Autoreferat habilitacyjny

Tatiana Shulman

Podstawowe dane osobowe

Imię i nazwisko	Tatiana Shulman
Adres	Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk ul. Sniadeckich 8, 00-656 Warszawa
Email	tshulman@impan.pl
Strona WWW	https://www.impan.pl/en/sites/tshulman/home

Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

- **dyplom doktora w zakresie nauk matematycznych (PhD)**, rozprawa doktorska *Functional calculus and asymptotic constructions in operator theory* napisana pod kierunkiem profesora V. M. Manuiłowa i profesora I. A. Czubarowa na Moskiewskiem Instytucie Fizyki i Technologii, Rosja, obroniona na Moskiewskiem Istytucie Elektroniki i Matematyki, Rosja, we wrześniu 2006 roku.

- **dyplom magistra matematyki (MSc)**, praca magisterska *Actions of Lie groups on topological spaces and covariant maps* napisana pod kierunkiem profesora I. A. Czubarowa na Moskiewskiem Instytucie Fizyki i Technologii, Rosja, obroniona na Moskiewskiem Instytucie Fizyki i Technologii, Rosja, w czerwcu 2000 roku.

Przebieg kariery naukowej

- **od sierpnia 2014** adiunkt, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Polska.

- **lipiec 2013 – czerwiec 2014** postdoc, Uniwersytet Kopenhaski, Dania.

- **sierpień 2012 – lipiec 2013** *przerwa macierzyńska.*

- **sierpień 2011 – sierpień 2012** Visiting Assistant Professor, Siena College, USA.

- **wrzesień 2008 – sierpień 2011** postdoc, Uniwersytet Kopenhaski, Dania.
- **wrzesień 2007 – czerwiec 2008** wykładowca, Rosyjski Państwowy Uniwersytet Technologiczny im. K.E. Ciołkowskiego, Rosja.

1 Wskazane osiągnięcia habilitacyjne

Wskazanym osiągnięciem jest cykl 6 prac zatytułowany:

Zagadnienia podniesień w C^*-algebrach i nieprzemienne absolutne retrakty (otoczeniowe)

1.1 Lista prac zawierających wskazane osiągnięcia

[Hab1] Lifting of nilpotent contractions, Bulletin of the London Math. Soc. 40(6) (2008), 1002–1006.

[Hab2] Semiprojectivity of universal C*-algebras generated by algebraic elements, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 140, 4 (2012), 1363–1370.

[Hab3] Noncommutative semialgebraic sets and associated lifting problems (z T. Loringiem), Trans. Amer. Math. Soc., 364 (2012), 721–744.

[Hab4] Noncommutative semialgebraic sets in nilpotent variables (z. T. Loringiem), New York J. Math., Vol. 18 (2012), 361–372.

[Hab5] A generalized spectral radius formula and Olsen's question (z T. Loringiem), J. Funct. Anal., Vol. 262, 2 (2012) , 719–731.

[Hab6] Lifting algebraic contractions in C*-algebras (z T. Loringiem), Operator Theory: Advances and Appications, Birkhauser/Springer Basel AG, Basel, Vol. 233 (2014), 85–92.

Wkład w artykuły współautorskie [Hab3, Hab4, Hab5, Hab6] jest odwrotnie proporcjonalny do liczby autorów. Stosowna deklaracja jest w załączniku.

1.2 Publikacje po doktoracie spoza rozprawy habilitacyjnej

Artykuły napisane po uzyskaniu stopnia doktora, które nie są częścią rozprawy habilitacyjnej (w porządku odwrotnym chronologicznym):

1. (z J. Grabowskim, M. Kusiem, G. Marmo) Geometry of quantum dynamics in infinite dimension, w recenzji, arXiv:1711.06486.
2. (z D. Hadwinem) Variations of projectivity for C^*-algebras, w recenzji, arXiv:1709.01379.
3. Continuity of spectral radius and type I C^*-algebras, w recenzji, arXiv:1707.08848.
4. (z D. Hadwinem) Stability of group relations under small Hilbert-Schmidt perturbations, w recenzji, arXiv:1706.08405.
5. (z D. Hadwinem) Tracial stability for C^*-algebras, w recenzji, arXiv:1607.04470
6. (z K. Courtney) Elements of C^*-algebras attaining their norm in a finite-dimensional representation, Canadian Journal of Mathematics, w druku.
7. On subspaces of invariant vectors, Studia Math. 236 (2017), 1 - 11.
8. (z M. Szirokowem) On superactivation of zero-error capacities of a quantum channel and its implications, Comm. Math. Phys., Vol. 335, 3 (2015), 1159 - 1179.
9. (z M. Szirokowem) On superactivation of one-shot zero-error quantum capacity and the related property of quantum measurements, Problems Inform. Transmission, 50:3 (2014), 232 - 246.
10. (z W. Shulmanem) On algebras generated by inner derivations, J. Operator Theory 65:2(2011), 281 - 305.
11. C^*-algebras $qA \otimes K$ and $S^2A \otimes K$ are asymptotically equivalent, J. Operator Theory 63:1(2010), 85 - 100.
12. On universal C^*-algebras generated by n projections with scalar sum, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), 115 - 122.
13. (z W. Shulmanem) On Lie submodules and tensor algebras, Funct. Analysis and its Appl., 43:2 (2009), 91 - 96.
14. Unitarily covariant maps in approximately finite-dimensional C^*-algebras, Fund. and Appl. Math., 13 (2007), no. 8, 213 - 227.

1.3 Omówienie tematu badawczego rozprawy

Wstęp

Omówienie rozprawy rozpoczniemy przywołując definicje i notacje używane w algebrach operatorowych. Wszystkie pojęcia pojawiające się są dokładnie omówione w wielu źródłach, m.in. w książkach [38, 44].

Przez *ideał* w C^*-algebrze zawsze rozumiemy domknięty ideał dwustronny. Ideał I w C^*-algebrze A nazwiemy *istotnym*, jeśli jedynym elementem $a \in A$ spełniającym $ai = ia = 0$ dla wszystkich $i \in I$ jest $a = 0$.

Dla C^*-algebry A i jej ideału I, symbolem $\pi\colon A \to A/I$ oznaczać będziemy kanoniczne odwzorowanie ilorazowe. Algebrę macierzy zespolonych rozmiaru $n \times n$ o współczynnikach zespolonych oznaczać będziemy przez M_n.

Przestrzenie Hilberta (zawsze ośrodkowe) oznaczymy symbolem H, zaś $B(H)$ będzie oznaczać C^*-algebrę wszystkich operatorów ograniczonych na H, z kolei $K(H)$ będzie jej ideałem operatorów zwartych. *Algebra Calkina* to, z definicji, iloraz $B(H)/K(H)$.

Poniższe, niezwykle użyteczne, pojęcie kwazicentralnej jedynki aproksymatywnej zostało wprowadzone jednocześnie i niezależnie przez Arvesona ([4]) oraz Akemanna i Pedersena ([1]). Niech A będzie C^*-algebrą, zaś I jej ideałem.

Definicja 1.1. *Kwazicentralną jedynką aproksymatywną* w I jest rosnąca sieć $\{e_\alpha\}_{\alpha \in D}$ elementów dodatnich w I, który jest jedynką aproksymatywną dla I oraz spełnia warunek $\|e_\alpha a - a e_\alpha\| \to 0$ dla dowolnego $a \in A$.

W dalszej części będziemy intensywnie używać koncepcji uniwersalnej C^*-algebry zadanej przez zbiór generujący $\mathcal{X} = \{x_\alpha\}$ oraz zbiór relacji $\mathcal{R}$. Teoria dopuszcza analizę relacji dowolnej ogólności, dla których ma ona sens dla operatorów przestrzeni Hilberta czy elementów C^*-algebr, lecz my skupimy się na relacjach postaci $\|p(x_1, x_1^*, x_2, x_2^*, \ldots)\| \leq C$, gdzie p jest wielomianem w nieprzemiennych zmiennych, zaś $C \geq 0$ jest stałą. W szczególności uwzględniamy wszelkie relacje pochodzące z nieprzemiennych $*$-wielomianów $p(x_1, x_1^*, x_2, x_2^*, \ldots) = 0$.

W pozostałej części wielomian zawsze oznaczać będzie dla nas wielomian w skończenie wielu nieprzemiennych zmiennych i ich sprzężeniach (tj. element wolnej $*$-algebry o generatorach $x_1, \ldots, x_n$). Rozważania dotyczące nieskończonych rodzin wielomianów będziemy interpretować jako wielomiany we wspólnym (potencjalnie nieskończonym) zbiorze zmiennych (lecz każdy wielomian zależy jedynie od skończenie wielu).

Definicja 1.2. Dla zbioru generatorów $\mathcal{X} = \{x_\alpha\}$ i zbioru relacji $\mathcal{R}$, ich *uniwersalną C^*-algebrą* $C^*\langle \mathcal{X} \mid \mathcal{R} \rangle$ nazwiemy C^*-algebrę generowana przez elementy $\{x_\alpha\}$ spełniające wszystkie relacje z $\mathcal{R}$ i taką, że dla dowolnej innej C^*-algebry B generowanej przez elementy $\{b_\alpha\}$ spełniające relacje z $\mathcal{R}$ istnieje jedyny $*$-homomorfizm $f : C^*\langle \mathcal{X} \mid \mathcal{R} \rangle \to B$ taki, że $f(x_\alpha) = b_\alpha$.

Należy podkreślić, że uniwersalna C^*-algebra istnieje nie dla wszystkich zbiorów relacji $\mathcal{R}$.

Definicja 1.3. ([44]) Niech A będzie C^*-algebrą, zaś $\rho\colon A \to B(H)$ będzie niezdegenerowaną reprezentacją A. Powiemy, że operator $x \in B(H)$ jest multyplikatorem dla A, jeśli $x\rho(A) \subseteq \rho(A)$ oraz $\rho(A)x \subseteq \rho(A)$.

Zbiór multyplikatorów $\mathcal{M}(A)$ jest C^*-algebrą oraz, z dokładnością do $*$-izomorfizmu, nie zależy od wyboru niezdegenerowanej reprezentacji A. Łatwo można zauważyć, że A jest ideałem istotnym w $\mathcal{M}(A)$. Poniższe stwierdzenie formalizuje hasło $\mathcal{M}(A)$ *to największa C^*-algebra zawierająca A jako ideał istotny.*

Stwierdzenie 1.4. *([44]) Jeśli C^*-algebra A jest ideałem istotnym w pewnej C^*-algebrze B, to istnieje injekcja $B \to \mathcal{M}(A)$, która w obcięciu do A jest identycznością.*

Ilorazowa C^*-algebra $M(A)/_A$ jest nazywana *koroną* A (ang. *corona algebra*).

Teraz przejdziemy do tematów badawczych rozprawy habilitacyjnej i w szczególności opiszemy listę problemów, których rozwiązań poszukujemy (i znajdujemy, albo częściowo znajdujemy) w opisie osiągnięć habilitanta.

Zagadnienia podniesień w C^*-algebrach.

Niech A będzie C^*-algebrą, I jej ideałem, $\pi\colon A \to A/_I$ kanonicznym odwzorowaniem ilorazowym. Dla elementu $b \in A/_I$ rozważamy jego podniesienia, to znaczy takie elementy $a \in A$, że $\pi(a) = b$, i chcemy znaleźć je w taki sposób, by dzieliły pewne własności b. Tego typu pytania opisują szeroko rozumiane zagadnienia podniesień w C^*-algebrach.

