Dr hab. Andrzej Sołtysiak
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza
w Poznaniu

Poznań, 20 sierpnia 2018 r.

**Recenzja dorobku dr Tatiany Shulman
w postępowaniu o nadanie stopnia doktora habilitowanego
w Instytucie Matematycznym PAN w Warszawie**

Pani Tatiana Shulman otrzymała stopień doktora w zakresie nauk matematycznych na podstawie rozprawy „Functional calculus and asymptotic constructions in operator theory", napisanej w Moskiewskim Instytucie Fizyki i Technologii pod kierunkiem profesorów: V. M. Manuiłowa i I. A. Czubarowa. Rozprawa ta została obroniona w Moskiewskim Instytucie Elektroniki i Matematyki w roku 2006. Od sierpnia 2014 roku Pani dr Tatiana Shulman jest zatrudniona w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk w Warszawie na stanowisku adiunkta.

Osiągnięcie habilitacyjne Pani Shulman zatytułowane „Zagadnienia podniesień w C^*-algebrach i nieprzemienne absolutne retrakty (otoczeniowe)" stanowi cykl następujących sześciu publikacji:

[Hab1] T. Shulman, *Lifting of nilpotent contractions*, Bull. London Math. Soc. **40** (6) (2008), 1002–1006.

[Hab2] T. Shulman, *Semiprojectivity of universal C^*-algebras generated by algebraic elements*, Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), No. 4, 1363–1370.

[Hab3] T. Loring and T. Shulman, *Noncommutative semialgebraic sets and associated lifting-problems*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), No. 2, 721–744.

[Hab4] T. Loring and T. Shulman, *Noncommutative semialgebraic sets in nilpotent variables*, New York J. Math. **18** (2012), 361–372.

[Hab5] T. Loring and T. Shulman, *A generalized spectral radius formula and Olsen's question*, J. Funct. Anal. **262** (2012), No. 2, 719–731.

[Hab6] T. Loring and T. Shulman, *Lifting algebraic contractions in C^*-algebras*, Operator Theory: Advances and Applications, Birkhauser/Springer Basel AG, Basel, **233** (2014), 85–92.

Wszystkie z wymienionych prac dotyczą różnych wariantów problemu podniesienia w teorii C^*-algebr. Najogólniej problem ten można scharakteryzować w następujący sposób: dla danej C^*-algebry A i jej domkniętego ideału (dwustronnego) I zbadać jakie własności elementów algebry ilorazowej A/I przenoszą się poprzez kanoniczne odwzorowanie ilorazowe $\pi\colon A \to A/I$ na takie same własności ich przeciwobrazów.

Dokładniej, Habilitantka zajmuje się problemami podniesień relacji postaci

$$\|p(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)\| \leqslant C, \tag{1}$$

gdzie p jest nieprzemiennym wielomianem (elementem $*$-algebry wolnej generowanej przez elementy x_1, x_2, …, x_n), a $C \geqslant 0$ dowolną stała. Reprezentacją relacji (1) w C^*-algebrze A jest ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ elementów tej algebry, który ją spełnia. Relacja (1) daje się podnieść, jeżeli dla dowolnej jej reprezentacji $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ w algebrze ilorazowej A/I istnieje taka jej reprezentacja $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ w algebrze A, że $b_j = \pi(a_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Dla zbioru generatorów $\mathcal{X} = \{x_\alpha\}$ i zbioru relacji $\mathcal{R}$ ich uniwersalną C^*-algebrą, $C^*\langle \mathcal{X} \mid \mathcal{R}\rangle$, jest C^*-algebra generowana przez elementy $\{x_\alpha\}$ spełniające wszystkie relacje z $\mathcal{R}$ o tej własności, że dla dowolnej C^*-algebry B generowanej przez elementy $\{b_\alpha\}$ spełniające relacje z $\mathcal{R}$ istnieje dokładnie jeden $*$-homomorfizm $f\colon C^*\langle \mathcal{X} \mid \mathcal{R}\rangle \to B$ taki, że $f(x_\alpha) = b_\alpha$.

Problem podniesienia ma związek z problemem opisu projektywnych C^*-algebr. C^*-algebra B jest projektywna, jeżeli dla dowolnej C^*-algebry A, dowolnego jej ideału I i dowolnego $*$-homomorfizmu $f\colon B \to A/I$ istnieje $*$-homomorfizm $g\colon B \to A$ taki, że $f(b) = \pi(g(b))$ $(b \in B)$.

Ponieważ uniwersalna C^*-algebra dla danej relacji jest projektywna wtedy i tylko wtedy, gdy relacja ta daje się podnieść, więc problem podniesienia można sformułować w następujący sposób: czy uniwersalna C^*-algebra danej relacji jest projektywna?

