Recenzja osiągnięcia habilitacyjnego
'Zagadnienia podniesień w C^*-algebrach i nieprzemienne absolutne retrakty (otoczeniowe)'
przedstawionego przez dr Tatianę Shulman we wniosku złożonym w Instytucie Matematyki Polskiej Akademii Nauk

Osiągnięcie naukowe dr Tatiany Shulman stanowiące podstawę wniosku habilitacyjnego składa się z sześciu prac opublikowanych w latach 2010-2014 (dwóch samodzielnych, czterech współautorskich z Terry Loringiem – zgodnie z oświadczeniem prof. Loringa wkład habilitantki w powstanie wspólnych prac wynosił 50 procent). Prace te dotyczą przede wszystkim rozmaitych problemów dotyczących podnoszenia operatorów o pewnych własnościach z algebr ilorazowych postaci A/I do operatorów o podobnych własnościach należących do algebry A, a także 'globalnej wersji' tego problemu, czyli badaniu tak zwanej projektywności czy też semiprojektywności konkretnych klas C^*-algebr. Przypomnijmy, że C^*-algebra A jest *projektywna*, jeśli dla dowolnej C^*-algebry B, ideału $I \subset B$ oraz *-homomorfizmu $\gamma : A \to B/I$ istnieje 'podniesienie' $\phi : A \to B$, czyli *-homomorfizm taki, że $\gamma = q \circ \phi$, gdzie $q : B \to B/I$ to kanoniczne odwzorowanie ilorazowe. *Semiprojektywność* to własność 'częściowego podnoszenia', gdzie ideał I zastępuje się rosnącym ciągiem ideałów $(I_n)_{n=1}^{\infty}$, a odpowiednie 'podniesienie' ma wartości w algebrze B/I_n dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Jak habilitantka wspomina w autoreferacie, problemy tego typu odpowiadają klasycznym zagadnieniom dotyczącym rozszerzania funkcji ciągłych; jako takie stanowią naturalny temat badań nieprzemiennej topologii, a fundamentalnym przykładem ich istotności jest teoria Browna-Douglasa-Fillmore'a, dotycząca (bardzo ogólnie mówiąc) podnoszenia operatorów normalnych w algebrze Calkina $B(H)/K(H)$. Teoria BDF stanowi z współczesnego punktu widzenia fundamentalny przykład pojawiania się w kontekście teorii operatorów zaawansowanych narzędzi o źródłach w klasycznej topologii, związanych z K-teorią czy K-homologią. Inny przykład takiej sytuacji wiąże się z pochodzącymi od Halmosa problemami związanymi z przybliżaniem 'niemal komutujących operatorów' przez operatory komutujące, gdzie przeszkody – a co może ciekawsze, również i metody uzyskiwania pozytywnych rezultatów – okazały się mieć właśnie charakter K-teoretyczny (patrz słynne wyniki odpowiednio Voiculescu i Lina dotyczące operatorów samosprzężonych i unitarnych).

Zagadnienia badane przez habilitantkę w jasny sposób wpisują się w kontekst przedstawiony w istotnej monografii Loringa z 1997 roku, "Lifting solutions to perturbing problems in C^*-algebras", zajmującej się problemami podnoszenia operatorów dla C^*-algebr generowanych przez relacje, w szczególności relacje wielomianowe, powiązanymi również ze stabilnością tychże relacji. Pewna – należy przyznać, że dość luźna – analogia każe myśleć o kwestiach tego typu jako o pytaniach o topologiczne własności nieprzemiennych powierzchni algebraicznych.