Zagadnienia podniesień są zwykle uważane za nieprzemienny analogon zagadnień rozszerzeń funkcji. Istotnie, ponieważ dla C^*-algebry przemiennej $C_0(X)$ każdy jej C^*-iloraz jest izomorficzny z $C_0(Y)$ dla pewnego domkniętego podzbioru $Y \subset X$; zagadnienie podniesień dokładnie tłumaczy się na zagadnienie przedłużania funkcji ciągłej z Y na całe X.

Zagadnienia podniesień są fundamentalne w teorii C^*-algebr. Już podstawowe wyniki teorii C^*-algebr dotyka tego zagadnienia, oraz opis odwzorowania brzegowego w K-teorii, techniczne lematy o granicach prostych, i oczywiście teoria operatorów. Spora część naszej wiedzy o algebrze Calkina pochodzi z wyników badań warstw ilorazu w świetne analitycznych własności reprezentantów warstw. W szczególności w znamienitej teorii Browna-Douglasa-Fillmore'a istota rozważań sprowadza się do analizy podniesień elementów normalnych algebry Calkina do normalnych operatorów w $B(H)$. W ostatnich dekadach zagadnienia podniesień są jednym z kluczowych składników technicznych w programie klasyfikacji prostych nuklearnych C^*-algebr.

Problemy perturbacyjne i stabilności C^*-algebr mają bliskie związki i często są równoważne z pewnymi zagadnieniami podniesień, co wyjaśnimy poniżej.

Liczne wyniki teorii C^*-algebr dotykają podniesień pewnych specyficznych $*$-wielomianów i relacji na normy elementów, jak podnoszenie projektorów, izometrii, jednostek macierzowych, relacji komutacyjnych etc. Jednym z najbardziej interesujących, i zaskakujących, zagadnień tej teorii jest zagadnienie podnoszenia elementów nilpotentnych. Olsen [40] pokazała, że każdy element nilpotentny algebry Calkina podnosi się do operatora nilpotentnego o tym samym rzędzie nilpotentności, tj. relacja $x^n = 0$ podnosi się z algebry Calkina do $B(H)$. Akemann i Pedersen [1] pokazali, że relacja $x^2 = 0$ podnosi się z dowolnego C^*-ilorazu, i ostatecznie Olsen i Pedersen [42] pokazali to samo dla relacji $x^n = 0$. Z drugiej strony, Akemann i Pedersen [1] pokazali, że element nienilpotentny w C^*-ilorazie można podnieść zachowując normę jego potęg. Dokładniej, relacja

$$x^n \neq 0, \ \|x^k\| = C_k, \tag{1}$$

$k = 1, \ldots, n-1$ dopuszcza podniesienia.
Zagadnienia podniesień są blisko związane z pojęciem projektywności w C^*-algebrach, wprowadzonym przez Effrosa i Kaminkera [14] oraz, we współczesnej formie, przez Blackadara [5].

Projektywne i semiprojektywne C^*-algebry.

Projektywne i semiprojektywne C^*-algebry zostały wprowadzone jako nieprzemienne analogony absolutnych retraktów i absolutnych retraktów otoczeniowych w topologii.

Definicja 1.5 (Blackadar [5]). C^*-algebra B jest *projektywna* jeśli każdy $*$-homomorfizm z B do algebry ilorazowej A/I można podnieść do $*$-homomorfizmu z B do A.

Diagramatyczna notacja dla tego pojęcia przedstawia się następująco:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & A/I \end{tikzcd}$$

O wadze pojęcia projektywności świadczy możliwość algebraicznego podejścia do zagadnienia podniesień, które dotychczas były badane jedynie metodami teorio-operatorowymi dla jednego operatora.

Wadą tego podejścia był, aż do niedawna, bardzo ograniczony zestaw przykładów C^*-algebr posiadających własność projektywności. Dokładniej, poza oczywistymi przykładami projektywnych C^*-algebr, jedynie o niektórych C^*-algebrach funkcji macierzowo-wartościowych i ich uogólnieniach, zwanych AF-teleskopami (ang. *AF-telescopes*), wiadomo było, że mają tę własność ([34], [37]). Z drugiej strony, każdy nowy przykład projektywnej C^*-algebry znacząco wydłużał ich listę, gdyż wiadomo, że klasa ta jest zamknięta na branie produktów tensorowych z algebrami macierzowymi, branie produktów wolnych i kilka innych ogólnych konstrukcji (które są ważne w KK-teorii). To z tego względu Olsen i Pedersen rozstrzygnęli problem podnoszenia elementów nilpotentnych, zaś Loring i Pedersen postawili następujące pytanie, zawarte później w książce Loringa ([35]):

Pytanie 1 (Pytanie Loringa [35]). *Czy nilpotentne kontrakcje można podnieść?*

Twierdząca odpowiedź na to pytanie pozwoliłaby na podanie nowego przykładu projektywnej C^*-algebry: uniwersalna C^*-algebra

$$C^*\langle x^n = 0, \|x\| \leq 1\rangle,$$

a przykład ten byłby *odmiennej natury* od tych już dotychczas poznanych.

Zauważmy, że uniwersalna C^*-algebra dla relacji $x^n = 0$, bez żadnych restrykcji normowych, nie istnieje; to dlatego właśnie wynik Olsena i Pedersena sam w sobie nie wystarcza do podania nowego przykładu projektywnej C^*-algebry. Jednocześnie to główny powód, dla którego podnoszenie relacji $*$-wielomianowych z uwzględnieniem warunków normowych należy do szczególnie istotnych zadań.

Definicja 1.6 (Blackadar [5]). C^*-algebra D jest *semiprojektiwna* jeśli dla dowolnej C^*-algebry A, rosnącego ciągu ideałów I_n w A i każdego $*$-homomorfizmu z D do ${}^{A}\!/_{I}$, gdzie $I = \overline{\bigcup I_n}$, istnieje $n \in \mathbb{N}$ oraz $*$-homomorfizm z D do ${}^{A}\!/_{I_n}$ domykający następujący diagram przemienny:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, two heads] \\ & A/I_n \arrow[d, two heads] \\ D \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & A/I \end{tikzcd}$$

Z powodu pewnego rodzaju sztywności, semiprojektywne C^*-algebry są technicznie użyteczniejsze w praktyce. W szczególności, istnienie i porównywalność struktur granicznych przez asymptotyczną przeplatalność, kluczowy budulec programu klasyfikacyjnego Elliotta dla prostych C^*-algebr nuklearnych, silnie opiera się na własnościach jak ta. To dzięki temu granice proste semiprojektywnych C^*-algebr, jak AF- i AT-algebry, są szczególnie wygodne do opisu i staramy się konstruować modele tego typu z semiprojektywnymi składnikami.

Ponieważ semiprojektywne C^*-algebry zostały wprowadzone jako nieprzemienny analog absolutnych retraktów otoczeniowych (ang. *absolute neighbourhood retracts – ANRs*) w topologii, warto zadać pytanie do jakiego stopnia ta analogia ma sens. W szczególności, jednym z powodów dla którego topologia zajmuje się ANR-ami jest wynik mówiący o tym, że każda przestrzeń metryczna jest granicą odwrotną ANR-ów. W [5] Blackadar zapytał, czy podobny wynik w świecie nieprzemiennym również zachodzi:

Pytanie 2 (Pytanie Blackadara [5]). *Czy każda ośrodkowa C^*-algebra jest granicą prostą semiprojektywnych C^*-algebr?*

Problemy perturbacyjne i stabilność w C^*-algebrach.

Zagadnienia stabilności w C^*-algebrach dotyczą pytania czy elementy (pewnej) C^*-algebry, które *niemal* spełniają pewną relację C^*-algebraiczną muszą być blisko elementów, które tę relację spełniają. W pytaniach tych *niemal* oraz *blisko* mogą zależeć od konkretnego problemu.

Dwa bardzo znane przykłady problemów stabilności to pytanie Halmosa o niemal komutujące macierze ([28]; odpowiedź można znaleźć w [19, 32, 63, 16, 31]). Pierwsze z nich dotyczy zagadnienia samosprzężonych niemal-komutujących macierzy kontraktywnych: czy istnieje dla nich układ komutujących macierzy samosprzężonych; drugie z nich dotyczy macierzy unitarnych zamiast samosprzężonych. Tutaj *niemal* oraz *blisko* są wyrażone w terminach normy operatorowej algebr macierzowych. Oba pytania można zinterpretować jako zagadnienie podniesień. Niech $\prod M_n$ będzie C^*-algebrą wszystkich ograniczonych ciągów macierzy

$$\prod M_n = \{(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid T_n \in M_n,\ \sup_n \|T_n\| < \infty\}$$

z normą zadaną przez

$$\|(T_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup_n \|T_n\|.$$

Niech $\oplus M_n \subset \prod M_n$ będzie ideałem ciągów znikających w nieskończoności:

$$\oplus M_n = \{(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod M_n \mid \lim_{n\to\infty} \|T_n\| = 0\}.$$

Nietrudno zauważyć, że pytania Halmosa można zinterpretować jako następujące zagadnienia podniesień, odpowiednio:

1) Czy każde dwie komutujące samosprzężone kontrakcje w $\prod M_n \big/ \oplus M_n$ podnoszą się do dwóch komutujących samosprzężonych kontrakcji w $\prod M_n$?

2) Czy każde dwa komutujące elementy unitarne w $\prod M_n \big/ \oplus M_n$ podnoszą się do komutujących elementów unitarnych w $\prod M_n$?

Podobne pytania z uwzględnieniem znormalizowanej normy Hilberta-Schmidta i odpowiadające im zagadnienia podniesień są dyskutowane w [45, 24, 17, 21, 25, 26].

Relacja zadana przez $*$-wielomian $R(x_1, x_2, \ldots) = 0$ jest *stabilna* (dla normy operatorowej) jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdej C^*-algebry A oraz każdych elementów $a_1, a_2, \ldots$ in A spełniających $\|R(a_1, a_2, \ldots)\| \leq \delta$ można znaleźć elementy $b_1, b_2, \ldots$ w A spełniające $R(b_1, b_2, \ldots) = 0$ oraz $\|b_i - a_i\| \leq \varepsilon$.

Ta ogólna własność stabilności relacji daje się zinterpretować jako zagadnienie podniesień w następujący sposób. Dla C^*-algebr $A_1, A_2, \ldots$ niech

$$\prod A_n = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in A_n,\ \sup_n \|a_n\| < \infty\}$$

z normą zadaną przez

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup_n \|a_n\|$$

i niech

$$\oplus A_n = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod A_n \mid \lim_{n\to\infty} \|a_n\| = 0\}.$$

Wtedy powiemy, że relacja jest stabilna, jeśli dla każdych C^*-algebr $A_1, A_2, \ldots$ wszystkie elementy $\prod A_i/\oplus A_i$ spełniające tę relację podnoszą się do elementów $\prod A_i$ spełniających tę relację.

Przykładem relacji stabilnej jest relacja pochodząca od wielomianu jednej zmiennej $p(x) = 0$, co zostało dowiedzione przez Hadwina [23].

Algebraiczna podbudowa dla badania zagadnień stabilności/podniesień jest zapewniona przy pomocy pojęć słabej semiprojektywności, macierzowej semiprojektywności etc. dla C^*-algebr.

