo stałą o module równym 1, albo (z dokładnością do przekształceń ortogonalnych w przeciwdziedzinie i translacji w dziedzinie) standardowym wirem η. W wyższych wymiarach $n = m \geq 3$, minimalność η została udowodniona przez Pisante [32], jednakże nie wiadomo czy, z dokładnością do translacji i obrotów, η jest jedynym minimalnym rozwiązaniem równania (4.9).

4.2. **Spis osiągnięć.** Artykuły **(S1)–(S6)** w sumie skupiają następujące osiągnięcia:

- **(O1)** Rozwiązano problem połączenia *orbity heteroklinicznej* dla *układów* r.r.z. drugiego i czwartego rzędu przy hipotezach całkowicie podobnych do klasycznych twierdzeń równania skalarnego. Opracowano solidną metodę, która ma zastosowania również w ogólniejszym ujęciu (tzn. w przestrzeniach Hilberta i dla potencjałów półciągłych z dołu).
- **(O2)** Zastosowano równania różniczkowe dotyczące przejść fazowych do modelowania zjawisk fizycznych.
- **(O3)** Skonstruowano nowe rozwiązania r.r.cz. dotyczących przejść fazowych, które są istotne zarówno z punktu widzenia zastosowań, jak i interesujące matematycznie.

Poniżej opisujemy, jak osiągnęliśmy te wyniki we wspomnianych artykułach.

[2] Heterokliniczne orbity $e^{\pm}$ są niezdegenerowane w sensie, że 0 jest prostą wartością własną zlinearyzowanych operatorów $T : W^{2,2}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m) \to L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$, $T\varphi = -\varphi'' + D^2W(e^{\pm})\varphi$.

4.3. **Cel (O1).** Istnienie heteroklinicznych, homoklinicznych i okresowych orbit dla skalarnego r.r.z.

$$u'' = W'(u), \ u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ W \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \tag{4.13}$$

jest materiałem podręcznikowym. Przypominamy, że jeśli $W > 0$ w przedziale (a^-, a^+) i $W(a^\pm) = 0$, to

(i) jeśli $W'(a^\pm) = 0$, to istnieje rozwiązanie $u : \mathbb{R} \to (a^-, a^+)$ równania (4.13) takie, że $\lim_{x\to\pm\infty} u(x) = a^\pm$. Jest to połączenie heterokliniczne, jednoznaczne z dokładnością do translacji.

(ii) jeśli $W'(a^-) = 0$ i $W'(a^+) \neq 0$, to istnieje parzyste jednoznaczne rozwiązanie $u : \mathbb{R} \to (a^-, a^+]$ równania (4.13) takie, że $\lim_{x\to\pm\infty} u(x) = a^-$ i $u(0) = a^+$. Jest to połączenie homokliniczne.

(iii) jeśli $W'(a^-) \neq 0$ i $W'(a^+) \neq 0$, to istnieje okresowe rozwiązanie $u : \mathbb{R} \to [a^-, a^+]$ równania (4.13) takie, że $u(0) = a^-$, $u(T/2) = a^+$ i $\forall x \in \mathbb{R}$: $u(x+T) = u(x)$, $u(x+T/2) = u(-x+T/2)$ dla pewnego $T > 0$.

W **(S1)** badamy punkty minimalne układu Hamiltona

$$u''(x) = \nabla W(u(x)), u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, \ W \in C^2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}) \tag{4.14}$$

w ogólnym przypadku, bez ograniczeń dotyczących zachowania lub minimów potencjału uwzględnionych we wcześniejszych pracach. Nasze główne twierdzenie w **(S1)** dowodzi istnienia orbit heteroklinicznych, homoklinicznych i okresowych przy hipotezach całkowicie podobnych do klasycznych twierdzeń równania skalarnego.

4.3.1. *Wcześniejsze dowody istnienia połączenia heteroklinicznego w przypadku wektorowym.* Pierwsze dowody istnienia połączenia heteroklinicznego w przypadku wektorowym dla *podwójnej studni potencjału* zostały podane przez Rabinowitza [37] poprzez minimalizację funkcjonału działania oraz przez Sternberga [46], który wykorzystał zasadę Jacobiego przy nieco restrykcyjnych hipotezach dotyczących zachowania W na minimach. W [37] poza gładkością nie jest wymagane żadne inne założenie dotyczące zachowania W na minimach. Następnie Bonheure i Sanchez udowodnili istnienie orbit heteroklinicznych dla potencjałów posiadających *izolowane miejsca zerowe.* Wreszcie, Alikakos i Fusco [4] podali nowy dowód istnienia orbit heteroklinicznych dla *podwójnych studni potencjału* spełniających założenie monotoniczności w otoczeniu swoich minimów. Później warunek monotoniczności został usunięty przez Sourdisa [44].

4.3.2. *Główne twierdzenie **(S1)**.* Główne wyniki w **(S1)** (por. Theorems 4.2, 5.2 i 5.4 w **(S1)**) można podsumować następująco.

Twierdzenie 4.1. *Niech $W \in C^2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ i niech Ω będzie spójną składową zbioru $\{W > 0\}$ taką, że $\partial\Omega$ jest rozdzielony na dwa zwarte zbiory A^- i A^+. Zakładamy, że W spełnia standardowy asymptotyczny warunek*

$$\liminf_{u\in\Omega, |u|\to\infty} W(u) > 0, \ \textit{jeśli } \Omega \textit{ jest nieograniczony.} \tag{4.15}$$

Wówczas

(i) *jeśli $\nabla W(u) = 0$ na A^- i A^+, to istnieje heterokliniczna orbita $u : \mathbb{R} \to \Omega$, $u'' = \nabla W(u)$ łącząca w $\pm\infty$ zbiory $A^\pm$ (tzn. $\lim_{x\to\pm\infty} d(u(x), A^\pm) = 0$).*

(ii) *jeśli $\nabla W(u) = 0$ na A^- i $\nabla W(u) \neq 0$ na A^+, to istnieje homokliniczna orbita $u : \mathbb{R} \to \overline{\Omega}$, $u'' = \nabla W(u)$ zbliżająca się w $\pm\infty$ do zbioru A^- (tzn. $\lim_{x\to\pm\infty} d(u(x), A^-) = 0$) i spełniająca $u(0) \in A^+$.*

(iii) *jeśli $\nabla W(u) \neq 0$ na A^- i na A^+, to istnieje okresowa orbita $u : \mathbb{R} \to \overline{\Omega}$, $u'' = \nabla W(u)$ taka, że $u(T\mathbb{Z}) = a^- \in A^-$ i $u(T\mathbb{Z} + T/2) = a^+ \in A^+$ ($T > 0$).*

Nasz dowód Twierdzenia 4.1 jest wariacyjny i polega na wykazaniu, że orbita łącząca minimalizuje funkcjonał *akcji* $E(u) := \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}|u'|^2 + W(u)\right)$ w klasie przekształceń spełniających odpowiednie warunki brzegowe. Nasze podejście jest zgodne z metodą ograniczonej minimalizacji przedstawioną w [4]. Jedynym strukturalnym założeniem Twierdzenia 4.1 jest warunek rozdzielania $A^- \cap A^+ = \varnothing$. Za wyjątkiem zwartości $A^\pm$, żaden inny warunek na $\partial\Omega$ nie jest wymagany. Zwracamy uwagę, że warunek rozdzielania $A^- \cap A^+ = \varnothing$ jest naturalnym założeniem, ponieważ spójność zbioru minimów W (co zachodzi np. dla potencjału Ginzburga-Landaua $W(u) = \frac{(|u|^2-1)^2}{4}$) implikuje, że minimalne rozwiązania układu (4.14) są stałe (por. Remark 3.6 w **(S1)**).

4.3.3. *Orbity heterokliniczne dla modeli przejścia fazowego czwartego rzędu.*

Równanie Fishera-Kołmogorowa

$$\frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}x^4} - \beta u'' + u^3 - u = 0,\ u : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \beta > 0 \tag{4.16}$$

zostało zaproponowane w 1988 r. przez Dee i van Saarloosa [16] jako równanie modelu wyższego rzędu dla układów bistabilnych. Równanie (4.16) było intensywnie badane różnymi metodami: metoda topologicznego strzelania, metody hamiltonowskie, metody wariacyjne, i metody bazujące na zasadzie maksimum (por. [10], [31] i zawarte w nich odniesienia). W ostatnich latach okazało się, że struktura rozwiązań (4.16) jest znacznie bogatsza niż struktura rozwiązań równania Allena-Cahna (4.1). Istnienie heteroklinicznych rozwiązań (4.16) przy pomocy argumentów wariacyjnych zostało po raz pierwszy zbadane przez L. A. Peletiera, W. C. Troya, R. C. A. M. Van der Vorsta [30], i W. D. Kaliesa, R. C. A. M. Van der Vorsta [26]. Z definicji orbita heterokliniczna jest rozwiązaniem (4.16) łączącym w $\pm\infty$ dwa punkty równowagi ± 1 w sensie

$$\lim_{x \to \pm\infty} (u(x), u'(x), u''(x), u'''(x)) = (\pm 1, 0, 0, 0) \text{ w przestrzeni fazowej.} \tag{4.17}$$

O ile mi wiadomo, dowody istnienia orbit heteroklinicznych dla układów r.r.z. czwartego rzędu nie były osiągalne przed opublikowaniem **(S2)**.

