Autoreferat

1 Imię i nazwisko

Thomas Leistner

Aktualne zatrudnienie: Senior Lecturer in Mathematical Sciences

Adres: School of Mathematical Sciences, University of Adelaide, SA 5005, Australia

E-mail: thomas.leistner@adelaide.edu.au

2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe/artystyczne - z podaniem nazwy, miejsca i roku uzyskania tytułu rozprawy doktorskiej

***Doctor rerum naturalium* (Ph.D.) in Mathematics** Humboldt-Universität Berlin, 2004, tytuł rozprawy: *Holonomy and Parallel Spinors in Lorentzian Geometry*, promotor: Helga Baum, grade: *summa cum laude* ("with highest honour").

Diploma in Mathematics (*Diplom-Mathematiker*) Humboldt Universität Berlin, 1999 tytuł rozprawy: *The Huygens Principle for the Dirac Operator on Lorentzian Manifolds*, promotor; Helga Baum, ocena: bardzo dobry.

3 Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych/artystycznych:

od 02/2016	Senior Lecturer, School of Mathematical Sciences, University of Adelaide
02/2012–01/2016	ARC Future Fellow and Senior Lecturer, School of Mathematical Sciences, University of Adelaide
07/2009–01/2012	Lecturer, School of Mathematical Sciences, University of Adelaide
04/2007–07/2009	*Juniorprofessor* (assistant professor), Department of Mathematics, Universität Hamburg
01/2007–03/2007	Research Associate, Humboldt-Universität Berlin, funded by the Priority Programme "Global Differential Geometry" of the German Research Foundation
11/2006–12/2006	Research Associate, Humboldt-Universität Berlin, Collaborative Research Centre 647 "Space-Time-Matter. Geometric and Analytic Structures"
2006 – 2007	Research Associate (funded by the *German Research Foundation*), Institute for Mathematics, Humboldt-Universität Berlin
2003 – 2006	ARC Research Associate and Assistant Lecturer, School of Mathematical Sciences, University of Adelaide

4 Opis dorobku naukowego i osiągnięć naukowych

4.1 Tytuł osiągnięcia naukowego

Pojęcie holonomii w geometrii konforemnej: jej redukcje, klasyfikacja i związek z metrykami Feffermana-Grahama.

4.2 Prace zawierające główne rezultaty i osiągnięcia będące podstawą wniosku habilitacyjnego

Osiągnięcia naukowe będące podstawą niniejszego wniosku o nadanie tytułu doktora habilitowanego oznaczone są poniżej symbolami [**Hab1**]-[**Hab9**]. Z wyjątkiem [**Hab9**] są one opublikowane. Praca [**Hab 9**] jest przyjęta do druku w *J. Differential Geometry* dnia 8-mego lutego 2018 roku, i przekazana do drukarni tego czasopisma. Każda z prac [**Hab1**]-[**Hab9**] jest zaopatrzona w załącznik z oświadczeniami współautorów o ich wkładzie w jej powstanie.

[**Hab1**] T. Leistner. Conformal holonomy of C-spaces, Ricci-flat, and Lorentzian manifolds. *Differential Geom. Appl.*, 24(5):458–478, 2006.

[**Hab2**] S. Armstrong and T. Leistner. Ambient connections realising conformal tractor holonomy. *Monatsh. Math.*, 152(4):265–282, 2007.

My contribution to [**Hab2**] is 40%.

[**Hab3**] T. Leistner and P. Nurowski. Ambient metrics for n-dimensional pp-waves. *Comm. Math. Phys.*, 296(3):881–898, 2010.

My contribution to [**Hab3**] is 70%

[**Hab4**] A. J. Di Scala and T. Leistner. Connected subgroups of $\mathrm{SO}(2,n)$ acting irreducibly on $\mathbb{R}^{2,n}$. *Israel J. Math.*, 182:103–121, 2011.

My contribution to [**Hab4**] is 50%

[**Hab5**] T. Leistner and P. Nurowski. Ambient metrics with exceptional holonomy. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, XI:407–436, 2012.

My contribution to [**Hab5**] is 50%

[**Hab6**] T. Leistner and P. Nurowski. Conformal pure radiation with parallel rays. *Classical Quantum Gravity*, 29(5):055007, 15, 2012.

My contribution to [**Hab6**] is 70%

[**Hab7**] J. Alt, A. J. Di Scala, and T. Leistner. Conformal holonomy, symmetric spaces, and skew symmetric torsion. *Differential Geom. Appl.*, 33:4–43, 2014.

My contribution to [**Hab7**] is 50%

[**Hab8**] T. Leistner and A. Lischewski. The ambient obstruction tensor and conformal holonomy. *Pacific J. Math.*, 290(2):403–436, 2017.

My contribution to [**Hab8**] is 50%

[**Hab9**] I. M. Anderson, T. Leistner, and P. Nurowski. Explicit ambient metrics and holonomy. *J. Differential Geom.*, accepted 8 February 2018, in press, 2018. Preprint at arXiv:1501.00852.

My contribution to [**Hab9**] is 35%

4.3 Omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników: holonomie w geometri konforemnej.

4.3.1 Wprowadzenie do holonomii i geometrii konforemnej

Wstęp. Niniejszy autoreferat opisuje wyniki moich badań dotyczących holonomii w geometrii konforemnej. Pojęcie holonomii jest bardzo przydatne w geometrii riemannowskiej (bądź lorentzowskiej), między innymi z tego powodu, że znajomość holonomii dostarcza wiele istotnych informacji dotyczących rozwiązań ważnych równań różniczkowych cząstkowych związanych z tensorem metrycznym. Moje badania dotyczą holonomii w kontekście szerszej niz riemannowska (lorentzowska) klasy geometrii, mianowicie geometrii konforemnej. W geometrii konforemnej podstawowymi wielkościami nie są długości wektorów czy krzywych ale kąty między nimi; podstawowym obiektem geometrycznym, zamiast metryki, jest klasa równoważności metryk, złożona z metryk różniących się skalą. To sprawia, że badanie niezmienników geometrycznych jest w przypadku konforemnym bardziej złożone niż w przypadku ściśle metrycznym. Niemniej jednak, pewne pojęcia z geometrii metrycznej mogą być uogólnione na przypadek konforemny. Tak jest w przypadku pojęcia holonomii. Daje się ją zdefiniować także w przypadku konforemnym, i w geometrii konforemnej jest ona równie przydatna jak w geometrii metrycznej

Zarówno holonomia jak i geometria konforemna znajdują swoje zastosowanie w fizyce teoretycznej. Rozmaitości riemannowskie oraz lorentzowskie ze specjalną holonomią są podstawą opisu supergrawitacyjnego tła w teorii strun. Ponadto geometria konforemna, a w szczególności konstrukcje metryki Feffermana-Grahama, bądź metryki Poincare'go-Einsteina związanych z daną klasą konforemną, stanowi podstawę dualności AdS/CFT pomiędzy polami kwantowymi a klasycznymi. W ostatnich latach 4-ro wymiarowa geometria konforemna Lorentzowska jest też używana przez Penrose'a w jego nowym podejściu do kosmologii, gdzie w sposób konforemny łączy się późne etapy ewolucji Wszechświata z etapami początkowymi ("konforemna cykliczna kosmologia").

W dalszej części autoreferatu przedstawione są moje wyniki dotyczące struktur konforemnych, redukcji ich konforemnych holonomii, oraz metryk Feffermana-Grahama. Rezultaty podzielone są na następujące trzy grupy zagadnień:

1. *Struktury geometryczne związane ze zredukowaną holonomią konforemną:* Opiszę struktury geometryczne, których istnienie na rozmaitości powoduje, że holonomia koforemna ulega redukcji, i pokażę, że redukcja taka jest równoważna z istnieniem w klasie konforemnej specjalnych metryk, takich jak np. metryki einsteinowskie czy metryki posiadające nilpotentny tensor Ricciego stopnia 2.

2. *Klasyfikacja konforemnych holonomii:* Zaprezentowana zostanie częściowa klasyfikacja konforemnych holonomii głównie dla sygnatury lorentzowskiej i riemannowskiej. Wyniki te są otrzymane w większości metodami algebry liniowej, ale także istotnie wykorzystują metody dostępne z geometrycznej analizy metryk Feffermana-Grahama. Jednym z rezultatów tutaj jest odpowiedź na pytanie, czy każda konforemna holonomia może być zrealizowana jako holonomia pewnej metryki pseudo-riemannowskiej.

3. *Wyjątkowe holonomie konforemne oraz ich metryki Feffermana-Grahama:* Dla specjalnych klas geometrii konforemnych zaprezentujemy ich jawne metryki Feffermana-Grahama. W wyniku szczególnego wyboru geometrii konforemnych, metryki te mają wyjątkowe pseudo-riemannowskie holonomie $\mathbf{G}_{2(2)}$ i $\mathbf{Spin}(3,4)$. Przedstawiony będzie także interesujący związek między przeszkodą na istnienie metryki Feffermana-Grahama dla klasy konforemnej, a konforemną holonomią tej klasy.

Zanim przejdziemy do powyższych wyników zostaną omówione podstawowe pojęcia z zakresu holonomii i geometrii konforemnej.

Holonomia. Niech $\mathcal{E} \to M$ będzie rzeczywistą wiązką wektorową nad rozmaitością M z koneksją ∇. Grupą holonomii $(\mathcal{E}, \nabla)$ w $x \in M$ nazywamy zbiór wszystkich przesunięć równoległych wzdłuż zamkniętych krzywych o początku w x,

$$\mathrm{Hol}_x(\mathcal{E}, \nabla) := \left\{ \mathcal{P}_\gamma^\nabla \in \mathbf{GL}(\mathcal{E}|_x) \mid \gamma \text{ jest zamkniętą krzywą w } M \text{ o początku i końcu w } x \right\},$$

gdzie $\mathcal{P}_\gamma^\nabla$ jest przesunięciem równoległym związanym z ∇ wzdłuż krzywej γ w M. Grupy holonomii w różnych punktach M należą do jednej klasy sprzężoności w grupie $\mathbf{GL}(k, \mathbb{R})$, gdzie k jest rzędem $\mathcal{E}$. Trzeba zaznaczyć, że tak zdefiniowana holonomia nie jest tylko grupą abstrakcyjną, ale występuje naturalnie wraz z jej reprezentacją na $\mathcal{E}|_x$, jako reprezentacją pewnej podgrupy w $\mathbf{GL}(k, \mathbb{R})$ zdefiniowanej z dokładnością do klasy sprzężoności. Algebra Liego grupy holonomii oznaczana będzie jako $\mathfrak{hol}_x(\mathcal{E}, \nabla) \subset \mathfrak{gl}(k, \mathbb{R})$.

