# Autoreferat

Piotr W. Nowak

## Podstawowe informacje


| | |
|---|---|
| Imię i nazwisko: | Piotr Wojciech Nowak |
| Adres: | Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk<br>Śniadeckich 8<br>00-656 Warszawa |
| Email: | pnowak@mimuw.edu.pl |
| Strona WWW: | www.mimuw.edu.pl/ ~pnowak |


### Stopnie naukowe

05/2008 Doctor of Philosophy, Department of Mathematics, Vanderbilt University, Nashville, TN, USA
Rozprawa: "Property A as metric amenability and its applications to geometry"
Promotor: Guoliang Yu
Praca nagrodzona wydziałową nagrodą *Bjarni Jonsson Prize for Research*
Dyplom nostryfikowany na Uniwersytecie Warszawskim, 2011

05/2006 Master of Arts, Department of Mathematics, Vanderbilt University, Nashville, TN, USA

06/2003 Magisterium, Uniwersytet Warszawski
Praca: *Jednostajne zanurzenia przestrzeni metrycznych w przestrzenie Hilberta*
Promotor: Henryk Toruńczyk
Praca nagrodzona nagrodą 3 stopnia w konkursie im. Marcinkiewicza Polskiego Towarzystwa Matematycznego

### Przebieg kariery naukowej

| | |
|---|---|
| 10/2011 – obecnie | Adiunkt<br>łączone stanowisko badawcze w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk oraz w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego |
| 06/2014 – 09/2014 | Zaproszona pozycja wizytująca Research Associate<br>Mathematical Institute, University of Oxford, Wielka Brytania |
| 08/2011 – 12/2011 | Postdoctoral Fellow<br>Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, CA, USA |
| 08/2008 – 08/2011 | Visiting Assistant Professor<br>Texas A&M University, College Station, TX, USA |
| 08/2004 – 06/2008 | Doktorant oraz Teaching Assistant, Vanderbilt University, Nashville, TN, USA |
| 08/2003 – 06/2004 | Doktorant oraz Teaching Assistant,Tulane University, New Orleans, LA, USA |

# 1 Wskazanie osiągnięcia habilitacyjnego

Cykl 7 prac zatytułowany

**Kohomologie grup o współczynnikach w modułach Banacha**

## 1.1 Lista prac zawierająca wskazane osiągnięcia

[H1] Piotr W. Nowak, *Poincaré inequalities and rigidity for actions on Banach spaces*, Journal of the European Mathematical Society (JEMS) **17** (2015), no. 3, 689–709.

[H2] Uri Bader and Piotr W. Nowak, *Cohomology of deformations*, Journal of Topology and Analysis **7** (2015), no. 1, 81–104.

[H3] Piotr W. Nowak and Ján Špakula, *Controlled coarse homology and isoperimetric inequalities*, Journal of Topology **3** (2010), no. 2, 443–462.

[H4] Ronald G. Douglas and Piotr W. Nowak, *Invariant expectations and vanishing of bounded cohomology for exact groups*, Journal of Topology and Analysis **3** (2011), no. 1, 89–107.

[H5] Ronald G. Douglas and Piotr W. Nowak, *Every finitely generated group is weakly exact*, Journal of Functional Analysis **261** (2011), no. 12, 3723–3734.

[H6] Jacek Brodzki, Graham A. Niblo, Piotr W. Nowak, and Nick Wright, *Amenable actions, invariant means and bounded cohomology*, Journal of Topology and Analysis **4** (2012), no. 3, 321–334.

[H7] Jacek Brodzki, Graham A. Niblo, Piotr W. Nowak, and Nick Wright, *A homological characterization of topological amenability*, Algebraic and Geometric Topology **12** (2012), no. 3, 1767–1780.

W przypadku prac wspólautorskich należy uznać wkład wszystkich autorów za równy. Odpowiednie oświadczenia zostały dołaczone do wniosku.

## 1.2 Wprowadzenie

Homologie i kohomologie grup to jedne z podstawowych obiektów badań w geometrycznej teorii grup i topologii. Tego typu obiekty zależą w dużym stopniu od wyboru współczynników: $G$-modułu, w którym wartości obierają cykle lub kocykle. Podstawowym elementem wspólnym wyników przedstawionych w powyższych pracach i omówionych poniżej jest to, iż współczynniki te są różnej postaci *modułami Banacha*: przestrzeniami Banacha ze strukturą $G$-modułu zadaną przez ciągłą w odpowiednim sensie reprezentację grupy $G$. Podstawowym tekstem opisującym teorię kohomologii grup jest [8].

Podstawowym motywem przewodnim w przedstawionym cyklu prac jest badanie zależności pomiędzy geometrycznymi i analitycznymi własnościami grup a zachowniem grup homologii lub kohomologii o odpowiednio dobranych współczynnikach w module Banacha. Te geometryczne własności to różne wersje średniowalności grup i działań lub ich silne zaprzeczenie, w szczególności wersje własności $(T)$ Kazhdana.

### 1.2.1 Własność $(T)$ i jej wersje dla przestrzeni Banacha

Własność $(T)$ została wprowadzona przez Kazhdana w 1967 [25] i od tego czasu znalazła ogromną ilość ważnych zastosowań. Kazhdan użył jej do pokazania, że pewne kraty w grupach Liego są skończenie generowane; Margulis użył jej do skonstruowania pierwszych przykładów ekspanderów; Margulis i Sullivan niezależnie, bazując na wynikach Rosenblatta, rozwiązali pozytywnie w wyższych wymiarach problem Ruziewicza o jednoznaczności średniej niezmienniczej ze względu na obroty na sferze. Ponadto własność $(T)$ implikuje sztywność w różnych formach dla grup, ich działań, oraz stowarzyszonych algebr operatorów. Szczegółowemu omówieniu klasycznej wersji własności $(T)$ poświęcona jest książka [5].

**Definicja 1.** *Niech $G$ będzie skończenie generowaną grupą. $G$ ma własność $(T)$, równoważnie własność $FH$, jeśli dla każdej reprezentacji unitarnej $\pi$ grupy $G$ mamy $H^1(G,\pi)=0$.*

Przez kohomologie o współczynnikach w reprezentacji $\pi$ zwyczajowo oznaczamy tutaj kohomologie o współczynnikach w $G$-module zadanym przez przestrzeń Hilberta $H$ z działaniem grupy zadanym przez $\pi$. Własność $FH$ to własńość punktu stałego: $G$ ma własność $FH$ jeśli jej każde działanie na przestrzeni Hilberta przez afiniczne izometrie posiada punkt stały.

Powyższa definicja pozwala w naturalny sposób uogólnić własność $(T)$ na inne przestrzenie Banacha. Definicja ta była wprowadzona w [3].

**Definicja 2.** *Niech $E$ będzie przestrzenią Banacha. Grupa $G$ ma własność $FE$ jeśli $H^1(G,\pi)=0$ dla każdej reprezentacji izometrycznej $G$ na $E$.*

Główne przykłady grup dyskretnych z własnością $(T)$ to

1. kraty w grupach Liego wyższej rangi, np. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ dla $n \geq 3$,
2. grupy działające na budynkach $\widetilde{A}_2$,
3. oraz pewne grupy hiperboliczne:
   (a) kraty w grupie $\mathrm{Sp}(n,1)$,
   (b) grupy losowe w modelu Gromova z gęstością $\frac{1}{3} < d < \frac{1}{2}$.

Dla grup wyższej rangi 1 własność $FE$ dla przestrzeni $E = L_p(\Omega,\mu)$, $1 < p < \infty$, została roztrzygnięta w [3]. Zostało tam udowodnione następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 3** ([3]). *Niech $G$ będzie grupą wyższej rangi. Wówczas $H^1(G,\pi)=0$ dla każdej izometrycznej reprezentacji $\pi$ grupy $G$ na przestrzeni $L_p(\Omega,\mu)$ dla dowolnego $1 < p < \infty$.*

Podobne twierdzenie dla grup $\mathrm{SL}_n([x_1,\dots,x_n])$, dla $k \geq 1$ oraz $n \geq 4$ udowodnił Mimura [30]. Naor i Silberman [31] pokazali innymi metodami, że ta sama teza jest spełniona dla grup, które zawierają zgrubnie zanurzony ciąg ekspanderów.

Jedną z dwóch najważniejszych metod pokazywania własności $(T)$ jest tzw. metoda *geometryczna* lub *spektralna*. Jej głównym elementem jest następujące meta-twierdzenie.

*Niech $X$ będzie nieskończonym, ściągalnym kompleksem symplicjalnym, takim, że link każdego wierzchołka spełnia $\lambda_1(x) > 1/2$. Niech $G$ będzie skończenie generowaną grupą działającą na $X$ symplicjalnie i kozwarcie. Wówczas $G$ ma własność $(T)$.*

W powyższym sformułowaniu $\lambda_1$ oznacza najmniejszą dodatnią wartość własną Laplasjanu na (skończonym) grafie – linku wierzchołka $x$. Tego typu wyniki w różnych wersjach pojawiły się w pracach [4, 14, 43, 45].

Głównym wynikiem [H1] jest uogólnienie metody spektralnej z przestrzeni Hilberta na refleksywne przestrzenie Banacha. Niech $X$ będzie refleksywną przestrzenią Banacha, a $\Gamma = (V,E)$ skończonym grafem.

**Definicja 4.** *Niech* $1 \leq p < \infty$. *Mówimy, że* $\Gamma$ *spełnia nierówność p-Poincaré względem* $X$ *jeśli istnieje stała* $K > 0$ *taka, że dla każdej funkcji* $f : V \to X$ *spełniona jest nierówność*

$$\sum_{v \in V} \|f(x) - Mf\|_X^p \leq K \sum_{(v,w) \in E} \|f(v) - f(w)\|_X^p, \tag{1}$$

*gdzie* $Mf = \frac{1}{\#V} \sum_{x \in V} f(v)$ *jest wartością średnią* $f$.

*Stałą* $\kappa(\Gamma, p, X) = \inf K$, *gdzie* $K$ *jest jak wyżej, nazywamy stałą p-Poincaré dla* $\Gamma$ *względem* $X$.

Stała Poincaré dla $X = \mathbb{R}$ to dokładnie $\sqrt{\lambda_1^{-1}}$, gdzie $\lambda_1$ oznacza najmniejszą dodatnią wartość własną dyskretnego Laplasjanu na $\Gamma$. Ponieważ norma w przestrzeni $L_p$ jest zapisana konkretnym wzorem w postaci całki, można pokazać łatwo, że $\kappa(\Gamma, p, \mathbb{R}) = \kappa(\Gamma, p, L_p)$ dla $1 \leq p < \infty$.