4.3.4. *Główne twierdzenie **(S2)**.* Celem **(S2)** jest ustalenie przy ogólnych założeniach istnienia minimalnych orbit heteroklinicznych w klasie układów r.r.z. czwartego rzędu o strukturze wariacyjnej. Dokładniej rzecz biorąc, rozważam równanie Eulera-Lagrange'a

$$\frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}x^4} + W_u(u, u') - W_{uv}(u, u')u' - W_{vv}(u, u')u'' = 0,\ u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m \tag{4.18}$$

związane z funkcjonałem $E(u) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}|u''|^2 + W(u, u')\right)$, gdzie $u \in W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ i $W \in C^2(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, [0, \infty))$. Równanie (4.18) opisuje sporą klasę układów r.r.z. czwartego rzędu, w tym wektorowe r.r.z. Fishera-Kołmogorowa:

$$\frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}x^4}(x) - \beta u''(x) + \nabla F(u(x)),\ u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m,\ \beta > 0, F \in C^2(\mathbb{R}^m; [0, \infty)). \tag{4.19}$$

Theorem 1.1 z **(S2)** jest odpowiednikiem Twierdzenia 4.1 (i) dla układów r.r.z. czwartego rzędu.

Twierdzenie 4.2. *Zakładamy, że*

- **H_1:** *Zbiór $A := \{u \in \mathbb{R}^m : W(u, 0) = 0\}$ równowag jest rozdzielony na dwa niepuste, wzajemnie rozłączne zwarte podzbiory A^- i A^+.*
- **H_2:** *Istnieje zbiór otwarty $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ taki, że $A^- \subset \Omega$, $A^+ \cap \overline{\Omega} = \emptyset$ i $W(u, v) > 0$ zachodzi dla każdego $u \in \partial\Omega$ i każdego $v \in \mathbb{R}^m$.*
- **H_3:** $\liminf_{|u| \to \infty} W(u, v) > 0$ *jednostajnie w $v \in \mathbb{R}^m$.*

Wówczas istnieje minimalna heterokliniczna orbita u rozwiązująca (4.18) i łącząca w $\pm\infty$ zbiory $A^\pm$ w rozumieniu $\lim_{x \to \pm\infty} d(u(x), A^\pm) = 0$ oraz $\lim_{x \to \pm\infty} (u'(x), u''(x), u'''(x)) = (0, 0, 0)$.

Podobnie jak w Twierdzeniu 4.1, podstawowym założeniem strukturalnym jest warunek rozdzielania w $\mathbf{H}_1$. Natomiast założenia $\mathbf{H}_2$ i $\mathbf{H}_3$ dotyczące jednostajności w v są wymagane do kontrolowania zależności W od zmiennej v. W przypadku wektorowego r.r.z. Fishera-Kołmogorowa (4.19) hipotezy te są w oczywisty sposób spełnione. Metoda opracowana w **(S2)** (por. w szczególności Lemma 2.4 w **(S2)**) jest udoskonaleniem argumentów przedstawionych w **(S1)**. Została ona zastosowana w moich kolejnych pracach **(S15)**–**(S16)** w celu udowodnienia istnienia heteroklinicznych orbit w przestrzeniach Hilberta oraz do skonstruowania heteroklinicznych warstw podwójnych dla układów r.r.cz. drugiego i czwartego rzędu. Metoda ta obejmuje również przypadki potencjałów półciągłych z dołu.

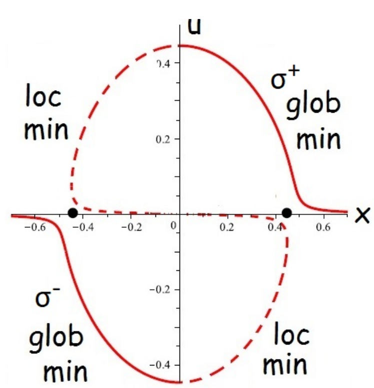
4.4. **Cel (O2).** W **(S3)** rozważamy model przejścia fazowego dla oddziaływania światła z materia w ciekłych kryształach, opisany przez r.r.z.:

$$\epsilon^2 u + \mu(x)u - u^3 + \epsilon a f(x) = 0, \tag{4.20}$$

gdzie

(4.21)
$$\begin{cases} \mu \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \text{ jest f. parzystą, } \mu' < 0 \text{ w } (0,\infty) \text{ i } \mu(\xi) = 0 \text{ dla dokładnie jednego } \xi > 0, \\ f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}) \text{ jest f. nieparzystą, } f(x) > 0,\ \forall x > 0. \end{cases}$$

Jest to jednowymiarowa wersja modelu zaproponowanego przez mojego współautora prof. M. Clerca [8] do opisu oddziaływania światła z materią w nematycznych ciekłych kryształach. **(S3)** jest pierwszym artykułem badającym ten konkretny model z matematycznego punktu widzenia. Zaobserwowaliśmy jednak, że wyniki opisane w (i) i (ii) poniżej, mają pewne podobieństwa z innymi pojedynczymi problemami z zakresu r.r.cz., a w szczególności z modelem Grossa-Pitaevskiiego kondensatów Bose'a-Einsteina. W (4.20) parametr $\epsilon > 0$ jest mały, natomiast parametr $a \geq 0$ opisuje intensywność zastosowanego światła laserowego. Z kolei funkcja μ zmienia znak ze względu na to, że światło przyłożone jest do próbki lokalnie, a obszary, w których $\mu < 0$ interpretowane są jako strefy cienia, natomiast obszary, w których $\mu > 0$ odpowiadają oświetlonym strefom. Wreszcie, funkcja f opisuje pole elektryczne indukowane przez światło. Eksperymenty pokazują, że wraz ze wzrostem natężenia przyłożonego światła laserowego reprezentowanego tutaj jawnie przez parametr a, defekty takie jak wiry świetlne, pojawiają się najpierw na granicy oświetlanej strefy, a następnie w jej środku. To przejście ma miejsce po osiągnięciu wartości progowej a.



Rysunek 3. Gałęzie minimów potencjału $W(x,u)$.

Równanie (4.20) może być inaczej zapisane jako $u'' = W_u(x,u)$, gdzie

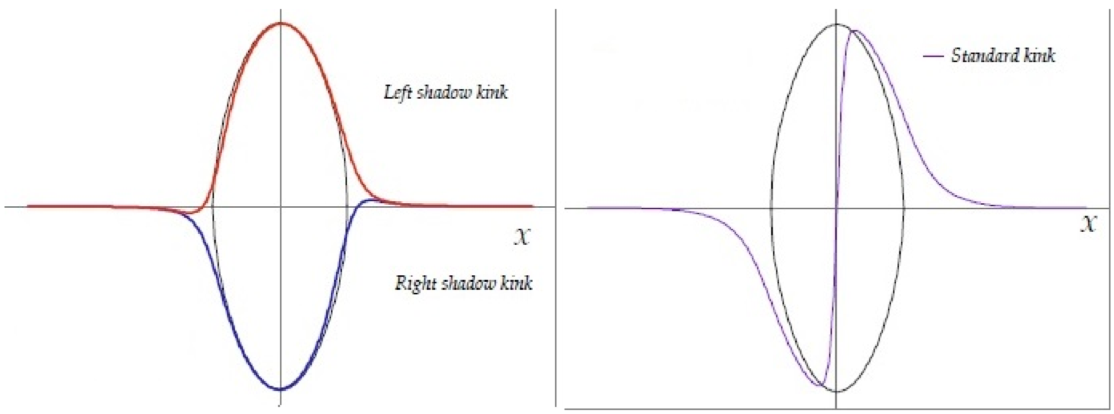
$$W(x,u) = \frac{1}{4\epsilon^2}u^4 - \frac{\mu(x)}{2\epsilon^2}u^2 - \frac{a}{\epsilon}f(x)\cdot u$$

jest nieautonomicznym potencjałem. Niech

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}} \big(\frac{1}{2}|u'(x)|^2 + W(x,u)\big)\mathrm{d}x,\ \ u \in H^1(\mathbb{R}) \tag{4.22}$$

będzie związanym z nim funkcjonałem energii. Na Rysunku 3 możemy zobaczyć, że dla ustalonego x, $\min_u W(x,u)$ jest osiągane na gałęzi σ^+ gdy $x > 0$ i na gałęzi σ^- gdy $x < 0$. Stąd, w tym modelu przejście fazowe łączy gałęzie $\sigma^{\pm}$.

Najważniejsze jest to, że globalne punkty minimalne v_ϵ funkcjonału (4.22) oraz ich zera mogą być wykorzystane do opisania orientacji cząsteczek i ich defektów topologicznych, odpowiednio. Istotnie, wyniki przedstawione poniżej wykazują niezwykłą zgodność jakościową z eksperymentami. Mówiąc precyzyjniej, w Theorem 1.1 z **(S3)** badamy punkty minimalne v_ϵ przy $\epsilon \to 0$ i ustalonym a. Potwierdziliśmy matematycznie, że dwie wartości krytyczne a_*, i $a^* \geq a_*$ determinują zachowanie zera $\bar{x}_\epsilon$ funkcji v_ϵ.