Głównym źródłem zainteresowania grupami holonomii jest ich związek z kowariantnie stałymi obiektami na M, albo inaczej mówiąc, ich związek z ∇-równoległymi cięciami $\mathcal{E}$ lub iloczynów tensorowych $\mathcal{E}$. W szczególności odwzorowanie

$$\Gamma(\mathcal{E}) \ni \varphi \mapsto \varphi|_x \in \mathcal{E}|_x, \tag{1}$$

pozwala na zdefiniowanie izomorfizmu pomiędzy ∇-równoległymi cięciami $\mathcal{E}$ (rozumianymi jako rozwiązania układu równań różniczkowych cząstkowych $\nabla\varphi = 0$ na rozmaitości M) oraz wektorami w $\mathcal{E}|_x$ niezmienniczymi ze względu na działanie $\mathrm{Hol}_x(\mathcal{E}, \nabla)$ (czyli niezmieniającymi się pod wpływem działania pewnej grupy macierzy). Między innymi umożliwia to oszacowanie z góry wymiaru przestrzeni rozwiązań równania różniczkowego $\nabla\varphi = 0$. Jest to jeden z aspektów t.zw. *zasady holonomii* ('holonomy principle'), wedle której odwzorowanie (1) zadaje wzajemną odpowiedność pomiędzy subwiązkami $\mathcal{E}$, które są niezmiennicze ze względu na przesunięcie równoległe, a podprzestrzeniami $\mathcal{E}|_x$ które są niezmiennicze ze względu na działanie $\mathrm{Hol}_x(\mathcal{E}, \nabla)$. W związku z powyższymi zależnościami, i ze względu na użyteczność holonomii w różnych geometrycznych i różniczkowych zastosowaniach warto posiadać ich klasyfikację w każdym środowisku geometrycznym ((pseudo)-riemannowskim, konformenym, projektywnym, etc.).

Większość wyników dotyczących klasyfikacji holonomii opartych jest na związku pomiędzy algebrą grupy holonomii oraz krzywizną koneksji ∇. Dla przykładu, twierdzenie o holonomii Ambrose'a-Singera [1] mówi, że dla spójnej rozmaitości M algebra $\mathfrak{hol}_x(\mathcal{E}, \nabla)$ grupy holonomii $\mathrm{Hol}_x(\mathcal{E}, \nabla)$ w $x \in M$ jest rozpinana przez następujące odwzorowania liniowe,

$$\left\{ (\mathcal{P}_\gamma^\nabla) \circ R(X, Y) \circ \mathcal{P}_\gamma^\nabla \in \mathfrak{gl}(\mathcal{E}|_x) \mid \gamma \text{ jest krzywą o początku w } x \text{ i końcu w } y \text{ oraz } X, Y \in T_yM \right\},$$

gdzie $R \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes \mathfrak{gl}(\mathcal{E}))$ jest krzywizną koneksji ∇. Widać więc, że jeśli krzywizna posiada pewne własności algebraiczne, to algebra grupy holonomii będzie je dziedziczyć.

Głównym znanym przykładem klasyfikacji grup holonomii jest ta związana z holonomią $\mathrm{Hol}(M, g) := \mathrm{Hol}(TM, \nabla)$ rozmaitości pseudo-riemannowskich (M, g). W tym przypadku $\mathcal{E} = TM$ oraz ∇ jest koneksją Levi-Civity metryki g. Grupą holonomii jest wtedy podgrupa grupy ortogonalnej a klasyfikacja jest przeprowadzona w następujących krokach:

1. Najpierw używa się Twierdzeń de Rhama oraz Wu o rozkładzie [17, 40], które mówią o tym, że każdej niezmienniczej ze względu na holonomię, niezdegenerowanej względem metryki, podprzestrzeni odpowiada lokalny rozkład rozmaitości riemannowskiej na produkt podrozmaitości pseudo-riemannowskich (jeśli spełnione są odpowiednie globalne warunki). Co więcej, grupa holonomii dla takiego produktu jest izomorficzna z sumą prostą grup holonomii czynników pseudo-riemannowskich. To pozwala na zredukowanie zagadnienia klasyfikacji do algebraicznie prostszych (np. nieredukowalnych) grup i algebr.

2. Drugim etapem klasyfikacji jest użycie, dla każdego z nieredukowalnych czynników, *pierwszego kryterium Bergera* [8]. Jest ono algebraicznym kryterium dotyczącym reprezentacji algebr

grupy holonomii i, poprzez twierdzenie o holonomii Ambrose'a-Singera, ma swoje źródło w symetriach tensora krzywizny . Stwierdza ono, że algebra grupy holonomii $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ koneksji beztorsyjnej dana jest przez

$$\mathfrak{g} = \operatorname{span}\{R(X,Y) \mid R \in \mathcal{K}(\mathfrak{g}), X, Y \in \mathbb{R}^n\},$$

gdzie

$$\mathcal{K}(\mathfrak{g}) = \{R \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n) \otimes \mathfrak{g} \mid R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0\}$$

jest przestrzenią algebraicznych tensorów krzywizny $\mathfrak{g}$. To kryterium jest słuszne nie tylko dla riemannowskiej koneksji Levi-Civity, ale dla wszystkich koneksji beztorsyjnych. Może ono zatem także stanowić efektywne narzędzie przy klasyfikacji *nieredukowalnych* algebr grup holonomii koneksji beztorsyjnych na każdej wiązce wektorowej TM, [8, 36]. Np. zostało ono użyte przeze mnie w przypadku lorentzowskim, gdzie poszczególne składniki rozkładu Wu mają w ogólności metrykę o sygnaturze nieokreślonej [31].

Powyższe kroki prowadzą w szczególności do klasyfikacji grup holonomii riemannowskich [8]. Powstała na ich bazie teoria *rozmaitości ze specjalną holonomią* wywarła znaczący wpływ na badania z zakresu geometrii różniczkowej oraz fizyki teoretycznej. Dla jasności, przypomnę, że rozmaitość pseudo-riemannowska, nawet taka która nie jest lokalnym produktem takich rozmaitości, może mieć holonomię *istotnie zawartą* w grupie ortogonalnej. O takiej nieproduktowej rozmaitości mowimy, że ma *specjalną holonomię*. Konstrukcje rozmaitości riemannowskich ze specjalną holonomią ($\mathbf{SU}(k)$, $\mathbf{G}_2 \subset \mathbf{SO}(7)$ lub $\mathbf{Spin}(7) \subset \mathbf{SO}(8)$) doprowadziła do istotnych wyników z zakresu geometrii różniczkowej, znajdujących zastosowania w teorii strun.

Struktury konforemne oraz konforemny rachunek traktorów. *Struktura konforemna* c o sygnaturze (p,q) na gładkiej rozmaitości M o wymiarze $n = p+q$ jest klasą równoważności metryk pseudo-riemannowskich o sygnaturze (p,q), gdzie dwie metryki, g oraz $\widehat{g}$, są sobie równoważne jeśli istnieje gładka funkcja σ, taka że $\widehat{g} = \mathrm{e}^{2\sigma} g$. *Rozmaitość konforemna* (M,c) jest gładką rozmaitością wraz ze strukturą konforemną c. W niniejszym autoreferacie habilitacyjnym wymiar rozmaitości konforemnej będzie zawsze równy $n = p+q \geq 3$.

W przeciwieństwie do przypadku rozmaitości riemannowskich, dla których zawsze istnieje koneksja Levi-Civity, rozmaitości konforemne nie dopuszczają jednoznacznie zdefiniowanej koneksji na wiązce reperów, a więc również i na wiązce stycznej. Zamiast tego, ze strukturą konforemną c można stowarzyszyć w sposób jednoznaczny *normalną konforemną koneksję Cartana* ω^c na wiązce reperów drugiego rzędu $\mathcal{P}$ (poniżej opiszemy tylko podstawowe fakty z teorii koneksji konforemnych; szczegóły można znaleźć w [15], [6]). Grupa strukturalna P tej wiązki jest zadana przez podgrupę P w spójnej składowej $G = \mathbf{SO}_0(p+1, q+1)$, która zachowuje wybraną prostą zerową przechodzącą przez 0 w $\mathbb{R}^{(p+q+2)}$. Normalna konforemna koneksja Cartana ω^c przyjmuje wartości w algebrze Liego $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p+1, q+1)$ grupy $\mathbf{SO}_0(p+1, q+1)$ wyposażonej w jednostopniową gradację $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$, jak poniżej:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p+1, q+1) = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & \eta & 0 \\ v & X & \eta^\sharp \\ 0 & v^\flat & -a \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} (a, X) \in \mathfrak{g}_0 \\ v \in \mathfrak{g}_-, \\ \eta \in \mathfrak{g}_+ \end{array} \right\}. \tag{2}$$

Tutaj $\mathfrak{g}_- = \mathbb{R}^{p,q}$, $\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{g}_-^*$, a $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{co}(p,q) = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(p,q)$ jest algebrą homotetii, przy czym izomorfizmy muzyczne $\flat$ i $\sharp$ są zadane za pomocą iloczynu skalarnego na $\mathbb{R}^{p,q}$. Grupa strukturalna P z algebrą $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_0 \ltimes \mathfrak{g}_+$ jest izomorficzna z rozszerzoną o skalowania grupą Poincarégo i jest maksymalną podgrupą paraboliczną w G. Sprawia to, że geometria konforemna jest przykładem *geometrii parabolicznej*, tzn geometrii, której płaskim modelem jest przestrzeń jedonorodna G/P, z P podgrupą paraboliczną w (pół)prostej grupie G.

Ze względu na to, że koneksja Cartana ω^c definiuje izomorfizm przestrzeni stycznych $\mathcal{P}$ i $\mathfrak{so}(p+1,q+1)$, nie pozwala ona na zdefiniowanie dystrybucji horyzontalnej i transportu równoległego. Można jednak rozszerzyć ω^c do koneksji na wiązce głównej (będzie ona oznaczana tym samym symbolem ω^c) z grupą strukturalną G,

$$\widetilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \times_P G$$

nad M. Wtedy, używając standardowej reprezentacji G na $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$, definiuje się *standardową konforemną wiązkę traktorową* nad M jako

$$\mathcal{T} = \mathcal{P} \times_P \mathbb{R}^{p+1,q+1} = \widetilde{\mathcal{P}} \times_G \mathbb{R}^{p+1,q+1}.$$

Jej rząd wynosi $n+2$ i jest ona wyposażona w zwyczajną koneksję na wiązce wektorowej, zwaną *normalną konforemną koneksję traktorową*, która jest naturalnie indukowana przez ω^c. Ta koneksja będzie oznaczana przez ∇^c. Ponieważ ω^c przyjmuje wartości w $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p+1,q+1)$, więc standardowa wiązka traktorowa $\mathcal{T}$ ma naturalną metrykę $\mathbf{g}$ o sygnaturze $(p+1,q+1)$. Jest ona wyznaczona przez warunek jej kowariantnej stałości względem ∇^c, $\nabla^c\mathbf{g} = 0$. Dla zadanej rozmaitości konforemnej (M,c), trójka $(\mathcal{T},\nabla^c,\mathbf{g})$ jest jednoznacznie zadana przez strukturę konforemną w analogii do koneksji Levi-Civity ∇^g na wiązce stycznej rozmaitości riemannowskiej (M,g). Standardowa konforemna wiązka traktorowa wprowadza również dodatkową strukturę związaną z podgrupą paraboliczną P, a mianowicie kanoniczną filtrację,

$$\mathcal{E}_- \subset \mathcal{E}_-^\perp \subset \mathcal{T}.$$

Tutaj $\mathcal{E}_-$ jest wiązką liniową zdefiniowaną przez prostą zerową zachowywaną przez P, a $\mathcal{E}_-^\perp$ jest wiązką do niej $\mathbf{g}$-ortogonalną. Jawnie można przedstawić $\mathcal{E}_-$ jako

$$\mathcal{E}_- = \mathcal{P} \times_P (\mathbb{R} \cdot \mathbf{e}_-),$$

gdzie $\mathbf{e}_-$ jest pierwszym wektorem bazy, w której reprezentacja $\mathfrak{g}$ ma postać (2).