Definicja 1.7 ([15], [35])**.** C^*-algebra B jest słabo semiprojektywna, jeśli dla wszelkich C^*-algebr $A_1, A_2, \ldots$ oraz każdego $*$-homomorfizmu z B do $\prod A_i \big/ _{\oplus A_i}$ istnieje $*$-homomorfizm z B do $\prod A_i$ pasujący do następującego diagramu przemiennego:

$$\begin{tikzcd}
& \prod A_i \arrow[d] \\
B \arrow[ur, dashed] \arrow[r] & \prod A_i/\oplus A_i
\end{tikzcd}$$

Definicja 1.8 ([35])**.** C^*-algebra B jest macierzowo semiprojektywna jeśli dla dowolnego $*$-homomorfizmu z B do $\prod M_n \big/ _{\oplus M_n}$ istnieje $*$-homomorfizm z B do $\prod M_n$ pasujący do następującego diagramu przemiennego:

$$\begin{tikzcd}
& \prod M_n \arrow[d] \\
B \arrow[ur, dashed] \arrow[r] & \prod M_n/\oplus M_n
\end{tikzcd}$$

Nie jest trudno udowodnić, że jeśli uniwersalna C^*-algebra danej relacji istnieje, to relacja jest stabilna (macierzowo stabilna) wtedy i tylko wtedy gdy jej uniwersalna C^*-algebra jest słabo semiprojektywna (macierzowo semiprojektywna).

Zatem jeśli uniwersalna C^*-algebra relacji istnieje, otrzymujemy dostęp do C^*-algebraicznych narzędzi do badania rozmaitego sortu zagadnień stabilności.

W terminach C^*-algebraicznych, pytanie Halmosa staje się pytaniem o to, czy C^*-algebry $C(\mathbb{D})$ oraz $C(\mathbb{T}^2)$ funkcji ciągłych na dysku oraz na torusie są macierzowo semiprojektywne.

Z drugiej strony, wynik Hadwina o stabilności nie jest argumentem za słabą semiprojektywnością jakiejkolwiek C^*-algebry, gdyż uniwersalna C^*-algebra relacji wielomianowej $p(x) = 0$ nie istnieje (trzeba ją dopełnić o restrykcje na normę generatora).

Poza zagadnieniami stabilności, istnieje wiele innych pytań podobnego typu, które można nazwać zagadnieniami perturbacyjnymi i aproksymacyjnymi, i które również nierzadko można zinterpretować jako zagadnienia podniesień.

Jednym z najciekawszych pytań tego typu jest pytanie o najlepszą aproksymację wielomianową operatora operatorami zwartymi, zadane jednocześnie przez Akemanna i Pedersena [1] oraz Olsen [41]. Przez $\| \|_e$ będziemy rozumieć istotną normę operatora, tj. odległość operatora od podprzestrzeni operatorów zwartych $K(H)$.

Pytanie 3 (Pytanie Olsen oraz Akemanna i Pedersena [41], [1])**.** *Czy dla ustalonego operatora $T \in B(H)$ istnieje taka jego zwarta perturbacja $T+K$, że dla dowolnego wielomianu p zachodzi: $\|p(T+K)\| = \|p(T)\|_e$?*

Akemann i Pedersen zadali to pytanie również dla dowolnej algebry von Neumanna i jej ideału (zamiast $B(H)$ i jej ideału $K(H)$). Olsen zadała również pytanie w jego słabszym wariancie:

Pytanie 4 (Pytanie Olsen [41])**.** *Czy dla ustalonego operatora $T \in B(H)$ oraz wielomianu p istnieje taka jego zwarta perturbacja $T+K$, że $\|p(T+K)\| = \|p(T)\|_e$?*

W [43] Olsen i Plastiras rozważali aproksymatywną wersję Pytania 4:

Pytanie 5. *Czy dla ustalonego operatora $T \in B(H)$ oraz wielomianu p zachodzi:*

$$\inf_{K \in K(H)} \|p(T+K)\| = \|p(T)\|_e?$$

Wszystkie te pytania są równoważne pewnym zagadnieniom podniesień C^*-algebr, opiszemy je w szczegółach w dyskusji osiągnięć habilitacyjnych uzyskanych w [Hab5].

Pytania 1 – 5 powyżej będą dyskutowane w opisie osiągnięć habilitacyjnych.

1.4 Opis wyników zawartych w rozprawie

Osiągnięcia zawarte w artykułach [Hab1 - Hab6] zaprezentujemy w trzech działach tematycznych. W pierwszej omawiać będziemy wyniki artykułów [Hab1] i [Hab2], w drugiej części opiszemy wyniki artykułów [Hab3] i [Hab4], zaś w trzeciej zawrzemy omówienie wyników zawartych w artykułach [Hab5] oraz [Hab6].

1.4.1 Podnoszenie pewnych relacji wielomianowych wzbogaconych o restrykcje na normy, odpowiedź na Pytanie 1 –artykuły [Hab1] oraz [Hab2]

W artykule [Hab1] podaliśmy odpowiedź twierdzącą na Pytanie 1, w szczególności podając nowy przykład projektywnej C^*-algebry, mianowicie uniwersalną C^*-algebrę $C^*\langle x^n = 0, \|x\| \leq 1\rangle$. W tym celu rozwinęliśmy nowe podejście do zagadnień relacji wielomianowych połączonych z restrykcjami na normy. To podejście używa tzw. M-ideałów, pojęcia z teorii geometrii przestrzeni Banacha.

Aby lepiej wyjaśnić nasze podejście, należy wprowadzić dwa istotne składniki rozumowania Olsen i Pedersena zastosowanego do podnoszenia elementów nilpotentnych.

Po pierwsze dowodzą oni, że jeśli każdy element nilpotentny w każdej koronie $M(I)/_I$ podnosi się do elementu nilpotentnego w $M(I)$, to każdy element nilpotentny w każdej ilorazowej C^*-algebrze $A/_I$ podnosi się do elementu nilpotentnego w A.

Po drugie, pokazują oni, że dla elementu nilpotentnego b stopnia n w $M(I)/_I$ istnieją elementy $p_i, q_i \in M(I)$, $i = 1, \ldots, n-1$, takie, że dla każdego przeciwobrazu $a \in M(I)$ elementu b, element $\sum_{i=1}^{n-1} q_i a p_i \in M(I)$ jest nilpotentnym przeciwobrazem b.

Niech $T\colon M(I) \to M(I)$ będzie operatorem liniowym zadanym wzorem

$$Tx = \sum q_j x p_j, \qquad x \in M(I).$$

Przypomnijmy, że podprzestrzeń Y przestrzeni Banacha X jest zwana *proksymalną* (ang. *proximinal*), jeśli każdy wektor $x \in X$ ma najlepsze przybliżenie w Y, tzn. istnieje $y \in Y$ realizujący infimum $\|x - y\| = \inf\{\|x - \tilde{y}\| \colon \tilde{y} \in Y\}$.

Następujący wynik jest istotnym składnikiem dowodu naszego Twierdzenia 5 z [Hab1] i wyeksponujemy jego sformułowanie dla lepszego zrozumienia metod, które odpowiedziały na Pytanie 1.

Twierdzenie 1.9 ([Hab1]). *Niech I będzie C^*-algebrą oraz niech $b \in M(I)/_I$ będzie nilpotentną kontrakcją stopnia n. Niech $T\colon M(I) \to M(I)$ będzie operatorem jak powyżej. Jeśli $\overline{TI}$ jest proksymalna w $\overline{TM(I)}$, to b podnosi się do nilpotentnej kontrakcji rzędu n w $M(I)$.*

Przypomnimy pewne koncepcje geometryczne (zob. np. [29]).

Domknięta podprzestrzeń Y przestrzeni Banacha X jest zwana *L-uzupełnialną* (*M-uzupełnialną*), jeśli $X = Y \oplus Z$ dla pewnej domkniętej przestrzeni $Z \subset X$, oraz $\|y + z\| = \|y\| + \|z\|$ (odpowiednio, $\|y + z\| = \max\{\|y\|, \|z\|\}$) dla dowolnych $y \in Y$, $z \in Z$. Dalej, Y jest *M-ideałem* w X jeśli jej anihilator $Y^\perp$ jest L-uzupełnialny w X^*.

Przypomnijmy, że dla dowolnej algebry A, operator $A \to A$ nazywany jest *elementarnym*, jeśli jest postaci $x \mapsto \sum_{i=1}^{N} a_i x b_i$, dla pewnych (ustalonych) $a_i, b_i \in A$.

Poniższy wynik to kluczowy składnik techniczny odpowiedzi na Pytanie 1.

Twierdzenie 1.10 ([Hab1]). *Niech A będzie C^*-algebrą, I – jej ideałem, $S : A \to A$ – operatorem elementarnym. Wówczas $\overline{SI}$ jest M-ideałem w $\overline{SA}$.*

Powszechnie wiadomo, że M-ideały są podprzestrzeniami proksymalnymi ([29]), stąd poniższy wniosek.

Wniosek 1.11 ([Hab1]). *Niech A będzie C^*-algebrą, S operatorem elementarnym na A. Wówczas, dla każdego ideału I w A, podprzestrzeń $\overline{SI}$ jest proksymalna w $\overline{SA}$.*

Jak już wspomnieliśmy, dla zagadnienie podnoszenia nilpotentnych kontrakcji z dowolnych ilorazów wystarczy rozważać jedynie korony zamiast wszelkich ilorazów. Teraz, ponieważ operator T wprowadzony w dowodzie Olsen i Pedersena jest elementarny, Twierdzenie 1.9 oraz Wniosek 1.11 razem dają odpowiedź twierdzącą na Pytanie 1.

Twierdzenie 1.12 ([Hab1])**.** *Uniwersalna C^*-algebra $C^*\langle x^n = 0, \|x\| \leq 1\rangle$ jest projektywna.*

Jak już pisaliśmy w części 1.3, pojęcie (słabej) semiprojektywności daje możliwość atakowania zagadnień stabilnościowych od strony algebraicznej. Dokładniej, relacja jest stabilna na małe perturbacje wtedy i tylko wtedy, gdy jej uniwersalna C^*-algebra jest słabo semiprojektywna ([35]). W [23] D. Hadwin pokazał, że relacje wielomianowe w jednej zmiennej są stabilne na małe perturbacje. Jednak relacje wielomianowe bez żadnych restrykcji na normę ne mają uniwersalnej C^*-algebry, przez co nie dają nowych przykładów słabo semiprojektywnych C^*-algebr. Powstaje zatem naturalne pytanie czy relacje wielomianowe wzbogacone o restrykcje na normy wciąż są stabilne na małe perturbacje. W artykule [Hab2] podaliśmy odpowiedź na to pytanie przy założeniu, że wszystkie pierwiastki wielomianu są wielokrotne. Co więcej, pokazaliśmy tam, że powiązane uniwersalne C^*-algebry są semiprojektywne, a nie wyłącznie słabo semiprojektywne. Do tego zastosowaliśmy podejście przez M-ideały wprowadzone w [Hab1] i opisane powyżej.

Przypomnijmy, że C^*-algebra jest *rezydualnie skończeniewymiarowa* (ang. *residually finite dimensional, RFD*) , jeśli dopuszcza istnienie separującej rodziny reprezentacji skończeniewymiarowych. Główne wyniki [Hab2] formułują się następująco:

Twierdzenie 1.13 ([Hab2])**.** *Niech $p(t) = (t-\lambda_1)^{k_1} \dots (t-\lambda_n)^{k_n}$ będzie wielomianem takim, że $k_i \geq 2$, $i = 1, \dots, n$, i niech $C > 0$. Uniwersalna C^*-algebra $C^*\langle p(b) = 0, \|b\| \leq C\rangle$ jest semiprojektywna i rezydualnie skończeniewymiarowa.*

W opisie osiągnięć habilitacyjnych artykułu [Hab6] pokażemy, że wszystkie założenia o strukturze wielomianu p w Twierdzeniu 1.13 można usunąć.