Rysunek 4. Zarys punktów minimalnych v_ϵ gdy $a \in (0, a_*)$ (po lewej) oraz gdy $a > a^*$ (po prawej).

Twierdzenie 4.3. *Zachodzą następujące stwierdzenia.*

(i) *Gdy $a = 0$, to globalny punkt minimalny v_ϵ jest funkcją parzystą i dodatnią z dokładnością do zamiany v_ϵ na $-v_\epsilon$.*

(ii) *Dla $a > 0$ globalny punkt minimalny v_ϵ ma dokładnie jedno miejsce zerowe $\bar{x}_\epsilon$ takie, że*

$$|\bar{x}_\epsilon| \leq \xi + \mathcal{O}(\sqrt{\epsilon}) \ \textit{i}\ v_\epsilon(x) > 0,\ \forall x > \bar{x}_\epsilon \ \textit{gdy}\ v_\epsilon(x) < 0,\ \forall x < \bar{x}_\epsilon. \tag{4.23}$$

(iii) *Przypuśćmy, że*

$$a^* := \sup_{x \in [-\xi, 0)} \frac{\sqrt{2}\big((\mu(0))^{3/2} - (\mu(x))^{3/2}\big)}{3\int_x^0 |f|\sqrt{\mu}} < \infty. \tag{4.24}$$

Dla wszystkich $a > a^*$, $\bar{x}_\epsilon \to 0$ przy $\epsilon \to 0$ i globalny punkt minimalny v_ϵ spełnia

$$\lim_{\epsilon\to 0} v_\epsilon(\bar{x}_\epsilon + \epsilon s) = \sqrt{\mu(0)}\tanh(s\sqrt{\mu(0)/2}),$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} v_\epsilon(x + \epsilon s) = \begin{cases} \sqrt{\mu(x)} & \text{dla } 0 < x < \xi, \\ -\sqrt{\mu(x)} & \text{dla } -\xi < x < 0, \\ 0 & \text{dla } |x| \geq \xi \end{cases} \tag{4.25}$$

w sensie $C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ (por. Rysunek 4).

(iv) *Niech*

$$a_* := \inf_{x\in(-\xi,0]} \frac{\sqrt{2}(\mu(x))^{3/2}}{3\int_{-\xi}^{x}|f|\sqrt{\mu}} \in (0,\infty) \text{ i zauważmy, że } a_* \leq a^*.$$

Z dokładnością do zamiany $v_\epsilon(x)$ na $-v_\epsilon(-x)$, dla wszystkich $a \in (0, a_*)$ mamy $\bar{x}_\epsilon \to -\xi$ gdy $\epsilon \to 0$ oraz

$$\lim_{\epsilon\to 0} v_\epsilon(x + s\epsilon) = \begin{cases} \sqrt{\mu(x)} & \text{dla } |x| < \xi, \\ 0 & \text{dla } |x| \geq \xi \end{cases} \tag{4.26}$$

w sensie $C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ (por. Rysunek 4). Powyższy wzór asymptotyczny zachodzi również dla $a = 0$. Ponadto gdy $f = -\frac{\mu'}{2}$, to $a_* = a^* = \sqrt{2}$.

Nastepnie, w Theorem 1.2 z **(S3)** odkryliśmy silny związek r.r.z. (4.20) z drugim r.r.z. Painlevé'a:

$$y'' - xy - 2y^3 - \alpha = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}, \tag{4.27}$$

które było intensywnie badane przez Painlevé'a i innych od początku XX wieku ze względu na jego duże znaczenie dla zastosowań. Rzeczywiście, udowodniliśmy, że punkty minimalne v_ϵ odpowiednio przeskalowane w otoczeniu punktu ξ zbiegają przy $\epsilon \to 0$ do rozwiązania y równania (4.27). Dodatkowo, ze względu na konstrukcję, rozwiązanie y jest ograniczone w ∞ i *minimalne* w sensie nierówności

$$E_{\mathrm{P_{II}}}(y, \operatorname{supp}\phi) \leq E_{\mathrm{P_{II}}}(y + \phi, \operatorname{supp}\phi),\ \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \tag{4.28}$$

gdzie

$$E_{\mathrm{P_{II}}}(u, I) = \int_I \Big(\frac{1}{2}|u'|^2 + \frac{1}{2}su^2 + \frac{1}{2}u^4 + \alpha u\Big) \tag{4.29}$$

jest funkcjonałem energii związanym z (4.27).

Ze względu na otrzymany wynik rozpoczęliśmy *badanie wariacyjne* drugiego r.r.z. Painlevé'a i scharakteryzowaliśmy *minimalne* rozwiązania równania jednorodnego

$$y'' - xy - 2y^3 = 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{4.30}$$

Mówiąc ściślej, wykazaliśmy w Theorem 1.3 z **(S3)**, że rozwiązanie Hastingsa-McLeoda, oznaczane przez h, jest z dokładnością do znaku jedynym minimalnym rozwiązaniem (4.30) ograniczonym w $+\infty$. Przypominamy (por. [24]), że $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest dodatnia, ściśle malejąca ($h' < 0$) i taka, że

$$h(x) \sim Ai(x), \qquad x \to \infty,$$

$$h(x) \sim \sqrt{|x|/2}, \qquad x \to -\infty, \tag{4.31}$$

gdzie Ai jest funkcją Airy'ego. Klasyfikacja rozwiązań (4.30) podana w [24] była niezbędna do uzyskania naszego wyniku. Wreszcie, w Theorem 1.3 z **(S3)** udowodniliśmy również, że niejednorodne równanie (4.27) przy $\alpha < 0$ posiada dodatnie minimalne rozwiązanie y, które jest ściśle malejące ($y' < 0$).

4.5. **Cel (O3).**

W **(S4)** definiujemy odpowiednie, bardzo ogólne klasy symetrii, które dają dużą różnorodność złożonych rozwiązań symetrycznych dla wektorowego równania Allena-Cahna (tj. dla układu (4.7) ze skończonym zbiorem $\{W = 0\}$). Z kolei w **(S5)** i **(S6)** rozpoczęliśmy badanie rozszerzonego r.r.cz. Painlevé'a:

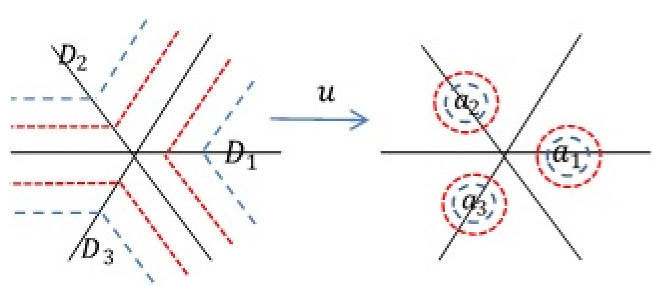
$$\Delta y - x_1 y - 2|y|^2 y = 0, \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, y = (y_1, \dots, y_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \tag{4.32}$$

w przypadku skalarnym ($m = 1$) oraz wektorowym ($m \geq 2$), odpowiednio. Zauważmy, że skalarne (odp. wektorowe) r.r.cz. Painlevé'a otrzymuje się mnożąc przez $-x_1$ człon liniowy równania Allena-Cahna (odp. układ (4.9) Ginzburga-Landaua). W związku z tym, rozwiązania równania (4.32) mają pewne cechy wspólne z rozwiązaniami (4.4) (odp. (4.9)). Jednakże analiza (4.32) jest znacznie bardziej skomplikowana ze względu na nieograniczoność rozwiązań (4.32) oraz spełniane przez nie warunki brzegowe. Artykuły **(S5)** i **(S6)** były motywowane naszymi poprzednimi pracami nad teorią oddziaływania światła z materią w ciekłych kryształach **(S12)**–**(S13)**. W rzeczy samej, w Theorem 1.1 z **(S12)** wykazaliśmy, że *minimalne* rozwiązania (4.32) są istotne do opisania orientacji cząsteczek na granicy oświetlonego obszaru.

4.5.1. *Wcześniejsze konstrukcje rozwiązań symetrycznych wektorowego równania Allena-Cahna.*

Pierwszą konstrukcję punktu potrójnego podali Bronsard, Gui oraz Schatzman [11] dla potrójnej studni potencjału $W : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$, $\{W(u) = 0\} = \{a_1, a_2, a_3\}$ niezmienniczej na działanie grupy symetrii G trójkąta równobocznego o wierzchołkach w a_1, a_2, a_3. W poniższym przykładzie linie odbić grupy G dzielą $\mathbb{R}^2$ na trzy 120-stopniowe sektory D_i takie, że $a_i \in D_i$, $\forall i = 1, 2, 3$. Przy tych założeniach symetrii, punkt potrójny (por. Rysunek 5) jest rozwiązaniem $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ układu (4.7) takim, że

- $u(gx) = gu(x), \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall g \in G,$
- $\lim_{x \in D_i, d(x, D_i) \to \infty} u(x) = a_i.$



Rysunek 5. Punkt potrójny dla symetrycznego potencjału.