**Definicja 5.** *Niech* $S$ *będzie skończonym, symetrycznym zbiorem generatorów grupy* $G$. *Link* $S$, *oznaczany* $\mathscr{L}(S) = (V, E)$, *to skończony graf zdefiniowany nastepująco:*

1. *Za zbiór wierzchołków przyjmujemy* $V = S$,
2. $(s,t) \in E$ *jeśli* $s^{-1}t \in S$.

Głównym wynikiem pracy [H1] jest nastepujące

**Twierdzenie 6** ([H1])**.** *Niech* $G$ *będzie skończenie generowaną grupą a* $S$ *zbiorem generatorów nie zawierającym elementu neutralnego. Załóżmy, że* $\mathscr{L}(S)$ *jest grafem spójnym oraz że*

$$\kappa(\mathscr{L}(S), p, X) < 2^{1/p} \qquad \text{oraz} \qquad \kappa(\mathscr{L}(S), p^*, X^*) < 2^{1/p^*}.$$

*Wówczas* $H^1(G, \pi) = 0$ *dla każdej reprezentacji izometrycznej* $\pi$ *grupy* $G$ *na przestrzeni* $X$.

Główną zaletą powyższego twierdzenia jest fakt, że warunki na stałe Poincaré są w tym przypadku liniowe. Pozwala to na ich interpolację i konkretne oszacowania wartości $p \in [2, \infty)$, dla których spełniona jest własność $FL_p$ dla konkretnych przykładów grup. Formalne, nieliniowe wersje warunków spektralnych w przestrzeniach Banacha czy przestrzeniach metrycznych były wcześniej znane, lecz ze względu na ich nieliniowość właśnie nie udało się ich zastosować w ani jednym przypadku.

Pierwszą rodziną przykładów do której stosuje się powyższe twierdzenie jest rodzina grup działających na budynkach $\widetilde{A}_2$. Jest to rodzina $\{G_q\}$, gdzie $q$ przebiega zbiór potęg liczb pierwszych. Dla każdego $q = k^n$, gdzie $k$ jest liczbą pierwszą, grupa $G_q$ ma naturalną prezentację, której link $\mathscr{L}(S)$ jest przestrzenią rzutową nad skończonym ciałem. Grupy te były szerzej omówione w pracach [9, 10] Spektra dyskretnego Laplasjanu dla skończonych przestrzeni rzutowych zostały policzone już w latach 60tych w pracy [16]. Interpolując te wartości w pracy [H1] uzskane zostało następujące oszacowanie.

**Twierdzenie 7** ([H1])**.** *Dla każdego* $q = k^n$, *gdzie* $n \in \mathbb{N}$ *a* $k$ *jest liczbą pierwszą, mamy* $H^1(G_q, \pi) = 0$ *dla wszystkich*

$$2 \leq p \leq \frac{\ln(q^2+q+1) + \ln(q+1)}{\frac{1}{2}\ln(2(q^2+q+1)(q+1)) - \ln(2) - \ln\left(\sqrt{1 - \frac{\sqrt{q}}{q+1}}\right)}$$

*dla dowolnej reprezentacji izometrycznej grup* $G_q$ *na przestrzeni* $L_p(Y, \mu)$ *na przestrzeni z miarą* $(Y, \mu)$.

Drugą rodziną, do której można zastosować powyższe twierdzenie są losowe grupy hiperboliczne. W pracy [18] pokazano, że dla pewnych grafów losowych $W$ na $n$ wierzchołkach o stopniu deg mamy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\kappa(W,2,\mathbb{R}) \leq 1 - \frac{\sqrt{2\deg}(\deg-1)^{1/4}}{\deg} + \frac{c}{\deg}\right) = 1 \tag{2}$$

dla każdego $c > 1$. W pracy [45] rozpatrywano zmodyfikowany link graf $\mathscr{L}(S)$ o wielokrotnych krawędziach. Taki graf $\mathscr{L}(S)$ rozkłada się na grafy losowe wspomniane powyżej i pokazano, że powyższe oszacowanie (2) implikuje, że $\mathscr{L}(S)$ jest posiada stała Poincaré $\kappa(\mathscr{L}(S),2,\mathbb{R}) < \sqrt{2}$ prawie na pewno. W naszej sytuacji, zmodyfikowany graf $\mathscr{L}(S)$ może byc rozpatrywany jako graf z wagą na krawędziach, krawędź łączącą wierzchołki $s,t \in S$ o krotności $k$ zastępujemy pojedyńczą krawędzią o wadze $\omega(s,t) = k$.

Niech $0 < d < 1$. Mówimy, że grupa $G$ jest grupą w modelu losowym Gromova z gęstością $d$, $G \in \mathscr{G}(n,l,d)$, gdy $G$ jest generowana przez zbiór generatorów generatorów $S$ o liczebności $n$ oraz $(2n-1)^{ld}$ relacji o długości $l$, wybranych losowo z jednostajnym prawdopodobieństwem. Mówimy ponadto, że grupa losowa w modelu Gromova z gęstością $d$ ma własność $P$ prawie na pewno, gdy

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(G \in \mathscr{G}(n,l,d) \text{ ma własność } P) = 1.$$

Gromov pokazał, że gdy $d < 1/2$ to losowa grupa w powyższym modelu jest prawie na pewno hiperboliczna. Mamy następujące twierdzenie [27, 45]

**Twierdzenie 8** ([H1])**.** *Niech $G$ będzie, jak wyżej, grupą hiperboliczną w modelu Gromova i niech $\frac{1}{3} < d < \frac{1}{2}$. Wówczas, prawie na pewno grupa $G \in \mathscr{G}(n,l,d)$ jest hiperboliczna oraz istnieje grupa $H$ i homomorfizm $\varphi : H \to G$ taki, że*

1. *$H$ ma skończony zbiór generatorów, którego link $\mathscr{L}(S)$ jest skończonym losowym grafem oraz $\kappa(\mathscr{L}(S),2,\mathbb{R}) < \sqrt{2}$;*
2. *$\varphi(H)$ jest podgrupą skończonego indeksu w $G$.*

W podobny sposób jak w przypadku grup $\widetilde{A}_2$, interpolując wartości $\kappa(\mathscr{L}(S),2,\mathbb{R})$ otrzymujemy następujące

**Twierdzenie 9** ([H1])**.** *Przy spełnionych założeniach i tezie Twierdzenia 8 zachodzi następujący fakt. Dla grafu $\mathscr{L}(S) = (\mathscr{V},\mathscr{E})$ będącego linkiem zbioru generatorów $S$ grupy $H$ mamy $H^1(G,\pi)$ dla każdej izometrycznej reprezentacji grupy $G$ na przestrzeni $L_p$ dla*

$$p < \min\left\{p_0, \overline{p}_0^*\right\},$$

*gdzie*

$$p_0 = \frac{\ln\deg_\omega - \ln(2\#\mathscr{E})}{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\deg_\omega}{\#\mathscr{E}}\right) - \ln\kappa(\mathscr{L}(S),2,\mathbb{R})} \quad \textit{oraz} \quad \overline{p}_0 = \frac{\ln(\#\mathscr{V}\deg_\omega) - \ln 2}{\frac{1}{2}\ln(\#\mathscr{V}\deg_\omega) - \ln\kappa(\mathscr{L}(S),2,\mathbb{R})}.$$

Powyższe twierdzenie posiada dwa ciekawe zastosowania. Aby opisać pierwsze przypomnijmy, że wymiar konforemny grupy hiperbolicznej $G$, zdefiniowany przez Pansu, to liczba

$$\operatorname{confdim}(G) = \inf\{\dim_{\text{Haus}}(\partial G, d) \,:\, d \text{ jest quasi-konforemnie równoważna } d_v\},$$

gdzie $\partial G$ jest brzegiem Gromova, $\dim_{\mathrm{Haus}}$ oznacza wymiar Hausdorffa a $d_v$ jest dowolną metrykę wizualną na $\partial G$. Gromov [20] oraz Pansu [42] postawili pytanie o wartości wymiaru konforemnego $\partial G$ dla grupy hiperbolicznej w modelu Gromova, opisanym wcześniej. Przypomnijmy, że grupa losowa w modelu Gromova przy gęstosciach $d < \frac{1}{2}$ jest hiperboliczna prawie na pewno.

Aby zastosować twierdzenie 9 do pytania Pansu i Gromova wykorzystamy następujące

**Twierdzenie 10** ([7]). *Niech $G$ będzie grupą hiperboliczną. Wówczas dla każdego $p \geq \mathrm{confdim}(G)$ mamy $H^1(G, L_p(G)) \neq 0$, gdzie $L_p(G)$ oznacza reprezentację regularną $G$ na $L_p(G)$.*

Ponieważ konkluzje twierdzeń 9 oraz 10 wzajemnie się wykluczają, otrzymujemy następujący wniosek (notacja taka sama jak w twierdzeniu 9).

**Twierdzenie 11** ([H1]). *Niech $G$ będzie jak Twierdzeniu 9. Wówczas*

$$\mathrm{confdim}(G) \geq \min\left\{p_0, \overline{p}_0^*\right\}.$$

Drugim zastosowaniem Twierdzenia 9 jest oszacowanie normy reprezentacji jednostajnie ograniczonych na przestrzeni Hilberta, dla których kohomologie znikają. Przypomnijmy, że reprezentacja $\pi : G \to B(H)$ jest jednostajnie ograniczona gdy

$$\|\pi\| = \sup_{g \in G} \|\pi_g\| < \infty.$$

Y. Shalom postawił następującą hipotezę.

**Hipoteza 12** (Y. Shalom). *Niech $G$ będzie grupą hiperboliczną. Wówczas istnieje reprezentacja jednostajnie ograniczona $\pi$ na przestrzeni Hilberta dla której $H^1(G, \pi) \neq 0$.*

Jedynym wynikiem w tym kierunku jest wynik Shaloma, że powyższa hipoteza jest prawdziwa w przypadku gdy $G$ jest kratą w $\mathrm{Sp}(n,1)$. Dowód wykorzystuje konstrukcje Cowlinga [11] ciągu jednostajnie ograniczonych reprezentacji $\mathrm{Sp}(n,1)$ aproksymujących reprezentację trywialną w pewnej topologii. Dowód Shaloma jednak nigdy nie został spisany.