1.4.2 Jednorodne relacje, nowe przykłady projektywnych C^*-algebr i zastosowania do odpowiedzi na Pytanie 2 – artykuły [Hab3] oraz [Hab4]

W artykule [Hab3] wraz z T. Loringiem odkryliśmy mnogość nowych przykładów projektywnych C^*-algebr. Dowiedliśmy, że klasa projektywnych C^*-algebr jest dość szeroka, wbrew temu co powszechnie sądzono wcześniej ([35]). Co więcej, dowiedliśmy, że stożek nad każdą ośrodkową C^*-algebrą jest izomorficzny z granicą prostą projektywnych C^*-algebr. To dało odpowiedź twierdzącą na pytanie Blackadara (Pytanie 2) dla stożków nad ośrodkowymi C^*-algebrami.

Nasze podejście do pytania Blackadara, choć algebraiczne, zainspirowane było następującym spostrzeżeniem: dla wielu przestrzeni topologicznych, które nie są ANR-ami, ich ε-otoczenia (po włożeniu przestrzeni w kostkę Hilberta) już są ANR-ami. Naszym planem było znalezienie niekomutatywnego analogonu dla pojęcia ε-otoczenia, by zapisać każdą ośrodkową C^*-algebrę jako granicę prostą jej *nieprzemiennych ε-otoczeń* i sprawdzić, kiedy owe *nieprzemienne ε-otoczenia* są (semi)projektywne.

Po pierwsze, dowodzimy że każda ośrodkowa C^*-algebra jest uniwersalną C^*-algebrą przeliczalnie wielu elementów (samosprzężonych) z przeliczalną ilością relacji będących nieprzemiennymi $*$-wielomianami, z których każdy zależy jedynie od skończonej liczby zmiennych.

Lemat 1.14 ([Hab3]). *Niech D będzie ośrodkową C^*-algebrą. Wtedy*

$$D \cong C^*\langle x_1, x_2, \ldots \mid -C_j \leq x_j \leq C_j \ (\forall j),\ p_k(x_1, x_2, \ldots) = 0 \ (\forall k)\rangle$$

dla pewnej przeliczalnej kolekcji nieprzemiennych wielomianów p_k.

Teraz definiujemy nieprzemienne ε-otoczenia C^*-algebry A przez *rozmycie* jej relacji generujących, tj. przez zastąpienie algebraicznych relacji $p_k(x_1, x_2, \ldots) = 0$ przez nierówności normowe $\|p_k(x_1, x_2, \ldots)\| \leq \varepsilon$. Niech zatem

$$A_\varepsilon = C^*\langle x_1, x_2, \ldots \mid -C_j \leq x_j \leq C_j \ (\forall j),\ \|p_k(x_1, x_2, \ldots)\| \leq \varepsilon \ (\forall k)\rangle$$

Wówczas $A = \varinjlim A_\varepsilon$ wraz z $\varepsilon \to 0$.

Poniższy lemat jest naszym narzędziem technicznym dowodzącym, że wiele relacji wielomianowych postaci $\|p_k(x_1, x_2, \ldots)\| \leq \varepsilon$ dopuszcza podniesienia (co prowadzi do projektywności *rozmytej* C^*-algebry A_ε).

Lemat 1.15 ([Hab3]). *Niech A będzie C^*-algebrą zaś I jej ideałem. Dla każdej jedynki aproksymatywnej u_λ w I kwazicentralnej dla A, dowolnego $a \in A$ oraz $0 \leq \delta \leq 1$ zachodzi:*

$$\limsup_\lambda \|a(1 - \delta u_\lambda)^{1/2}\| \leq \max(\|a + I\|, (1 - \delta)^{1/2}\|a\|).$$

Rozważmy nieprzemienne $*$-wielomiany które są jednorodne dla pewnego podzbioru swoich zmiennych. Zmieniając etykiety możemy przyjąć, że to pierwsze r zmiennych $x_2, \ldots, x_r$, zaś pozostałe zmienne nazywamy $y_1, y_2, \ldots$. Używać będziemy notacji krotkowej $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r)$ oraz $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots)$ oraz

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p(x_1, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots).$$

Dla skalara t pisać będziemy

$$t\mathbf{x} = (tx_1, \ldots, tx_r).$$

Powiemy, że p jest jednorodny stopnia d w pierwszych r zmiennych, jeśli

$$p(t\mathbf{x}, \mathbf{y}) = t^d p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

dla dowolnego rzeczywistego skalara t.

Jeśli $z_1, \ldots, z_r$ oraz $x_1, \ldots, x_r$ są elementami C^*-algebry A, to $\mathbf{z} \leq \mathbf{x}$ oznaczać będzie $z_j \leq x_j$ dla $j = 1, \ldots, r$. Przypomnijmy, że π symbolizuje kanoniczne odwzorowanie ilorazowe $A \to {}^{A}/_{I}$.

Poniżej prezentujemy jeden z naszych głównych wyników, które posłużyły do zaprezentowania szerokiej klasy nowych przykładów projektywnych i semi-projektywnych C^*-algebr. Można go streścić mówiąc, że nierówności na normę dla jednorodnych wielomianów można podnosić. Co więcej, jeśli wielomian jest jednorodny w zmiennych $x_1, \dots, x_r$, to dla zadanego podniesienia w pozostałych zmiennych $y_1, y_2, \dots$ można znaleźć podniesienie nierówności wielomianowej.

Twierdzenie 1.16 ([Hab3]). *Załóżmy, że $p_1, \dots, p_J$ są nieprzemiennymi $*$-wielomianami, które są jednorodne w pierwszych r zmiennych ze stopniami jednorodności $d_j \geq 1$. Niech $C_j > 0$ będą stałymi. Dla dowolnej C^*-algebry A i każdego ideału I w A, przy ustalonych $x_1, \dots, x_r$ oraz $y_1, y_2, \dots$ w A takich, że $\mathbf{x} \geq 0$ i*

$$\|p_j(\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y}))\| \leq C_j$$

istnieją $z_1, \dots, z_r$ w A spełniające $0 \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{x}$ oraz $\pi(\mathbf{z}) = \pi(\mathbf{x})$ i

$$\|p_j(\mathbf{z}, \mathbf{y})\| \leq C_j.$$

Głównym pomysłem stojącym za dowodem tego twierdzenia jest przemnożenie ustalonego podniesienia generatorów $x_1, \dots, x_r$ przez nieskończony iloczyn postaci $\prod_n (1 - \delta_n u_{\lambda_n})$, gdzie u_λ jest kwazicentralną jedynką aproksymatywną, zaś λ_n oraz $\delta_n > 0$ są dobrane w taki sposób, by nierówność wielomianowa była spełniona. Lemat 1.15 pozwala trzymać pod kontrolą normę elementu po przemnożeniu przez czynnik postaci $(1 - \delta_n u_{\lambda_n})$.

Używając poprzedniego Twierdzenia, dla każdej C^*-algebry generowanej przez jednorodne relacje wielomianowe otrzymujemy, że jej *nieprzemienne ε-otoczenia* są projektywne.

Twierdzenie 1.17 ([Hab3]). *Załóżmy, że $p_1, \dots, p_J$ są nieprzemiennymi $*$-wielomianami w $x_1, x_2, \dots$. Załóżmy, że $r \geq 1$ oraz każdy p_j jest jednorodny w $x_1, \dots, x_r$ ze stopniem jednorodności $d_j \geq 1$. Niech $\varepsilon > 0$, wtedy C^*-algebra*

$$A_\varepsilon = C^*\langle x_1, x_2, \dots \mid \|x_k\| \leq 1, k \in \mathbb{N}, \|p_j(x_1, x_2 \dots)\| \leq \varepsilon, j = 1, \dots, J\rangle$$

jest projektywna.

Jak za chwilę wyjaśnimy, relacje jednorodne pojawiają się naturalnie w prezentacji stożków nad ośrodkowymi C^*-algebrami. Przypomnijmy, że *stożek nad C^*-algebrą A* to C^*-algebra A-wartościowych funkcji ciągłych na $[0,1]$, znikających w zerze:

$$CA = \{f : [0,1] \to A \mid f \text{ ciągła}, f(0) = 0\} \cong C_0(0,1] \otimes A.$$

Lemat 1.18 ([Hab3]). *Załóżmy, że A jest C^*-algebrą z jedynką*

$$A = C_1^*\langle x_1, x_2, \dots \mid -C_k \leq x_k \leq C_k \ (\forall k), \ p_j(x) = 0 \ (\forall j)\rangle$$

gdzie $p_1, p_2, \ldots$ są nieprzemiennymi wielomianami w zmiennych x_k, stopnia D_j, bez wyrazu stałego. Wówczas stożek CA ma prezentację

$$CA = C^* \left\langle h, x_1, x_2, \ldots \;\middle|\; \begin{array}{cc} 0 \le h \le 1, & \\ hx_k = x_k h & (\forall k), \\ -C_k h \le x_k \le C_k h & (\forall k), \\ q_j(h, x) = 0 & (\forall j), \end{array} \right\rangle$$

gdzie q_j jest nieprzemiennym wielomianem otrzymanym z p_j przez domnożenie jednomianów w p_j przez h w takiej potędze, by q_j był jednorodny o stopniu jednorodności $D_j \geq 1$.

Zauważmy, że Lemat 1.18 ma w swoich założeniach, by wielomiany w prezentacji były bez wyrazu wolnego. To nie jest silne założenie – dla dowolnej C^*-algebry bez jedynki jej minimalne ujedynkowienie ma tę własność.

Lemat 1.18 oraz Twierdzenie 1.17 dają łącznie, że minimalne ujedynkowienie dowolnej C^*-algebry bez jedynki jest izomorficzne z granicą prostą projektywnych C^*-algebr. Używając dodatkowo znanych wyników o rozszerzeniach projektywnych C^*-algebr, otrzymujemy podobny wynik dla dowolnej C^*-algebry. Teraz już zdecydowanie nie można powiedzieć, by projektywność była *rzadka* ([35, p. 73]).

Twierdzenie 1.19 ([Hab3])**.** *Jeśli A jest ośrodkową C^*-algebrą, to jej stożek CA jest izomorficzny z granicą prostą przeliczalnego układu projektywnych C^*-algebr.*

Nasze metody są w stanie również odpowiedzieć na pytanie Blackadara dla wielu innych C^*-algebr, nie tylko dla stożków. Na przykład dla C^*-algebry funkcji ciągłych na cylindrze, jej ε-otoczenie zwane jest rozmytym cylindrem.

$$C_1^*\langle u, h \mid u^*u = uu^* = 1, -1 \le h \le 1, \|uh - hu\| \le \varepsilon\rangle.$$

Twierdzenie 1.20 ([Hab3])**.** *Dla dodatniego ε, rozmyty cylinder jest semiprojektywny. Zatem C^*-algebra funkcji ciągłych na cylindrze jest granicą prostą semiprojektywnych C^*-algebr.*

Techniki rozwinięte w [Hab3] były użyte później przez Thiela [61] by dać pełen opis granic prostych projektywnych C^*-algebr (okazało się, że to dokładnie C^*-algebry z własnością tzw. trywialnego kształtu); przez Archbolda, Roberta i Tikusisa [3] do badania własności Diximiera dla C^*-algebr; przez T. Loringa i F. Videsa [62], [33] do badań nad lokalnymi homotopiami macierzowymi.

W artykule [Hab4] skupiliśmy się na relacjach wielomianowych w elementach nilpotentnych. Rozważamy zatem rozmyte jednorodne relacje $*$-wielomianowe (w sensie opisanym powyżej) wspólnie z relacją $x_j^{N_j} = 0$. Nasze wyniki łączą razem i rozszerzają zarówno wyniki Akemanna i Pedesrena ((1)) oraz podnoszenie elementów nilpotentnych Olsen i Pedersena. Używamy naszej techniki do manipulowania rozmytymi jednorodnymi relacjami $*$-wielomianowymi (z [Hab3]) wspólnie z uproszczoną wersją Technicznego Twierdzenia Kasparowa (ang. *Kasparov's Technical Theorem*).