Zatem punkt potrójny łączy trzy minima W gdy $|x| \to \infty$ wzdłuż pewnych kierunków. Podobnie, punkt poczwórny jest rozwiązaniem $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ układu (4.7) łączącym cztery minima $W : \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ gdy $|x| \to \infty$ wzdłuż pewnych kierunków. Zostało to opracowane przez Gui and Schatzmana [23] dla potencjałów niezmienniczych na działanie grupy symetrii czworościanu foremnego. Metoda konstrukcji w tych pracach bazuje na systematycznym składaniu rozwiązania z niżej wymiarowych kawałków wzdłuż linii asymptotycznego wzrostu.

Następnie Alikakos i Fusco w serii prac [5, 19, 2] skonstruowali ekwiwariantne rozwiązania $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ układu (4.7) dla potencjałów $W : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ niezmienniczych na działanie dowolnej *skończonej* grupy odbić G. Alikakos i autor rozważyli również przypadek *dyskretnych* grup odbić w **(S19)** i skonstruowali ekwiwariantne rozwiązania kratowe układu (4.7). Ekwiwariancja oznacza, że

$$u(gx) = gu(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall g \in G. \tag{4.33}$$

Wreszcie, Bates, Fusco oraz autor przedstawili w **(S8)** przykład rozwiązania symetrycznego $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ układu (4.7) z dwoma różnymi grupami działającymi na dziedzinę i przeciwdziedzinę. Podejście zastosowane we wspomnianych pracach składa się z następujących kroków

Krok 1 : Wykazać własność $u(F) \subset F$ dla każdego obszaru fundamentalnego F grupy G, korzystając z parabolicznego przepływu $u_t = \Delta u - \nabla W(u)$, z warunkiem początkowym na ekwiwariantny punkt minimalny.

Krok 2 : Wyprowadzić punktowe oszacowania, aby wywnioskować, że gdy $x \in F$ i $d(x, \partial F) \to \infty$, to $u(x)$ zbiega to minimów a potencjału W zawartych w F.

4.5.2. *Główne wyniki z* ***(S4)****.* W **(S4)** uogólniamy pojęcie ekwiwariancji rozważając skończoną bądź dyskretną grupę odbić G działającą na $\mathbb{R}^n$, skończoną grupę odbić Γ działającą na $\mathbb{R}^m$ oraz homomorfizm $f : G \to \Gamma$. Odwzorowanie $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nazywa się f-ekwiwariantnym jeśli

$$u(gx) = f(g)u(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall g \in G. \tag{4.34}$$

Konstruowane przez nas f-ekwiwariantne rozwiązania $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ łączą minima potencjału w określonych kierunkach i przekształcają każdy fundamentalny obszar F dla działania G na $\mathbb{R}^n$, na odpowiadający jemu fundamentalny obszar Φ dla działania Γ na $\mathbb{R}^m$. Aby umożliwić istnienie rozwiązań spełniających własność

$$u(\overline{F}) \subset \overline{\Phi}, \tag{4.35}$$

homomorfizm f musi powiązać odbicia związane ze ścianami F, z odbiciami związanymi ze ścianami Φ. Takie homomorfizmy nazywamy *dodatnimi*. Ze względu na różnorodność wyboru n i m dla grup odbić G i Γ oraz homomorfizmu $f : G \to \Gamma$, wnioskujemy, że istnieją różne, złożone, wielofazowe rozwiązania układu (4.7) (por. Rysunek 6), w tym kilka typów rozwiązań kratowych.

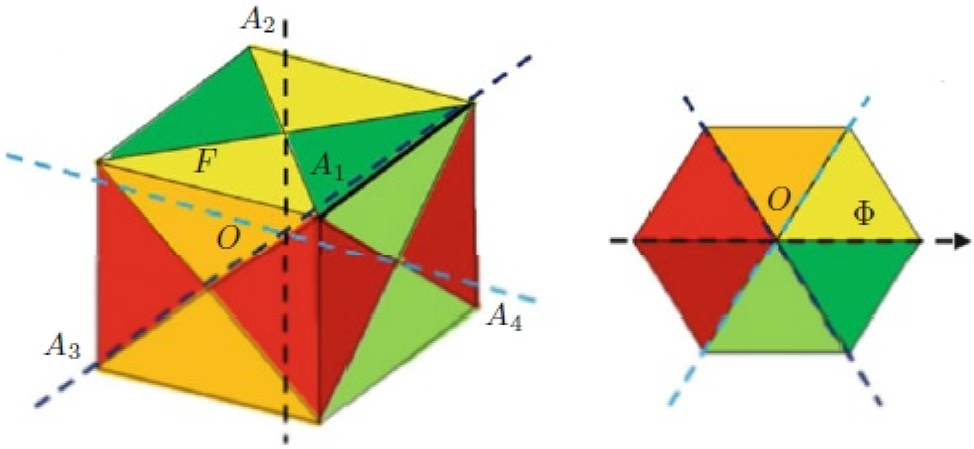
Po tych wyjaśnieniach możemy sformułować nasze główne twierdzenie (por. Theorems 3.1 i 3.2 w **(S4)**).

Twierdzenie 4.4. *Zakładamy, że*

- $\mathbf{H}_1$**:** *Istnieje skończona (bądź dyskretna) grupa odbić G działająca na $\mathbb{R}^n$, skończona grupa odbić Γ działająca na $\mathbb{R}^m$ oraz dodatni homomorfizm $f : G \to \Gamma$. Niech Φ będzie obszarem fundamentalnym Γ, który f wiąże z obszarem fundamentalnym F grupy G.*
- $\mathbf{H}_2$**:** *Potencjał $W : \mathbb{R}^m \to [0, \infty)$ klasy C^3 jest niezmienniczy ze względu na działanie skończonej grupy odbić Γ oraz istnieje $M > 0$ takie, że $W(su) \geq W(u)$ dla $s \geq 1$ i $|u| = M$.*
- $\mathbf{H}_3$**:** *Istnieje a we wnętrzu Φ takie, że $0 = W(a) < W(u)$, $\forall u \in \overline{\Phi} \setminus \{a\}$ i macierz $D^2W(a)$ jest dodanio określona.*

Wówczas istnieje f-ekwiwariantne klasyczne rozwiązanie u układu (4.7) *spełniające* (4.35) *oraz takie, że $|u(x) - a| \leq Ke^{-kd(x,\partial F)}$ zachodzi dla $x \in F$ i pewnych stałych $k, K > 0$ zależnych jedynie od W.*

Nasze podejście w **(S4)** jest zgodne z dwoma krokami opisanymi w sekcji 4.5.1. Jednakże dowód własności $u(F) \subset \Phi$ jest dużo bardziej związany z f-ekwiwariancją. Opiera się on na starannym doborze pewnych odwzorowań skalarnych wektorowego równania parabolicznego oraz na dość wyrafinowanym wykorzystaniu zasady maksimum. Te argumenty zostały po raz pierwszy przedstawione w mojej pracy doktorskiej [43] oraz w **(S19)**.



RYSUNEK 6. Obszar fundamentalny dla działania grupy symetrii czworościanu foremnego na $\mathbb{R}^3$ (po lewej) oraz dla działania grupy symetrii trójkąta równobocznego na $\mathbb{R}^2$ (po prawej). Rozwiązania f-ekwiwariantne $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ układu (4.7) podane przez Twierdzenie 4.4 przekształcają obszary fundamentalne na obszary fundamentalne o tym samym kolorze.

4.5.3. *Główne wyniki w **(S5)** i **(S6)**.* Skalarne r.r.cz. Painlevé'a

$$\Delta y - x_1 y - 2y^3 = 0,\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{4.36}$$

może być również zapisane jako

$$\Delta y(x) = H_y(x_1, y(x)), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.37}$$

gdzie potencjał autonomiczny $H(x_1, y) = \frac{1}{2}x_1 y^2 + \frac{1}{2}y^4$ jest bistabilny dla każdego ustalonego $x_1 < 0$. Istotnie, dla ustalonego x_1, H osiąga swoje globalne minimum równe 0 gdy $y = 0$ i $x_1 \geq 0$, lub równe $-\frac{x^2}{8}$ gdy $y = \pm\sqrt{|x_1|/2}$ i $x_1 < 0$. Zauważamy również, że w świetle (4.31) dwa minimalne rozwiązania $\pm h$ drugiego r.r.z. Painlevé'a (4.30) interpolują te dwie gałęzie minimów. Zatem w wymiarze $n = 2$ r.r.cz. Painlevé'a (4.36) opisuje model przejścia fazowego, tak jak równanie Allena-Cahna (4.1). W drugim przypadku przejście fazowe łączy dwa minima ± 1 potencjału W, a z kolei w pierwszym przypadku przejście fazowe łączy dwie gałęzie $\pm\sqrt{(-x_1)^+/2}$ minimów H sparametryzowanych przez x_1. Celem **(S5)** jest skonstruowanie rozwiązań $y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ równania (4.36) łączących te dwie gałęzie minimów (por. Theorem 2.1 w **(S5)**):