Problemy podniesień są niezwykle istotne w teorii C^*-algebr i teorii operatorów. Na przykład, rozważania w teorii Browna-Douglasa-Fillmore'a sprowadzają się do analizy podniesień elementów normalnych algebry Calkina do normalnych operatorów w algebrze $B(H)$. Podniesienia odwzorowań są jednym z podstawowych narzędzi używanych w programie klasyfikacji prostych nuklearnych C^*-algebr. Zagadnienia podniesień związane są z problemami perturbacyjnym i problemami stabilności C^*-algebr. Motywacja do badania teorii podniesień i problemy, które były rozważane w pracach składających się na osiągnięcie habilitacyjne są bardzo dobrze opisane w Autoreferacie Habilitantki.

Spośród sześciu prac tworzących osiągnięcie habilitacyjne dwie są autorstwa Habilitantki, a współautorem czterech pozostałych jest Terry Loring. Przy czym wkład Habilitantki w ich powstanie był pięćdziesięcioprocentowy. Prace te są wydrukowane w bardzo dobrych i dobrych czasopismach takich jak: Transactions of the American Mathematical Society, Journal of Functional Analysis, Proceedings of the American Mathematical Society, Bulletin of the London Mathematical Society, Operator Theory: Advances and Applications, and New York Journal of Mathematics.

Przedstawię pokrótce treść poszczególnych prac składających się na osiągnięcie habilitacyjne.

W pracy `[Hab1]` Autorka udowadnia, że nilpotentne kontrakcje w C^*-algebrze ilorazowej można podnieść. Jest to pozytywna odpowiedź na pytanie T. A. Loringa postawione w monografii [35] (numeracja z Autoreferatu Habilitantki). Wynik ten dostarcza nowego przykładu projektywnej C^*-algebry, a mianowicie oznacza, że uniwersalna C^*-algebra $C^*\langle \{x\} \mid x^n = 0, \|x\| \leqslant 1\rangle$ jest projektywna. Nowatorskim pomysłem Autorki jest wykorzystanie w dowodzie tego twierdzenia pojęcia, które pochodzi z geometrycznej teorii przestrzeni Banacha, a mianowicie Autorka używa M-ideałów.

Praca `[Hab2]` poświęcona jest badaniu uniwersalnej C^*-algebry, $C^*\langle \{x\} \mid p(x) = 0, \|x\| \leqslant 1\}$, gdzie p jest wielomianem jednej zmiennej. Główne twierdzenie udowodnione w tej pracy mówi, że algebra $C^*\langle\{x\} \mid p(x) = 0, \|x\| \leqslant 1\}$ jest semiprojektywna i residualnie skończenie wymiarowa, jeżeli wszystkie zera wielomianu p mają krotność większą niż jeden. Semiprojektywność C^*-algebry D oznacza, że dla dowolnej C^*-algebry A, dowolnego wstępującego ciągu ideałów tej algebry (I_n) i dowolnego $*$-homomorfizmu $\phi\colon D \to A/I$, gdzie $I = \overline{\cup I_n}$, istnieją n oraz $*$-homomorfizm $\tilde{\phi}\colon D \to A/I_n$ takie, że $\phi(a) = \iota(\tilde{\phi}(a))$, gdzie $\iota\colon A/I_n \to A/I$ jest odwzorowaniem kanonicznym oraz $a \in D$. Pojęcie to ma związek ze stabilnością relacji. Mianowicie relacja jest stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy jej uniwersalna C^*-algebra jest semiprojektywna.

Jako wniosek z tego głównego wyniku Autorka otrzymała następujące twierdzenie, które daje częściową odpowiedź na pytanie C. Olsen postawione w pracy [40]: Niech $T \in B(H)$ i niech p będzie wielomianem, którego wszystkie zera mają krotność większą niż jeden. Jeżeli $p(T)$ jest operatorem zwartym, to istnieje taki operator zwarty K, że $p(T + K) = 0$ i $\|T + K\| = \|T\|_e$, gdzie $\|T\|_e$ jest normą istotną operatora T.