Grupa konforemnej holonomii $\mathrm{Hol}(M,c)$ jest w tym przypadku zdefiniowana jako *spójna składowa* grupy holonomii $\mathrm{Hol}(\mathcal{T},\nabla^c) \subset \mathbf{SO}(p+1,q+1)$, a jej algebra Liego to $\mathfrak{hol}(\mathcal{T},\nabla^c)$. W dalszej części autoreferatu obie te struktury będą występować pod nazwą *konforemnej holonomii*.

Konkretny przykład koneksji $(\mathcal{T},\nabla^c)$ może być podany po wybraniu jednej z metryk w klasie konforemnej $c = [g]$, tak jak to zostało przedstawione w [5]. Taki wybór redukuje wiązkę reperów drugiego rzędu $\mathcal{P}$ do wiązki z grupą strukturalną $\mathbf{SO}(p,q)$ i umożliwia zdefiniowanie dwóch cięć zerowych, $s_\pm$, w standardowej wiązce traktorowej spełniających $\mathbf{g}(s_-,s_+) = 1$. Odpowiadają one pierwszemu oraz ostatniemu wektorowi bazy $(\mathbf{e}_\pm)$ reprezentacji $\mathfrak{so}(p+1,q+1)$ w (2). Pozwala to na zdefiniowanie rozkładu,

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}^{[g]} = \mathcal{E}_- \oplus^\perp TM \oplus^\perp \mathcal{E}_+,$$

gdzie $\mathcal{E}_- = \mathbb{R}\cdot s_-$ jest kanoniczną wiązką liniową o włóknach zerowych ze względu na $\mathbf{g}$, a $\mathcal{E}_+ = \mathbb{R}\cdot s_+$ jest wiązką liniową o włóknach zerowych poprzeczną do $\mathcal{E}_-^\perp$ i prostopadłą do TM. Od tej pory, po ustaleniu metryki, standardowy konforemny traktor $\lambda s_- + Y + \mu s_+$ będzie zapisywany jako wektor kolumnowy, $(\lambda,Y,\mu)^\top$, gdzie $Y \in TM$. Po konforemnej zmianie metryki, $\widehat{g} = \mathrm{e}^{2\sigma} g$, rozkład $\mathcal{T}$ zmienia się w następujący sposób,

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ Y\\ \mu\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\sigma}\left(\lambda - \mathrm{d}\sigma(Y) - \frac{1}{2}\|\nabla^g\sigma\|^2\mu\right)\\ \mathrm{e}^{-\sigma}(Y + \mu\nabla^g\sigma)\\ \mathrm{e}^{\sigma}\mu\end{pmatrix}, \tag{3}$$

dzięki czemu można w oczywisty sposób zauważyć niezmienniczość filtracji $\mathcal{E}_- \subset \mathcal{E}_-^\perp \subset \mathcal{T}$. Rozkład ten unaocznia również fakt, że izomorfizm między wiązką styczną TM oraz wiązką wektorową $\mathcal{E}_-^\perp/\mathcal{E}_-$, zadany jako

$$TM \ni Y \mapsto [(0,Y,0)] \in \mathcal{E}_-^\perp/\mathcal{E}_-, \tag{4}$$

jedynie się skaluje gdy zmieniamy metryki w obrębie klasy konforemnej c. Wnioskiem z tych rozważań jest fakt, że obraz podprzestrzeni liniowej $H \subset \mathcal{E}_-^\perp \subset \mathcal{T}$ względem odwzorowania

$$\mathcal{E}_-^\perp \longrightarrow \mathcal{E}_-^\perp/\mathcal{E}_- \longrightarrow TM,$$

jest konforemnie niezmienniczy, czyli niezależny od wyboru $g \in c$. Co więcej, normalna konforemna koneksja traktorowa związana z metryką $g \in c$ oraz indukowanym rozkładem jest dana jako

$$\nabla^{[g]} \begin{pmatrix} \lambda \\ Y \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}\lambda - \mathsf{P}^g(Y,.) \\ \nabla^g Y + \lambda\,\mathrm{Id}_{TM} + \mu\,\mathsf{P}^g \\ \mathrm{d}\mu - g(Y,.) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

gdzie ∇^g i P^g są kolejno koneksją Levi-Civity oraz tensorem Schoutena metryki g. Korzystając z (3) można pokazać, że koneksja (5) jest konforemnie niezmiennicza.

Metryka Feffermana-Grahama dla struktury konforemnej. Przedstawiona poniżej konstrukcja pochodzi od Feffermana i Grahama [22, 23]. Jej przewagą nad rachunkiem traktorowym jest to, że pozwala ona na badanie geometrii konforemnej w kontekście geometrii pseudo-riemannowskiej. Należy jednak zauważyć, że w wymiarze parzystym, konstrukcja ta nie jest tak uniwersalna jak podejście traktorowe, gdyż tylko pewne klasy metryk konforemnych w wymiarach parzystych mają metryki Feffermana-Grahama.

Konstrukcja Feffermana-Grahama opiera się na uogólnieniu na przypadek zakrzywiony podejścia, które traktuje konforemną n-sferę $\mathbb{S}^n$ w płaskiej przestrzeni $\mathbb{R}^{(n+1)}$ jako projektywny stożek świetlny przestrzeni Minkowskiego o wymiarze $(n+2)$. W przypadku zakrzywionym, żeby dla dowolnej rozmaitości konforemnej (M, c) wprowadzić przestrzeń będącą uogólnieniem przestrzeni Minkowskiego z przypadku sfery $\mathbb{S}^n$, używa się *wiązki promieni* $\pi : \mathcal{C} \to M$, gdzie

$$\mathcal{C} = \bigcup_{x \in M} \{\, g|_x \mid g \in c \,\} \xrightarrow{\pi} M.$$

Jest ona wyposażona w działanie grupy $\mathbb{R}^+$ w naturalny sposób, $\varphi_t(g|_x) = t^2 g|_x$. Dalej, wprowadza się *tautologiczny tensor* G na wiązce $\mathcal{C}$ zdefiniowany jako

$$G|_{(g|_x)}(X,Y) = g|_x(d\pi(X), d\pi(Y)) \quad \text{dla} \quad X, Y \in T_{g|_x}\mathcal{C}.$$

Jest on jednorodnym tensorem stopnia 2 ze względu na działanie φ_t. Po ustaleniu konkretnej metryki $g \in c$ wiązka $\mathcal{C}$ trywializuje się do postaci $\mathbb{R}^+ \times M$ z $t^2 g|_x \mapsto (t, p)$. Teraz rozważa się przestrzeń $\mathcal{C} \times \mathbb{R}$ ze współrzędną ρ wzdłuż czynnika $\mathbb{R}$ i zanurza się wiązkę promieni $\mathcal{C}$ w tej przestrzeni poprzez odwzorowanie $\iota : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C} \times \mathbb{R}$ jako $\iota(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \times \{0\}$. Działanie φ może być rozszerzone w trywialny sposób do $\mathcal{C} \times \mathbb{R}$. Okazuje się, że teraz można zawsze łatwo znaleźć rozmaitość pseudo-riemannowską $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$, o następujących własnościach:

(a) $\widetilde{M}$ jest φ_t-niezmienniczym otoczeniem $\mathcal{C} \times \{0\}$ w $\mathcal{C} \times \mathbb{R}$,

(b) $\widetilde{g}$ jest jednorodnym tensorem stopnia 2 względem φ_t,

(c) $\iota^* \widetilde{g} = G$.

Jednakże struktura pseudo-riemannowska $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ spełniająca warunki (a)-(c) nie jest zadana w sposób jednoznaczny przez klasę konforemną c. W dalszym ciągu tego tekstu tę niejednoznacznie zdefinowaną strukturę pseudo-riemannowską $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ będziemy nazywali rozmaitością (strukturą) *pre-Feffermana-Grahama*.

Strukturę pre-Feffermana-Grahama można próbować ujednoznacznić wymagając, [22, 23], aby oprócz powyższych warunków (a)-(c) dodatkowo znikał tensor Ricciego metryki $\widetilde{g}$,

$$Ric(\widetilde{g}) = 0. \tag{6}$$

Warunek ten spełnia swoje zadanie w przypadku, gdy struktura konforemna (M, c) ma wymiar nieparzysty; jest on jednak zbyt ograniczający w ogólnym przypadku, ponieważ można pokazać że dla pewnych rozmaitości o parzystym wymiarze nie istnieje $\widetilde{g}$ z zerowym tensorem Ricciego. Modulo uściślenie podane w dyskusji poniżej, metryka $\widetilde{g}$ określona przez warunki (a)-(b), $Ric(\widetilde{g}) = 0$ nazywa się metryką Feffermana-Grahama dla danej klasy konforemnej. Jak widać mocno zależy ona od parzystości $n = \dim(M)$.

Gdy n jest liczbą nieparzystą rozmaitość $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ staje się szukaną, jednoznacznie określoną rozmaitością pseudo-riemannowską, będącą niepłaskim odpowiednikiem przestrzeni Minkowskiego z przypadku sfery konforemnej $\mathbb{S}^n$, poprzez żądanie by

$$Ric(\widetilde{g}) \in O(\rho^{\infty}), \tag{7}$$

tzn. przez żądanie by rozwinięcie w szereg Taylora wokół $\rho = 0$ tensora Ricciego metryki $\widetilde{g}$ znikało aż do nieskończonego rzędu w ρ.

W przeciwnym przypadku ($n > 2$, parzyste) jednoznaczne rozwiązania $\widetilde{g}$ równań

$$Ric(\widetilde{g}) \in O(\rho^{k}) \tag{8}$$

istnieją jedynie gdy $k = 0, \ldots, \frac{n}{2} - 1$. Dla $k \geq \frac{n}{2}$ nie tylko traci się jednoznaczność $\widetilde{g}$, ale może sie zdarzyc że $Ric(\widetilde{g}) \in O(\rho^{\frac{n}{2}})$ nie ma żadnego rozwiązania. Dlatego, w przypadku parzystego $n = 2(k+1)$, rozmaitość $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ będącą niepłaskim odpowiednikiem przestrzeni Minkowskiego z przypadku sfery konforemnej $\mathbb{S}^n$, definiuje sie poprzez

$$Ric(\widetilde{g}) \in O(\rho^{\frac{n}{2}-1}), \tag{9}$$

gdzie dla każdej $g|_x \in \mathcal{C}$,

$$\iota^*(\rho^{1-\frac{n}{2}}\, Ric(\widetilde{g}))|_{g|_x} = \pi^* S, \tag{10}$$

z symetrycznym $S \in \otimes^2 T_x M$ spełniającym $\mathrm{tr}_{g|_x}(S) = 0$.