Twierdzenie 4.5. *Istnieje rozwiązanie $y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ równania (4.36) takie, że*

(i) *y jest dodatnie w górnej półpłaszczyźnie i nieparzyste względem x_2 tzn. $y(x_1, x_2) = -y(x_1, -x_2)$.*
(ii) *$y_{x_2}(x_1, x_2) > 0$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, i $\lim_{l\to\pm\infty} y(x_1, x_2 + l) = \pm h(x_1)$ w $C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$.*
(iii) *y jest minimalne.*
(iv) *Dla każdego ustalonego $x_2 \in \mathbb{R}$, niech $\tilde{y}(t_1, t_2) := \frac{\sqrt{2}}{(-\frac{3}{2}t_1)^{\frac{1}{3}}}\, y\big(-(-\frac{3}{2}t_1)^{\frac{2}{3}}, x_2 + t_2(-\frac{3}{2}t_1)^{-\frac{1}{3}}\big)$.*

Wówczas

$$\lim_{l\to-\infty} \tilde{y}(t_1 + l, t_2) = \begin{cases} \tanh(t_2/\sqrt{2}) & \text{gdy } x_2 = 0, \\ 1 & \text{gdy } x_2 > 0, \\ -1 & \text{gdy } x_2 < 0 \end{cases} \tag{4.38}$$

w sensie zbieżności w $C^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^2)$.

(iv) $y_{x_1}(x_1,x_2)<0$, $\forall x_1\in\mathbb{R}$, $\forall x_2>0$.

(v) $\frac{|y(x_1,x_2)|}{Ai(x_1)}=O(1)$, *przy* $x_1\to\infty$ *(jednostajnie w* x_2*).*

W świetle powyższych punktów (i), (ii) i (iii) rozwiązanie y odgrywa podobną rolę co orbita heterokliniczna $e(x)=\tan(x/\sqrt{2})$ w r.r.z. Allena-Cahna (4.1). Przede wszystkim oba rozwiązania y i e są minimalne i nieparzyste. Ponadto y łączy monotonicznie dwa rozwiązania minimalne $\pm h(x_1)$ wzdłuż kierunku pionowego x_2 w ten sam sposób, w jaki e łączy monotonicznie dwa globalne punkty minimalne ± 1 potencjału W. Co więcej, dwa globalne punkty minimalne ± 1 funkcjonału Allena-Cahna (4.3) mają swoje odpowiedniki w dwóch rozwiązaniach minimalnych $\pm h$ równania Painlevé'a. Podczas gdy e jest obiektem jednowymiarowym, rozwiązanie $y(x_1,x_2)$ jest dwuwymiarowe, ponieważ x_1 parametryzuje gałęzie minimów potencjału H i tylko x_2 bierze udział w przemianie fazowej. Analogia między równaniami (4.36) i (4.1) pojawia się również we własności (iv). Istotnie, po przeskalowaniu, rozwiązanie y zbiega przy $x_1\to-\infty$ do minimalnego rozwiązania r.r.z. Allena-Cahna, które zależy albo od e, albo od ±1. Nie jest to takie zaskakujące, ponieważ skalarne r.r.cz. Painlevé'a (4.36) otrzymuje się poprzez przemnożenie członu liniowego u w r.r.cz. Allena-Cahna (4.4) przez $-x_1$, i wówczas po przeskalowaniu tak jak w (4.38), zależność od x_1 znika przy $x_1\to-\infty$.

Rozwiązanie z Twierdzenia 4.5 zostało skonstruowane jako osobliwa granica punktów minimalnych problemu ciekłokrystalicznego w wymiarach $n=2$ dla dziedziny i $m=1$ dla przeciwdziedziny (zob. **(S13)**). Z kolei własność (iii) otrzymano przy użyciu przeskalowywania, a własności monotoniczne (ii) i (iv) wynikają z zawiłego zastosowania metody ruchomej płaszczyzny (por. [20]).

Podobnie, wektorowe r.r.cz. Painlevé'a

$$\Delta y - x_1 y - 2|y|^2 y = 0,\ x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ y:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m \tag{4.39}$$

jest ściśle powiązane z układem Ginzburga-Landaua (4.9). Zadaniem **(S6)** jest skonstruowanie analogicznej wersji standardowego rozwiązania wirowego η (por. (4.12)) dla wektorowego r.r.cz. Painlevé'a (4.39) (por. Theorem 1 z **(S6)**). Ponieważ dla każdego ustalonego $x_1<0$ potencjał $H(x_1,y)=\frac12 x_1|y|^2+\frac12|y|^4$ związany z (4.39) osiąga swoje globalne minimum na sferze $\{y\in\mathbb{R}^m : |y|=\sqrt{|x_1|/2}\}$, to powinniśmy mieć $m=n-1$ w celu umożliwienia tworzenia wirów w hiperpłaszczyznach $x_1=\text{Const}$. Zatem poszukiwane przez nas rozwiązanie y układu (4.39) jest zdefiniowane na $\mathbb{R}^n$ i przyjmuje swoje wartości w $\mathbb{R}^{n-1}$ ($n\geq 3$). W dodatku, y ma konfigurację włókna wirowego i posiada pewne cechy wspólne z układem Ginzburga-Landaua (4.9) i drugim r.r.z. Painlevé'a (4.30). Mówiąc precyzyjniej, w każdej hiperpłaszczyźnie $x_1=\text{Const}$. ma profil podobny do standardowych wirów $\eta:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}^{n-1}$ układu (4.9), ale ich amplituda jest określona przez rozwiązanie h Hastingsa-McLeoda określone w x_1.

Twierdzenie 4.6. *Istnieje rozwiązanie* $y\in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^{n-1})$ *(dla* $n\geq 3$*) układu (4.39) takie, że*

(i) *Biorąc* $z:=(x_2,\dots,x_n)$, $e_z:=\frac{z}{|z|}$ *oraz* $\sigma:=|z|$, *mamy* $y(x)=y_{\rm rad}(x_1,\sigma)e_z$, *gdzie* $y_{\rm rad}(x_1,\sigma)$ *jest funkcją z nieparzystością względem rozszerzenia* σ *w* $C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$.

(ii) *Dodatkowo* $y_{\rm rad}(x_1,\sigma)>0$, $\frac{\partial y_{\rm rad}}{\partial x_1}(x_1,\sigma)<0$, *i* $\frac{\partial y_{\rm rad}}{\partial \sigma}(x_1,\sigma)>0$, $\forall x_1\in\mathbb{R}$, $\forall\sigma>0$.

(iii) $|y(x)|<h(x_1)$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, *i* $\lim_{l\to\infty} y_{\rm rad}(x_1,\sigma+l)=h(x_1)$ *w* $C^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, *gdzie* h *jest rozwiązaniem Hastingsa-McLeoda równania (4.30).*

(iv) *Dla każdego ustalonego* $z=(x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n-1}$, *niech*

$$\tilde y(t_1,\dots,t_n):=\frac{\sqrt2}{(-\frac32 t_1)^{\frac13}}\,y\big(-(-\frac32 t_1)^{\frac23},x_2+t_2(-\frac32 t_1)^{-\frac13},\dots,x_n+t_n(-\frac32 t_1)^{-\frac13}\big). \tag{4.40}$$

Wówczas

$$\lim_{l \to -\infty} \tilde{y}(t_1 + l, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} \eta(t_2, \dots, t_n) & \text{gdy } z = 0, \\ e_z & \text{gdy } z \neq 0 \end{cases} \tag{4.41}$$

w sensie zbieżności $C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n-1})$, *gdzie* $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1}; \mathbb{R}^{n-1})$ *jest standardowym wirowym rozwiązaniem układu Ginzburga-Landaua* (4.9).

W przeciwieństwie do Twierdzenia 4.5, rozwiązanie Twierdzenia 4.6 zostało skonstruowane poprzez minimalizację pomiędzy osiowosymetrycznymi konfiguracjami włókna wirowego w kuli B_R, a następnie przejście do granicy $R \to \infty$. Dowód własności monotoniczności (ii) jest również bardziej skomplikowany, gdyż musimy zastosować metodę ruchomej płaszczyzny do rzutu y. Na koniec zwracamy również uwagę, że w Section 2 w **(S6)** zebraliśmy pewne ogólne wyniki dotyczące każdego rozwiązania $y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (4.39). Wyniki te mogą być przydatne do konstruowania różnych typów rozwiązań układu (4.39).