W pracy `[Hab3]` Autorzy zajęli się pytaniem Blackadara o to, czy każda ośrodkowa C^*-algebra jest granicą prostą semiprojektywnych C^*-algebr? Głównym narzędziem w ich badaniach są tzw. nieprzemienne ε-otoczenia. Jeden z wyników tej pracy mówi, że jeżeli $p_1, p_2, \ldots, p_J$ są nieprzemiennymi $*$-wielomianami zależnymi od zmiennych $x_1, x_2, \ldots$ i dla $r \geqslant 1$ każdy z nich jest jednorodny względem zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_r$ ze stopniem jednorodności $d_j \geqslant 1$, to wówczas C^*-algebra (nieprzemienne ε-otoczenie)

$$A_\varepsilon = C^*\langle\{x_1, x_2, \ldots\} \mid \|x_k\| \leqslant 1, k \in \mathbb{N}, \ \|p_j(x_1, x_2, \ldots)\| \leqslant \varepsilon, j = 1, 2, \ldots, J\rangle$$

jest projektywna.

Jako wnioski z tego twierdzenia i stosowanej techniki Autorzy otrzymali następujące fakty, które dostaczają przykładów C^*-algebr dających pozytywną odpowiedź na pytanie Blackadara:

- Stożek nad ośrodkową C^*-algebrą jest izomorficzny z granicą prostą przeliczalnego układu projektywnych C^*-algebr.
- C^*-algebra funkcji ciągłych na walcu jest granicą prostą semiprojektywnych C^*-algebr.

Przedmiotem badania w pracy `[Hab4]` jest podnoszenie rozmytych relacji wielomianowych typu (1), gdzie wielomian p ma pewne własności jednorodności, łącznie z relacjami nilpotentności.

Okazało się, że relacja nilpotentności $x^n = 0$ ma lepsze własności niż tylko możliwość jej podniesienia. Po dodaniu jej do wielu zbiorów relacji nie tracimy możliwości podniesień. W pracy rozważane są dwa przykłady takich relacji, a mianowicie relacja jednomianowa $xyx^* = 0$ i relacja „półortogonalności" $x_i x_j = 0$ dla wszystkich i, j. Otrzymane wyniki dostarczają wielu nowych przykładów projektywnych i semiprojektywnych C^*-algebr.

Praca `[Hab5]` poświęcona jest znalezieniu odpowiedzi na następujące pytania postawione przez Olsen ([41]) oraz Olsen i Plastiras ([43]):

(A) Czy dla operatora $T \in B(H)$ i wielomianu p istnieje operator zwarty K taki, że

$$\|p(T + K)\| = \|p(T)\|_e?$$

(B) Czy dla operatora T i wielomianu p prawdziwa jest równość

$$\inf\{\|p(T + K)\|\colon \ K \text{ operator zwarty}\} = \|p(T)\|_e?$$

Autorzy udowodnili tzw. uogólniony wzór na promień spektralny elementów C^*-algebry, który okazał się być bardzo przydatny przy badaniu problemów zawartych w powyższych pytaniach. Dla C^*-algebry A, I jej ideału i $a \in A$ wzór ten ma postać

$$\max\{r(a), \|\dot{a}\|\} = \inf \|(1+e)a(1+e)^{-1}\|, \tag{2}$$

gdzie $\dot{a} = \pi(a)$ oraz kres dolny jest brany po wszystkich $e \in I$ takich, że element $1+e$ jest odwracalny. W szczególnym przypadku, gdy $A = I$, wzór (2) redukuje się do znanego wzoru na promień spektralny Murphy'ego i Westa ([39]).

Niech $r_e(T)$ oznacza istotny promień spektralny operatora $T \in B(H)$ oraz niech dla wielomianów $p_1, p_2, \ldots, p_n$

$$\Sigma_{p_1,\ldots,p_n} = \{T \in B(H) \colon\ r_e(p_i(T)) < \|p_i(T)\|_e,\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Autorzy udowodnili następujące twierdzenia:

(I) Dla dowolnych wielomianów p_1, p_2, …, p_n i dowolnego operatora $T \in \Sigma_{p_1,\ldots,p_n}$ odpowiedź na pytanie (A) jest pozytywna, tzn. istnieje operator zwarty K, dla którego $\|p_i(T+K)\| = \|p_i(T)\|_e$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

(II) Dla dowolnych wielomianów p_1, p_2, …, p_n zbiór $\Sigma_{p_1,\ldots,p_n}$ jest otwarty i gęsty w $B(H)$.

Z twierdzenia (I) wynikają następujące wnioski:

- Dla dowolnego operatora quasinilpotentnego i dowolnego wielomianu p bez wyrazu wolnego odpowiedź na pytanie (A) jest pozytywna.

- Dla dowolnego operatora nilpotentnego i dowolnego wielomianu p pytanie (A) ma pozytywną odpowiedź.

Natomiast z twierdzenia (II) wynika, że zbiór operatorów, dla których nie wiemy jaka jest odpowiedź na pytanie (A) jest zbiorem nigdziegęstym.