Tak więc w przypadku $n = dim(M)$ nieparzystego metryka Feffermana-Grahama dla geometrii konforemnej (M, c) jest zdefiniowana przez warunki (a)-(c) i warunek (7), a w przypadku n parzystego jest zdefiniowana przez warunki (a)-(c) i warunki (9)-(10). Przyjmując taką definicję, w pracy [23] zostało pokazane, że dla każdej klasy konforemnej c istnieje metryka Feffermana-Grahama. Gdy n jest liczbą nieparzystą jest ona zadana w jednoznaczny sposób dla dowolnego rzędu, z dokładnością do dyfeomorfizmów $\widetilde{M}$ sprowadzających się do odwzorowań tożsamościowych po obcięciu do $\mathcal{C}$. Dla parzystego n jest ona określona jednoznacznie jedynie do rzędu $n/2 - 1$, natomiast wyrazy rzędu $\geq n/2$ w ρ nie są już wyznaczone w sposób jednoznaczny, co nazywamy w skrócie *niejednoznacznością Feffermana-Grahama*. Co więcej, gdy wymiar jest liczbą nieparzystą a klasa konforemnych metryk jest analityczna, istnieje jednoznacznie określona metryka Feffermana-Grahama ze znikającym tensorem Ricciego. W przypadku parzystego wymiaru, by można było spełnić (8) dla rzędu większego niż $k = \frac{n}{2} - 1$ musi znikać pewien dobrze określony symetryczny tensor $\mathcal{O}(g)$ zależny od struktury konferemnej (M, c). Nazywamy go *przeszkodą Feffermana-Grahama* (czasami *tensorem obstrukcji*), gdyż stanowi przeszkodę dla znalezienia gładkich rozwiązań równania $\widetilde{Ric} := Ric(\widetilde{g}) = O(\rho^{\frac{n}{2}})$. Tensor ten jest bezśladowy, ma znikającą dywergencję oraz jest konforemnie niezmienniczy. Gdy metryka $g \in c$ jest analityczna oraz $\mathcal{O}(g)$ znika, istnieje analityczna metryka Feffermana-Grahama dla c określona w sposób jednoznaczny do wyrazów rzędu $\frac{n}{2} - 1$.

Dla ustalonej metryki g_0 należącej do klasy konforemnej c, każda metryka Feffermana-Grahama może być lokalnie zapisana w następującej formie [23],

$$\widetilde{g} = 2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}(\rho t) + t^2 g(x^i, \rho), \quad \text{gdzie} \quad g(x^i, \rho)|_{\rho=0} = g_0(x^i), \tag{11}$$

oraz (t, x^i, ρ) są lokalnymi współrzędnymi na $\widetilde{M} = \mathbb{R}^+ \times M \times (-\epsilon, \epsilon)$, $\epsilon > 0$. Dla parzystego wymiaru n i metryki 11, tensor obstrukcji ma następującą postać,

$$\mathcal{O}(g_0) = c_n \left(\rho^{1-\frac{n}{2}} (\widetilde{Ric}_{|TM \otimes TM})\right)|_{\rho=0}, \tag{12}$$

gdzie c_n są pewnymi niezerowymi stałymi [23]. Składowe tensora Ricciego $Ric(\widetilde{g})$ metryki (11) mogą być wyrażone za pomocą koneksji Levi-Civity ∇ oraz tensora Ricciego R_{ij} nieznanej metryki $g(x^k,\rho) = g_{ij}(x^k,\rho)\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$. Równania (7) oraz (9) przybierają wtedy postać [23, r. 3.17]

$$\begin{aligned} \rho g''_{ij} - \rho g^{kl} g'_{ik} g'_{jl} + \tfrac{1}{2}\rho g^{kl} g'_{kl} g'_{ij} - \tfrac{n-2}{2} g'_{ij} - \tfrac{1}{2} g^{kl} g'_{kl} g_{ij} + R_{ij} &= O(\rho^m), \\ g^{kl}\left(\nabla_k g'_{jl} - \nabla_i g'_{kl}\right) &= O(\rho^m), \\ g^{kl} g''_{kl} + \tfrac{1}{2} g^{kl} g^{pq} g'_{pk} g'_{ql} &= O(\rho^m), \end{aligned} \tag{13}$$

gdzie $m = \infty$ gdy n jest nieparzyste, $m = \frac{n-2}{2}$ w przeciwnym przypadku, a $' = \partial_\rho$. Lewa strona powyższych równań to składowe tensora Ricciego $Ric(\widetilde{g})$ metryki $\widetilde{g}$. Układ 13 będzie nazywany *równaniami Feffermana-Grahama.*

Pierwszy wiersz (13) jest nieliniowym układem równań drugiego rzędu na składowe g_{ij}. Rozwiązanie go przy zadanych danych początkowych $g_{ij|_{\rho=0}} = (g_0)_{ij}$ jest w ogólności praktycznie niewykonalne, jednak można szukać rozwiązania dla $g(x,\rho)$ zadanego w postaci szeregu potęgowego w ρ, z potęgami będącymi liczbami naturalnymi. Fefferman i Graham podali w [23] takie rozwiązanie dla pierwszych kilku potęg rozwinięcia $g(x,\rho)$ w ρ, otrzymując $\widetilde{g}$ ze znikającym tensorem Ricciego z dokładnością do odpowiadającego temu rozwinięciu rzędu. Ich wynik z dokadnością do drugiego rzędu rozwinięcia to:

$$g = g_0 + 2\mathsf{P}\rho + \left(\tfrac{1}{4-n} B_{ij} + \mathsf{P}_i{}^k \mathsf{P}_{kj}\right)\rho^2 + \ldots, \tag{14}$$

gdzie P jest tensorem Schoutena a B tensorem Bacha metryki g_0.

4.3.2 Struktura geometryczna związana z redukcją konforemnej holonomii

W tym rozdziale zostaną zaprezentowane wyniki związane z redukcją holonomii. Będzie ona związana z istnieniem na rozmaitości pól podprzestrzeni niezmienniczych ze względu na konforemną holonomię, które ze względu na zasadę holonomiczną opartą na (1), odpowiadać będą niezmienniczym ze względu na przesunięcie równoległe względem koneksji ∇^c subwiązkom wiązki traktorowej.

Konforemna holonomia z niezmienniczymi wiązkami liniowymi. Korzystając z (5) można zauważyć, że jeśli $g \in c$ jest metryką einsteinowską ze stałą Einsteina Λ, to $\varphi = (-\Lambda, 0, 1)$ jest równoległym cięciem $\nabla^{[g]}$. Z drugiej strony, jeśli $\varphi = (\lambda, Y, \mu)$ jest cięciem równoległym względem $\nabla^{[g]}$, to μ jest rozwiązaniem równania

$$\mathrm{tf}(\nabla \mathrm{d}\mu + \mu\mathsf{P}) = 0, \tag{15}$$

gdzie $\mathrm{tf}(\cdot)$ oznacza część bezśladową, ∇ jest koneksją Levi-Civity a P tensorem Schoutena metryki g. Operator różniczkowy z równania (15) był po raz pierwszy użyty w [30] oraz [21, 5]. Autorzy tych prac zauważyli, że jeśli μ jest rozwiązaniem (15), to dla $\mu \neq 0$ metryka $\widehat{g} = \mu^{-2} g$ jest einsteinowska. W pracach tych zostało również pokazane, że zbiór na którym rozwiązanie μ nie znika jest otwarty i gęsty w M. Zinterpretowanie istnienia równoległych cięć φ, takich jak powyżej, jako redukcji holonomii do stabilizatora elementu we włóknie $\mathcal{T}$, było pierwszym przykładem tego, że redukcja holonomii konforemnej wiąże się z (lokalnym) istnieniem metryki o szczególnych własnościach w klasie konforemnej.

Fakt istnienia rozwiązań φ na zbiorze lokalnym i gęstym w M, stanowi motywację dla definicji konforemności w słabym sensie. Po pierwsze, powiemy, że rozmaitość (M, c) jest *lokalnie konforemna do metryki* g jeśli dla otoczenia U każdego punktu w M, metryka g zadana na U jest konforemnie równoważna $\widehat{g}|_U$, gdzie $\widehat{g} \in c$. I po drugie, powiemy, że (M, c) jest *konforemna do* g *w słabym sensie* jeśli istnieje gęsty zbiór otwarty w $M_0 \subset M$, taki że (M_0, c) jest lokalnie konforemna

do g. W podobny sposób można zdefiniować (M, c) będącą *lokalnie/w słabym sensie konforemnie einsteinowską*, jeśli (M, c) jest lokalnie/w słabym sensie konforemna do metryki einsteinowskiej [1].

Następujące nowe twierdzenie otrzymane przeze mnie w pracy [**Hab1**] jest uogólnieniem znanego rezultatu z dziedziny zachowywanych przez holonomię konforemną wektorów, na sytuację gdy mamy zachowywane przez tę holonomię proste:

Twierdzenie 1 ([5, 25] oraz [**Hab1**, Lemat 2.1]). *Niech (M, c) będzie rozmaitością konforemną o wymiarze $n \geq 3$ a $(\mathcal{T}, \nabla^c)$ standardową konforemną wiązką traktorową z normalną konforemną koneksją traktorową ∇^c. Jeśli holonomia $(\mathcal{T}, \nabla^c)$ dopuszcza niezmienniczą prostą czasową/przestrzenną/zerową, to (M, c) jest konforemnie einsteinowska w słabym sensie, przy czym stała kosmologiczna odopowiadająca rozmaitości słabo einsteinowskiej jest dodatnia/ujemna/równa zero.*

Niezmiennicze subwiązki rzędu większego niż 1. Jednym z istotniejszych wyników teorii holonomii riemannowskich jest twierdzenie de Rhama. Zastosowane do Levi-Civita niezmienniczej podprzestrzeni o wymiarze 1 na rozmaitości n-wymiarowej mówi, że można ortogonalnie rozłożyc tę rozmaitość riemannowską na iloczyn kartezjański rozmaitości jednowymiarowej i rozmaitości riemanowskiej wymiaru $n-1$. Innymi słowy, w przypadku riemannowskim można odszczepić niezmienniczą prostą od rozmaitości. Dyskutowany w poprzednim podrozdziale przypadek prostej kowariantnie stałej ze względu na (konformną) koneksję traktorową pokazuje zupelnie odmienne zachowanie holonomii konforemnej. Tym razem nie można odszczepic konformenie niezmienniczej prostej.