5. INFORMACJA O WYKAZYWANIU SIĘ ISTOTNĄ AKTYWNOŚCIĄ NAUKOWĄ ALBO ARTYSTYCZNĄ REALIZOWANĄ W WIĘCEJ NIŻ JEDNEJ UCZELNI, INSTYTUCJI NAUKOWEJ LUB INSTYTUCJI KULTURY, W SZCZEGÓLNOŚCI ZAGRANICZNEJ

Monografia **(S7-Book)** i artykuły naukowe **(S8)**–**(S18)**, które nie zostały zawarte w pracy doktorskiej:

(S7-Book) N. D. Alikakos, G. Fusco, **P. Smyrnelis**: Elliptic systems of phase transition type. *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications* Vol. **91**, Springer-Birkhäuser (2018)

(S8) P. Bates, G. Fusco, **P. Smyrnelis**: Entire solutions with six-fold junctions to elliptic gradient systems with triangle symmetry. *Advanced Nonlinear Studies* **13** No. 1 (2013), pp. 1–11

(S9) **P. Smyrnelis**: Gradient estimates for semilinear elliptic systems and other related results. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A* **145** No. 6 (2015) pp. 1313–1330

(S10) P. Antonopoulos, **P. Smyrnelis**: A maximum principle for the system $\Delta u - \nabla W(u) = 0$. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **354** (2016) pp. 595–600

(S11) I. Chenn, **P. Smyrnelis**, I. M. Sigal: On Abrikosov lattice solutions of the Ginzburg-Landau equations. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry* (2018) **21**:7, DOI: 10.1007/s11040-017-9257-x

(S12) M. G. Clerc, M. Kowalczyk, **P. Smyrnelis**: Symmetry breaking and restoration in the Ginzburg-Landau model of nematic liquid crystals. *Journal of Nonlinear Science* (2018) **28** No. 3, pp. 1079–1107

(S13) M. G. Clerc, M. Kowalczyk, **P. Smyrnelis**: Gradient theory of domain walls in thin, nematic liquid crystals films. *Communications in Contemporary Mathematics,* **22** No. 7 (2020) 1950063 (27 pages)

(S14) E. Calisto, M. G. Clerc, M. Kowalczyk, **P. Smyrnelis**: On the origin of the optical vortex lattices in nematic liquid crystal light valve. *Optics Letters* **44**, No. 12 (2019) 2947–2950

(S15) **P. Smyrnelis**: Connecting orbits in Hilbert spaces and applications to P.D.E. *Comm. Pure Appl. Anal.* **19**, No. 5 (May 2020) 2797–2818, doi: 10.3934/cpaa.2020122

(S16) **P. Smyrnelis**: Double layered solutions to the extended Fisher-Kolmogorov P.D.E. *Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, **28**:48, 22 pages (2021)

(S17) **P. Smyrnelis**: A comparison principle for vector valued minimizers of semilinear elliptic energy, with application to dead cores. *Indiana Univ. Math. J.*, Vol. **70**, No. 5, 1745–1768 (2021)

(S18) J. Jendrej, **P. Smyrnelis**: Nondegeneracy of heteroclinic orbits for a class of potentials on the plane. *Applied Mathematics Letters*, **124** (2022) 107681 https://doi.org/10.1016/j.aml.2021.107681

Artykuły naukowe **(S19)**–**(S20)** które zostały zawarte w pracy doktorskiej:

(S19) N. D. Alikakos, **P. Smyrnelis**: Existence of lattice solutions to semilinear elliptic systems with periodic potential. *Electr. J. Diff. Equations* **2012** No. 15 (2012) pp. 1–15

(S20) **P. Smyrnelis**: The harmonic map problem on the plane with mixed boundary conditions. *Proceedings of the American Mathematical Society* **143** No. 3 (2015) pp. 1299–1313

Ponieważ **(S8)** i **(S19)** zostały już opisane w sekcji 4.5.1, omówię pozostałe prace.

5.1. **Monografia: (S7-Book).**

Książka ta skupia się na wektorowym układzie Allena-Cahna, który modeluje współistnienie trzech lub więcej faz i jest związany z kompleksami Plateau – nieorientowalnymi obiektami o strukturze warstwowej. Minimalne rozwiązania równania wektorowego wykazują analogiczną strukturę nieobecną w skalarnym równaniu Allena-Cahna (4.4), które modeluje współistnienie dwóch faz i jest związane z minimalnymi powierzchniami. Hipoteza De Giorgi z 1978 r. [15] dotycząca problemu skalarnego została rozstrzygnięta w serii artykułów: Ghoussoub i Gui ($2D$) [21], Ambrosio i Cabré ($3D$) [7] , Savin (aż do $8D$) [39] oraz del Pino, Kowalczyk i Wei (kontrprzykład dla $9D$ i wyższych wymiarów [17]). Książka na różne sposoby rozszerza oszacowania gęstości Caffarelliego-Córdoby [13], które odegrały główną rolę w dowodzie Savina. Wprowadza również alternatywną metodę uzyskiwania oszacowań punktowych.

Kluczowe cechy i tematy tego samodzielnego, systematycznego wykładu obejmują:

- Badanie struktury rozwiązań minimalnych w klasie ekwiwariantów, (a) dla ogólnych grup punktowych i (b) dla ogólnych dyskretnych grup odbić, dowodząc w ten sposób istnienie nieznanych wcześniej rozwiązań kratowych.
- Materiał wstępny rozpoczynający się od tensora naprężenia-energii, za pomocą którego rozwijane są formuły monotoniczności, tożsamości hamiltonowskie i Pohozajewa, w tym samodzielny wykład istnienia fal stojących i biegnących.
- Narzędzia pozwalające na wyprowadzenie ogólnych własności punktów minimalnych bez jakichkolwiek założeń symetrii, takich jak zasada maksimum czy gęstość i oszacowania punktowe.
- Zastosowanie ogólnych narzędzi do rozwiązań ekwiwariantnych generujących oszacowania wykładnicze, twierdzenia o sztywności i wyniki stratyfikacji.

Warto wspomnieć, że Chapter 7 opiera się na **(S4)**, a z kolei Chapter 2 wiele czerpie z **(S1)**. Fragmenty **(S9)** i **(S10)** zostały również wykorzystane w Chapter 3 i Chapter 4, odpowiednio.

5.2. **Orbity łączące w przestrzeniach Hilberta i ich zastosowania w r.r.cz.: (S15)–(S16).**

W **(S15)** pokazuję istnienie orbit heteroklinicznych dla potencjałów *półciągłych z dołu* zdefiniowanych w *przestrzeniach Hilberta*. Wynik ten jest udoskonaleniem moich poprzednich prac **(S1)**–**(S2)**, ale opiera się na wprowadzonych tam technikach (por. w szczególności Lemma 2.4 **(S2)**). Opracowuję również metodę analizy funkcjonalnej, która ma zastosowania w rozwiązywaniu problemów r.r.cz. dotyczących przejść fazowych. Idea jest taka, aby spojrzeć na rozwiązanie r.r.cz. jako odwzorowanie przyjmujące wartości w przestrzeni funkcji i zredukować początkowe r.r.cz. do problemu r.r.z. (np. do heteroklinicznej orbity w przestrzeni Hilberta). Jako pierwsze zastosowanie przedstawiam w bardziej ogólnym ujęciu nową konstrukcję heteroklinicznych warstw podwójnych (początkowo przedstawioną przez Schatzmana [41], por. (4.11)). Z kolei w **(S16)** stosuję poprzednią metodę do konstruowania warstwowych rozwiązań rozszerzonego r.r.cz. Fishera-Kołmogorowa.

$$\Delta^2 u(t,x) - \beta\Delta u(t,x) + \nabla W(u(t,x)) = 0,\ u:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m\ m \geq 2,\ \beta > 0,\ (t,x) \in \mathbb{R}^2, \tag{5.1}$$

gdzie $W \in C^2(\mathbb{R}^m, [0,\infty))$ jest podwójną studnią potencjału. Wynik ten dostarcza pierwszych przykładów dwuwymiarowych rozwiązań minimalnych układu (4.7).

5.3. Niezdegenerowanie orbit heteroklinicznych: (S18).

W przypadku skalarnym niezdegenerowanie[3] orbit heteroklinicznych jest dobrze znaną własnością, powszechnie stosowaną w problemach dotyczących nieliniowych r.r.cz. eliptycznych, parabolicznych lub hiperbolicznych. Z kolei Schatzman [41] udowodnił, że w przypadku wektorowym założenie to jest generyczne, w tym sensie, że dla każdego potencjału $W : \mathbb{R}^m \to [0,\infty)$, $m \geq 2$, istnieje dowolnie mała perturbacja potencjału W taka, że dla nowego potencjału minimalne orbity heterokliniczne są niezdegenerowane. Jednakże, z tego co wiemy, nietrywialne, bezpośrednie przykłady takich potencjałów nie są znane. W tej pracy dowodzimy niezdegenerowania orbit heteroklinicznych dla potencjałów $W : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$, które można zapisać jako $W(z) = |f(z)|^2$, gdzie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną. Dowód tego wyniku opiera się na metodzie analizy zespolonej wprowadzonej przez Alikakosa, Betelú i Chena [3].

5.4. Oszacowanie gradientu dla wszystkich rozwiązań semiliniowego układu eliptycznego: (S9).

Ograniczone rozwiązania $u \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ skalarnego równania

$$\Delta u = W'(u),\ \text{gdzie } W \in C^2(\mathbb{R}; [0,\infty)) \tag{5.2}$$

posiadają oszacowanie na gradient

$$|\nabla u|^2 \leq 2W(u),$$

które nazywane jest oszacowaniem Modiki [28]. Ta niezwykła własność, która jest kluczowa dla wszystkich rozwiązań, implikuje również twierdzenie Liouville'a:

jeśli $W(u(x_0)) = 0$ zachodzi dla pewnego $x_0 \in \mathbb{R}^n$, to rozwiązanie u jest stałe.