Praca `[Hab5]` zawiera również twierdzenie dające pozytywną odpowiedź na pytanie (B). Autorzy otrzymali silniejszy wynik, mianowicie pokazali, że

(III) Dla dowolnego $T \in B(H)$ istnieje taki ciąg (K_n) operatorów zwartych, że dla dowolnego wielomianu p zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} \|p(T+K_n)\| = \|p(T)\|_e$.

Metody używane do rozwiązywania problemów (A) i (B) okazały się również przydatne do wykazania, że dla dwóch przemiennych operatorów, z których jeden jest podobny do kontrakcji a drugi jest podobny do ścislej kontrakcji, można znaleźć wspólne podobieństwo do kontrakcji. Jest to wzmocnienie wyniku uzyskanego przez Fonga i Souroura w pracy [18].

W pracy `[Hab6]` Autorzy stosują uogólniony wzór na promień spektralny do badania semiprojektywności uniwersalnej C^*-algebry $C^*\langle\{x\} \mid p(x) = 0, \|x\| \leqslant C\rangle$, gdzie p jest wielomianem jednej zmiennej. Udało im się poprawić wynik z pracy `[Hab2]`. Mianowicie wykazali, że dla dowolnego wielomianu p jednej zmiennej wspomniana uniwersalna C^*-algebra jest semiprojektywna i residualnie skończenie wymiarowa. Uzyskali również następujące rozszerzenie twierdzenia strukturalnego C. Olsen([40]): Dowolny $*$-homomorfizm z algebry $C^*\langle\{x\} \mid p(x) = 0, \|x\| \leqslant C\rangle$ do algebry Calkina ma podniesienie do $*$-homomorfizmu o wartościach w $B(H)$. W szczególności, $\mathrm{Ext}\,(C^*\langle\{x\} \mid p(x) = 0, \|x\| \leqslant C\rangle) = 0$.

Z tego pobieżnego przeglądu rezultatów uzyskanych przez Habilitantkę w osiągnięciu habilitacyjnym widać, że konsekwentnie rozwijała teorię projektywnych i semiprojektywnych C^*-algebr, przy okazji rozwiązując niebanalne problemy z teorii operatorów, które pozostawały otwarte przez ponad czterdzieści lat.

Wyniki uzyskane w osiągnięciu habilitacyjnym zostały zauważone i docenione przez specjalistów. Świadczy o tym fakt, że wypracowane metody uzyskane w pracy [Hab3] zostały wykorzystane przez Thiela do opisu granic prostych projektywnych C^*-algebr ([61]), Archbolda, Roberta i Tikuisisa do badania własności Dixmiera C^*-algebr ([3]) oraz przez Loringa i Videsa do badań nad lokalnymi homotopiami macierzowymi ([62], [33]). Praca [3] się niedawno ukazała, a pozostałe są przyjęte do druku.

Oznacza to również, że tematyka badań Habilitantki jest bardzo aktualna.

Wysoka jest ranga czasopism, w których zostały opublikowane prace wchodzące w skład osiągnięcia habilitacyjnego. Według listy Journal of Citation Reports sumaryczny impact factor prac tworzących osiągnięcie habilitacyjne wynosi 4,633, a wszystkich prac Habilitantki – 13,01.

Liczba cytowań – według Web of Science suma wszystkich cytowań jest równa 22, bez autocytowań 14; według MathSciNet Mathematical Reviews suma wszystkich cytowań wynosi 31 przez 30 autorów.

Indeks Hirscha zarówno według Web of Science, jaki i MathSciNet Mathematical Reviews wynosi 3.

Stosunkowo niewielka liczba cytowań wynika z pewnością z faktu, że liczba matematyków zajmujących się tematyką „uprawianą" przez Habilitantkę jest nieduża. Ponadto należy podkreślić, że prace tworzące osiągnięcie habilitacyjne zostały opublikowane w latach 2008–2014, a więc niedawno, co oznacza, że wskaźniki cytowalności powinny jeszcze wzrosnąć.

Osiągnięcie habilitacyjne Pani dr Shulman wpisuje się w tę część teorii C^*-algebr, która jest nazywana „nieprzemienną topologią". Wyniki przez Nią uzyskane w sposób istotny rozszerzają naszą wiedzę dotyczącą tej teorii. Tematyka ta jest aktualna i z pewnością będzie się dalej rozwijać. Moja ocena osiągnięcia habilitacyjnego jest bardzo wysoka. Również chciałbym dodać, że autoreferat jest bardzo dobrze napisany. W sposób wyczerpujący i klarowny wyjaśnia problemy jakimi się Habilitantka zajęła, jej motywację oraz umiejscowienie uzyskanych przez Nią wyników w teorii C^*-algebr. Miałbym jedynie zastrzeżenia do języka w polskiej wersji autoreferatu, ale one nie są istotne dla mojej oceny osiągnięcia habilitacyjnego Pani Shulman.