Aby zastosować twierdzenie 9 do reprezentacji jednostajnie ograniczonych zauważmy, że przestrzeń Hilberta $H$ z jednostajnie ograniczoną reprezentacją $\pi$ można interpretować jako przestrzeń $E$ izomorficzną z $H$ wraz z izometryczną reprezentacją $\rho$. Istonie, wprowadzając rownoważną normę

$$\|v\|_\pi = \sup_{g \in G} \|\pi_g v\|_H,$$

identyczność zadaje izomorfizm pomiędzy $(H, \|\cdot\|)$ a $(H, \|\cdot\|')$, spełniający

$$\|v\| \leq \|v\|_\pi \leq \|\pi\| \, \|v\|.$$

Łatwo widać wówczas, że

$$\kappa(\mathscr{L}(S), p, (H, \|\cdot\|_\pi)) \leq \|\pi\| \kappa(\mathscr{L}(S), p, (H, \|\cdot\|)).$$

To daje następujące

**Twierdzenie 13** ([H1]). *Niech $G$ będzie grupą hiperboliczną w modelu Gromova o gęstości $\frac{1}{3} < d < \frac{1}{2}$ oraz niech $\pi$ będzie jednostajnie ograniczoną reprezentacją grupy $G$ na przestrzeni Hilberta $H$ spełniającą*

$$\sup_{g\in G} \|\pi_g\| < \frac{\sqrt{2}}{\kappa(\mathscr{L}(S),2,\mathbb{R})}.$$

*Wówczas $H^1(G,\pi) = 0$.*

*W szczególności, $H^1(G,\pi) = 0$ prawie na pewno dla reprezentacji spełniających $\|\pi\| < \sqrt{2}$.*

Ostatnie stwierdzenie wynika z faktu, że $\kappa(\mathscr{L}(S),2,\mathbb{R}) \to 1$ w tym przypadku. Tak więc wniosek ten mówi, że wśród powyższej klasy reprezentacji jednostajnie ograniczonych nie mamy szans znaleźć reprezentacji postulowanych przez Shaloma, a znikanie kohomologii może mieć próg przy normie $\sqrt{2}$.

W kolejnej pracy [H2], wspólnej z Uri Baderem, pewne metody dowodu użyte w [H1] do badania zachowania znikania kohomologii przy małych, metrycznych perturbacjach reprezentacji. Niech $\pi$ będzie reprezentacją skończenie generowanej grupy $G$ na przestrzeni Banacha $X$, a $S$ skończonym zbiorem generatorów.

**Definicja 14.** *Niech $S$ będzie ustalonym skończonym zbiorem generatorów grup $G$. Niech $\varepsilon > 0$. Reprezentację $\rho$ grupy $G$ na przestrzeni Banacha $X$ nazywamy $\varepsilon$-deformacją reprezentacji $\pi$ jeśli*

$$\sup_{s\in S} \left\|\pi_s - \rho_s\right\| < \varepsilon.$$

Dla odpowiednio małych $\varepsilon$-deformacji, przy dodatkowych założeniach zachowane jest znikanie kohomologii. Przypomnijmy, że w przypadku gdy moduł współczynników $E$ posiada topologię, w szczególności gdy jest modułem Banacha, możemy zdefiniować zredukowane kohomologie grupy $G$, oznaczane $\overline{H}^*(G,E)$. Zdefiniowane są one jako

$$H^*(G,E) = \ker d \big/ \overline{\operatorname{im} d},$$

gdzie $\overline{\operatorname{im} d}$ oznacza domknięcie podprzestrzeni kobrzegów. Mówimy, że kohomologie są zredukowane w wymiarze $k$ gdy $H^k(G,E) = \overline{H}^k(G,E)$, czyli gdy obraz koróżniczki w tym wymiarze jest domknięty. Grupa jest typu $F_n$ gdy posiada przestrzeń Eilenberga-Maclane będącą CW-kompleksem o skończonym $n$-szkielecie.

**Twierdzenie 15** ([H2]). *Niech $G$ będzie typu $F_{n+1}$ a $\pi,\rho$ będą reprezentacjami grupy $G$ na przestrzeni Banacha $X$. Załóżmy, że*

1. *$H^n(G,\pi) = 0$,*
2. *$H^{n+1}(G,\pi)$ jest zredukowana.*

*Wówczas istnieje liczba $\varepsilon = \varepsilon(G) > 0$ taka, że dla każdej $\varepsilon$-deformacji $\rho$ reprezentacji $\pi$ mamy*

$$H^n(G,\rho) = 0.$$

W szczególności, załóżmy, że $\pi$ jest reprezentacją izometryczną. Wówczas dla $\varepsilon > 0$, $\varepsilon$-deformacja $\rho$ nie musi być już reprezentacją izometryczną. Istotnie, mając dany jedynie warunek

$$\|\pi_s - \rho_s\| \le \varepsilon$$

możemy wywnioskować

$$\|\rho_g\| \leq \left(\sup_{s\in S} \|\pi_s\| + \varepsilon\right)^{|g|}.$$

Konkretny przykład można uzyskać w następujący sposób. Niech $G$ działa na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega,\mu)$ poprzez mierzalne transformacje, które nie zachowują miary $\mu$ ale zachowują klasę miary. Wówczas istnieją pochodne Radona-Nikodyma $\frac{dg\mu}{d\mu}$ dla każdego $g \in G$ oraz

$$\pi_g f(x) = f(g^{-1}x)\left(\frac{dg\mu}{d\mu}(x)\right)^{1/p}$$

określa reprezentację izometryczną na $L_p(X,\mu)$. Wówczas

$$\pi_g f(x) = f(g^{-1}x)\left(\frac{dg\mu}{d\mu}(x)\right)^{1/q},$$

dla $q \neq p$ określa $\varepsilon$-deformację reprezentacji $\pi$, gdzie $\varepsilon$ zależy od $q$.

Dowód Twierdzenia 15 inspirowany jest metodami wykorzystywanymi w [H1]. Wykorzystując równoważność znikania kohomologii z faktem, że dualny operator do korózniczki jest injekcją o domkniętym obrazie, znikanie kohomologii dla deformacji otrzymujemy poprzez deformowanie tego drugiego warunku.

### 1.2.2 Ograniczone kohomologie, dokładność grup i średniowalność działań

Niech $G$ działa na zwartej przestrzeni $X$ przez homeomorfizmy. Dla funkcji $\xi : G \to C(X)$, $g \mapsto \xi_g \in C(X)$, określamy działanie

$$(\gamma\cdot\xi)_g(x) = \xi_{\gamma^{-1}g}(g^{-1}(x),$$

gdzie $g,\gamma \in G$. Definiujemy również normę

$$\|\xi\| = \sup_{x\in X}\sum_{g\in G}|\xi_g(x)|.$$

Pojęcie działania średniowalnego jest uogólnieniem definicji średniowalności grupy.

**Definicja 16.** *Niech $G$ będzie grupą działającą na zwartej przestrzeni topologicznej $X$ poprzez homeomorfizmy. Działanie $G$ na $X$ jest średniowalne jeśli dla każdych $\varepsilon, R > 0$ istnieje funkcja $\xi : G \to C(X)$ o skończonym nośniku spełniająca następujące warunki:*

1. $\xi_g \geq 0$ *w* $C(X)$,
2. $\sum_{g\in G}\xi_g = 1_X$,
3. $\|\xi - \gamma\cdot\xi\| \leq \varepsilon$ *gdy* $|\gamma| \leq R$.

Istnieje wiele przykładów tego typu działań.

1. Grupa $G$ jest średniowalna (posiada średnią Banacha) wtedy i tylko wtedy gdy jej działanie na punkcie jest średniowalne.
2. Niech $G$ będzie grupą hiperboliczną w sensie Gromova. Wówczas działanie $G$ na brzegu Gromova $\partial G$ jest średniowalne, [1] oraz [2, Appendix].

3. Niech $G$ będzie mapping class grupą powierzchni $M$. Wówczas $G$ działa w sposób średniowalny na przestrzeni zupełnych mierzalnych laminacji $M$ [21]. $G$ działa również w sposób średniowalny na swoim uzwarceniu Čecha-Stone'a [26].

4. Działanie $G$ na jej uzwarceniu Čecha-Stone'a $\beta G$ jest średniowalne wtedy i tylko wtedy gdy ma ona własność $A$ (równoważnie, gdy $G$ jest grupą dokładną) [15].

Pojęcie średniowalności jest obecnie jednym z fundamentalnych pojęć w geometrycznej i analitycznej teorii grup, mającym zastosowania w nieprzemiennej geometrii, teorii indeksu czy analizie harmonicznej. Przypomnijmy, że ograniczone kohomologie to wariant zwykłych kohomologii grupy, zdefiniowany poprzez rozważanie jedynie tych kocykli, które są przekształceniami z $G$ w normowo ograniczone podzbiory modułu Banacha. Klasyczne twierdzenie B. E. Johnsona [23] charakteryzuje grupy średniowalne w terminach znikania ograniczonych kohomologii. Przypomnijmy, że $G$-moduł Banachowski $E$ jest ograniczony, gdy reprezentacja$\pi$ zadająca strukturę modułu jest jednostajnie ograniczona. Przestrzeń Banacha $E^*$ jest wówczas w naturalny sposób wyposażona w reprezentację $\overline{\pi}$, zdefiniowaną wzorem $\overline{\pi}_g = \pi^*_{g^{-1}}$, indukującą strukturę ograniczonego $G$-modułu na $E^*$.

**Twierdzenie 17** ([23])**.** *Niech G będzie grupą dyskretną. Następujące warunki są równoważne:*

1. *$G$ jest średniowalna,*

2. *$H^1_b(G,E^*) = 0$ dla każdego ograniczonego modułu Banacha $E$.*

(Zwyczajowo i w zgodzie z istniejącą literaturą, w przypadku kohomologii ograniczonych o współczynnikach w $G$-module ograniczonym $(E,\pi)$ przyjmujemy oznaczenie $H^n_b(G,E)$ zamiast $H^n_b(G,\pi)$). N. Higson postawił pytanie czy podobna charakteryzacja zachodzi dla grup z własnością $A$. Pytanie to było motywacją do cyklu prac [H4, H5, H6, H7]. Wynikiem tych prac jest wyczerpująca, twierdząca odpowiedź na to pytanie.