W **(S9)** badam poprawność oszacowania Modiki dla rozwiązań ograniczonych $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ układu $\Delta u = \nabla W(u)$, gdzie $W : \mathbb{R}^m \to [0,\infty)$. Konstrukcja nowego rodzaju orbity okresowej osiągającej minima potencjału przy niezerowej prędkości zaprzecza twierdzeniu Liouville'a, a także pokazuje, że żadne oszacowanie Modiki w ogólności nie obowiązuje dla układu $\Delta u = \nabla W(u)$ (por. Section 2 w **(S9)**). Jednak w kilku ważnych szczególnych przypadkach podaję namiastkę oszacowania Modiki. Na przykład, dla potencjału Ginzburga-Landaua $W(u) = \frac{1}{4}(1 - |u|^2)^2$ udowadniam nierówność

$$|\nabla u|^2 \leq 2\sqrt{W(u)}$$

zachodzącą dla wszystkich ograniczonych rozwiązań (4.9) (por. Theorem 3.5 z **(S9)**). Metoda zastosowana w **(S9)** pochodzi z [12]. Opiera się na wykorzystaniu tak zwanych P-funkcji (por. [45]).

[3] por. definicja w sekcji 4.1.2

5.5. **Zasady maksimum i porównawcza dla punktów minimalnych semiliniowej eliptycznej energii: (S10) i (S17).**

W obu artykułach rozważamy punkty minimalne funkcjonału $E(u) = \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + W(u))$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$ i $W : \mathbb{R}^m \to [0, \infty)$.

W **(S17)** przedstawiamy zasadę porównawczą zapewniającą ograniczenia z góry dla modułów tych punktów minimalnych. Nasze założenia są bardzo łagodne: zakładamy, że potencjał jest półciągły z dołu i spełnia warunek monotoniczności promieni emanujących z jego globalnego minimum a. W konsekwencji zadajemy warunek wystarczający na istnienie martwych obszarów rdzenia, gdzie punkt minimalny jest równy a. Wyniki te rozszerzają i dostarczają wariacyjnych wersji kilku klasycznych twierdzeń dobrze znanych ze skalarnych semiliniowych eliptycznych rozwiązań r.r.cz. (por. [34, 35, 36]).

Z kolei, w **(S10)** uogólniamy zasadę maksimum Alikakosa i Fusco [6] poprzez rozważenie potencjałów zanikających na brzegu zbioru wypukłego K, ponieważ przypadek, w którym K pokrywa się z punktem został zbadany w [6].

5.6. **Teoria oddziaływania światła z materią w ciekłych kryształach: (S12)–(S14).**

Ta seria prac jest kontynuacją **(S3)**. W **(S12)** badamy jakościowe własności globalnych punktów minimalnych energii Ginzburga-Landaua, które opisują oddziaływanie światła z materią w teorii ciekłych kryształów nematycznych. Model ten zależy od dwóch parametrów: $\epsilon > 0$, który jest mały i reprezentuje skalę koherencji układu oraz $a \geq 0$, który reprezentuje natężenie zastosowanego światła laserowego. W szczególności interesuje nas zjawisko łamania symetrii, przy zmieniających się a i ϵ. Pokazujemy, że gdy $a = 0$, to globalny punkt minimalny jest radialnie symetryczny i jednoznaczny, i jego symetria jest natychmiast łamana gdy $a > 0$, a następnie przywracana dla wystarczająco dużych wartości a. Łamanie symetrii wiąże się z obecnością nowego typu defektu topologicznego, który nazwaliśmy wirem cieniowym. Scenariusz łamania symetrii jest wyraźnym potwierdzeniem wyników eksperymentalnych i numerycznych uzyskanych wcześniej w [8].

W **(S13)** opisujemy ściany domeny pojawiające się w cienkiej, nematycznej próbce ciekłokrystalicznej poddanej działaniu pola zewnętrznego o natężeniu zbliżonym do progu przejścia Fréedericksza. Wykorzystując dostosowaną do tej sytuacji gradientową teorię przejścia fazowego pokazujemy, że w zależności od parametrów układu ściany domeny występują w obszarze bistabilnym lub na granicy obszaru bistabilnego i monostabilnego.

Wreszcie, w **(S14)** przy pomocy równania amplitudy opisującego zawory optyczne w pobliżu przejścia Freédericksza, analitycznie charakteryzujemy tworzące przez nie wiry i kraty. Symulacje numeryczne równania amplitudy, rozwiązania analityczne i obserwacje eksperymentalne wykazują dobrą zgodność.

5.7. **Równania nadprzewodnictwa Ginzburga-Landaua: (S11).**

Udowadniamy istnienie kratowych rozwiązań wirowych Abrikosowa równań nadprzewodnictwa Ginzburga-Landaua, z wielokrotnymi kwantami strumienia magnetycznego na komórkę podstawową. Nakładając odpowiednią symetrię, konstruujemy gałąź rozwiązania w otoczeniu gałęzi rozwiązań trywialnych odpowiadających stałemu polu magnetycznemu. Rozwiązania te są jednoznaczne w klasie symetrii. Ponownie przyglądamy się również dowodom istnienia krat wirowych Abrikosowa, usprawniając niektóre argumenty i dostarczając pewnych istotnych szczegółów, których brakowało we wcześniejszych dowodach dla pojedynczego kwantu strumienia magnetycznego na komórkę podstawową (por. [47, 48]).

5.8. **Odwzorowania harmoniczne: (S20).**

Mieszane warunki brzegowe pojawiają się w problemach dotyczących symetrii, a także są spełnione przez odwzorowania konforemne. Implikują one w szczególności warunek:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) \perp \frac{\partial u}{\partial t}(x), \ \forall x \in \partial\Omega, \ \forall t \in T_x(\partial\Omega), \ n \perp T_x(\partial\Omega), \ \text{gdzie } u : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^m. \tag{5.3}$$

W **(S20)** udowadniam istnienie jednoznacznej funkcji harmonicznej spełniającej mieszane warunki brzegowe, gdy dziedzina i przeciwdziedzina są dwoma wielokątami płaszczyzny o tej samej liczbie boków. Odwzorowanie to przekształca wierzchołki S na wierzchołki Σ i jest konforemne, gdy S i Σ są trójkątami. W przypadku wielokątów ogólnie, można je traktować jako odpowiednik odwzorowania dostarczonego przez twierdzenie Riemanna o odwzorowaniu. Ponadto badam również mieszane warunki brzegowe w gładkich obszarach planarnych. W Theorem 6.2 z **(S20)** udowadniam propagację konforemnych warunków brzegowych:

Twierdzenie 5.1. *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie gładkim obszarem Jordana i niech $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem harmonicznym spełniającym* (5.3). *Wówczas u jest konforemne.*

6. INFORMACJA O OSIĄGNIĘCIACH DYDAKTYCZNYCH, ORGANIZACYJNYCH ORAZ POPULARYZUJĄCYCH NAUKĘ LUB SZTUKĘ

6.0.1. *Nauczanie.*

• Baskijskie Centrum Matematyki Stosowanej (Hiszpania), Styczeń 2020
Kurs doktorancki na temat modeli przejść fazowych drugiego rzędu (z udziałem zaproszonych studentów zagranicznych). Średni poziom zadowolenia uczniów: 9/10.

• Uniwersytet Chile, Zima 2017
Fourier Analysis (kurs licencjacki)

• Uniwersytet w Atenach (Grecja), Październik 2013–Czerwiec 2014
Nonlinear Analysis and Calculus of Variations (kurs podyplomowy), Methods of Applied Mathematics (kurs podyplomowy) oraz Multivariable Calculus (kurs licencjacki).

• Instytut Technologiczny w Pireusie (Grecja), Październik 2008–Czerwiec 2011
Linear Algebra i Computational Mathematics (kursy licencjackie) na Wydziale Inżynierii Elektrycznej.

• Filmy nagrane na zajęcia online Uniwersytetu w Atenach (Multivariable Calculus):
dostępne pod linkiem http://delos.uoa.gr

6.0.2. *Działalność organizacyjna.*

• Współorganizacja wraz z prof. Alikakosem warsztatów „Workshop on Reaction-Diffusion Systems with Gradient Structure", które odbyły się w Atenach (Grecja) w marcu 18–20, 2013.

6.0.3. *Popularyzacja nauki.*

• Artykuł o tematyce ogólnej:
P. Bates, G. Fusco, **P. Smyrnelis**: Multiphase stationary solutions to the vector Allen-Cahn equation. SIAM Dynamical Systems Web Magazine, wydanie październikowe 2018

został opublikowany w celu udostępnienia **(S4)** szerszej publiczności.

• Podobnie, referat konferencyjny
P. Smyrnelis: Phase transition and Ginzburg-Landau models occurring in the physics of liquid crystals. Materiały 16-stej „Panhellenic Conference on Analysis" 97–111, Redagujący: M. Anoussis, V. Felouzis, A. Tsolomitis, Uniwersytet Egejski, Samos, Grecja (2018)

został napisany w celu udostępnienia moich prac **(S3)**, **(S5)**, **(S12)** i **(S13)** szerszej publiczności.