Pozostały dorobek Habilitantki składa się z siedemnastu pozycji, z czego trzynaście prac zostało opublikowanych, jedna jest przyjęta do druku i trzy wysłane do druku. Czternaście spośród tych prac powstało po doktoracie. Wachlarz tematyki w tych pracach jest niezwykle szeroki. Dotyczą one KK-teorii i E-teorii dla C^*-algebr ([52]), kwantowej teorii informacji ([47], [48]), podmodułów Liego i ich zastosowania do badania podprzestrzeni niezmienniczych ([50], [56]), C^*-algebr generowanych przez rzuty ([51]), odwzorowań między algebrami typu AF, które są ekwiwariantne przy działaniu grup unitarnych ([49]), pewnych zagadnień geometrycznych występujących przy badaniu własności Każdana (T) na przestrzeniach Banacha ([55]), stabilności śladowej C^*-algebr oraz grup ([25], [26]), zastosowania projektywności do charakteryzacji pewnych klas C^*-algebr ([54], [8]), zagadnienia podniesień w algebrach von Nemanna i odwzorowań zachowujących ortogonalność w algebrach operatorowych o wartościach w algebrze von Neumanna ciągów asymptotycznie centralnych ([27]) oraz geometrii dynamiki kwantowej w wymiarze nieskończonym ([22]).

Z tej listy widać, że działalność naukowa Habilitantki nie ogranicza się do wąskiej grupy tematów, obejmując różne zagadnienia badawcze dotyczące nie tylko C^*-algebr. Ponadto Habilitantka kontynuuje z powodzeniem zastosowanie wypracowanych metod w trakcie prac nad osiągnięciem habilitacyjnym do badania problemów z teorii C^*-algebr.

Większość z tych opublikowanych prac niewchodzących w skład osiągnięcia habilitacyjnego ukazała się w bardzo dobrych lub dobrych czasopismach t.j. Journal of Operator Theory, Studia Mathematica, Integral Equations and Operator Theory, Proceedings of the American Mathematical Society, Functional Analysis and its Applications, Canadian Journal of Mathematics, Communications in Mathematical Physics, Journal of Physics A.

Pani dr Shulman w roku 2016 otrzymała Nagrodę *For oustanding research in Operator Theory and Operator Algebras* przyznaną przez Eric Nordgren Research Fellowship Fund, University of New Hamshire.

Uczestniczyła w czterech projektach badawczych, w tym dwóch międzynarodowych.

Trzynastokrotnie była zapraszana do wygłoszenia referatu na konferencjach międzynarowych i dwudziestopięcioktrotnie wygłaszała referaty na kolokwiach i seminariach.

Jest edytorem czasopisma *Annals of Functional Analysis*. Była współorganizatorem spotkania badawczego *Workshop on Semiprojectivity and Asymptotic Morphisms* w roku 2010 na Uniwersytecie Kopenhaskim. Od 2016 roku jest współpowadzącą seminarium *Young Researchers Colloquium* w IM PAN w Warszawie. W roku 2016 w ramach Semestru Simonsa *Noncommutative geometry the next generation* wygłosiła cykl wykładów dla doktorantów i uczestników staży podoktorskich pt. *Noncommutative topology for beginners*.

Odbyła trzyletni (2008/2011) i jednoroczny (2013/2014) staże naukowe, podoktorskie, na Uniwersytecie Kopenhaskim oraz przebywała przez rok (2011/2012) w Siena College w Stanach Zjednoczonych jako Visiting Asistant Professor. Ponadto przebywała wielokrotnie na krótkich pobytach w takich ośrodkach jak: University of Copenhagen, University of Besançon, Chalmers University w Sztokholmie, Mittag-Leffler Institute w Sztokholmie, University of New Hampshire i University of New Mexico w Stanach Zjednoczonych.

Biorąc powyższe pod uwagę, stwierdzam, że **osiągnięcie habilitacyjne i cały dorobek naukowy oraz aktywność naukowa, organizacyjna i dydaktyczna Pani dr Tatiany Shulman spełniają ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane w postępowaniach habilitacyjnych w zakresie nauk matematycznych. Z pełnym przekonaniem wnoszę o nadanie Pani doktor Shulman stopnia naukowego doktora habilitowanego nauk matematycznych**.

Andrzej Sołtysiak