Pierwszym rezultatem w tym kierunku był wynik wspólny z R. G. Douglasem. Aby go sformułować przypominjmy, że $G$-moduł Banacha nazywamy ograniczonym, gdy reprezentacja $\pi$ zadająca strukturę modułu jest jednostajnie ograniczona. Określmy przestrzeń Banacha $\mathscr{E}$ jako $G$-moduł Hopfa jeśli jest podprzestrzenią $\mathscr{L}(X,\ell_\infty(G))$, gdzie $X$ jest ograniczonym $G$-modułem, oraz jest jednocześnie $G$-modułem i $\ell_\infty(G)$ modułem ze względu na działanie

$$g(T(x)) = gT(g^{-1}x), \qquad \text{dla } g \in G, T \in \mathscr{L}(X,\ell_\infty(G)),$$

$$(aT)(x) = a(T(x)), \qquad \text{dla } a \in \ell_\infty(G).$$

$\mathscr{L}(X,Y)$ oznacza tutaj przestrzeń ciągłych operatorów liniowych $T: X \to Y$, która, wyposażona w odpowiednie działania indukowane z $X$ i $Y$ staje się również $G$-modułem Banacha.

**Twierdzenie 18** ([H4])**.** *Niech G będzie grupą z własnością A. Wówczas $H^1_b(G,\mathscr{E}) = 0$ dla każdego G-modułu Hopfa $\mathscr{E}$.*

Głównym elementem dowodu jest charakteryzacja grup z własnością A przy pomocy istnienia pewnego przekształcenia

$$M : \mathscr{L}(\ell_u(G),\ell_\infty(G)) \to \ell_\infty(G),$$

gdzie $\ell_u(G)$ jest pewną algebrą Banacha, będącą uogólnieniem algebry $\ell_1(G)$, a $M$ spełnia dodatkowo pewne techniczne warunki. Warunki te gwarantują, że $M$ możemy interpretować jako $G$-niezmienniczy operator uśredniania, leżący w odpowiednio dobranym module Banacha. Operator taki nazywamy niezmienniczą wartością oczekiwaną.

Jednym z modułów wprowadzonych w pracy [H4] dla $X = \beta G$, a później uogólnionym na szerszą klasę działań w [H6] i istotnie wykorzystywanym w pracach [H5, H6, H7], zdefiniowany jest następująco.

$$W_0(G,X) = \left\{ \xi : G \to C(X) : \sum_{g\in G} \xi_g = c_\xi 1_X \right\},$$

z normą

$$\|\xi\| = \sup_{x\in X} \sum_{g\in G} |\xi_g(x)|$$

i działaniem grupy $G$ zadanym przez

$$g \cdot \xi_h(x) = \xi_{g^{-1}h}(g^{-1}x),$$

jak wcześniej. W przypadku gdy $X$ jest punktem otrzymujemy $W_0(G,X) = \ell_1(G)$, tak więc $W_0(G,X)$ jest przestrzenią w naturalny sposób uogólniającą na przypadek działań grup klasyczny obiekt jakim jest przestrzeń Banacha $\ell_1(G)$. W naturalny sposób również otrzymujemy analog przestrzeni $\ell_\infty(G)$ zdefiniowany jako $W_0(G,X)^*$. Kluczowym elementem technicznym jest ograniczenie się do funkcji $\xi : G \to C(X)$ takich, które sumują się do funkcji stałej. Ten istotny zabieg pozwala wybrać na mniejszą ale niesłychanie użyteczną podprzestrzeń wszystkich sumowalnych funkcji $G \to C(X)$. Z założenia, niezmiennicza wartość oczekiwana jest elementem w przestrzeni dualnej właśnie tej przestrzeni.

**Twierdzenie 19** ([H4])**.** *Skończenie generowana grupa $G$ spełnia własność A wtedy i tylko wtedy gdy $G$ posiada niezmienniczą wartość oczekiwaną.*

Mając dany operator uśredniania oraz kocykl ograniczony o wartościach w $G$-module Hopfa $\mathscr{E}$ w ograniczonych kohomologiach $H^1_b(G,\mathscr{E})$, średnia tego kocyklu rozwiązuje go jako kobrzeg, dając znikanie $H^1_b(G,\mathscr{E})$.

Co więcej można również wywnioskować znikanie kohomologii dla $H^i_b(G,\mathscr{E})$ dla $i \geq 2$. Istotnie, dla dowolnego $G$-modułu ograniczonego $\mathscr{E}$ wprowadźmy moduł

$$M\mathscr{E} = \ell_\infty(G,\mathscr{E})/\mathscr{E},$$

gdzie działanie $G$ oznaczone $\bullet$ jest zdefinowane wzorem $g \bullet f(x) = g \cdot f(g^{-1}x)$, dla $f : G \to \mathscr{E}$, a $\mathscr{E}$ zanurzone jest $\ell_\infty(G,\mathscr{E})$ jako funkcje stałe. Wówczas moduł $M\mathscr{E}$ jest modułem przesunięcia wymiaru w ograniczonych kohomologiach,

$$H^k_b(G,\mathscr{E}) = H^{k-1}_b(G, M\mathscr{E}).$$

Jednakże, gdy $\mathscr{E}$ jest $G$-modułem Hopfa to $M\mathscr{E}$ również jest $G$-modułem Hopfa. Tak więc znikanie pierwszych kohomologii ograniczonych o współczynnikach w modułach Hopfa implikuje ich znikanie w wyższych wymiarach.

W kolejnej pracy [H5] idee z pracy [H5] zostały rozwinięte i uogólnione. Obiektem badań w tym artykule były słabsze wersje niezmiennniczje wartości oczekiwanej, wprowadzonych w pracy [H4]. Słabą wartością oczekiwaną (dla ograniczonego $G$-modułu $X$) nazywamy tutaj przekształcenie

$$T : \ell_\infty(G, \ell_\infty(G,X^*)) \to \ell_\infty(G,X^*),$$

spełniające pewne dodatkowe techniczne warunki ciągłości oraz niezmienniczości ze względu na działania $G$. Głównym wynikiem pracy [H5] jest następujące

**Twierdzenie 20** ([H5]). *Niech $G$ będzie skończenie generowaną grupą. Wówczas dla dowolnego ograniczonego $G$-modułu $X$ istnieje słaba niezmiennicza wartość oczekiwana.*

Fakt ten ma kilka ciekawych zastosowań. W zaskakujący sposób jednak okazuje się, że nawet ta słabsza wersja jest wystarczająca aby wyprowadzić przy jej pomocy znikanie ograniczonych kohomologii o współczynnikach w wielu $G$-modułach Hopfa. Tym razem metoda dowodu jest technicznie inna niż w poprzednim przypadku: przy pomocy słabej niezmienniczej wartości oczekiwanej pokazujemy, że $G$-moduły Hopfa są relatywnie injektywne. Relatywna injektywność jest wersją klasycznego pojęcia injektywności modułów, znanego z algebry homologicznej, ale uwzględniającym ciągłość normową przekształcen pomiędzy modułami.

**Twierdzenie 21** ([H5]). *Niech $G$ będzie skończenie generowaną grupą. Każdy $G$-moduł Hopfa, słabo-* domknięty, jako podprzestrzeń $\ell_\infty(G,X^*)$, jest relatywnie injektywny.*

Natychmiastowym wnioskiem jest znikanie ograniczonych kohomologii $H_b^n(G,\mathscr{E})$, $n \geq 1$, w dowolnym module Hopfa spełaniającym założenia powyższego twierdzenia.

Również w [H5] udowodniony został fakt, że słaba niezmiennicza wartość oczekiwana ma zastosowanie w postaci twierdzenia o punkcie stałym dla pewnych działań grup na przestrzeniach Banacha postaci $\ell_\infty(G,E)$.

**Twierdzenie 22** ([H5]). *Niech $G$ będzie skończenie generowaną grupą, $X$ przestrzenią Banacha a $V \subseteq X^*$ słabo-* gęstą podprzestrzenią. Wówczas każda afiniczne działanie $G$ na ograniczonym, $\ell_\infty(G)$-wypukłym, $V$-ultra-słabo zwartym podzbiorze $K \subseteq \ell_\infty(G)$, posiada punkt stały.*

Powyższe twierdzenie jest uogólnieniem klasycznego twierdzenia Day'a o istnieniu punktu stałego dla afinicznych działań grup średniowalnych na ograniczonych wypukłych podzbiorach przestrzeni Banacha. Naturalnym i ciekawym pytaniem jest czy używając wyników [H4, H5] można zdefiniować pojęcie dokładności algebr Banacha, podobnie jak Johnson zdefniował pojęcie średniowalności algebra Banacha, w taki sposób aby w przypadku $C^*$-algebr było ono równoważne z dokładnością w sensie Kirchberga i Wassermanna.

Te wyniki były jedną z podstaw do udowodnienia pełnej charakteryzacji średniowalności działań poprzez znikanie ograniczonych kohomologii w pracy [H6]. Aby ją sformułować zdefiniujmy pewną klasę modułów. Niech $G$ działa homeomorficznie na zwartej przestrzeni topologicznej $X$. $\mathscr{E}$ będzie modułem nad $C(X)$ oraz jednocześnie $G$-modułem. $\mathscr{E}$ będziemy nazywać $G$-$C(X)$-modułem, gdy obydwa działania spełniają zależność

$$g(fv) = (g \cdot f)(gv),$$

gdzie $g \in G$, $f \in C(X)$ oraz $v \in \mathscr{E}$. Innymi słowy, struktury $G$-modułu i $C(X)$-modułu są w pewnym sensie ortogonalne, a $\mathscr{E}$ zachowuje się podobnie jak wiązka nad przestrzenią $X$. Dodatkowo definiujemy następujące pojęcia wprowadzone w [H6].

1. Wektory $v, w \in \mathscr{E}$ mają rozłączny nośnik jeśli istnieją funkcje $a, b \in C(X)$ o rozłącznych nośnikach takie, że $av = v$ oraz $bw = w$;

2. $G$-$C(X)$-moduł jest $\mathscr{E}$ jest $\ell_1$-geometryczny jeśli dla każdej pary wektorów $v, w \in \mathscr{E}$ o rozłącznych nośnikach mamy

$$\|v + w\| = \|v\| + \|w\|;$$

3. $G$-$C(X)$-moduł jest $\mathscr{E}$ jest $\ell_\infty$-geometryczny jeśli dla każdej pary wektorów $v, w \in \mathscr{E}$ o rozłącznych nośnikach mamy
$$\|v+w\| = \max\{\|v\|, \|w\|\}.$$

Jeśli $\mathscr{E}$ jest $\ell_1$-geometryczny (odpowiednio, $\ell_\infty$-geometryczny), to $\mathscr{E}^*$ jest $\ell_\infty(G)$-geometryczny (odpowiednio, $\ell_1$-geometryczny). Przykładem $\ell_\infty$-geometrycznego $G$-$C(X)$-modułu jest przestrzeń $C(X,E)$, gdzie $E$ jest przestrzenią Banacha a $X$ jest przestrzenią topologiczną z działaniem grupy $G$.