Okazuje się jednak, że jest to artefakt niskiego wymiaru zachowywanej podprzestrzeni. W przypadku konforemnie niezmienniczych podprzstrzeni wymiaru większego niż 1, mamy w geometrii konforemnej rezultat analogiczny do rozkładu danego poprzez twierdzenie de Rhama. Używa się go do klasyfikacji holonomii konforemnej. Aby sformułować ten rezultat wprowadza się pojęcie *spejalnego iloczynu einsteinowskiego*, zdfiniowanego jako produkt dwóch metryk einsteinowskich g_1 i g_2 z tensorami Schoutena spełniającymi $\mathsf{P}_1 = \Lambda g_1$ i $\mathsf{P}_2 = -\Lambda g_2$ dla stałej Λ.

Konforemny analog twierdzenia de Rhama udowodniony przez Armstronga, w [3], dla konforemnych klas riemannowskich, oraz przez Leitnera, w [32], dla metryk o dowolnej sygnaturze, brzmi następująco:

Twierdzenie 2 ([3, 34, 4, 32]). *Niech (M, c) będzie rozmaitością konforemną a $(\mathcal{T}^c, \nabla^c)$ standardową konforemną wiązką traktorową z normalną konforemną koneksją traktorową. Jeśli $\mathcal{H}$ jest subwiązką $\mathcal{T}^c$ rzędu $k+1 > 1$, niezmienniczą ze względu na przesunięcie równoległe względem ∇^c oraz niezdegenerowaną w metryce traktorowej (działanie konforemnej holonomii umożliwia rozkład) to (M, c) jest konforemna w słabym sensie do specjalnego iloczynu einsteinowskiego.*

Odwrotnie, jeśli (M, c) jest lokalnie konforemna do specjalnego iloczynu einsteinowskiego, to konforemna holonomia jest rozkładalna na iloczyn, którego działanie zachowuje rozkład.

W obu przypadkach konforemna holonomia jest równa holonomii pseudo-riemannowskiej (pewnej, w przypadku niejednoznaczności Feffermana-Grahama,) metryki Feffermana-Grahama odpowiadającej rozważanej strukturze konforemnej.

Powyższe twierdzenie prowadzi do klasyfikacji konforemnych grup holonomii stricte riemannowskiej. Dla rozmaitości konforemnych z metrykami o sygnaturze innej niż dodatnio określona (takich jak konforemne rozmaitości lorentzowskie) metryka traktorowa może być zdegenerowana na niezmiennczej subwiązce $\mathcal{V}$ rzedu > 1 i powyższe twierdzenie nie daje pełnej klasyfikacji. W przypadku, gdy mamy niezmienniczą subwiązkę $\mathcal{V}$ rzędu większego niż jeden rozważa się związaną z nią podprzestrzeń całkowicie zerową $\mathcal{H} = \mathcal{V} \cap \mathcal{V}^{\perp}$. Ten przypadek jest opisywany przez następujące twierdzenie:

[1] W [25] użyty jest również termin *prawie einsteinowska*, jednakże może on mylić się ze sformułowaniem o tej samej nazwie dla uogólnień metryk einsteinowskich w kontekście solitonów Ricciego czy rozmaitości Kählera.

Twierdzenie 3 ([**Hab1**, Twierdzenie 7.2], [**Hab6**, Twierdzenie 2] oraz [35]). *Niech (M, c) będzie rozmaitością konforemną o dowolnej sygnaturze. Jeśli konforemna holonomia dopuszcza niezmienniczą podprzestrzeń $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^{p+1,q+1}$ wymiaru $(k+1) > 1$, całkowicie zerową względem metryki traktorowej* $\mathbf{g}$*, to (M, c) jest konforemna w słabym sensie do metryki posiadającej następujące własności,*

(i) g dopuszcza całkowicie zerową dystrybucję $\mathcal{N}$ wymiaru k, niezmienniczą ze względu na pseudo-riemannowską holonomię g,

(ii) obraz tensora Schoutena (traktowanego jako endomorfizm) metryki g jest zawarty w $\mathcal{N}$.

Odwrotnie, jeśli (M, c) jest lokalnie konforemna do metryki o powyższych własnościach, to konforemna holonomia dopuszcza hiperpowierzchnię zerową wymiaru $(k+1)$.

Twierdzenie to dla przypadku $k = 1$ i konforemnych struktur lorentzowkich zostało sformułowane i udowodnione w [**Hab1**], natomiast dla dowolnej sygnatury w [**Hab6**]. Ogólny przypadek został udowodniony w [35], za pomocą uogólnienia technik użytych w [**Hab1**, **Hab6**].

4.3.3 Klasyfikacja konforemnych holonomii

Konforemna holonomia riemannowska i lorentzowskie metryki Feffermana-Grahama. Metryka Feffermana-Grahama dla metryki g reprezentującej klasę konforemną c jest szczególnie przydatna do klasyfikacji możliwych konforemnych holonomii gdy holonomia ta ma niezmiennicze wiązki liniowe. Dzieje się tak dlatego, że jak wspominaliśmy, istnienie niezmienniczej ze względu na holonomię konformną wiązki liniowej jest równoważne istnieniu w klasie konforemnej metryki einsteinowskiej.

Choć nieliniowy układ równań różniczkowych cząstkowych (6) (lub 7), którego rozwiązanie daje metrykę Feffermana-Grahama, jest w ogólnym przypadku niemożliwy do rozwiązania, to gdy klasa konforemna zawiera metrykę einsteinowską g, tzn. gdy $\mathsf{P}^g = \Lambda g$, niezależnie od wymiaru $(M, g \in c)$ istnieje poniższy prosty wzór na metrykę Feffermana-Grahamama dla g:

$$\widetilde{g} = 2\mathrm{d}t\mathrm{d}(\rho t) + t^2 \left(1 + \Lambda\rho\right)^2 g. \tag{16}$$

Jest ona zawsze analityczna i dokładnie Ricci płaska.

Ponadto izomorfizm wiązek wektorowych nad M,

$$\begin{array}{rcl} (\mathcal{T}, \nabla^{[g]}) & \longrightarrow & (T\widetilde{M}|_M, \nabla^{\widetilde{g}}) \\ (\lambda, Y, \mu)^\top & \mapsto & \lambda\partial_t + Y + \mu\partial_\rho \end{array} \tag{17}$$

jest odwzorowaniem afinicznym (zachowuje koneksje $\nabla^{[g]}$ i $\nabla^{\widetilde{g}}$). Może to być użyte do pokazania, że jeśli rozmaitość konforemna jest lokalnie konforemnie einsteinowska, to konforemna holonomia jest równa holonomii metryki Feffermana-Grahama (16). Jeśli rozmaitość konforemna (M, c) jest lokalnie konforemnie einsteinowska z $\Lambda \neq 0$ lub lokalnie konforemna do specjalnego iloczynu einsteinowskiego to jej konforemna holonomia jest równa holonomii semi-riemannowskiej metryki $\frac{1}{2\Lambda}\mathrm{d}r^2 + r^2 g_\Lambda$ stożka nad (M, g) [32] lub holonomii iloczynu dwóch stożków nad czynnikami specjalnego iloczynu einsteinowskiego [26].

Jako uzupełnienie tych rezultatów w pracy [**Hab1**] zostało sformułowane i udowodnione następujące twierdzenie dla $\Lambda = 0$, czyli dla przypadku w którym (M, c) jest lokalnie konforemna do metryki Ricci płaskiej:

Twierdzenie 4 ([**Hab1**, Twierdzenie 4.2, wnioski 4.3 i 4.4]). *Niech (M, c) będzie rozmaitością konforemną o sygnaturze (p, q), lokalnie konforemną do rozmaitości z metryką Ricci płaską. Wtedy jej konforemna holonomia jest równa pseudo-riemannowskiej holonomii metryki Feffermana-Grahama*

$$\widetilde{g} = 2\mathrm{d}v\mathrm{d}t + t^2 g, \tag{18}$$

z równoległym zerowym polem wektorowe ∂_v. Holonomia ta jest zawarta w iloczynie półprostym $\mathrm{Hol}(M,g) \ltimes \mathbb{R}^{p,q}$. *Co więcej, jeśli (M,c) jest riemannowska oraz holonomia $\widetilde{g}$, a zatem i konforemna holonomia, działają w sposób nierozkładalny (tzn. gdy nie posiadają niezdegenerowanych niezmienniczych podprzestrzeni), to holonomia jest* równa $G \ltimes \mathbb{R}^{p,q}$, *gdzie* $G = \mathrm{Hol}(M,g)$. *W szczególności grupa G jest izomorficzna jednej z grup* $\mathbf{SO}(m)$, $\mathbf{SU}(k)$, $\mathbf{Sp}(l)$, $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{Spin}(7)$ *lub* $\{1\}$, *albo jest izomorficzna jakiemuś ich iloczynowi prostemu.*

Zebrane tu fakty pokazują, że w przypadku gdy klasa konofremna jest lokalnie konforemnie einsteinowska (bądź konforemna do specjalnego iloczynu einsteinowskiego), konforemna holonomia jest zawsze holonomią pewnej metryki pseudo-riemannowskiej. Ponadto, Twierdzenie 4 z mojej pracy [**Hab1**] dodane do Twierdzeń 1 i 2 pozwala na pełną klasyfikację dozwolonych konforemnych holonomii riemannowskich. Mówiąc bardziej precyzyjnie, jeśli $H \subset \mathbf{SO}_0(1,n+1)$ jest konforemną holonomią rozmaitości (M,c) z klasą konforemną c stricte riemnnowską, to mogą zajść tylko następujące trzy przypadki:

(a) H działa w sposób nieredukowalny. Wtedy, jak zostało pokazane w [19] oraz [20, 18], H jest równe $\mathbf{SO}_0(1,n+1)$. Przypadek ten zachodzi, jeśli (M,c) jest ogólną konforemną strukturą riemannowską.

(b) H dopuszcza niezmienniczą prostą. W tym przypadku, zgodnie z Twierdzeniem 1, (M,c) jest konforemnie einsteinowska w słabym sensie. Jeśli prosta jest prostą zerową i H nie ma niezmienniczych niezdegenerowanych podprzestrzeni, to zgodnie z rezulatatmi Podrozdziału 4.3.2 H jest izomorficzne $\mathrm{Hol}(g) \ltimes \mathbb{R}^n$. Jeśli niezmiennicza prosta nie jest zerowa, to H jest izomorficzne holonomii metryki stożka nad g, z metryką g będącą lokalnie einsteinowską metryką w klasie konforemnej c.

(c) H dopuszcza niezmienniczą niezdegenerowaną podprzestrzeń o wymiarze $k > 1$. W tym przypadku Twierdzenie 2 zapewnia, że H jest iloczynem holonomii riemannowskiej z jedną z grup z przypadku (a) lub (b).