Podstawowy wkład habilitantki w dziedzinę można podzielić na kilka powiązanych ze sobą nurtów. Przedstawię je, zachowując kolejność przyjętą w autoreferacie. Pierwszym tematem było badanie możliwości podnoszenia nilpotentnych kontrakcji. Bez założenia kontraktywności odpowiednie twierdzenia uzyskali w latach osiemdziesiątych XX wieku Olsen i Pedersen; jednak dopiero dołożenie oszacowania na normę pozwala sformułować potencjalny wynik jako projektywność pewnej C^*-algebry. Stąd też wynikało zapewne sformułowanie odpowiedniego pytania we wspomnianej wyżej monografii Loringa. Wyniki Olsena i Pedersena pokazywały, że wystarczy rozważać przypadek podnoszenia z tak zwanej algebry korony $M(I)/I$ do algebry mnożników $M(I)$, a co więcej w rozważaniu problemu naturalnie pojawia się pewien operator elementarny na algebrze $M(I)$, zadany przez kombinację liniową obustronnych mnożeń przez elementy $M(I)$. W pracy [Hab1] habilitantka wykorzystała tę informację w nieoczekiwany sposób, dowodząc najpierw dość elementarnymi metodami, że domknięcie obrazu ideału w C^*-algebrze względem operatora elementarnego to M-*ideał* (co odpowiada istnieniu 'l^1–dopełnienia' anihilatora rozważanej podprzestrzeni w przestrzeni dualnej), a następnie korzystając z klasycznego faktu geometrii przestrzeni Banacha mówiącego, że M-ideały są proksyminalne (innymi słowy dowolny element 'nadprzestrzeni' posiada w rozważanym M-ideale najlepszą aproksymację). To już pozwoliło wykazać, że uniwersalna C^*-algebra generowana przez kontrakcję nilpotentną rzędu n jest projektywna. Wynik ten został rozszerzony później w pewnym sensie w pracy [Hab6], gdzie habilitantka wraz z współautorem udowodnili, że dla dowolnego wielomianu p i stałej C uniwersalna C^*-algebra generowana przez operator x spełniający warunki $p(x) = 0$ oraz $\|x\| \leqslant C$ jest semiprojektywna.

Drugim szerokim tematem badań habilitantki było rozważanie projektywności (czy semiprojektywności) C^*-algebr zadanych przez bardziej skomplikowane relacje wielomianowe, posiadające pewien stopień jednorodności. Podobny kontekst jest w istocie bardzo ogólny, co wynika z obserwacji Blackadara, rozszerzonej następnie w pracy [Hab3], mówiącej, że każdą ośrodkową C^*-algebrę można postrzegać jako algebrę uniwersalną generowaną przez przeliczalną liczbę generatorów (samosprzężonych) i relacji, uwzględniających również szacowania normowe. W połączeniu z klasyczną ideą rozważania 'ϵ-pogrubień' danej przestrzeni topologicznej – z którą wiąże się wspomniane w tytule osiągnięcia habilitacyjnego pojęcie nieprzemiennego absolutnego retraktu (otoczeniowego) – pozwoliło to wykazać między innymi, że dla każdej ośrodkowej C^*-algebry A stożek nad A jest granicą induktywną ciągu algebr projektywnych. Warto wspomnieć, że wynik ten wiąże się z hipotezą Blackadara mówiącą, że każda C^*-algebra jest granicą induktywną ciągu algebr semiprojektywnych; techniki [Hab3] zostały niedawno wykorzystane i uogólnione przez Thiela (preprint z kwietnia 2018) do wykazania hipotezy Blackadara dla bardzo szerokiej klasy algebr. Techniki [Hab3] w dużej części opierają się na umiejętnym wykorzystywaniu interakcji między rachunkiem funkcyjnym a kwazicentralnymi jedynkami aproksymatywnymi.

Wreszcie ostatni wątek przedstawiony w osiągnięciu habilitacyjnym to rozważania krążące wokół pytania Olsena z 1977 roku, dotyczącego istnienia dla danego wielomianu p i operatora $T \in B(H)$ operatora zwartego K takiego, że norma istotna operatora $p(T)$ jest równa normie operatora $p(T+K)$ (zauważmy, że mamy $\|p(T)\|_e = \|p(T+K)\|_e$, a więc w oczywisty sposób druga z rozważanych w pytaniu Olsena norm jest niemniejsza – pytanie polega na tym, czy da się znaleźć K takie, by zachodziła odwrotna nierówność). Głównym narzędziem jest tu uogólniony wzór na promień spektralny, pochodzący z pracy [Hab5]: dla elementu $a \in A$, gdzie A to C^*-algebra, i ideału $I \subset A$ zachodzi równość

$$\max(r(a), \|q(a)\|) = \inf\{(1+e)a(1+e)^{-1} : e \in I, (1+e) \text{ odwracalny}\},$$