**Twierdzenie 23** ([H6])**.** *Niech $G$ będzie grupą dyskretną. Następujące warunki są równoważne:*

1. *działanie $G$ na $X$ jest średniowalne;*
2. *$H^n_b(G, \mathscr{E}^*) = 0$ dla każdego $\ell_1$-geometrycznego $G$-$C(X)$-modułu $\mathscr{E}$ dla $n = 1$ (równoważnie, dla $n \geq 1$).*

W przypadku gdy $X$ jest punktem powyższe warunki sprowadzają się bezpośrednio do przypadku grupy średniowalnej i klasycznej charakteryzacji B.E. Johnsona średniowalności w terminach znikania ograniczonych kohomologii. W przypadku gdy $X = \beta G$ jest uzwarceniem Čecha-Stone'a grupy $G$ z [15] otrzymujemy charkateryzację dokładności (czyli własności A) grupy $G$ i tym samym odpowiedź na pytanie N.Higsona. Dowód postępuje według podobnej strategii co wcześniej i jest szerokim uogólnieniem dowodu Johnsona. Istotą jest jak wcześniej znalezienie operatora, a w tym przypadku nawet funkcjonału, uśredniającego. Funkcjonał taki nazywamy średnią dla działania $G$ na $X$. W pracy [H6] udowodniono, że jego istnienie jest równoważne średniowalności działania. Przy pomocy takiej średniej możemy znów rozwiązać kocykle, pokazując w ten sposób, że muszą być one kobrzegami.

W kolejnej pracy [H7] podana została z kolei charakteryzacja średniowalności działania grupy $G$ w terminach homologii $G$. Wykorzystując moduł $W_0(G,X)$, poprzez analogię z jednostajnie ograniczonymi homologiami, wprowadzonymi przez Blocka i Weinbergera [6] (patrz również następny rozdział), definiujemy wówczas jednostajnie ograniczone homologie działania $G$ na $X$ jako
$$H^{uf}_*(G \curvearrowright X) = H_*(G, W_0(G,X)^*).$$

Możemy też zdefiniować w naturalny sposób klasę w powyższej grupie homologii, reprezentowaną przez $\sigma : W_0(G,X) \to \mathbb{R}$,
$$\sigma(\xi) = \sum_{g \in G} \xi_g.$$

Klasę $[G \curvearrowright X] = [\sigma] \in H^{uf}_0(G \curvearrowright X)$ nazywamy klasą podstawową działania $G$ na $X$. W tym przypadku w pracy [H7] udowodniona została następująca charakteryzacja.

**Twierdzenie 24** ([H7])**.** *Niech $G$ będzie skończenie generowaną grupą działającą na zwartej przestrzeni $X$ przez homeomorfizmy. Działanie to jest średniowalne wtedy i tylko wtedy gdy $[G \curvearrowright X] \neq 0$ w $H^{uf}_0(G \curvearrowright X)$.*

W przypadku gdy $X$ jest punktem charakteryzacja ta obcina się wprost do twierdzenia Blocka i Weinbergera [6], że $G$ jest średniowalna wtedy i tylko wtedy gdy jej jednostajnie ograniczone homologie $H^{uf}_0(G)$ są niezerowe (patrz również następny rozdział). Co więcej, w pracy [H7] pokazane jest również, że jednostajnie ograniczone homologie działania zazwyczaj nie znikają nawet gdy znika klasa podstawowa.

### 1.2.3 Jednostajnie ograniczone homologie i średniowalność

Niech $S$ oznacza ustalony skończony zbiór generatorów grupy $G$. Dla podbzioru $A \subseteq G$ oznaczmy przez $\partial A$ brzeg zbioru $A$,

$$\partial A = \left\{ g \in G \setminus A \ : \ a^{-1} g \in S \text{ dla pewnego } a \in A \right\}.$$

Przypomnijmy, że jedną z definicji średniowalności grupy $G$ jest istnienie ciągu $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ skończonych podzbiórów $G$ spełniających

$$\frac{\#\partial F_n}{\#F_n} \to 0.$$

Równoważnie, $G$ nie jest nieśredniowalna gdy istnieje stała $C > 0$ taka, że

$$\frac{\#\partial F}{\#F} \geq C$$

dla każdego skończonego podzbioru $F \subseteq G$. To ostatnie sformułowanie znane jest jako nierówność izoperymetryczna i jest podstawą charakteryzacji średniowalności w terminach homologicznych.

Wprowadzimy teraz kontrolowane zgrubne homologie. Niech $X$ będzie przestrzenią metryczną o ograniczonej geometrii. Ustalmy punkt $e \in X$. Dla $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ i $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in X^n$ definiujemy odległość jako

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = \max_i d(x_i, y_i).$$

Przez długość $\overline{x}$ rozumiemy liczbę $|\overline{x}| = d(\overline{x}, \overline{e})$, where $\overline{e} = (e, \ldots, e, e)$.

Niech $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ będzie niemalejącą funkcja, spełniającą $f(0) = 1$ oraz taka, że

- dla każdego $K > 0$ istnieje $L > 0$ takie, że $f(t + K) \leq L f(t)$ dla każdego $t > 0$;
- dla każdego $K > 0$ istnieje $L > 0$ takie, że $f(Kt) \leq L f(t)$ dla każdego $t > 0$.

Obydwa warunki nie są zbyt restrykcyjne i są spełnione przez wiele funkcji podliniowych.

Poprzez $n$-łańcuch rozumiemy formalną sumę $c = \sum_{\overline{x} \in X^{n+1}} c_{\overline{x}} \overline{x}$, gdzie współczynniki spełniają $c_{\overline{x}} \in \mathbb{R}$. W szczególności łańcuch musi spełniać $c_{\overline{x}} = (-1)^{N(\sigma)} c_{\sigma \overline{x}}$, gdzie $\sigma$ jest transpozycją $\overline{x}$ a $N(\sigma)$ jest liczbą transpozycji niezbędną do otrzymania $\sigma(\overline{x})$ z $\overline{x}$.

Przez propagację łańcucha $c$ rozumiemy najmniejszą liczbę $R \geq 0$ taką, że $c_{\overline{x}} = 0$ jeśli $d(\overline{x}, \Delta_{n+1}) \geq R$ dla $\overline{x} \in X^{n+1}$, gdzie $\Delta_{n+1}$ oznacza przekątną $\Delta_{n+1} = \{(x, x, \ldots, x) \ : \ x \in X\}$.

Poprzez przestrzeń zgrubnych łańcuchów kontrolowanych przez $f$ rozumiemy

$$C_n^f(X) = \left\{ c = \sum_{\overline{x} \in X^{n+1}} c_{\overline{x}} \overline{x} \ : \ \mathscr{P}(c) < \infty \text{ oraz } |c_{\overline{x}}| \leq K_c f(|\overline{x}|) \right\},$$

gdzie $K_c$ jest stała zależną od $c$. Ze standardową symplicjalną różniczką $(C_n^f(X), \partial)$ jest kompleksem łańcuchowym. Definiujemy kontrolowane zgrubne homologie jako homologie tego kompleksu i oznaczamy $H_n^f(X)$.

Gdy $f$ jest funkcją stała równą 1 powyższa definicja była wprowadzona przez Blocka i Weinbergera [6] jako jednostajnie skończone homologie $H_*^{uf}(X)$. Zbliżona konstrukcja kohomologiczna była wprowadzona też wcześniej przez Jauszkiewicza [22]. W przypadku gdy $X = G$ homologie $H_*^{uf}(G)$ spełniają relację

$$H_*^{uf}(G) \equiv H_*(G, \ell_\infty(G)),$$

a więc są izomorficzne z homologiami grupy $G$ o współczynnikach w $G$-module $\ell_\infty(G)$, gdzie struktura modułu zadana jest przez działanie grupy $G$ na sobie:

$$g \cdot f(x) = f(g^{-1}x),$$

dla $g, x \in G$, $f \in \ell_\infty(G)$. Dla ogólniejszych $f$ definicja $H^f_*(X)$ została wprowadzona w [H3]. W przypadku gdy $f(t) = t$ oznaczamy $H^f(X) = H^{\mathrm{lin}}(X)$.

W poniższym refereacie skupimy się na przypadku grupy skończenie generowanej $G$. Wówczas definiujemy $H^f_n(G)$ jako homologie przestrzeni metrycznej $(G, d_S)$, gdzie $d_S$ jest metryką długości słowa względem pewnego ustalonego skończonego zbioru generatorów $S$.

W grupie $H^f_0(X)$ wyróżniona jest klasa, zwana klasą fundamentalną, zdefiniowana jako

$$[X] = \left[\sum_{x \in X} x\right].$$

Pierwszym z głównych wyników [H3] jest następujące

**Twierdzenie 25.** *Niech $G$ będzie skończenie generowaną grupą. Wówczas $[G] = 0$ w liniowo kontrolowanych homologiach $H^{\mathrm{lin}}(G)$.*

Dowód jest oparty na skonstruowaniu konkretnego 1-cyklu $\psi$ w $C^{\mathrm{lin}}(G)$, dla którego $1_G = \partial\psi$. Cykl $\psi$ jest skonstruowany geometrycznie, wzdłuż bi-geodezyjnych istniejących w grupie skończenie generowanej. Powyższe twierdzenie pokazuje, że homologiczna wersja klasycznego problemu Burnside'a posiada pozytywne rozwiązanie. Klasyczny problem Burnside'a to pytanie czy dla skończenie generowanej grupy $G$ fakt, że $G$ jest nieskończona implikuje istnienie elementu nieskończonego rzędu. W przypadku gdy taki element istnieje, $G$ jest sumą rozłączną warstw grupy $\mathbb{Z}$ i wówczas $\psi$ można skonstruować poprzez odpowiednie skopiowanie 1-cyklu

$$\phi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n[n, n+1],$$

który spełnia $\phi \in C^{\mathrm{lin}}(\mathbb{Z})$ oraz $\partial\phi = 1_{\mathbb{Z}}$, na każdą z warstw $\mathbb{Z}$ w $G$. Powyższe twierdzenie pokazuje, że podobny zabieg możemy wykonać nawet gdy podgrupa $\mathbb{Z}$ nie istnieje w $G$, zastępując jej warstwy przez bi-geodezyjne.

Ta analogia jest następstwem podobnej interpretacji wyniku charakteryzacji nieśredniowalności udowodnionej w [6] w terminach znikania klasy podstawowej w jednostajnie ograniczonych homologiach. Ta charakteryzacja daje pozytywną odpowiedź na homologiczną wersję klasycznej hipotezy von Neumanna, mówiącej, że nieśredniowalna grupa posiada podgrupę wolną.