Twierdzenie 1.21 ([Hab4]). *Załóżmy, że $p_1, \ldots, p_J$ są nieprzemiennymi $*$-wielomianami, które są jednorodne w pierwszych r zmiennych, każdy ze stopniem jednorodności $d_j \geq 1$. Niech $C_j \geq 0$ będą stałymi rzeczywistymi oraz $N_k \geq 2$ będą stałymi całkowitymi, $k = 1, \ldots, r$. Dla każdej C^*-algebry A i jej ideału I, przy ustalonych $x_1, \ldots, x_r$ oraz $y_1, y_2, \ldots$ w A spełniających*

$$(\pi(x_k))^{N_k} = 0$$

oraz

$$\| p_j(\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \| \leq C_j,$$

istnieją $z_1, \ldots, z_r$ w A takie, że $\pi(\mathbf{z}) = \pi(\mathbf{x})$ oraz

$$z_k^{N_k} = 0,$$

a także

$$\| p_j(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \| \leq C_j.$$

Dzięki temu wynikowi byliśmy w stanie podać wiele nowych przykładów projektywnych i semiprojektywnych C^*-algebr.

Innymi słowy, relacja nilpotentności $x^N = 0$ ma lepsze własności niż tylko możliwość jej podniesienia: można ją dodać do wielu zbiorów relacji, które można podnieść, zachowując możliwość podniesień. Inne relacje z tą własnością to $x = x^*$ i $x \geq 0$. Wraz z T. Loringiem znaleźliśmy wiele innych przykładów relacji *lepszych niż jedynie dających się podnieść* w powyższym sensie. W [Hab4] rozważamy dwa takie przykłady: relację jednomianową $xyx^* = 0$ oraz relację "pół-ortogonalności" $x_i x_j = 0$, dla wszystkich i, j. Poniższe dwa wyniki pokazują, że te relacje połączone z jednorodnymi semi-algebraicznymi relacjami dają się podnieść. W efekcie można dzięki tym wynikom otrzymać nowe przykłady projektywnych i semiprojektywnych C^*-algebr.

Twierdzenie 1.22 ([Hab4]). *Niech $p_1, \ldots, p_J$ będą nieprzemiennymi $*$-wielomianami, które są jednorodne w podzbiorze pierwszych $2r$ zmiennych, każdy ze stopniem jednorodności $d_j \geq 1$. Niech $C_j > 0$ będą stałymi rzeczywistymi. Dla każdej C^*-algebry A oraz jej ideału I, przy ustalonych $x_1, \ldots, x_r$ oraz $y_1, \ldots, y_r$ i $z_1, z_2, \ldots$ w A takich, że*

$$\pi(x_k)\pi(y_k)\pi(x_k)^* = 0, \ (k = 1, \ldots, r)$$

oraz

$$\| p_j(\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})) \| \leq C_j, \ (j = 1, \ldots, J)$$

istnieją $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r$ oraz $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r$ w A takie, że $\pi(\bar{\mathbf{x}}) = \pi(\mathbf{x})$ oraz $\pi(\bar{\mathbf{y}}) = \pi(\mathbf{y})$ spełniające

$$\bar{x}_k \bar{y}_k \bar{x}_k^* = 0, \ (k = 1, \ldots, r)$$

$$\| p_j(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}}) \| \leq C_j, \ (j = 1, \ldots, J).$$

Twierdzenie 1.23 ([Hab4])**.** *Załóżmy, że $p_1, \dots, p_J$ są nieprzemiennymi $*$-wielomianami, które są jednorodne w zbiorze pierwszych r zmiennych, każdy o stopniu jednorodności $d_j \geq 1$. Niech $C_j > 0$ będą stałymi rzeczywistymi. Dla każdej C^*-algebry A i jej ideału I, przy ustalonych $x_1, \dots, x_r$ oraz $y_1, y_2, \dots$ w A takich, że*

$$\pi(x_k)\pi(x_l) = 0, \ (k, l = 1, \dots, r)$$

oraz

$$\|p_j(\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))\| \leq C_j, \ (j = 1, \dots, J)$$

istnieją $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r$ w A takie, że $\pi(\bar{x}) = \pi(x)$, a także

$$\bar{x}_k \bar{x}_l = 0, \ (k, l = 1, \dots, r)$$

oraz

$$\|p_j(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})\| \leq C_j, \ (j = 1, \dots, J).$$

1.4.3 Uogólniona wzór na promień spektralny i zastosowania do Pytania 4, Pytania 5 i innych problemów teorii operatorów i teorii C^*-algebr – artykuły [Hab5] oraz [Hab6]

Artykuł [Hab5] poświęcony jest pytaniom Olsen oraz Olsen i Plastriras (Pytanie 4 oraz Pytanie 5, zob. część 1.3). Istnieje wiele częściowych odpowiedzi na te pytania dla pewnych klas operatorów albo specjalnych wielomianów ([1, 40, 43, 41, 6, 60, 53]). Poniżej pokrótce omówimy stan wiedzy.

1. Jeśli p jest dowolny, a T jest istotnie normalny, subnormalny, n-normalny albo jest nilpotentnym ważonym sziftem, Pytanie 4 ma twierdzącą odpowiedź. Co więcej, K można wybrać niezależnie od wielomianu [43], [41];

2. Jeśli $p(T)$ jest zwarty, to Pytanie 4 ma twierdzącą odpowiedź [40];

3. Dla dowolnego T i p liniowego, odpowiedź na Pytanie 4 jest twierdząca. Co więcej, można wybrać K wspólny dla wszystkich wielomianów liniowych [6];

4. Jeśli p jest jednomianem $p(x) = x^n$, a T dowolny, Pytanie 4 ma twierdzącą odpowiedź. Co więcej K można wybrać wspólny dla dowolnej skończonej rodziny jednomianów. Jeśli T nie jest kwazinilpotentny, K można wybrać wspólnie dla wszystkich jednomianów [1];

5. Jeśli T bądź T^* jest kwazitriangularny, to $\inf_{K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})} \|p(T+K)\| = \|p(T)\|_e$. Więc dla takich T oraz dowolnego p pytanie Pytanie 5 ma twierdzącą odpowiedź [43].

Nasz artykuł [Hab5] udzielił całkowitej odpowiedzi na Pytanie 5. Co więcej, odpowiedzieliśmy na Pytanie 4 dla praktycznie wszystkich operatorów. Dokładniej, pokazaliśmy, że Pytanie 4 ma twierdzącą odpowiedź dla dowolnego p i T ze zbioru otwartego gęstego. Innymi słowy, operatory dla których nie znamy odpowiedzi na Pytanie 4 stanowią zbiór nigdziegęsty.

Można pokazać, że Pytanie 4 i Pytanie 5 można przeformułować jako zagadnienia podniesień w następujący sposób:

Pytanie 4'. *Czy relację $\|p(x)\| \leq C$ można podnieść z algebry Calkina?*

Pytanie 5': *Czy relację $\|p(x)\| < C$ można podnieść z algebry Calkina?*

W artykule [Hab5] znaleźliśmy wzór, który okazał się być bardzo dobrym narzędziem do rozwiązywania problemów powyższego typu. Dla elementu a w C^*-algebrze A, niech $r(a)$ będzie jego promieniem spektralnym; niech I będzie ideałem w A. W kolejnych akapitach obraz $\pi(a)$ elementu a przy działaniu kanonicznego odwzorowania ilorazowego $\pi\colon A \to {}^{A}/_{I}$ będzie oznaczany $\dot{a}$ dla zwięzłości.

Twierdzenie 1.24 ([Hab5]). *Niech A będzie C^*-algebrą, I jej ideałem oraz niech $a_1, \ldots, a_n \in A$ będą parami przemienne. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $e \in I$ taki, że*

$$\|(1+e)a_j(1+e)^{-1}\| - \varepsilon \;\leq\; \max\{r(a_j), \|\dot{a}_j\|\} \;\leq\; \|(1+e)a_j(1+e)^{-1}\|,$$

dla wszystkich j. Jeśli $r(a_j) < \|\dot{a}_j\|$, dla wszystkich j, to istnieje $e \in I$ taki, że

$$\max\{r(a_j), \|\dot{a}_j\|\} = \|(1+e)a_j(1+e)^{-1}\|,$$

dla wszystkich j.

W szczególności, dla pojedynczego elementu powyższy wynik tłumaczy się następująco:

Wniosek 1.25 ([Hab5]). *Niech A będzie C^*-algebrą, I jej ideałem, $a \in A$. Wówczas*

$$\max\{r(a), \|\dot{a}\|\} = \inf \|(1+e)a(1+e)^{-1}\| \tag{2}$$

(gdzie infimum po prawej stronie jest brane po wszystkich $e \in I$ takich, że $1+e$ jest odwracalny). Jeśli $\|\dot{a}\| > r(a)$ to infimum jest przyjmowane.

W szczególnym przypadku gdy $I = A$ nasz wynik redukuje się do znanego wzoru na promień spektralny Murphy'ego i Westa [39] (odkrytego najpierw przez Rotę w przypadku $B(H)$ [46]):

$$r(x) = \inf \|s^{-1}xs\|,$$

gdzie infimum jest brane po wszystkich elementach odwracalnych w C^*-algebrze. Nasz wzór (2) nazywany będzie uogólnionym wzorem na promień spektralny.

Niech teraz $p_1, \ldots, p_n$ będą wielomianami.

Dla operatora $T \in B(H)$, niech $\|T\|_e$ oraz $r_e(T)$ oznaczają jego istotną normę i istotny promień spektralny, odpowiednio (czyli normę i promień spektralny obrazu T w algebrze Calkina). Niech

$$\Sigma_{p_1,\ldots,p_n} = \{T \in B(\mathcal{H}) \mid r_e(p_i(T)) < \|p_i(T)\|_e, i = 1, \ldots, n\}.$$

Użycie naszego uogólnionego wzoru na promień spektralny okazało się nieodzowne w dowodzie następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1.26 ([Hab5]). *Dla dowolnych wielomianów $p_1, \ldots, p_n$ i dowolnego operatora $T \in \Sigma_{p_1,\ldots,p_n}$, Pytanie 4 (Olsena) ma odpowiedź twierdzącą. To znaczy istnieje operator zwarty K spełniający $\|p_i(T+K)\| = \|p_i(T)\|_e$, $i = 1, \ldots, n$.*

Po pierwsze, to Twierdzenie wskazało nowe specjalne klasy operatorów dla których Pytanie 4 ma odpowiedź twierdzącą, a te klasy były istotnie inne od klas operatorów dla których ta odpowiedź była już znana.

Twierdzenie 1.27 ([Hab5]). *Dla dowolnego operatora kwazinilpotentnego oraz wielomianu p bez wyrazu wolnego, Pytanie 4 ma odpowiedź twierdzącą.*

Dla operatorów nilpotentnych założenie $p(0) = 0$ nie jest potrzebne.

Twierdzenie 1.28 ([Hab5]). *Dla dowolnego operatora nilpotentnego T i dowolnego wielomianu p, Pytanie 4 ma odpowiedź twierdzącą.*

Poniższy wynik pokazuje, że dla dowolnych wielomianów $p_1, \ldots, p_n$, zbiór $\Sigma_{p_1,\ldots,p_n}$ składa się z niemal wszystkich operatorów. Twierdzenie 1.26 łącznie z tym wynikiem dowodzi, że Pytanie 4 ma odpowiedź twierdzącą dla wszystkich wielomianów i niemal wszystkich operatorów.