Konforemna holonomia i tensor Cottona. Głównym narzędziem użytym do klasyfikacji algebr holonomii (pseudo-)riemannowskich jest, zaraz za twierdzeniem de Rhama, "Pierwsze kryterium Bergera" (rozdział 4.3.1). Wynika ono z Twierdzenia Ambrose'a-Singera i algebraicznych tożsamości spełnianych przez krzywiznę (tzw. *pierwszych tożsamości Bianchi*) *beztorsyjnej* koneksji Levi-Civity. Choć w przypadku konforemnym nie ma naturalnej koneksji beztorsyjnej na wiązce stycznej, to istnieje podklasa rozmaitości konforemnych - jest to podklasa rozmaitości konforemnych zawierająca metryki ze *znikającym tensorem Cottona* - dla których krzywizna normalnej konformenej koneksji traktorowej redukuje sie do tensora Weyla, i jako taka także spełnia pierwsze tożsamości Bianchi. Sugeruje to, że dla tej klasy można otrzymać *pierwsze kryterium Bergera* pozwalające znaleźć odpowiadające tej klasie algebry konformnej holonomii.

W [**Hab1**] sformułowałem i udowodniłem twierdzenie precyzujące to przypuszczenie:

Twierdzenie 5 ([**Hab1**, Twierdzenie 3.2.]). *Niech (M,c) będzie rozmaitością konforemną, lokalnie konforemną do metryki ze znikającym tensorem Cottona. Wtedy algebra konforemnej holonomii spełnia pierwsze kryterium Bergera.*

Twierdzenie to jest potężnym narzędziem w procesie klasyfikacji (nieredukowalnych) konforemnych holonomii przestrzeni lokalnie konforemnych do tych ze znikającym tensorem Cottona i sugeruje ono, że holonomie te muszą zgadzać się z holonomiami pseudo-riemannowskimi. Precyzyjne sformułowanie tego przypuszczenia wymaga wprowadzenia pojęcia *koneksji pre-Feffermana-Grahama* [**Hab2**]:

Definicja 6 ([**Hab2**, Definicja 3.3]). Niech (M, c) będzie rozmaitością konforemną. Koneksja pre-Feffermana-Grahama $\widetilde{\nabla}$ na rozmaitości *pre*-Feffermana-Grahama $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$, zdefiniowanej w rozdziale 4.3.1, jest koneksją liniową na $T\widetilde{M}$ z następującymi własnościami,

(i) $\widetilde{\nabla}$ jest zgodna z metryką $\widetilde{g}$, tzn. $\widetilde{\nabla}\widetilde{g} = 0$,

(ii) tensor skręcenia (torsji) τ koneksji $\widetilde{\nabla}$, zdefiniowany jako $\tau(X, Y,) = \widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X - [X, Y]$, spełnia
$$\tau|_{\mathcal{C}} = 0, \quad \mathcal{L}_F \tau = 0, \quad F \lrcorner \tau = 0, \quad \widetilde{g}(\tau(X, Y), F) = 0,$$
gdzie $\mathcal{L}_F$ jest pochodną Liego względem fundamentalnego pola wektorowego F związanego z φ_t działaniem grupy $\mathbb{R}^+$ na $\widetilde{M}$;

(iii) tensor Ricciego $\widetilde{Ric}$ koneksji $\widetilde{\nabla}$ spełnia $\iota^* \widetilde{Ric} = 0$, gdzie $\iota : \mathcal{C} \hookrightarrow \widetilde{M}$ jest zanurzeniem stożka (wiązki promieni) $\mathcal{C} = \{\rho = 0\}$ w przestrzeń pre-Feffermana-Grahama.

W pracy [**Hab2**] udało nam się pokazać, że koneksja pre-Feffermana-Grahama zawsze istnieje. Bardziej precyzyjnie, pokazaliśmy

Twierdzenie 7 ([**Hab2**, Twierdzenia 5.5 i 5.7]). *Niech (M, c) będzie rozmaitością konforemną. Wtedy zawsze istnieje dla niej struktura pre-Feffermana-Grahama z koneksją pre-Feffermana-Grahama $\widetilde{\nabla}$ (definicja 6), której tensor skręcenia (torsji) spełnia*
$$\tau = \rho C,$$
gdzie C jest tensorem Cottona metryki z klasy konforemnej. Co więcej, holonomia koneksji $\widetilde{\nabla}$ jest równa konforemnej holonomii (M, c).

Konsekwencją tego twierdzenia jest następujący

Wniosek 8 ([**Hab2**, Wniosek 5.8]). *Jeśli rozmaitość konforemna (M, c) jest lokalnie konforemna do tej ze znikającym tensorem Cottona, to $\widetilde{\nabla}$ jest koneksją Levi-Civity metryki pre-Feffermana-Grahama $\widetilde{g}$ oraz konforemna holonomia (M, c) jest równa pewnej holonomii pseudo-riemannowskiej.*

Ponadto, porównując holonomię metryki Feffermana-Grahama z konforemną holonomią, jako konsekwencję Twierdzenia 7, uogólniliśmy w następujący sposób izomorfizm afinicznej wiązki wektorowej dany w (17) na przypadek nie-einsteinowski:

Wniosek 9 ([**Hab2**, Twierdzenie 6.2]). *Niech (M, c) będzie rozmaitością konforemną a $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ przestrzenią Feffermana-Grahama z koneksją Levi-Civity $\nabla^{\widetilde{g}}$ dla metryki Feffermana-Graham $\widetilde{g}$. Wtedy konforemna holonomia (M, c) jest równa holonomii koneksji $\nabla^{\widetilde{g}}$ na wiązce wektorowej $T\widetilde{M}|_{\mathcal{C}}$.*

Nieredukowalna konforemna holonomia. Główną przeszkodą w klasyfikacji konforemnych holonomii jest brak ogólnego kryterium algebraicznego. Jedynym takim kryterium znanym autorowi jest kryterium zawarte w postaci przytoczonego tu Twierdzenia 5 z pracy [**Hab1**]; niestety obowiązuje ono jednak tylko w szczególnym przypadku rozmaitości (M, c) konforemnych do tych ze znikającym tensorem Cottona. Sprawia to, że klasyfikacja nieredukowalnych holonomii konforemnych dla dowolnej sygnatury metryk jest praktycznie niemożliwa. Dlatego też poniżej ograniczamy się do klasyfikacji nieredukowalnych konforemnych holonomii w wybranych sygnaturach, gdzie potrafimy podać wszystkie spójne podgrupy w $\mathbf{SO}(p, q)$ działające nieredukowalnie w $\mathbb{R}^{(p,q)}$.

Przypomnijmy, że dla klasyfikacji nieredukowalnych konforemnych holonomii riemannowskich w Twierdzeniu 4 zostały użyte wyniki z prac [19, 7, 18, 20], mówiące o braku właściwych nieredukowalnych spójnych podgrup grupy $\mathbf{SO}(1, n+1)$. Działając podobnie, mając na celu klasyfikację (nieredukowalnych) konforemnych holonomii *lorentzowskich*, które z definicji są podgrupami w $\mathbf{SO}(2, n)$, musieliśmy więc zbadać istnienie spójnych nieredukowalnych podgrup w $\mathbf{SO}(2, n)$. Dość nieoczekiwanie otrzymaliśmy dosyć krótką listę takich podgrup:

Twierdzenie 10 ([**Hab4**, Twierdzenie 1]). *Niech $G \subset \mathbf{SO}(2,n)$ będzie spójną grupą Liego z nieredukowalną reprezentacją działającą w $\mathbb{R}^{2,n}$. Wtedy G jest sprzężona z jedną z poniższych grup:*

1. $\mathbf{SO}_0(2,n)$ *dla dowolnego* $n \geq 1$;
2. $\mathbf{U}(1,p)$, $\mathbf{SU}(1,p)$ *dla parzystego* $n = 2p$ *lub* $\mathbf{SO}(2) \cdot \mathbf{SO}_0(1,p)$, *jeśli* $p > 1$;
3. $\mathbf{SO}_0(1,2) \subset \mathbf{SO}(2,3)$ *dla* $n = 3$.

Dwie z tych grup są od dawna znane jako konforemne holonomie: grupa $\mathbf{SO}(2,n)$ jest holonomią konforemną rozmaitości lorentzowskich z generyczną strukturą konformną, a grupa $\mathbf{SU}(1,p)$ jest grupą konforemnej holonomii przestrzeni Feffermana [24]. Korzystając z wyników zawartych w [12, 33] można wykluczyć z powyższej listy potencjalnych grup konforemnych holonomii dalsze dwie grupy: jeśli grupa konforemnej holonomii jest zawarta w $\mathbf{U}(p,q)$, to musi być również zawarta w $\mathbf{SU}(p,q)$. Jednakże, co jest znanym faktem, $\mathbf{SO}(2) \times \mathbf{SO}(1,p)$ jest zawarta w $\mathbf{U}(1,p)$ i nie jest zawarta w $\mathbf{SU}(1,p)$; zatem zarówno $\mathbf{SO}(2) \times \mathbf{SO}(1,p)$, jak i $\mathbf{U}(1,p)$ muszą być wykluczone jako potencjalne grupy konforemnej holonomii lorentzowskiej. Pozostaje więc sprawdzenie, czy $\mathbf{SO}_0(1,2)$ może być grupą takiej holonomii. Jej reprezentacja w $\mathbf{SO}(2,3)$ jest nieredukowalną reprezentacją holonomii pięciowymiarowej pseudo-riemannowskiej przestrzeni symetrycznej $\mathbf{SL}_3\mathbb{R}/\mathbf{SO}(1,2)$, więc ogólniejszym zagadnieniem jest odpowiedź na pytanie, czy grupy holonomii nieredukowalnych pseudo-riemannowskich przestrzeni symetrycznych mogą być grupami konforemnej holonomii. Wyniki dotyczące przestrzeni $\mathbf{SL}_3\mathbb{R}/\mathbf{SO}(1,2)$ są sformułowane w postaci następującego twierdzenia,

Twierdzenie 11 ([**Hab7**, Twierdzenie 2]). *Jeśli konforemna rozmaitość lorentzowska (M,c) wymiaru 3 umożliwia redukcję konforemnej grupy holonomii do podgrupy $\mathbf{SO}(1,2) \subset \mathbf{SO}(2,3)$, to (M,c) jest lokalnie konforemnie płaska. W szczególności reprezentacja izotropii dla $\mathbf{SL}_3\mathbb{R}/\mathbf{SO}(2,1)$ nie może być reprezentacją konforemnej holonomii.*

Twierdzenia 10 oraz 11 prowadzą do pełnej klasyfikacji nieredukowalnych konforemnych holonomii lorentzowskich. Jest to główny wynik pracy [**Hab4**]:

Wniosek 12 ([**Hab4**, Wniosek 1] and [**Hab7**, Twierdzenie 2]). *Jeśli (M,c) jest konforemną rozmaitością lorentzowską wymiaru n z nieredukowalną konforemną holonomią H, to H jest równe $\mathbf{SO}_0(1,n+1)$ lub $\mathbf{SU}(1,\frac{n}{2})$. Grupy te są realizowane albo przez generyczne struktury konforemne, albo przez przestrzenie Feffermana.*

Kolejne wyniki w [**Hab7**] dotyczą zespolonych i kwaternionowych analogów przestrzeni $\mathbf{SL}_3\mathbb{R}/\mathbf{SO}(1,2)$ i odsłaniają interesujący związek z koneksjami o całkowicie antysymetrycznej torsji:

Twierdzenie 13 ([**Hab7**, Twierdzenie 3]). *Jeśli (M,c) jest rozmaitością konforemną o sygnaturze $(3,3)$ z grupą konforemnej holonomii zawartej w $\mathbf{PSU}(2,1) \subset \mathbf{SO}(4,4)$, to (M,c) jest konforemna do struktury prawie para-kählerowskiej w słabym sensie. W szczególności (M,c) jest konforemnie einsteinowska w słabym sensie z dodatnią stałą Einsteina i jej konforemna holonomia jest* właściwie *zawarta w $\mathbf{PSU}(2,1)$.*

Twierdzenie 14 ([**Hab7**, Twierdzenie 4]). *Jeśli (M,c) jest rozmaitością konforemną o sygnaturze $(5,7)$ z grupą konforemnej holonomii zawartej w $\mathbf{PSp}(2,1) \subset \mathrm{SO}(6,8)$, to (M,c) jest konforemnie einsteinowska w słabym sensie. W szczególności grupa konforemnej holonomii jest* właściwą *podgrupą $\mathbf{PSp}(2,1)$.*

Częściową odpowiedź na pytanie, czy konforemna holonomia jest zawsze holonomią pseudo-riemannowską daje następujące twierdzenie z pracy [**Hab7**]:

Twierdzenie 15 ([**Hab7**, Twierdzenie 5]). *Niech (M,c) będzie analityczną w sensie rzeczywistym konforemną rozmaitością o sygnaturze (p,q) i wymiarze nieparzystym $n = p+q \geq 3$. Jeśli $H \subset \mathbf{O}(p+1,q+1)$ posiada nieredukowalną reprezentację na $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$ i jest zadane jako spójna składowa*

jedności stabilizatora pewnego tensora w $\mathbf{O}(p+1,q+1)$*, to* H *nie może być równa grupie konforemnej holonomii* $(M,[g])$*, chyba że* $H = \mathbf{SO}_0(p+1,q+1)$ *lub* $H = \mathbf{G}_{2(2)} \subset \mathbf{SO}(4,3)$*, gdzie* $\mathbf{G}_{2(2)}$ *jest rzeczywistą niezwartą formą prostej grupy Liego* $\mathbf{G}_2$*.*

Warto wspomnieć, że w chwili obecnej wyniki z tego autoreferatu dotyczące związków holonomii pseudo-riemanowskich i konforemnych zostały uogólnione w różnych kierukach. W szczególności, w pracy [13] zostało udowodnione, że konforemna algebra holonomii struktur konforemnych, które są *analityczne*, jest zawsze równa algebrze holonomii pseudo-riemannowskiej metryki Feffermana-Grahama odpowiadającej danej strukturze konforemnej (w przypadku parzystego wymiaru, po ewentualnym jej obcięciu do odpowiedniego rzędu pochodnej tensora krzywizny).

4.3.4 Wyniki na temat metryk Feffermana-Grahama

W rozdziale 4.3.3 pokazałem jak wygląda jawna postać metryk Feffermana-Grahama dla klas konferemnych zawierających w sobie metrykę einsteinowską. W obecnym rozdziale pokażę jak konstruować jawne postacie metryk Feffermana-Grahama dla pewnych klas struktur konforemnych które nie są lokalnie konforemne ze strukturami einsteinowskimi. Należy zaznaczyć, że konstrukcje jawnych metryk Feffermana-Grahama, które podam w tym rozdziale, są oprócz konstrukcji dotyczących specjalnych iloczynów einsteinowskich z prac [26], [29], i konstrukcji podanej w pracy [39], jedynymi znanymi przykładami jawnych metryk Feffermana-Grahama dla struktur konforemnych, które nie są konforemnymi ze strukturami Einsteina.

Metryki Feffermana-Grahama dla pp-fal i ich uogólnień. Pseudo-riemannowskie rozmaitości spełniające założenia twierdzenia 3, tzn. takie które posiadają niezmienniczą ze względu na przesunięcie równoległe dystrybucję całkowicie zerową, w której zawiera się obraz tensora Schoutena, znajdują się w klasie *pp-fal* lub ich uogólnień. *Lorentzowska pp-fala* jest to rozmaitość lorentzowska dopuszczająca istnienie równoległego zerowego pola wektorowego V, dla którego tensor krzywizny Riemanna R spełnia warunek $R(X,Y) = 0$ dla wszystkich $X, Y \in V^{\perp}$. Lokalnie, metrykę lorentzowskiej pp-fali o wymiarze n można zapisać jako

$$g = 2\mathrm{d}u\mathrm{d}v + H\mathrm{d}u^2 + \sum_{i=1}^{n-2}(\mathrm{d}x^i)^2,$$

gdzie $H = H(x^i, u)$ nie zależy od v. W tym przypadku równoległe zerowe pole wektorowe V to ∂_v. Pomimo tego, że pp-fale są głównie znane jako falowe rozwiązania równań Einsteina w ogólnej teorii względności (rozwiązania te mają znikający tensor Ricciego dla harmonicznej funkcji H), to zostały one odkryte po raz pierwszy w kontekście geometrii konforemnej. Odkrycie to pochodzi od Brinkmanna [9], który znalazł pp-fale jako jedną z tylko dwóch klas metryk konforemnych mających tę własność, że są one konformne z dwoma homotetycznie nierównoważnymi metrykami einsteinowskimi.

W [**Hab9**] wprowadzone zostało pojęcie *uogólnionych pp-fal* o sygnaturze $(p, n-p)$ (w skrócie nazywanych pp-falami) z metryką

$$g = 2\mathrm{d}u^a(\delta_{ab}\mathrm{d}v^b + H_{ab}\mathrm{d}u^b) + \delta_{AB}\mathrm{d}x^A\mathrm{d}x^B, \tag{19}$$

gdzie $H_{ac} = H_{ca}$ są gładkimi funkcjami spełniającymi $\frac{\partial}{\partial v^b}(H_{ac}) = 0$. Indeksy $A, B, C, \ldots \in \{1, \ldots n-2p\}$, natomiast $a, b, c, \ldots \in \{1, \ldots, p\}$. Dla tak zdefiniowanych uogólnień pp-fal każde z pól wektorowych $\frac{\partial}{\partial v^b}$ jest *równoległym* polem zerowym. Przypadek $p = 1$ odpowiada standardowej lorentzowskiej pp-fali.

Było dla mnie dużą niespodzianką, że dla uogólnionych w ten sposób pp-fal, równania Feffermana-Grahama (13) sprowadzają się, przez odpowiednie podstawienie, do pewnego niejednorodnego *liniowego* układu równań różniczkowych cząstkowych. Opisuje to następujące

Twierdzenie 16 ([**Hab3**, Lemat 1] oraz [**Hab9**, Rozdział 3.1]). *Niech g będzie metryką uogólnionej pp-fali (19) na rozmaitości $M = \mathbb{R}^n$ definiującą strukturą konforemną $[g]$ oraz niech*

$$\widetilde{g} = 2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}(\rho t) + t^2(g + h_{ab}(\rho)\mathrm{d}u^a\mathrm{d}u^b), \tag{20}$$

będzie stowarzyszoną z g metryką pre-Feffermana-Grahama, dla której rodzina funkcji $h_{ab} = h_{ab}(x^A, u^b, \rho)$ on M spełnia $h_{ab}|_{\rho=0} = 0$.

Tensor Ricciego dla $\widetilde{g}$ znika, $Ric(\widetilde{g}) = 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy każda z funkcji h_{ab} spełnia niejednorodne liniowe równanie różniczkowe cząstkowe,

$$L(h) = \Delta(H), \qquad \text{gdzie } L = 2\rho\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + (2-n)\frac{\partial}{\partial\rho} - \Delta, \tag{21}$$

oraz $\Delta = \delta^{AB}\partial_A\partial_B$ jest operatorem Laplace'a zapisanym przy pomocy $(n-2p)$ kartezjańskich współrzędnych x^A.

W pracy [**Hab3**] jest pokazane jak rozwiązać równanie (21) poprzez rozwinięcie w szereg potęgowy, odnotowując że pierwiastki równania charakterystycznego dla (21) to $s = 0$ i $s = n/2$. W późniejszej pracy [**Hab9**] rezultat ten został rozszerzony do przypadku uogólnionych pp-fal, gdzie został dowiedziony ogólniejszy rezultat istnienia rozwiązań nieanalitycznych. W przypadku parzystego n rezultat ten pozwolił na nowe spojrzenie na niejednoznaczność Feffermana-Grahama, a także na precyzyjne obliczenie tensora obstrukcji Feffermana-Grahama dla klas konforemnych reprezentowanych poprzez uogólnione pp-fale.

Twierdzenie 17. *([**Hab3**, Twierdzenie 1] dla przypadku $p = 1$, i [**Hab9**, Twierdzenie 3.1] dla ogólnego przypadku). Niech $\Delta = \delta^{AB}\partial_A\partial_B$ będzie operatorem Laplace'a zapisanym przy pomocy $(n-2p)$ kartezjańskich współrzędnych x^A oraz $H = H(x^A, u^b)$.*

1. *Dla nieparzystego n ogólne rozwiązanie $h = h(\rho, x^A, u^b)$ równania (21) z $h(\rho) \to 0$ gdy $\rho \downarrow 0$ można zapisać jako*

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta^k H}{k!\prod_{i=1}^{k}(2i-n)}\rho^k + \rho^{n/2}\Big(\alpha + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta^k\alpha}{k!\prod_{i=1}^{k}(2i+n)}\rho^k\Big),$$

   gdzie $\alpha = \alpha(x^A, u^b)$ jest dowolną gładką funkcją wszystkich swoich zmiennych. W szczególności gdy H jest funkcją analityczną, rozwiązanie w otoczeniu $\rho = 0$ z $h(0) = 0$ jest dane dla $\alpha \equiv 0$. Jest ono analityczne w ρ i określone w sposób jednoznaczny.

2. *Dla parzystego $n = 2s$ ogólne rozwiązanie h równania (21) z $h(\rho) \to 0$ gdy $\rho \downarrow 0$ to*

$$\begin{aligned} h \;=\; & \textstyle\sum_{k=1}^{s-1}\frac{\Delta^k H}{k!\prod_{i=1}^{k}(2i-n)}\rho^k + \rho^s\Big(\alpha + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta^k\alpha}{k!\prod_{i=1}^{k}(2i+n)}\rho^k\Big) \\ & + c_n\rho^s\Big(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(\log(\rho) - q_k)\frac{\Delta^{s+k}H}{k!\prod_{i=1}^{k}(2i+n)}\rho^k\Big) \\ & + c_n\rho^s Q * \textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta^{s+k}H}{k!\prod_{i=1}^{k}(2i+n)}\rho^k, \end{aligned}$$

   gdzie $\alpha = \alpha(x^A, u^b)$ oraz $Q = Q(x^A, u^b)$ są dowolnymi gładkimi funkcjami swoich zmiennych, $*$ jest splotem funkcji względem zmiennych x^A a stałe występujące w rozwiązaniu to

$$\begin{aligned} c_n &= -\frac{1}{(s-1)!\prod_{i=0}^{s-1}(2i-n)}, \\ q_0 &= 0, \\ q_k &= \textstyle\sum_{i=1}^{k}\frac{n+4i}{i(n+2i)}, \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

   W szczególności rozwiązania analityczne w ρ w otoczeniu $\rho = 0$ z $h(0) = 0$ istnieją tylko wtedy, gdy $\Delta^s H \equiv 0$. Nie są one określone w sposób jednoznaczny i są sparametryzowane analitycznymi funkcjami α.