Zarówno problem Burnside'a jak i hipoteza von Neumanna w klasycznym sensie mają odpowiedzi negatywne. Nieskończone skoćzenie generowane grupy torsyjne zostały skonstruowane przez Goloda i Shafarevicha a kolejne przykłady przez Adiana, Novikova, Grigorchuka i innych. Nieśredniowalne grupy trosyjne zostały skonstruowane przez Olshanskiego.

Następne twierdzenie charakteryzuje znikanie klasy podstawowej w homologiach $H^f_*(X)$ w terminach nierówności izoperymetrycznych.

**Twierdzenie 26.** *Niech $X$ będzie przestrzenią metryczną o ograniczonej geometrii. Wówczas $[X] = 0$ w $H^f_0(X)$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdego skończonego podzbioru $A \subset X$ spełniona jest nierówność izoperymetryczna*

$$\#A \leq C \sum_{x \in \partial A} f(|x|).$$

Dowód wykorzystuje analityczną strukturę na przestrzeni łańcuchów o wzroście ograniczonym przez $f$. Dualność jest tu wykorzystana w następujący sposób. Znikanie homologii oznacza surjektywność operatora różniczki. Ta surjektywność jest równoważna, poprzez dualność, temu, że koróżniczka, interpretowana jako operator liniowy pomiędzy odpowiednimi przestrzeniami Banacha, jest injekcją o domkniętym obrazie. To z kolei tłumaczy się wprost na nierówność izoperymetryczną.

Powyższe twierdzenie charakteryzuje znikanie klasy podstawowej grupy w terminach nierówności izoperymetrycznych, pokazując, że znikanie klasy podstawowej daje pewną miarę średniowalności $X$. W przypadku gdy $X = G$ jest skończenie generowaną grupą jak wyżej, otrzymujemy spektrum znikania klasy podstawej w $H^f(G)$: od stałej funkcji $f$ dla grup nieśredniowalnych do liniowej funkcji $f$ dla wszystkich grup skończenie generowanych.

W [H3] wskazany jest szereg przykładów skończenie generowanych grup, dla których można oszacować $f$ takie, że klasa podstawowa znika w $H^f(G)$:

1. dla $F \wr \mathbb{Z}^d$, gdzie $F$ jest nietrywialną skończoną grupą, $f(t) = t^d$;
2. dla $F \wr (F \wr \mathbb{Z})$, gdzie $F$ jest nietrywialną skończoną grupą, $f(t) = \ln t$;
3. dla grup policyklicznych jedynie $f(t) = t$.

Powyższe twierdzenia mają też szereg zastosowań, na przykład na rozmaitościach niezwartych konstrukcję formy różniczkowej $\omega$ takiej, że $\partial\omega$ jest formą objętości a $\omega$ ma zadany wzrost. W przypadku grup nieśredniowlanych konstrukcja taka była podana przez D. Sullivana w odpowiedzi na pytanie M. Gromova.

Drugim przykładem zastosowania jest fakt nieznikania klasy podstawowej rozmaitości jest przeszkodą dla spełnienia przez nią tzw. ważonej nierówności Poincaré. Nierówności te są wykorzystywane przez P. Li i J. Wanga [28] jako jeden z warunków niezbędnych do udowodnienia twierdzeń o sztywności dla pewnych rozmaitości spełaniających ograniczenia na krzywiznę.

## 1.3 Inne wyniki i publikacje

### 1.3.1 Wyniki dotyczące silnych własności $(T)$ Banacha i hipotezy Bauma-Connesa

Wspólnie z Cornelią Druţu [13] podaliśmy nową konstrukcję rzutów Kazhdana w grupowych algebrach Banacha związanych z rodzinami reprezentacji izometrycznych grup na jednostajnie wypukłych przestrzeniach Banacha. W szczególności pozwoliło to na porównanie pewnych wersji własności Kazhdana, a dokładniej tzw. własności $(TE)$ wprowadzonej w [3], z tzw. silną Banachowską własnością $(T)$ wprowadzoną przez V. Lafforgue'a. Otrzymaliśmy również wyniki dotyczące charakteryzacji ekspanderów, twierdzenia typu "shrinking target" dla działań grup z własnością $(T)$. Wreszcie, odpowiedzieliśmy na pytanie Willetta i Yu dotyczące istnienia pewnych rzutów w przestrzeniach Hilberta, związanymi z pewnymi przestrzeniami metrycznymi, tzw. skręconymi stożkami nad działaniem grupy. Otrzymane wyniki pozwalają postawić hipotezę, że skręcone stożki nad działaniem grupy posiadającym lukę spektralną są nowymi kontrprzykładami na zgrubną hipotezę Bauma-Connesa.

W kolejnej pracach pokazane zostały powiązane wyniki. W [38] udowodniony został fakt, że jeśli grupa kohomologii $H^1(G,\pi)$ o współczynnikach w izometrycznej reprezentacji grupy $G$ na jednostajnie wypukłej przestrzeni Banacha jest przestrzenią Banacha, to z dokładnością do izomorfizmu, jest składnikiem prostym przestrzeni kocykli; tzn. istnieje rozkład na sumę prostą $Z^1(G,\pi) \simeq B^1(G,\pi) \oplus H^1(G,\pi)$, gdzie $Z^1$ i $B^1$ oznacza przestrzeń kocykli i kobrzegów, odpowiednio.

W pracy [39] wspólnej z Damianem Sawickim udowodnione zostało twierdzenie, że skręcone stożki nad działaniami grup z luką spektralną nie zanurzają się w niektóre przestrzenie Banacha, w szczególności wszystkie przestrzenie $L_p(\mu)$, $1 < p < \infty$.

### 1.3.2 Wybrane pozostałe wyniki

W pracy [12] wpólnej w Francescą Dianą, badane było zachowanie jednostajnie ograniczonych homologii produktów skończonej liczby drzew. Udowodniony został fakt, że homologie takie są skoncentrowane w najwyższym wymiarze i ta grupa homologii jest nieskończenie wymiarowa.

W pracy wspólnej z Kate Juschenko [24] podana została nowa charakteryzacja grup z własnością A. Pomimo, że własność ta jest własnością metryczną wyniki [24] charakteryzują własność A dla grupy w terminach istnienia ciągu jednostajnie ograniczonych reprezentacji zbiegających do reprezentacji trywialnej.

W pracy [29] wspólnie z Michałem Marcinkowskim skonstruowane zostały przykłady kafelków aperiodycznych dla niektórych grup średniowalnych. Konstrukcja ta wykorzystuje metody homologiczne, a mianowicie znikanie pewnego cyklu w homologiach lokalnie skończonych o współczynnikach w ciele $\mathbb{Z}_p$.

W pracy [19], napisanej wspólnie z Rostislavem I. Grigorchukiem, została udowodniona nierówność wiążąca trzy wartości numeryczne skończonego grafu: średnicę, najmniejszą dodatnią wartość własną p-Laplasjanu oraz dystorsję względem przestrzeni $L_p$. Nierówność ta została zastosowana do oszacowania dystorsji konkretnych grafów Schreiera wywodzących się od grup działających na drzewach.

W pracy [35] został wprowadzony uogólniony profil izoperymetryczny średniowalnego działania grupy na zwartej przestrzeni topologicznej. W przypadku grup średniowalnych profil ten był klasycznym profilem w sensie Gromova, Varoupoulosa etc. Pokazana zostały również zależność profilu izoperymetrycznego od typu wymiaru asymptotycznego oraz udowodnione uogólnienie oszacowania dolnego przez wzrost grupy, co w klasycznym przypadku pokazali Coulhon i Saloff-Coste.

W pracy [32], napisanej przed doktoratem, pokazany został fakt, że przestrzeń Hilberta zanurza się zgrubnie w dowolną przestrzeń $L_p$, dla każdego $p \in [1,\infty)$. W szczególności, w połączeniu z [34] dało to negatywną odpowiedź na hipotezę postawioną przez A.N. Dranishnikova, że własność A jest równoważna zgrubnej zanurzalności w przestrzeń Banacha $\ell_1$.

## 1.4 Wyniki uzyskane w doktoracie

Praca doktorska zatytułowany "Property A as Metric Amenability and its Applications to Geometry" napisana został pod kierownictwem GuoliangaYu na Vanderbilt University i obroniona w 2008 roku. Wyniki w niej przedstawione zostały uhonorowane nagrodą naukową *Bjarni Jonsson Prize for Research* przez wydział matematyki Vanderbilt University. Praca dotyczyła własności A, wprowadzonej przez G. Yu. Praca zawierała trzy głowne wyniki.

Pierwszym była konstrukcja pierwszego przykładu przestrzeni metrycznej nie posiadającej własności A ale zanurzającej się zgrubnie w przestrzeń Hilberta. Była to odpowiedź na otwarte pytanie w geometrii dużej skali. Wynik został opublikowany w [34].

Drugim wynikiem była konstrukcja pierwszych przykładów grup skończenie generowanych o skończonym wymiarze asymptotycznym i nieskończonym wymiarze Assouda-Nagaty. Była to odpowiedź na otwarte pytanie postawione przez Johna Roe. Wynik został opublikowany w [33].

Trzecim wynikiem był fakt, że hipoteza Gromova "zero-in-the spectrum" jest spełniona dla nakryć Galois rozmaitości zamkniętej $M$ stowarzyszonych ze średniowalnymi podgrupami normalnymi grupy podstawowej $\pi_1(M)$, przy założeniu, że $\pi_1(M)$ posiada własność A. Wynik został opublikowany w [36].

### 1.5 Artykuły przeglądowe

Książka "Large Scale Geometry" [41], napisana wspólnie z Guoliangiem Yu, jest wprowadzeniem do tematyki geometrii dużej skali.

Artykuł [40] jest krótkim opisem własności A dla grup i przestrzeni metrycznych.

Artykuł [37] jest wprowadzeniem do zagadanień sztywności działań grup na przestrzeniach Banacha, znikania kohomologii i własności $(T)$ w przestrzeniach Banacha.