Twierdzenie 1.29 ([Hab5]). *Dla dowolnych wielomianów $p_1, \ldots, p_n$ zbiór $\Sigma_{p_1,\ldots,p_n}$ jest otwarty gęsty w $B(H)$. W szczególności dopełnienie zbioru $\Sigma_{p_1,\ldots,p_n}$ jest nigdziegęste.*

Również w naszem artykule [Hab5] odpowiedź na Pytanie 5 udało się uzyskać. De facto dowodzimy silniejszego wyniku niż ten, którego Pytanie 5 wymagało.

Ściśle rzecz biorąc, Pytanie 5 dotyczyło tego, czy każdy operator $T \in B(H)$ oraz wielomian p mają następującą własność:

$$\inf_{K \in K(H)} \|p(T+K)\| = \|p(T)\|_e.$$

Bądź, jak łatwo zauważyć, czy istnieje ciąg operatorów zwartych K_n taki, że $\|p(T+K_n)\| \to \|p(T)\|_e$. Dowiedliśmy nie tylko, że taki ciąg istnieje, ale i że jest on wspólny dla wszystkich wielomianów.

Twierdzenie 1.30 ([Hab5]). *Niech $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Istnieje ciąg $K_n \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ taki, że dla każdego wielomianu p zachodzi:*

$$\|p(T+K_n)\| \to \|p(T)\|_e.$$

W szczególności Pytanie 5 ma odpowiedź twierdzącą dla dowolnego operatora T oraz wielomianu p.

W tym samym artykule [Hab5] dowiedliśmy jeszcze jednego wyniku używając podobnych metod do tych użytych w naszym uogólnionym wzorze na promień spektralny. Pytaniem otwartym jest, czy dla dwóch komutujących operatorów, które są podobne do kontrakcji można znaleźć wspólne podobieństwo do kontrakcji ([12, p. 159]). W [18] podano odpowiedź twierdzącą w przypadku gdy oba operatory są podobne do ścisłych kontrakcji. Dowiedliśmy, że jeśli choć jeden z operatorów jest podobny do ścisłej kontrakcji, ten problem ma odpowiedź twierdzącą.

Twierdzenie 1.31 ([Hab5])**.** *Niech A będzie C^*-algebrą, $a, b \in A$, $[a, b] = 0$ oraz a jest podobny do ścisłej kontrakcji, zaś b jest podobny do kontrakcji. Wtedy istnieje odwracalny $c \in A$ taki, że*

$$\|cac^{-1}\| < 1, \quad \|cbc^{-1}\| \leq 1.$$

W artykule [Hab6] zastosowaliśmy nasz uogólniony wzór na promień spektralny dla badania stabilności i innych własności C^*-algebraicznych relacji wielomianowych w jednej zmiennej $p(x) = 0$ wzbogaconej o restrykcje na normy. Jak wspomnieliśmy w częściach 1.3 oraz 1.4.1, choć stabilność relacji wielomianowych $p(x) = 0$ była już dowiedziona przez D. Hadwina, istotne jest rozważanie stabilności $p(x) = 0$ wzbogaconej o oszacowania na normy, bądź – innymi słowy – badanie (słabej) semiprojektywności uniwersalnej C^*-algebry

$$C^* \langle p(b) = 0, \|b\| \leq C \rangle.$$

W artykule [Hab2] sprawdziliśmy to dla przypadku gdy wielomian miał wyłącznie wielokrotne pierwiastki. W [Hab6] udało nam się rozstrzygnąć przypadek ogólny. Co więcej, podobne metody pozwoliły dowieść istnienia separującej rodziny reprezentacji skończeniewymiarowych.

Twierdzenie 1.32 ([Hab6])**.** *Dla dowolnego wielomianu p jednej zmiennej, C^*-algebra*

$$C^* \langle p(b) = 0, \|b\| \leq C \rangle$$

jest semiprojektywna i rezydualnie skończeniewymiarowa.

W [40] C. Olsen dowiódła wyniku strukturalnego dla operatorów wielomianowo zwartych: jeśli operator jest wielomianowo zwarty, jest zwartą perturbacją operatora algebraicznego. Poniższy wynik rozszerza strukturalne twierdzenie Olsen.

Twierdzenie 1.33 ([Hab6])**.** *Dowolny $*$-homomorfizm z $C^* \langle p(b) = 0, \|b\| \leq C \rangle$ do algebry Calkina podnosi się do $*$-homomorfizmu o wartościach w $B(H)$. W szczególności grupa rozszerzeń $C^* \langle p(b) = 0, \|b\| \leq C \rangle$ jest trywialna:*

$$Ext\,(C^* \langle p(b) = 0, \|b\| \leq C \rangle) = 0.$$

Nowe zastosowania dla (semi)projektywności i zagadnień podniesień można znaleźć w moich nowszych pracach, które opiszę w części 2.2.

2 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

W tej części eseju przedstawiam krótki nieformalny opis moich innych osiągnięć naukowych. Dokładne definicje i sformułowania wyników można znaleźć w cytowanych pracach.

2.1 Artykuły opublikowane

2.1.1 O KK-teorii oraz E-teorii dla C^*-algebr

Tematy te dotyczą badań prowadzonych w trakcie doktoratu, a także kontynuowane po jego rozpoczęciu.

KK-bifunktor Kasparowa oraz E-bifunktor Connesa i Higsona odgrywają bardzo ważną rolę w programie klasyfikacji C^*-algebr i nieprzemiennej geometrii. Niech A będzie ośrodkową C^*-algebrą. Dwie C^*-algebry z nią związane mają zasadnicze znaczenie dla KK-teorii oraz E-teorii: drugie zawieszenie $S^2 = C_0(\mathbb{R}^2) \otimes A$ oraz C^*-algebra qA skonstruowana przez Cuntza w jego podejściu do KK-teorii. Dokładniej, Cuntz pokazał w [11], że $KK(A, B) = [qA, B \otimes \mathcal{K}]$ (gdzie [ ] oznacza (pół)grupę klas homotopii $*$-homomorfizmów), zaś Connes i Higson zdefiniowali w [7] E-bifunktor jako $E(A, B) = [[S^2A, B \otimes \mathcal{K}]]$ (gdzie [[ ]] oznacza (pół)grupę klas homotopii asymptotycznych morfizmów). Oba bifunktory mają uniwersalne kategoryjne konstrukcje oraz istnieje naturalna transformacja $KK(A, B) \to E(A, B)$ między nimi o bardzo skomplikowanej konstrukcji (pochodzącej od Connesa i Higsona).

Nasz wkład do tego tematu to ([52]):

1. Dowiedliśmy, że C^*-algebry S^2A oraz qA są równoważne w kategorii ośrodkowych C^*-algebr z morfizmami będącymi klasami homotopii morfizmów asymptotycznych.

2. Znaleźliśmy opis E-teorii podobny do opisu Cuntza dla KK-teorii. Podczas gdy $KK(A, B) = [qA, B \otimes \mathcal{K}]$, pokazaliśmy, że $E(A, B) = [[qA, B \otimes \mathcal{K}]]$.

3. Znaleźliśmy prosty opis naturalnej transformacji $KK(A, B) \to E(A, B)$.

4. W ogólności rozmaite pytania o to kiedy morfizmy asymptotyczne są homotopiczne z $*$-homomorfizmami były stawiane przez wielu ludzi w różnych wariantach. W szczególności można na nie patrzyć jak na homotopiczne warianty zagadnień stabilności na małe zaburzenia. Loring pokazał, że każdy asymptotyczny morfizm z $q\mathbb{C}$ do dowolnej C^*-algebry jest homotopiczny z $*$-homomorfizmem ([36]). Dowiedliśmy że dlia dowolnej nuklearnej C^*-algebry A, każdy asymptotyczny morfizm z $q\mathbb{A}$ do dowolnej C^*-algebry jest homotopiczny z $*$-homomorfizmem.

2.1.2 Kwantowa teoria informacji

W pierwszej dekadzie XXI wieku odkryto wiele niespodziewanych własności kanałów kwantowych. Jednym z nich była możliwość transmisji informacji kwantowej przez kanały o zerowej pojemności. To zjawisko zostało nazwane *superaktywacją* kanałów kwantowych. Zasadniczo rzecz biorąc, oznacza ono, że jedno użycie zaszumionego kanału nie jest w stanie transmitować informacji, lecz podwójne użycie kanału może transmitować informacji. To zjawisko czysto kwantowe, które nie ma prawa objawić się w świecie klasycznym. Oczywiście ten efekt silnie opiera się na wyborze rodzaju pojemności. W szczególności wiadomo ([59, 9, 10, 13]), że używając klasycznej/kwantowej pojemnośći na zerowe przesyłanie błędów, zjawisko superaktywacji może wystąpić.

We wspólnych artykułach z M.Szirokowem [47, 48] rozwinęliśmy nowe podejście do zagadnienia superaktywacji dla klasycznej pojemnośći na zerowe przesyłanie błędów. Dokładniej, zredukowaliśmy problem sprawdzenia, czy para kanałów kwantowych może być superaktywowana do pewnych problemów związanych z przestrzeniami tranzytywnymi operatorów. Pozwoliło to na konstrukcję pierwszego niskowymiarowego przykładu tak zwanej ekstremalnej wersji superaktywacji i znalezienie najmniejszych możliwych wymiarów dla których ten efekt może się objawić (to odpowiadało na pytanie postawione przez R. Duana). Nasze podejście otworzyło również drogę na ogólne badania kiedy para kanałów kwantowych dopuszcza superaktywację. Pokazaliśmy w szczególności, że dla kanały qubitowe, kanały łamiące splątanie oraz bozonowe kanały Gaussowskie nie mogą być superaktywowane przez żaden inny kanał.

2.1.3 Podmoduły Liego oraz zastosowania do teorii przestrzeni niezmienniczych

We wspólnych artykułach z Wiktorem Shulmanem [50, 56] badaliśmy podmoduły Liego bimodułów (Banacha) nad różnymi algebrami (Banacha), w szczególności ideały Liego algebr Banacha. Nasze wyniki miały zastosowania w teorii podprzestrzeni niezmienniczych. Znane jest twierdzenie Arvesona mówiące, że każda właściwa, domknięta w słabej topologii, algebra operatorów zawierająca MASĘ (ang. *maximal abelian* $*$*-subalgebra – MASA*) ma podprzestrzeń niezmienniczą. Uogólniamy ten wynik na przypadek algebr Liego (ostatecznie każda algebra operatorów ma strukturę algebry Liego). Dokładniej, jako jedno z zastosowań naszych wyników, pokazujemy, że każda właściwa, domknięta w topologii słabej, algebra Liego operatorów na przestrzeni Hilberta, jeśli zawiera MASĘ, ma podprzestrzeń niezmienniczą.

2.1.4 Inne artykuły opublikowane po obronie doktoratu

Ponad opisane już zagadnienia badawcze rozwijane po obronie doktoratu, badaliśmy również inne problemy i napisaliśmy artykuły na temat pewnych C^*-algebra generowanych przez projektory [51], o odwzorowaniach między algebrami typu AF, które są ekwiwariantne przy działaniu ich grup unitarnych [49], oraz na temat nektórych zagadnień geometrycznych pojawiających się przy badaniu własności Każdana (T) na przestrzeniach Banacha [55].