Literatura

[1] Alama, S., Bronsard, L., Gui, C.: Stationary layered solutions in $\mathbb{R}^2$ for an Allen–Cahn system with multiple well potential. Calc. Var. **5** No. 4, 359–390 (1997)

[2] Alikakos, N. D.: A new proof for the existence of an equivariant entire solution connecting the minima of the potential for the system $\Delta u - W_u(u) = 0$. Comm. Partial Diff. Eqs **37** No. 12, 2093–2115 (2012)

[3] Alikakos, N. D., Betelú, S. I., Chen, X.: Explicit stationary solutions in multiple well dynamics and non-uniqueness of interfacial energies. Eur. J. Appl. Math. **17**, 525–556 (2006)

[4] Alikakos, N. D., Fusco, G.: On the connection problem for potentials with several global minima. Indiana Univ. Math. J. **57**, 1871–1906 (2008)

[5] Alikakos, N. D., Fusco, G.: Entire solutions to equivariant elliptic systems with variational structure. Arch. Rat. Mech. Anal. **202** No. 2, 567–597 (2011)

[6] Alikakos, N. D., Fusco, G.: A maximum principle for systems with variational structure and an application to standing waves, J. Eur. Math. Soc. **17** (7), 1547–1567 (2015)

[7] Ambrosio, L., Cabré, X.: Entire solutions of semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^3$ and a conjecture of De Giorgi. J. Am. Math. Soc. **13**, 725–739 (2000)

[8] Barboza, R., Bortolozzo, U., Dávila, J. D., Kowalczyk, M., Residori, S., Vidal Henriquez, E.: Light-matter interaction induces a shadow vortex, Phys. Rev. E **93** (2016), no. 5, 050201.

[9] Bethuel, F., Brezis, H., Helein, F.: Ginzburg-Landau vortices. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Appl. **13**, Birkhäuser, Basel and Boston (1994)

[10] Bonheure, D., Sanchez, L.: Heteroclinic orbits for some classes of second and fourth order differential equations. Handbook of differential equations: ordinary differential equations ,Vol. III, 103–202, edited by A. Cañada, P. Drábek, A. Fonda, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, (2006)

[11] Bronsard, L., Gui, C., Schatzman, M.: A three-layered minimizer in $\mathbb{R}^2$ for a variational problem with a symmetric three-well potential. Comm. Pure. Appl. Math. **49** No. 7, 677–715 (1996)

[12] Caffarelli, L., Garofalo, N., Segala, F.: A Gradient bound for entire solutions of quasi-linear equations and its consequences. Communications on Pure and Applied Mathematics **47**, No. 11, 1457–1473 (1994)

[13] Caffarelli, L., Córdoba, A.: Uniform convergence of a singular perturbation problem. Comm. Pure Appl. Math. **48**, 1–12 (1995)

[14] Dang, H., Fife, P. C., Peletier, L. A.: Saddle solutions of the bistable diffusion equation. Z. Angew. Math. Phys., **43** (6), 984–998 (1992)

[15] De Giorgi, E.: Convergence problems for functionals and operators. In: Proceedings of the International Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis, Rome (1978), 131–188. Pitagora, Bologna (1979)

[16] Dee, G. T., van Saarloos, W: Bistable systems with propagating fronts leading to pattern formation. Phys. Rev. Lett. **60**, 2641–2644 (1988)

[17] del Pino, M., Kowalczyk, M., Wei, J.: On De Giorgi's conjecture in dimension $N \geq 9$. Ann Math **174**, 1485–1569 (2011)

[18] Farina, A., Valdinoci, E.: The state of art for a conjecture of De Giorgi and related questions. Reaction-diffusion systems and viscosity solutions. World Scientific, Singapore (2008)

[19] Fusco, G.: Equivariant entire solutions to the elliptic system $\Delta u - W_u(u) = 0$ for general G-invariant potentials. Calc. Var. Part. Diff. Eqs. **49** No. 3, 963–985 (2014)

[20] Gidas, B., Wei Ming Ni, Nirenberg, L.: Symmetry and related properties via the maximum principle. Comm. Math. Phys. **68** (3): 209– 243 (1979).

[21] Ghoussoub, N., Gui, C.: On a conjecture of De Giorgi and some related problems. Math. Ann. **311**, 481–491 (1998)

[22] Ginzburg, V., Landau, L: On the theory of superconductivity, Zh. Eksper. Teoret. Fiz. **20** (1950), 1064–1082; [English translation in Men of Physics: L. D. Landau, I (D. ter Haar, ed.) pp. 138–167, Pergamon, New York and Oxford, 1965].

[23] Gui, C., Schatzman, M.: Symmetric quadruple phase transitions. Ind. Univ. Math. J. **57** No. 2, 781–836 (2008)

[24] Hastings, S. P., McLeod, J. B.: A boundary value problem associated with the second Painlevé transcendent and the Korteweg-de Vries equation. Arch. Rational Mech. Anal. **73** (1980), no. 1, 31–51.

[25] Hervé, R. M., Hervé, M.: Étude qualitative des solutions réelles d'une équation différentielle liée a l'équation de Ginzburg-Landau. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non linéaire, **11** 427–440 (1994)

[26] Kalies, W. D., Van der Vorst, R. C. A. M.: Multitransition homoclinic and heteroclinic solutions of the extended Fisher-Kolmogorov equation. J. Differential Equations **131** No. 2, 209–228 (1996)

[27] Mironescu, P.: Les minimiseurs locaux pour l'équation de Ginzburg-Landau sont à symétrie radiale, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **323, Série I** (1996), 593–598.

[28] Modica, L.: A Gradient bound and a Liouville Theorem for nonlinear Poisson equations. Communications on Pure and Applied Mathematics **38**, No. 5, 679–684 (1985)

[29] Pacard, F., Riviere, T: Linear and Nonlinear Aspects of Vortices, The Ginzburg-Landau Model. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Appl. **39**, Birkhäuser, Boston (2000)

[30] Peletier, L. A., Troy, W. C., Van der Vorst, R. C. A. M.: Stationary solutions of a fourth-order nonlinear diffusion equation. Differentsialnye Uravneniya **31** No. 2, 327–337 (1995)

[31] Peletier, L. A., Troy, W. C.: Spatial patterns, higher order models in physics and mechanics. **45**, Birkhäuser, Boston, MA (2001)

[32] Pisante, A.: Two results on the equivariant Ginzburg-Landau vortex in arbitrary dimension. Journal of Functional Analysis **260** 892–905 (2011)

[33] Porter, D. A., Easterling, K. E.: Phase transformations in metals and alloys. Chapman and Hall, Second Edition (1996)

[34] Pucci, P., Serrin, J.: The strong maximum principle revisited. J. Differential Equations **196**, 1–66 (2004)

[35] Pucci, P., Serrin, J.: Dead cores and bursts for quasilinear singular elliptic equations. SIAM J. Math. Anal. **38**, No. 1 259–278 (2006)

[36] Pucci, P., Serrin, J.: The maximum principle. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications **73**, Springer-Birkhäuser (2007)

[37] Rabinowitz, P. H.: Periodic and heteroclinic orbits for a periodic hamiltonian system. Ann. Inst. Henri Poincaré, **6** No. 5, 331–346 (1989)

[38] Sandier, E., Serfaty, S.: Vortices in the magnetic Ginzburg-Landau model. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications **70**, Birkhäuser (2007)

[39] Savin, O.: Regularity of flat level sets in phase transitions, Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 1, 41–78.

[40] Savin, O.: Minimal Surfaces and Minimizers of the Ginzburg Landau energy. Cont. Math. Mech. Analysis AMS **526**, 43–58 (2010)

[41] Schatzman, M.: Asymmetric heteroclinic double layers. Control Optim. Calc. Var. **8** (A tribute to J. L. Lions), 965–1005 (electronic) (2002)

[42] Shafrir, I.: Remarks on solutions of $-\Delta u = (1-|u|^2)u$ in $\mathbb{R}^2$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **318** (1994), no. 4, 327–331. MR 1267609

[43] Smyrnelis, P.: Solutions to elliptic systems with mixed boundary conditions. Phd thesis, University of Thessaloniki, 2012.

[44] Sourdis, C.: The heteroclinic connection problem for general double-well potentials. Mediterr. J. Math. **13**, 4693–4710 (2016)

[45] Sperb, R.: Maximum principles and their applications. Mathematics in Science and Engineering, **157**, Academic Press, New York, 1981

[46] Sternberg, P.: Vector-valued local minimizers of nonconvex variational problems. Rocky Mountain J. Math. **21**, 799–807 (1991)

[47] Tzaneteas, T., Sigal, I. M.: Abrikosov lattice solutions of the Ginzburg-Landau equations. Contem. Math. **535**, 195–213 (2011)

[48] Tzaneteas, T., Sigal, I. M.: On Abrikosov lattice solutions of the Ginzburg-Landau equations. Math. Model. Nat. Phenom. **8**(5), 190–205 (2013)