## 2 Życiorys

### 2.1 Wyróżnienia i nagrody

- ERC Starting Grant 2015
- Wykład plenarny, 6 Forum Matematyków Polskich 09/2015
- Nagroda 2 stopnia Rektora Uniwersytetu Warszawskiego za osiągnięcia naukowe, 2013
- Stypendium Ministra dla Wybitnych Naukowców, MNiSW 2012-2015
- Bjarni Jónsson Prize for Research, Vanderbilt University, 2008
- Summer Research Award, Vanderbilt University, dwukrotnie: 2005, 2007
- nagroda Marcinkiewicza 3 stopnia za pracę magisterską, Polskie Towarzystwo Matematyczne 2003

### 2.2 Granty

- ERC Starting Grant 2015, kierownik (PI), przyznany przez European Research Council, grant będzie realizowany w latach 2016-2021
- Narodowe Centrum Nauki, Sonata Bis 3, 2014-2019, kierownik
- Clay Mathematics Institute, Enhancement Program, finansowanie konferencji w MSRI 2016 (współorganizatorzy: G. Arzhantseva, C. Druţu and G. A. Niblo)
- Fundacja na rzecz Nauki Polskiej, grant Homing Plus, 2012-2014, kierownik
- National Science Foundation grant DMS–1105664, Analysis/Topology, 2011-12, kierownik (Principal Investigator)
- National Science Foundation grant DMS–0900874, Analysis, 2009–2012, kierownik (Principal Investigator) (co-PI: Talia Fernós)
- Stypendium Konferencyjne, Fundacja na rzecz Nauki Polskiej, 2007

## 2.3 Zaproszone wykłady

Około 100 zaproszonych wykładów na szkołach, konferencjach i seminariach w USA, Wielkiej Brytanii, Niemczech, Francji, Japonii, Chinach, Szwajcarii oraz Polsce.

### 2.3.1 Cykle wykładów

- *Rigidity of groups and higher index theory*
  5 wykładów, *Rigidity School*, University of Tokyo, 11/2015
- *Property* ($T$) *and large scale geometry*
  4 wykłady, *Cohomology and Large Scale Geometry* Summer School, Universität Regensburg, 07/2015
- *Deformations, cohomology and fixed point properties*
  2 wykłady, *Metric Geometry and Analysis*, Kyoto University, Japan, 12/2013
- *Large Scale Geometry*
  15 wykładów, Uniwersytet Adama Mickiewicza, Poznań, Fall 2013
- Amenable actions and bounded cohomology
  2 wykłady, $G^3$ *Conference*, South Padre Island, Texas, 03/2013
- *Large Scale Geometry*
  10 wykładów, Waseda University, Tokyo, 09/2012
- *Coarse Homology Theories*
  3 wykłady, *Workshop on Geometric and Algebraic Topology*, Centrum Banacha, Warszawa, 07/2012
- Property A
  2 wykłady, Semester on *Limits of Graphs in Group Theory and Computer Science*, Centre Interfacultaire Bernoulli at EPFL, Lausanne, Szwajcaria, 06/2007

### 2.3.2 Wystąpienia konferencyjne i seminaryjne

- Geometry seminar, Indiana University, Bloomington, 11/2015
- Zaproszony wykład plenarny, 6 Forum Matematyków Polskich, 09/2015
- *Dubrovnik VIII - Geometric Topology, Geometric Group Theory & Dynamical Systems*, Chorwacja, 06/2015
- Colloquium, Université de Neuchâtel, 05/2015
- Noncommutative Geometry Seminar, Fudan University, Shanghai, 05/2015
- Research Center for Operator Algebras, East China Normal University, Shanghai, 05/2015
- Geometry Seminar, Uniwersytet Wrocławski, 02/2015
- *Geometric Topology*, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, 01/2015

- Groups, Dynamics and Related Topics Seminar, Technion - Israel Institute of Technology, Haifa, 11/2014
- *Quantum Groups, Operators and Non-commutative Probability meeting*, Lancaster University, 09/2014
- *Groups and Topology 2014, DMV-PTM Meeting*, Będlewo/Poznań, 09/2014
- Topology Seminar, University of Oxford, 06/2014
- Geometry and Analysis on Groups seminar, Universität Wien, 05/2014
- Noncommutative Geometry Seminar, Fudan University, Shanghai, 04/2014
- Research Center for Operator Algebras, East China Normal University, Shanghai, 04/2014
- Séminaire Analyse et Géométrie, Université Denis Diderot - Paris 7, 02/2014
- *Groups Acting on Rooted Trees*, Insitute Henri Poincaré, Paris, 02/2014
- *Metric Geometry, Geometric Topology and Groups*, BIRS, Banff, 08/2013
- *Eilenberg Centenary Conference*, Universytet Warszawski, 07/2013
- *International Conference on Operator Theory and Operator Algebras in Honor of the 75th Birthday of Ron Douglas*, Fudan University, Shanghai, 07/2013
- Groups, Dynamics and Related Topics Seminar, Technion - Israel Institute of Technology, Haifa, 06/2013
- Graduiertenkolleg-Kolloquium, Universität Regensburg, 06/2013
- Mini-konferecja związana w wykładem im. Jankowskiego, Uniwersytet Gdański, 05/2013
- Oberseminar Topologie/Geometrie, Universität Göttingen, 05/2013
- Oberseminar Topologie, Universität Münster, 05/2013
- Operator Algebras seminar, Department of Physics, Uniwersytet Warszawski, 11/2012
- *General and geometric topology today and their problems*, RIMS, Kyoto, 09/2012
- Differential Topology Seminar, Kyoto University, 09/2012
- Colloquium, Waseda University, Tokyo, 09/2012
- Topology Seminar, Tokyo Institute of Technology, 09/2012
- Topology Seminar, University of Tokyo, 09/2012
- *Group actions and applications in geometry, topology and analysis*, Kunming University of Science and Technology, Kunming, China, 07/2012

- *Geometric Topology: Satellite Thematic Session*, 6th European Congress of Mathematics, Kraków, 07/2012
- *Coarse Geometry of Infinite Groups*, Université Lille 1, Lille, France, 06/2012
- *Young Researchers Colloquium*, IMPAN Warszawa, 02/2012
- *Young Geometric Group Theory Meeting*, Będlewo, Poland 01/2012
- Research Seminar, MSRI, Berkeley, 10/2011
- Postdoc Seminar, MSRI, Berkeley, 09/2011
- *Dubrovnik Topology Conference*, Dubrovnik, Croatia, 06/2011
- *Geometrical methods in high dimensional topology*, The Ohio State University, 05/2011
- *Index theory and Hopf algebras – Noncommutative Geometry and Operator Algebras Spring Institute*, Vanderbilt University, 05/2011
- Colloquium, SUNY Buffalo, 03/2011
- Colloquium, Case Western Reserve University, 03/2011
- Presentation, University of Warwick, United Kingdom, 03/2011
- AMS Southeastern Section meeting, Special Session on Geometric Group Theory, Statesboro, GA, 03/2011
- Colloquium, Indiana University – Purdue University Indianapolis, 02/2011
- Colloquium, University of Houston, 01/2011
- MAA – AMS Joint Meetings, Special Session on Geometric Group Theory, New Orleans, LA, 01/2011
- Analysis Seminar, SUNY Buffalo, 11/2010
- *Workshop in Analysis and Probability*, Texas A&M University, 07/2010
- Analysis Seminar, University of Houston, 03/2010
- *44th Spring Topology and Dynamics Conference*, Geometric Group Theory and Geometric Topology session, 03/2010
- Wabash Modern Analysis Seminar (wspólne seminarium organizowane przez UIUC, IU, Purdue and IUPUI), 11/2009
- *International Workshop and AMS Special Session on Concentration, Functional Inequalites and Isoperimetry*, Boca Raton, 10/2009
- *Conference on Algebraic Topology*, Uniwersytet Warszawski, 07/2009

- *Affine Isometric Actions of Discrete Groups*, ETHZ Centro Stefano Franscini, Ascona, Switzerland, 06/2009
- Noncommutative Geometry Seminar, Vanderbilt University, 04/2009
- *Workshop in Analysis and Probability*, Texas A&M University, 06/2008
- *Analysis on Groups*, University of Puerto Rico, San Juan, 03/2008
- Geometric Group Theory Seminar, The Ohio State University, 02/2008
- *International Conference on Geometric Topology*, Dubrovnik, 10/2007
- *First Joint Meeting of the AMS and the Polish Mathematical Society*, Special Session on Geometric Group Theory, Warszawa, 07/2007
- *Semester on Amenability*, Erwin Schrödinger Institute, Vienna, 07/2007
- Colloquium, University of North Carolina at Greensboro, 03/2007
- *4th East Coast Operator Algebras Symposium*, Georgia Institute of Technology, 09/2006
- *Workshop in Analysis and Probability*, Texas A&M University, 07/2006
- *Metric Geometry and Geometric Embeddings of Discrete Metric Spaces*, Texas A&M University, 07/2006
- Geometry and Differential Topology Seminar, Uniwersitet Wrocławski, 06/2006
- *Banach Spaces and Their Applications in Analysis*, Miami University, 05/2006
- *40th Spring Topology and Dynamics Conference*, Geometric Topology and Geometric Group Theory Session, 03/2006
- Algebraic Topology Seminar, University of Warsaw, 12/2005, 06/2006
- Geometric Functional Analysis Seminar, Pennsylvania State University, 02/2006
- Young Researchers Colloquium, IMPAN Warszawa, 01/2006
- Geometric Topology Seminar, University of Warsaw, 12/2005, 12/2006, 12/2007
- AMS Sectional Meeting, Special Session on Geometry and Algorithms in Metric Spaces, Johnson City, 10/2005

## 2.4 Organizacja konferencji i spotkań naukowych

### 2.4.1 Organizacja bezpośrednia

- *Amenability, coarse embeddability and fixed point properties*
  Konferencja programowa organizowana na zaproszenie organizatorów semestru Geometric Group Theory, MSRI, Berkeley, CA, USA, 12/2016
  Współorganizatorzy: Goulnara Arzhantseva (Universität Wien), Cornelia Druţu (University of Oxford) and Graham A. Niblo (University of Southampton)

- *Geometric Function Theory meets Geometric Group Theory*
  Centrum Banacha, Warszawa, 10/2015
  Współorganizator: Tomasz Adamowicz (IMPAN)

- *Topology Retreat*, Centrum Banacha, Będlewo, September 30 – October 2, 2015
  Grupa badawcza. Współogranizator: Roman Sauer (Karlsruher Institut für Technologie)

- *Conference on Geometric Group Theory*
  University of Wrocław, 06-07/2014
  Współorganizatorzy: Jan Dymara (UWr), Tomasz Elsner (UWr), Światosław Gal (UWr), Jacek Świątkowski (UWr)

- *Concentration Week on Non-Linear Geometry of Banach Spaces, Differentiability and Geometric Group Theory*, 08/2011, Texas A&M University
  Współorganizatorzy: Florent Baudier (Texas A&M), William B. Johnson (Texas A&M) and Bunyamin Sari (University of North Texas)

- *Geometric Group Theory Workshop*, 06/2011
  Heilbronn Institute for Mathematical Research, University of Bristol
  Współorganizatorzy: Talia Fernós (University of North Carolina Greensboro) and Graham A. Niblo (University of Southampton)

#### 2.4.2 Udział w komitetach naukowych

- Członek komitetu naukowego, *Glances at Manifolds II. Group Actions, K-Theory, C*-algebras and Topology of Manifolds*
  Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 08/2016.