2.2 Artykuły przed publikacją

2.2.1 Stabilność śladowa dla C^*-algebr oraz grup – ostatnie badania związane z tematem habilitacji

W ostatnich artykułach z D. Hadwinem [25, 26] wprowadziliśmy pojęcie stabilności śladowej C^*-algebr oraz grup, która, zasadniczo rzecz biorąc, oznaczała, że niemal-reprezentacje C^*-algebry bądź grupy były bliskie faktycznym reprezentacjom. Tutaj *niemal* oraz *bliskie* mierzy się w terminach normy indukowanej przez ślad (np. na II_1-faktorach albo na macierzach). Tłumaczy się je na zagadnienie podniesień ze śladowych ultraproduktów C^*-algebr. Motywacją dla rozwijania ogólnej teorii był, przede wszystkim, nacisk na zagadnienia aproksymacji w śladzie w niedawnych wynikach programu klasyfikacyjnego prostych nuklearnych ośrodkowych C^*-algebr. Argumenty *śladowe*, choć niezwykle istotne dla całego programu, pozostają na dzień dzisiejszy dość mętne i niedostępne dla szerokiej społeczności; pogłębienie zrozumienia tych zagadnień może pomóc znaleźć czytelniejsze argumenty dla tego elementu programu. Po drugie, zagadnienia dotyczące stabilności śladowej pojawiły się naturalnie w kontekście grup soficznych (jak widać w pracach Arżancewy, Glebskiego, Paunescu). Wszystkie wyniki, które znane były przed naszymi pracami, nie wykraczały ponad relacje komutacyjne (tj. przemienne C^*-algebry). W naszych pracach znaleźliśmy daleko idące uogólnienia wszystkich dotychczasowych wyników stabilnościowych. W szczególności podaliśmy całkowitą charakteryzację kiedy nuklearna C^*-algebra jest stabilna śladowo oraz dla nienuklearnych C^*-algebr znaleźliśmy nowe przeszkody dla stabilności przez połączenie z wolnym wymiarem entropijnym Voiculescu. Pokazaliśmy, że wszystkie jednorelatorowe grupy z nietrywialnym centrum są stabilne śladowo w klasie II_1-faktorowych reprezentacji.

2.2.2 Zastosowania projektywności do charakteryzacji pewnych klas C^*-algebr – ostatnie badania związane z tematem habilitacji

Jak powszechnie wiadomo, promień spektralny nie jest funkcją ciągłą, lecz jedynie górnie półciągłą. Mimo to nie jest trudno pokazać, że na C^*-algebrze operatorów zwartych $K(H)$ jest ona ciągła. Naturalnym jest zatem pytanie o opis klasy C^*-algebr, dla których promień spektralny jest ciągły. W [57] W. Shulman oraz Ju. Turowski dowiedli, że na każdej C^*-algebrze typu I promień spektralny jest ciągły oraz zapytali czy typ I wyczerpuje rzeczoną klasę C^*-algebr. W niedawnym artykule [54] odpowiedzieliśmy na to pytanie twierdząco. Dla tego celu rozwinęliśmy podejście wykorzystujące projektywne C^*-algebry. Było to nowe i nieoczekiwane zastosowanie projektywności.

Podobne podejście zastosowaliśmy dla odpowiedzenia związane z granicami operatorów nilpotentnych. Jedno z bardziej znanych pytań Halmosa dotyczy opisu domknięcia zbioru operatorów nilpotentnych na ośrodkowej, nieskończeniewymiarowej, zespolonej przestrzeni Hilberta. Wyczerpującą odpowiedź podano w [2] (por. [30]). W szczególności odpowiedź pokazuje, że to domknięcie zawiera operatory z niezerowym spektrum. W niedawnym artykule P. Skoufranis [58] rozważał zbliżone zagadnienie dla C^*-algebr ze szczególnym uwzględnieniem granic normalnych operatorów nilpotentnych. Jego wyniki pokazywały w szczególności, że dla wielu C^*-algebr (np. dla wszystkich algebr UHF i czysto nieskończonych) domknięcie elementów nilpotentnych zawiera elementy z niezerowym spektrum. W naszym niedawnym artykule [54] znaleźliśmy następującą charakteryzację tej klasy C^*-algebr:

Domknięcie elementów nilpotentnych w C^*-algebrze A zawiera element z niezerowym spektrum wtedy i tylko wtedy, gdy A nie jest typu I.

W niedawnym artykule z K. Courtney [8] badaliśmy przyjmowanie normy oraz wzrost normy elementów pod działaniem reprezentacji skończeniewymiarowych i dowiedliśmy można w ten sposób scharakteryzować pewne klasy C^*-algebr. W [20] T. Fritz, T. Netzer i A. Thom pokazali, że w maksymalnej C^*-algebrze grupowej $C^*(F_n)$ grupy wolnej F_n wszystkie elementy algebry grupowej $\mathbb{C}F_n$ realizują normy pod działaniem reprezentacji skończeniewymiarowych. Traktując $\mathbb{C}F_n$ jako gęstą podalgebrę w $C^*(F_n)$, naturalnym staje się pytanie czy w innych C^*-algebrach RFD można znaleźć gęsty podzbiór elementów, które realizują normy pod działaniem reprezentacji skończeniewymiarowych. W [8] pokazaliśmy, że tak faktycznie jest. Co więcej, to dokładnie charakteryzuje klasę C^*-algebr RFD. Porównując z wynikiem Fritza, Netzera i Thoma, naturalne stają się kolejne pytania. Jednym z nich jest pytanie, czy istnieją elementy $C^*(F_n)$ inne niż elementy $\mathbb{C}F_n$, które realizują normę pod działaniem reprezentacji skończeniewymiarowych. Czy może tak być dla wszystkich elementów tej C^*-algebry?

Okazało się, że rozwinięte przez nas podejście używające projektywnych C^*-algebr jest idealnym narzędziem do rozwiązywania tego typu zadań. Używając tego podejścia pokazaliśmy, że wszystkie elementy C^*-algebr realizują normy w reprezentacjach skończeniewymiarowych wyłącznie wtedy, gdy C^*-algebra nie posiada nieprzywiedlnej reprezentacji nieskończeniewymiarowej. W szczególności oznacza to, że istnieją elementy w $C^*(F_n)$, które nie realizują normy pod działaniem reprezentacji skończeniewymiarowych. Nasze metody pozwoliły na dokładniejszy opis podzbioru elementów, które realizują normę pod działaniem reprezentacji skończeniewymiarowych. Pokazaliśmy między innymi, że ten zbiór jest zamknięty na dodawanie (na mnożenie) wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne są skończeniewymiarowe. W szczególności, oznacza to istnienie elementów w $C^*(F_n)\backslash\mathbb{C}F_n$ które realizują normę pod działaniem reprezentacji skończeniewymiarowych.

2.2.3 Inne badania przed publikacją

Ponad opisane już zagadnienia badawcze przed publikacją, badaliśmy również inne problemy i mamy artykuły przed publikacją na temat zagadnień podniesień w algebrach von Neumanna i odwzorowań zachowujących ortogonalność w algebrach operatorowych (ang. *order-zero maps*) o wartościach w algebrze von Neumanna ciągów asymptotycznie centralnych [27], oraz na temat geometrii dynamiki kwantowej w nieskończonym wymiarze [22].

2.3 Nagrody, granty i wyróżnienia

Nagroda *Za wybitne badania w Teorii Operatorów i Algebrach Operatorowych* z Eric Nordgren Research Fellowship Fund, University of New Hampshire, 2016.

Grant RISE H2020-MSCA-RISE-2015-691246-QUANTUM DYNAMICS
Kierownik Projektu: Prof. Piotr M. Hajac
Rola: Wykonawca, członek zespołu badawczego.
Okres: 2016 – 2019

Projekt międzynarodowy współfinansowany – polski grant uzupełniający grantu Fundacji Simonsa – numer 3437/SIMONS/2015/0
Rola: Wykładowca w ramach semestru Simonsa *Noncommutative geometry the next generation*
Okres: 2015 – 2019

Grant Maestro Narodowego Centrum Nauki DEC-2012/06/A/ST1/00256
Kierownik Projektu: Prof. Janusz Grabowski
Rola: Wykonawca, członek zespołu badawczego.
Okres: 2013 – 2018

Grant Instytutu Mittag-Lefflera (Sztokholm, Szwecja) na dwumiesięczny pobyt badawczy, 2010.

2.4 Inna działalność naukowa

2.4.1 Nauczanie kursów specjalnych

Noncommutative topology for beginners (cykl wykładów dla doktorantów i postdoków w ramach Semestru Simonsa *Noncommutative geometry the next generation*), 2016.

2.4.2 Wyjazdy w ramach współpracy naukowej

- **04/17**: University of Copenhagen, Kopenhaga, Dania.
- **03/16**: University of Besanson, Besançon, Francja.
- **11/13 – 12/13**: Chalmers University, Göteburg, Szwecja
- **11/10 – 12/10**: Mittag-Leffler Institute, Sztokholm, Szwecja
- **10/10**: University of New Hampshire, USA.
- **10/09**: University of New Hampshire, USA.

- **09/08**: University of New Mexico, USA.
- **01/07 – 06/07**: University of New Hampshire, USA.

2.4.3 Wystąpienia konferencyjne, colloquium i seminaryjne

Konferencje z referatem zaproszonym

- **06/18** COSY 2018 (the 46th annual Canadian Operator Symposium), Winnipeg, Kanada.
- **06/18** Workshop *Linear preservers*, Queen's University Belfast, Belfast, Wielka Brytania.
- **05/18** NCGOA 2018 (Noncommutative Geometry and Operator Algebras summer school) *C*-algebras and dynamics*, Münster, Niemcy.
- **05/18** Workshop *Interactions between Operator Space Theory and Quantum Probability with Applications to Quantum Information*, Oberwolfach, Niemcy.
- **04/16** YFAW 2016 (The Young Functional Analysts' Workshop), Belfast, Wielka Brytania.
- **02/16** Workshop *Operator Spaces and Noncommutative Geometry in Interaction*, Oberwolfach, Niemcy.
- **09/12** Semiprojectivity workshop, Kopenhaga, Dania.
- **11/11** Virginia Operator Theory and Complex Analysis Meeting, Richmond, USA.
- **05/11** Joint Oslo-Trondheim Operator Algebra Seminar, Trondheim, Norwegia.
- **10/10** Algebra Geometry Mathematical Physics Workshop (AGMP-6), Tjarno, Szwecja.
- **11/08** Oresund meeting, University of Lund, Szwecja.
- **09/08** West Coast Operator Algebra Seminar (WCOAS), Arizona, USA.
- **09/08** Crimean Autumn Math. School-Symposium on Spectral and Evolutionary Problems, Ukraina.

Colloquium

- **06/16** (joint talk with P. Hajac) Uniwersytet w Białymstoku, Polska.
- **05/16** (joint talk with P. Hajac) Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, Polska.

- **05/16** (joint talk with P. Hajac) Katolicki Uniwersytet Lubelski Jana Pawła II, Polska.
- **04/16** (joint talk with P. Hajac) Uniwersytet Łódzki, Polska.
- **04/16** (joint talk with P. Hajac) Uniwersytet Wrocławski, Polska.
- **11/13** Chalmers University of Technology, Szwecja.
- **10/10** Dartmouth College, USA.
- **12/09** University of Aarhus, Dania.
- **06/09** University of Marburg, Niemcy.
- **09/08** University of New Mexico, USA.