gdzie $r(a)$ oznacza właśnie promień spektralny. Wspomnę tu tylko jeden z wniosków z powyższego wzoru: jeśli T jest operatorem ograniczonym na przestrzeni Hilberta H, to istnieje ciąg operatorów $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwartych na H taki, że dla dowolnego wielomianu p zachodzi równość

$$\|p(T)\|_e = \lim_{n\to\infty} \|p(T+K_n)\|.$$

Struktura autoreferatu jest jasna i czytelna, z wyraźnie oddzieloną częścią przekonująco przedstawiającą motywacje do rozważanych problemów oraz stan wiedzy przed rezultatami udowodnionymi przez habilitantkę i częścią prezentującą główne wyniki osiągnięcia habilitacyjnego. Prace składające się na osiągnięcie zostały opublikowane w dobrych i bardzo dobrych czasopismach (w tym w Transactions of AMS czy Journal of Functional Analysis). Autoreferat zawiera wyłącznie nieliczne usterki natury typograficznej czy minimalne przeoczenia (na przykład brak założenia iniektywności reprezentacji w Stwierdzeniu 1.4 czy zamienne stosowanie oznaczeń A i D w Lemacie 1.14 i jego kontynuacji).

Pozostały dorobek i aktywność naukową dr Shulman oceniam jako satysfakcjonujące. Oprócz prac zawartych w osiągnięciu habilitacyjnym jest ona również autorką bądź współautorką ponad dwudziestu innych artykułów, z których zasadnicza większość została już opublikowana bądź przyjęta do druku. Dotyczyły one w większości szeroko pojętych zagadnień związanych z teorią operatorów i klasycznymi, 'topologicznymi' tematami teorii C^*-algebr, choć w ostatnich latach pojawiły się w nich także i zastosowania technik operatorowych do geometrycznej teorii grup czy kwantowej informacji. Szczególnie wysoko oceniam najnowsze wyniki, w tym te, które nie zostały jeszcze opublikowane. Warto też podkreślić, że habilitantka rozpoczęła niedawno po raz pierwszy współpracę z matematykami na wczesnym etapie kariery (patrz ciekawy artykuł z Kristin Courtney o osiąganiu normy elementu C^*-algebry w skończeniewymiarowych reprezentacjach, motywowany niedawnymi wynikami Fritza, Netzera i Thoma).

Biorąc pod uwagę ilość publikacji i etap kariery dr Shulman (12 lat od doktoratu, w tym roczny urlop macierzyński) liczba cytowań (31 cytowań według bazy MathSciNet w dniu pisania recenzji) nie jest zbyt imponująca i sugeruje, że zagadnienia poruszane w rozprawie habilitacyjnej, choć niewątpliwie trudne, ważne i naturalne, nie cieszą się obecnie tak szerokim zainteresowaniem, jak było to kilkanaście lat temu. Pewien niedosyt budzi też aktywność grantowa habilitantki: w wymienionych w autoreferacie większych projektach grantowych występowała wyłącznie w roli jednego z wielu wykonawców. Z drugiej strony należy też odnotować fakt, że habilitantka prowadziła ciekawe i urozmaicone zajęcia dydaktyczne na różnych poziomach zaawansowania.

W gronie ekspertów zajmujących się zagadnieniami podnoszenia w kontekście algebr operatorowych wyniki habilitantki są niewątpliwie dobrze znane i doceniane (dwaj z wiodących specjalistów w tej tematyce, Don Hadwin i Terry Loring, to współautorzy dr Shulman). Kryterium współpracy międzynarodowej habilitantka wypełnia z nawiązką: w trakcie kariery zawodowej pracowała w czterech różnych krajach, wygłosiła też kilkanaście zaproszonych wykładów. Współorganizowała jedną konferencję.

KONKLUZJA

Biorąc pod uwagę wszystkie powyższe fakty, uważam że **osiągnięcie habilitacyjne dr Tatiany Shulman oraz jej pozostały dorobek oraz aktywność naukowa spełniają wszystkie ustawowe wymogi stawiane kandydatom do habilitacji i rekomenduję nadanie dr Shulman stopnia doktora habilitowanego**.

Adam Skalski

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

Warszawa, 10 sierpnia 2018 roku