- Członek Rady Programowej Semestrów Simonsa w Centrum Banacha, IMPAN.

### 2.5 Działalność mentorska i promotorska

- Stanowiska typu postdoc:
  - Łukasz Garncarek, 2015-2017
  - Marek Kaluba, 2015-2016

- Udział w przewodach doktorskich:
  1. Jako promotor pomocniczy:
     - Michał Marcinkowski, doktorat z wyróżnieniem obroniony na Universytecie of Wrocławskim obroniony 10/2015.
  2. Jako recenzent prac doktorskich i członek komisji:
     - Francesca Diana, Universität Regensburg, 12/2014
     - Thibault Pillon, Université de Neuchâtel, 05/2015

- Obecna współpraca z doktorantami:
  - Tomasz Odrzygóźdź

  - Karol Strzałkowski
  - Damian Sawicki

- Prace magisterskie:
  - D. Sawicki; obroniona w 2014; nagrodzona przez PTM 3 nagrodą im Marcinkiewicza;
  - B. Szymański, obecny, spodziewana obrona 2016.

- 6 wypromowanych prac licencjackich

- Opieka naukowa nad doktorantami wizytującymi:
  - M. Marcinkowski, Uniwersytet Wrocławski, semestr wiosenny 2012; semestr wiosenny 2014
  - F. Diana, Universität Regensburg, 6 miesięcy, semestr zimowy 2013
  - Ł.Garncarek, Uniwersytet Wrocławski, rok akademicki 2014/2015

### 2.6 Działalność recenzencka

Recenzje wniosków grantowych dla:

- *National Science Foundation*
- *United States – Israel Binational Science Foundation*
- *Austrian Academy of Sciences*
- *French National Research Agency - ANR*
- *Swiss National Science Foundation*
- wewnętrznych grantów uniwersyteckich (USA).

Recenzje książek i artykułów naukowych dla: AMS Book Program, *Algebraic & Geometric Topology*, *Analysis and Geometry in Metric Spaces*, *Archivum Mathematicum*, *Canadian Mathematical Bulletin*, *Fundamenta Mathematicae*, *Geometriae Dedicata*, *Geometry & Topology*, *Glasnik Matematicki*, *Groups, Geometry and Dynamics*, *Houston Journal of Mathematics*, *Illinois Journal of Mathematics*, *Israel Journal of Mathematics*, *Journal of the American Mathematical Society*, *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, *Journal of Functional Analysis*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *Journal of Noncommutative Geometry*, *Journal of Topology and Analysis*, *Mathematische Annalen*, *Mathematische Nachrichten*, *Michigan Mathematical Journal*, Bulletin and Journal of the London Mathematical Society, *New York Journal of Mathematics*, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, *Proceedings of the American Mathematical Society*, *Studia Mathematica*, *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, conference proceedings
25 recenzji dla AMS *Mathematical Reviews*

## Literatura


[1] S. Adams, *Boundary amenability for word hyperbolic groups and an application to smooth dynamics of simple groups*, Topology **33** (1994), no. 4, 765–783.

[2] C. Anantharaman-Delaroche and J. Renault, *Amenable groupoids*, Monographies de L'Enseignement Mathématique [Monographs of L'Enseignement Mathématique], vol. 36, L'Enseignement Mathématique, Geneva, 2000.

[3] U. Bader, A. Furman, T. Gelander, and N. Monod, *Property (T) and rigidity for actions on Banach spaces*, Acta Math. **198** (2007), no. 1, 57–105.

[4] W. Ballmann and J. Świątkowski, *On $L^2$-cohomology and property (T) for automorphism groups of polyhedral cell complexes*, Geom. Funct. Anal. **7** (1997), no. 4, 615–645.

[5] B. Bekka, P. de la Harpe, and A. Valette, *Kazhdan's property (T)*, New Mathematical Monographs, vol. 11, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[6] J. Block and S. Weinberger, *Aperiodic tilings, positive scalar curvature and amenability of spaces*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), no. 4, 907–918.

[7] M. Bourdon and H. Pajot, *Cohomologie $l_p$ et espaces de Besov*, J. Reine Angew. Math. **558** (2003), 85–108.

[8] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[9] D. I. Cartwright, A. M. Mantero, T. Steger, and A. Zappa, *Groups acting simply transitively on the vertices of a building of type* $\tilde{A}_2$. *I*, Geom. Dedicata **47** (1993), no. 2, 143–166.

[10] D. I. Cartwright, A. M. Mantero, T. Steger, and A. Zappa, *Groups acting simply transitively on the vertices of a building of type* $\tilde{A}_2$. *II. The cases $q = 2$ and $q = 3$*, Geom. Dedicata **47** (1993), no. 2, 167–223.

[11] M. Cowling, *Sur les coefficients des représentations unitaires des groupes de Lie simples*, Analyse harmonique sur les groupes de Lie (Sém., Nancy-Strasbourg 1976–1978), II, Lecture Notes in Math., vol. 739, Springer, Berlin, 1979, pp. 132–178 (French).

[12] P. W. Nowak and F. Diana, *Eilenberg swindles and higher large scale homology of products of trees*, preprint (2015).

[13] P. W. Nowak and C. Druţu, *Kazhdan projections, random walks and ergodic theorems*, preprint (2015).

[14] J. Dymara and T. Januszkiewicz, *Cohomology of buildings and their automorphism groups*, Invent. Math. **150** (2002), no. 3, 579–627.

[15] N. Higson and J. Roe, *Amenable group actions and the Novikov conjecture*, J. Reine Angew. Math. **519** (2000), 143–153.

[16] W. Feit and G. Higman, *The nonexistence of certain generalized polygons*, J. Algebra **1** (1964), 114–131.

[17] D. Fisher and G. Margulis, *Almost isometric actions, property (T), and local rigidity*, Invent. Math. **162** (2005), no. 1, 19–80.

[18] J. Friedman, *Some geometric aspects of graphs and their eigenfunctions*, Duke Math. J. **69** (1993), no. 3, 487–525.

[19] R. I. Grigorchuk and P. W. Nowak, *Diameters, distortion, and eigenvalues*, European J. Combin. **33** (2012), no. 7, 1574–1587.

[20] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, pp. 1–295. MR1253544 (95m:20041)

[21] U. Hamenstädt, *Geometry of the mapping class groups. I. Boundary amenability*, Invent. Math. **175** (2009), no. 3, 545–609.

[22] T. Januszkiewicz, *Characteristic invariants of noncompact Riemannian manifolds*, Topology **23** (1984), no. 3, 289–301.

[23] B. E. Johnson, *Cohomology in Banach algebras*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1972. Memoirs of the American Mathematical Society, No. 127.

[24] K. Juschenko and P. W. Nowak, *Uniformly bounded representations and exact groups*, J. Funct. Anal. **266** (2014), no. 3, 1667–1673.

[25] D. A. Każdan, *On the connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups*, Funkcional. Anal. i Priložen. **1** (1967), 71–74 (Russian).

[26] Y. Kida, *The mapping class group from the viewpoint of measure equivalence theory*, Mem. Amer. Math. Soc. **196** (2008), no. 916, viii+190.

[27] M. Kotowski and M. Kotowski, *Random groups and property $(T)$: Żuk's theorem revisited*, J. Lond. Math. Soc. (2) **88** (2013), no. 2, 396–416.

[28] P. Li and J. Wang, *Weighted Poincaré inequality and rigidity of complete manifolds*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **39** (2006), no. 6, 921–982 (English, with English and French summaries).

[29] M. Marcinkowski and P. W. Nowak, *Aperiodic tilings of manifolds of intermediate growth*, Groups Geom. Dyn. **8** (2014), no. 2, 479–483.

[30] M. Mimura, *Fixed point properties and second bounded cohomology of universal lattices on Banach spaces*, J. Reine Angew. Math. **653** (2011), 115–134.

[31] A. Naor and L. Silberman, *Poincaré inequalities, embeddings, and wild groups*, Compos. Math. **147** (2011), no. 5, 1546–1572.

[32] P. W. Nowak, *On coarse embeddability into $l_p$-spaces and a conjecture of Dranishnikov*, Fund. Math. **189** (2006), no. 2, 111–116.

[33] P. W. Nowak, *On exactness and isoperimetric profiles of discrete groups*, J. Funct. Anal. **243** (2007), no. 1, 323–344.

[34] P. W. Nowak, *Coarsely embeddable metric spaces without Property A*, J. Funct. Anal. **252** (2007), no. 1, 126–136.

[35] P. W. Nowak, *Isoperimetry of group actions*, Adv. Math. **219** (2008), no. 1, 1–26.

[36] P. W. Nowak, *Zero-in-the-spectrum conjecture on regular covers of compact manifolds*, Comment. Math. Helv. **84** (2009), no. 1, 213–222.

[37] Piotr W. Nowak, *Group actions on Banach spaces*, Handbook of group actions. Vol. II, Adv. Lect. Math. (ALM), vol. 32, Int. Press, Somerville, MA, 2015, pp. 121–149.

[38] P. W. Nowak, *Group 1-cohomology is complemented*, preprint (2015).

[39] P. W. Nowak and D. Sawicki, *Warped cones and spectral gaps*, preprint (2015).

[40] Piotr Nowak and Guoliang Yu, *What is ... property A?*, Notices Amer. Math. Soc. **55** (2008), no. 4, 474–475.

[41] P. W. Nowak and G. Yu, *Large scale geometry*, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2012.

[42] P. Pansu, *Dimension conforme et sphère à l'infini des variétés à courbure négative*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **14** (1989), no. 2, 177–212, DOI 10.5186ąasfm.1989.1424 (French, with English summary). MR1024425 (90k:53079)

[43] P. Pansu, *Formules de Matsushima, de Garland et propriété (T) pour des groupes agissant sur des espaces symétriques ou des immeubles*, Bull. Soc. Math. France **126** (1998), no. 1, 107–139.

[44] D. Sullivan, *Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds*, Invent. Math. **36** (1976), 225–255.

[45] A. Żuk, *Property (T) and Kazhdan constants for discrete groups*, Geom. Funct. Anal. **13** (2003), no. 3, 643–670.