



Andrzej Żuk  
Profesor  
Université Paris 7  
Institut de Mathématiques  
13, rue Albert Einstein  
75013 Paris  
Francja

zuk@math.jussieu.fr

Paryż, 15 września 2016

### **Recenzja pracy habilitacyjnej Piotra Nowaka**

Wspólnym tematem prac składających się na habilitację Piotra Nowaka jest analiza w języku kohomologii grup różnych uogólnień własności (T) oraz średniowalności grup.

Praca Každana o własności (T) ukazała się w 1967 roku. Oryginalna definicja to izolowanie trywialnej reprezentacji wśród nieprzywiedlnych reprezentacji unitarnych w topologii Fella (stąd nazwa, litera T jako reprezentacja trywialna, izolowana w nawiasie). Spektakularna motywacja tej definicji to dowód, że kraty w grupach Liego są skończenie generowane, co było otwartym problemem od wyników Poincarégo o kratkach w grupach izometrii płaszczyzny hiperbolicznej. Już w maju 1968 miało się odbyć seminarium Bourbakiego na temat pracy Každana (istnieje tekst tego wykładu, choć sam wykład się nie

odbył ze względu na walki na ulicach Paryża). Inne dramatyczne zastosowania własności (T) znalazły się w pracach Margulisa: “normal subgroup theorem” (jak twierdzi Margulis to jego najlepszy wynik, który wykorzystuje również średniowalność), konstrukcje grafów bardzo spójnych “expander graphs”, czy rozwiązanie problemu Ruziewicza. Jednocześnie pojawiły się inne charakteryzacje własności Każdana. Jedną z nich to znikanie pierwszej grupy kohomologii w dowolnej reprezentacji unitarnej. Długo wydawało się, że ten bardzo elegancki opis własności (T) nie może być użyty by pokazać tę własność. Sytuacja zmieniła się w 1996 roku, kiedy opublikowałem prosty warunek dla grup, który pokazuje znikanie pierwszej grupy kohomologii o współczynnikach w reprezentacjach unitarnych, czyli własność (T). Wynik ten pozwolił na znalezienie nowych grup z tą własnością i został omówiony na seminarium Bourbakiego w 1997 roku. Znalazł się też w książce Colin de Verdière z 1998, która opisuje “state of the art” zanim pojawiły się wyniki dotyczące reprezentacji na przestrzeniach Banacha i które związane są z wynikami tej habilitacji.

Średniowalność dla grup została zdefiniowana przez von Neumanna w 1929. W Polsce czasami używa się pojęcia grupy ze średnią Banacha, gdyż bardzo ważne wyniki dotyczące tego pojęcia zostały udowodnione we Lwowie. Był to bardzo aktywny temat do końca lat sześćdziesiątych. Wymienić tu można teorię spacerów losowych, czy dowód Margulisa wspomniany wcześniej. W tym stuleciu udało się skonstruować nowe grupy ze średnią Banacha i tematyka ta znów stała się popularna. W 2006 roku na seminarium Bourbakiego na temat grup automatów przedstawiłem nowe konstrukcje grup średniowalnych, które są kontrprzykładami dla pewnych hipotez. W 1972 Johnson udowodnił, że średniowalność można zdefiniować w języku grup kohomologii. Jest to podstawa do zdefiniowania pewnych uogólnień rozważanych w pracach składających się na omawianą habilitację.

Spośród wielu wyników składających się na tę habilitację, kilka omówię dokładnie.

W pracy z 1996 roku opublikowanej w CRAS udowodniłem warunek spektralny ( $\lambda_1 > 1/2$ ), który implikuje znikanie pierwszej grupy kohomologii o współczynnikach w reprezentacjach unitarnych, czyli własność (T). W pracy “Poincaré inequalities and rigidity for actions on Banach spaces” opublikowanej w JEMS, Piotr Nowak uogólnił moją metodę by uzyskać wyniki dotyczące znikania pierwszej grupy

kohomologii o współczynnikach w klasie przestrzeni Banacha, która zawiera przestrzenie  $L^p$ .

Wiadomo, że własności te są silniejsze niż własność Każdana. Można oczekiwać, że wyniki te znajdą zastosowania, gdyż łatwo podać przykłady grup z własnością (T), które nie spełniają tych uogólnień, więc wyniki te wprowadzają pewną hierarchię.

Spektralny warunek ( $\lambda_1 > 1/2$ ) z mojej pracy pozwolił na znalezienie nowych grup z własnością (T). W pracy z 2003 roku opublikowanej w GAFA pokazałem, że grupy losowe spełniają warunek spektralny, więc w pewnym sensie prawie wszystkie grupy mają własność Każdana. W pracy tej zdefiniowałem model grup losowych, gdzie rozważa się prezentacje z relacjami długości trzy (dowolna skończona prezentacja grupy jest równoważna takiej prezentacji). W modelu tym wprowadza się parametr  $d$  zwany gęstością prezentacji (podobnie jak w modelu Gromowa). Pokazałem, że gdy  $1/3 < d < 1/2$ , to prawie wszystkie prezentacje definiują nieskończone grupy hiperboliczne z własnością (T). Piotr Nowak uzyskuje podobny wynik dotyczący grup kohomologii o współczynnikach w przestrzeniach  $L^p$ , więc pokazuje istnienie grup o własności silniejszej niż własność Każdana.

Stałe Każdana to ilościowa wersja własności (T). Definiuje się je dla danego systemu generatorów (w pracy z Gelanderelem pokazałem, że nie można tych stałych zdefiniować niezależnie od generatorów, co było problemem postawionym przez Lubotzkiego). Znajomość tych stałych daje interesujące dodatkowe informacje przy takich zastosowaniach własności (T) jak expanding graphs. Bardzo długo nie było przykładów gdzie stałe te zostały policzone lub oszacowane. We wspomnianej już pracy z 2003 roku pokazałem, że warunek spektralny ( $\lambda_1 > 1/2$ ) pozwala oszacować stałe Każdana. Piotr Nowak pokazał, że z warunku spektralnego otrzymuje się dokładnie wartość stałych Każdana dla jednego z nielicznych przykładów, gdzie ich wartość została policzona, mianowicie pewnych grup działających na budynkach Titsa typu  $\tilde{A}_2$ . Uważam, że zasługuje to na uznanie, gdyż wydawać by się mogło, że warunek spektralny ( $\lambda_1 > 1/2$ ) bardzo niewiele mówi o wszystkich reprezentacjach unitarnych.

Uogólnienie kohomologicznej charakteryzacji średniowalności pozwala podać kohomologiczną definicję własności A, zdefiniowanej przez Guolianga Yu. Własność ta odgrywa ważną rolę w próbach dowodu hipotezy Nowikowa. W cyklu prac Piotr Nowak uzyskuje kohomologiczną charakteryzację własności A i jej uogólnień.

W pracy z 2000 roku opublikowanej w Topology udowodniłem nierówność izoperymetryczną dla dowolnej grupy w terminach ustalonej funkcji odległości wybranego punktu brzegu skończonego podzbioru grupy. Wyniki uzyskane przez Piotra Nowaka we wspólnej pracy "Controlled coarse homology and isoperimetric inequalities" opublikowanej w Journal of Topology, dają bardzo ciekawe kohomologiczne wersje tej nierówności.

Omówione wyniki wpisują się w niezwykle obecnie dynamiczną dziedzinę kohomologicznych uogólnień własności (T) i średniowalności.

Przedstawione w pracy wyniki nie pozostawiają wątpliwości, że rozprawa Piotra Nowaka spełnia warunki habilitacji.



Andrzej Żuk  
Profesor Paris 7