Wybrane referaty na seminariach

- **10/17** Operator Algebra Seminar, University of Leuven, Leuven, Belgia.
- **05/17** Seminarium Nieprzemiennej Geometrii, IMPAN, Warszawa.
- **05/17** Seminarium "Kwantowa Informacja i Chaos", Instytut Fizyki, Uniwersytet Jagielloński, Kraków.
- **02/17** Analysis Seminar at the University of Glasgow, Glasgow, Wielka Brytania.
- **06/16** Seminarium "Algebry Operatorów i Grupy Kwantowe", Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski.
- **03/16** Functional Analysis Seminar, University of Besancon, Francja.
- **01/15** Seminarium Nieprzemiennej Geometrii, IMPAN, Warszawa.
- **12/14** Seminarium "Metody Geometrii w Fizyce", IMPAN, Warszawa.
- **11/11** Operator Theory Seminar, University of Virginia, Charlottesville, USA.
- **04/11** IMADA seminar, University of Southern Denmark, Odense, Dania.
- **06/09** Functional Analysis seminar, University of Tubingen, Niemcy.
- **02/08** Analysis seminar, Chalmers University of Technology, Szwecja.
- **02/08** Operator Algebra seminar, University of Copenhagen, Dania.
- **11/07** Banach Algebras seminar, Moscow State University, Rosja.
- **04/07** Analysis seminar, Michigan State University, USA.

2.4.4 Działalność edytorska, organizacyjna, recenzencka, etc.

Edytor *Annals of Functional Analysis* (od kwietnia 2017)

Recenzje dla następujących czasopism: *Operators and Matrices*, *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, *Glasgow Mathematical Journal*, *Banach Journal of Mathematical Analysis*, *Operator Theory: Advances and Applications*.

Organizator i prowadzący (z M. Gaczkowskim and T. Bice) seminarium *Young Researchers Colloquium* w IMPAN (od 2016)

Członek komisji socjalnej w IMPAN (od 2015)

Organizator (z S. Eilers) spotkania badawczego *Workshop on Semiprojectivity and Asymptotic Morphisms*, 2010, Uniwersytet Kopenhaski, Dania.

Literatura

[1] Akemann, C. A., and Pedersen, G. K. Ideal perturbations of elements in C^*-algebras. *Math. Scand. 41*, 1 (1977), 117–139.

[2] Apostol, C., Foia¸s, C., and Voiculescu, D. On the norm-closure of nilpotents. II [reprint of mr0417828]. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 58*, 3 (2013), 313–321.

[3] Archbold, R., Robert, L., and Tikuisis, A. The Dixmier property and tracial states for C^*-algebras. *J. Funct. Anal. 273*, 8 (2017), 2655–2718.

[4] Arveson, W. Notes on extensions of C^*-algebras. *Duke Math. J. 44*, 2 (1977), 329–355.

[5] Blackadar, B. Shape theory for C^*-algebras. *Math. Scand. 56*, 2 (1985), 249–275.

[6] Chui, C. K., Legg, D. A., Smith, P. W., and Ward, J. D. On a question of Olsen concerning compact perturbations of operators. *Michigan Math. J. 24*, 1 (1977), 119–127.

[7] Connes, A., and Higson, N. Déformations, morphismes asymptotiques et K-théorie bivariante. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 311*, 2 (1990), 101–106.

[8] Courtney, K., and Shulman, T. Quantum families of invertible maps and related problems. *Canad. J. Math.*. In press.

[9] Cubitt, T. S., Chen, J., and Harrow, A. W. Superactivation of the asymptotic zero-error classical capacity of a quantum channel. *IEEE Trans. Inform. Theory 57*, 12 (2011), 8114–8126.

[10] Cubitt, T. S., and Smith, G. An extreme form of superactivation for quantum zero-error capacities. *IEEE Trans. Inform. Theory 58*, 3 (2012), 1953–1961.

[11] Cuntz, J. A new look at KK-theory. *K-Theory 1*, 1 (1987), 31–51.

[12] Davidson, K. R. Polynomially bounded operators, a survey. In *Operator algebras and applications (Samos, 1996)*, vol. 495 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997, pp. 145–162.

[13] Duan, R. Super-Activation of Zero-Error Capacity of Noisy Quantum Channels. *ArXiv e-prints* (June 2009).

[14] Effros, E. G., and Kaminker, J. Homotopy continuity and shape theory for C^*-algebras. In *Geometric methods in operator algebras (Kyoto, 1983)*, vol. 123 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.* Longman Sci. Tech., Harlow, 1986, pp. 152–180.

[15] Eilers, S. r., and Loring, T. A. Computing contingencies for stable relations. *Internat. J. Math. 10*, 3 (1999), 301–326.

[16] Exel, R., and Loring, T. Almost commuting unitary matrices. *Proc. Amer. Math. Soc. 106*, 4 (1989), 913–915.

[17] Filonov, N., and Kachkovskiy, I. A Hilbert-Schmidt analog of Huaxin Lin's Theorem. *ArXiv e-prints* (Aug. 2010).

[18] Fong, C. K., and Sourour, A. R. Renorming, similarity and numerical ranges. *J. London Math. Soc. (2) 18*, 3 (1978), 511–518.

[19] Friis, P., and Rørdam, M. Almost commuting self-adjoint matrices—a short proof of Huaxin Lin's theorem. *J. Reine Angew. Math. 479* (1996), 121–131.

[20] Fritz, T., Netzer, T., and Thom, A. Can you compute the operator norm? *Proc. Amer. Math. Soc. 142*, 12 (2014), 4265–4276.

[21] Glebsky, L. Almost commuting matrices with respect to normalized Hilbert-Schmidt norm. *ArXiv e-prints* (Feb. 2010).

[22] Grabowski, J., Kuś, M., Marmo, G., and Shulman, T. Geometry of quantum dynamics in infinite dimension. *ArXiv e-prints* (Nov. 2017).

[23] Hadwin, D. Lifting algebraic elements in C^*-algebras. *J. Funct. Anal. 127*, 2 (1995), 431–437.

[24] Hadwin, D., and Li, W. A note on approximate liftings. *Oper. Matrices 3*, 1 (2009), 125–143.

[25] Hadwin, D., and Shulman, T. Quantum families of invertible maps and related problems. *Integral Equations Operator Theory*. In press.

[26] Hadwin, D., and Shulman, T. Stability of group relations under small Hilbert-Schmidt perturbations. *ArXiv e-prints* (June 2017).

[27] Hadwin, D., and Shulman, T. Variations of projectivity for C*-algebras. *ArXiv e-prints* (Sept. 2017).

[28] Halmos, P. R. Some unsolved problems of unknown depth about operators on Hilbert space. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 76*, 1 (1976/77), 67–76.

[29] Harmand, P., Werner, D., and Werner, W. *M-ideals in Banach spaces and Banach algebras*, vol. 1547 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[30] Herrero, D. A. *Approximation of Hilbert space operators. Vol. I*, vol. 72 of *Research Notes in Mathematics*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1982.

[31] Kachkovskiy, I., and Safarov, Y. Distance to normal elements in C^*-algebras of real rank zero. *J. Amer. Math. Soc. 29*, 1 (2016), 61–80.

[32] Lin, H. Almost commuting selfadjoint matrices and applications. In *Operator algebras and their applications (Waterloo, ON, 1994/1995)*, vol. 13 of *Fields Inst. Commun.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 193–233.

[33] Loring, T., and Vides, F. Quantum families of invertible maps and related problems. *Banach J. Math. Anal.*. In press.

[34] Loring, T. A. Projective C^*-algebras. *Math. Scand. 73*, 2 (1993), 274–280.

[35] Loring, T. A. *Lifting solutions to perturbing problems in C^*-algebras*, vol. 8 of *Fields Institute Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[36] Loring, T. A. Perturbation questions in the Cuntz picture of K-theory. *K-Theory 11*, 2 (1997), 161–193.

[37] Loring, T. A., and Pedersen, G. K. Projectivity, transitivity and AF-telescopes. *Trans. Amer. Math. Soc. 350*, 11 (1998), 4313–4339.

[38] Murphy, G. J. *C^*-algebras and operator theory.* Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990.

[39] Murphy, G. J., and West, T. T. Spectral radius formulae. *Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 22*, 3 (1979), 271–275.

[40] Olsen, C. L. A structure theorem for polynomially compact operators. *Amer. J. Math. 93* (1971), 686–698.

[41] Olsen, C. L. Norms of compact perturbations of operators. *Pacific J. Math. 68*, 1 (1977), 209–228.

[42] Olsen, C. L., and Pedersen, G. K. Corona C^*-algebras and their applications to lifting problems. *Math. Scand. 64*, 1 (1989), 63–86.

[43] Olsen, C. L., and Plastiras, J. K. Quasialgebraic operators, compact perturbations, and the essential norm. *Michigan Math. J. 21* (1974), 385–397 (1975).

[44] Pedersen, G. K. *C^*-algebras and their automorphism groups*, vol. 14 of *London Mathematical Society Monographs.* Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1979.

[45] Rosenthal, P. Research Problems: Are Almost Commuting Matrices Near Commuting Matrices? *Amer. Math. Monthly 76*, 8 (1969), 925–926.

[46] Rota, G.-C. On models for linear operators. *Comm. Pure Appl. Math. 13* (1960), 469–472.

[47] Shirokov, M. E., and Shulman, T. On superactivation of zero-error capacities and reversibility of a quantum channel. *Comm. Math. Phys. 335*, 3 (2015), 1159–1179.

[48] Shirokov, M. E., and Shulman, T. V. On superactivation of one-shot quantum zero-error capacity and the related property of quantum measurements. *Probl. Inf. Transm. 50*, 3 (2014), 232–246. Translation of Problemy Peredachi Informatsii **5**0 (2014), no. 3, 35–50.

[49] Shul' man, T. Unitarily covariant mappings in approximately finite-dimensional algebras. *Fundam. Prikl. Mat. 13*, 8 (2007), 213–227.

[50] Shul' man, V. S., and Shul' man, T. V. On Lie submodules and tensor algebras. *Funktsional. Anal. i Prilozhen. 43*, 2 (2009), 91–96.

[51] Shulman, T. On universal C^*-algebras generated by n projections with scalar sum. *Proc. Amer. Math. Soc. 137*, 1 (2009), 115–122.

[52] Shulman, T. The C^*-algebras $qA \otimes \mathcal{K}$ and $S^2 A \otimes \mathcal{K}$ are asymptotically equivalent. *J. Operator Theory 63*, 1 (2010), 85–100.

[53] SHULMAN, T. Semiprojectivity of universal C^*-algebras generated by algebraic elements. *Proc. Amer. Math. Soc. 140*, 4 (2012), 1363–1370.

[54] SHULMAN, T. Continuity of spectral radius and type I C^*-algebras. *ArXiv e-prints* (July 2017).

[55] SHULMAN, T. On subspaces of invariant vectors. *Studia Math. 236*, 1 (2017), 1–11.

[56] SHULMAN, T., AND SHULMAN, V. On algebras generated by inner derivations. *J. Operator Theory 65*, 2 (2011), 281–305.

[57] SHULMAN, V. S., AND TUROVSKII, Y. V. Topological radicals, V. From algebra to spectral theory. In *Algebraic methods in functional analysis*, vol. 233 of *Oper. Theory Adv. Appl.* Birkhäuser/Springer, Basel, 2014, pp. 171–280.

[58] SKOUFRANIS, P. Normal limits of nilpotent operators in C^*-algebras. *J. Operator Theory 72*, 1 (2014), 135–158.

[59] SMITH, G., AND YARD, J. Quantum communication with zero-capacity channels. *Science 321*, 5897 (2008), 1812–1815.

[60] SMITH, R. R., AND WARD, J. D. A note on polynomial operator approximation. *Proc. Amer. Math. Soc. 88*, 3 (1983), 491–494.

[61] THIEL, H. Inductive limits of projective C*-algebras. *ArXiv e-prints* (May 2011).

[62] VIDES, F. Local Deformation of Matrix Words. *ArXiv e-prints* (Aug. 2016).

[63] VOICULESCU, D. Asymptotically commuting finite rank unitary operators without commuting approximants. *Acta Sci. Math. (Szeged) 45*, 1-4 (1983), 429–431.