Twierdzenie to prowadzi do następującego wyniku dotyczącego analitycznych metryk Feffermana-Grahama dla uogólnionych pp-fal [22, 23], który na tym jawnym przykładzie, ilustruje ogólne własności konstrukcjii Feffermana-Grahama:

Wniosek 18 ([**Hab3**, Twierdzenie 1] dla $p = 1$ oraz [**Hab9**, Twierdzenie 3.1] dla ogólnego przypadku). *Niech (M, g) będzie uogólnioną pp-falą (19) o wymiarze n i sygnaturze $(p, n-p)$, określoną za pomocą gładkiej funkcji H_{ac}.*

1. *Dla nieparzystego n jednoznacznie określona analityczna metryka Fefermana-Grahama klasy konforemnej $[g]$ jest dana jako*

$$\widetilde{g} = 2\mathrm{d}(\rho t)\mathrm{d}t + t^2\Big(g + 2\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta^k H_{ac}}{k! \prod_{i=1}^{k}(2i-n)}\rho^k\Big)\mathrm{d}u^a\mathrm{d}u^c\Big). \tag{22}$$

2. *Dla parzystego $n = 2s$ analityczna metryka Feffermana-Grahama istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy każda z funkcji H_{ac} spełnia $\Delta^s H_{ac} = 0$, gdzie Δ jest operatorem Laplace'a na $\mathbb{R}^{n-2p}$ zapisanym przy pomocy kartezjańskich współrzędnych x^A. Analityczna metryka Feffermana-Grahama jest wtedy równa (22). Metryka ta, jako funkcja ϱ jest wielomianem, a jej niejednoznaczność sprowadza sie do tego, że każda inna analityczna metryka Feffermana-Grahama różni się od (22) o człon*

$$\rho^s\Big(\alpha_{ac} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta^k \alpha_{ac}}{k! \prod_{i=1}^{k}(2i+n)}\rho^k\Big)\mathrm{d}u^a\mathrm{d}u^c,$$

gdzie $\alpha_{ac} = \alpha_{ac}(x^B, u^d)$ są dowolnymi funkcjami.

Część ($\Longleftarrow$) dowodu punktu (2) powyższego twierdzenia (tensor obstrukcji $\mathcal{O}$ jest wielokrotnością $\Delta^s(H_{ac})\mathrm{d}u^a\mathrm{d}u^c$) została przedstawiona w ogólnym przypadku w [2]. Powyższe wyniki umożliwiły udowodnienie następującego wniosku,

Wniosek 19 ([**Hab3**, Twierdzenie 4]). *Dla uogólnionych pp-fal o parzystym wymiarze skalar Q-krzywizny Bransona jest równy 0.*

Kolejne twierdzenie dotyczy *lorentzowskich* konforemnych klas pp-fal:

Twierdzenie 20 ([**Hab9**, Twierdzenie 3.2]). *Niech*

$$\widetilde{g}_F = 2\mathrm{d}(t\rho)\mathrm{d}t + t^2\Big(2\mathrm{d}u(\mathrm{d}v + F\,\mathrm{d}u) + \delta_{AB}\mathrm{d}x^A\,\mathrm{d}x^B\Big) \tag{23}$$

będzie metryką na $\widetilde{M} = \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}_{>0}$, gdzie $F = F(\rho, u, x^1, \ldots, x^{n-2})$ jest gładką funkcją na $\mathbb{R}^n$. Algebra grupy holonomii $\mathfrak{hol}(\widetilde{g}_F)$ metryki $\widetilde{g}_F$ jest zawarta w

$$\Big(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \ltimes (\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^{n-2})\Big) \oplus \mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} X & Z & aJ \\ 0 & 0 & -Z^\top \\ 0 & 0 & -X^\top \end{pmatrix} \;\Big|\; \begin{array}{l} X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}), \\ Z \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^{n-2}, \\ a \in \mathbb{R} \end{array} \right\},$$

gdzie $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Dla konforemnej pp-fali zdefiniowanej za pomocą funkcji H, powyższe twierdzenie z $F = H + h$, gdzie h jest rozwiązaniem (21), zadaje górne ograniczenie na algebrę holonomii analitycznej metryki Feffermana-Grahama (22) (o ile ta metryka istnieje, tzn. o ile n jest nieparzyste lub $\Delta^{\frac{n}{2}} H = 0$). To ograniczenie jest usprawnieniem wyniku otrzymanego w [**Hab3**, Wniosek 2]. Może ono skutkować w dalszej redukcji holonomii, jeśli metryka (23) spełnia dodatkowe warunki (np. takie, że jak w przypadku Feffermana-Grahama, jest Ricci płaska,). Istotnie, okazuje się, że dla pewnych wyróżnionych konforemnych pp-fal o lorentzowskiej sygnaturze, takich jak fale płaskie lub przestrzenie Cahena-Wallacha, mamy dalszą redukcję holonomii:

Twierdzenie 21 ([**Hab1**, Twierdzenie 8.1] oraz [**Hab9**, Twierdzenie 3.1]). *Niech $(S_{AB})_{i,j=1}^{n-2}$ będzie symetryczną macierzą funkcji $S_{AB} = S_{AB}(u)$ ze śladem $S = S(u)$ oraz*

$$g = 2\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + 2\left(S_{AB}(u)\,x^A x^B\right)\mathrm{d}u^2 + \delta_{AB}\mathrm{d}x^A\,\mathrm{d}x^B \tag{24}$$

metryką lorentzowskiej fali płaskiej $\mathbb{R}^n$ generowaną przez S_{AB}. Jeśli $f = f(u)$ jest rozwiązaniem następującego równania różniczkowego,

$$f'' = (f')^2 - \tfrac{2}{n-2}S,$$

to metryka $\widehat{g} = \mathrm{e}^{2f}g$ ma znikający tensor Ricciego. Co więcej, metryka

$$\widetilde{g} = 2d(t\rho)\mathrm{d}t + t^2\mathrm{e}^{2f(u)}g$$

jest metryką Feffermana-Grahama klasy konforemnej $[g]$, która posiada dwa równoległe zerowe pola wektorowe. Są one dane przez $\frac{1}{t}\partial_\rho$ i $\frac{1}{t}(\partial_v + h\,\partial_\rho)$, gdzie $h = h(u)$ spełnia równanie $h' = \mathrm{e}^{2f}$. Jako rezultat, algebra holonomii dla $\widetilde{g}$ i algebra konforemnej holonomii są zawarte w $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^{n-2}$.

Twierdzenie to mówi np. o konforemnej holonomii symetrycznych przestrzeni Cahena-Wallacha, dla których metryka (24) jest generowana przez symetryczną macierz *stałych* funkcji S_{AB}.

Wyjątkowe konforemne struktury Nurowskiego i ich metryki Feffermana-Grahama. W [37] został odkryty związek pomiędzy zagadnieniem lokalnej równoważności równań różniczkowych typu Monge'a i szczególnymi strukturami konforemnymi w wymiarze pięć o sygnaturze metryki $(2,3)$. Te struktury konforemne można scharakteryzować jako takie, dla których konforemna holonomia jest zredukowana do niezwartej formy rzeczywistej wyjątkowej prostej grupy Liego $\mathbf{G}_{2(2)}$. Zanim przejde do moich rezultatów w tej dziedzinie, opiszę wspomniany przed chwilą zwiazek: klasa równań Monge'a - konforemna metryka w wymiarze pięć.

Z niedookreślonym, zwyczajnym równaniem różniczkowym typu Monge'a

$$z' = F(x, y, y', y'', z),$$

na dwie niewiadome funkcje $y = y(x)$ i $z = z(x)$ zmiennej x, gdzie $F = F(x, y, p, q, z)$ jest funkcją zadaną na zbiorze otwartym M w $\mathbb{R}^5$ z $\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \neq 0$, można powiązać układ równań Pfaffa zadany przez następujące jednoformy,

$$\theta^1 = \mathrm{d}y - p\,\mathrm{d}x, \quad \theta^2 = \mathrm{d}p - q\,\mathrm{d}x, \quad \theta^3 = \mathrm{d}z - F(x, y, p, q, z)\mathrm{d}x,$$

gdzie $p = y'$ oraz $q = y''$. Dystrybucja rzędu 2, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_F = \mathrm{Ann}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ na $\mathbb{R}^5$, anihilująca owe jednoformy, jest typu $(2,3,5)$ (rząd $\mathcal{D} + [\mathcal{D}, \mathcal{D}]$ wynosi 3 oraz $\mathcal{D} + [\mathcal{D}, \mathcal{D}] + [\mathcal{D}, [\mathcal{D}, \mathcal{D}]]$ rozpina $T\mathbb{R}^5$). Dla takich dystrybucji postawiono problem lokalnej równoważności, którego rozwiązanie, znalezione przez Cartana, doprowadziło do wprowadzenia do opisu takich dystrybucji koneksji Cartana z wartościami w wyjatkowej algebrze Liego $\mathfrak{g}_{2(2)}$. Korzystając z zawierania się algebr $\mathfrak{g}_{2(2)} \subset \mathfrak{so}(3,4)$ Nurowski pokazał, że koneksja ta jest jednocześnie normalną konforemną koneksją Cartana pewnej struktury konforemnej o sygnaturze $(2,3)$ [37]. Co więcej, w pracy [37] wyprowadzona została również postać na metrykę g_F, reprezentującą klasę konforemną określoną przez funkcję F definiującą równanie Monge'a, a zatem i $(2,3,5)$ dystrybucję D_F. Konforemne struktury w wymiarze pięć przypisane w ten sposób do danej dystrybucji typu $(2,3,5)$ zostały nazwane *konformenymi strukturami Nurowskiego* [14]. Ponieważ są one określone w pięciowymiarowej, czyli *nie*parzystowymiarowej przestrzeni, więc zawsze dopuszczają jednoznacznie określoną, analityczną metrykę Feffermana-Grahama [22, 23]. Posiada ona zawsze wyjątkową holonomię (zawartą w $\mathbf{G}_{2(2)}$) [38]. Głównym problemem konstrukcji metryk z taką holonomią jest znalezienie rozwiązania równań Feffermana-Grahama, które znane było tylko w przypadku lokalnie konforemnie einsteinowskim,

gdzie holonomia jest redukowana z $\mathbf{G}_{2(2)}$ do stabilizatora pewnego równoległego pola wektorowego. W przypadku kiedy funkcja F generuje konforemną strukturę o sygnaturze $(2,3)$ niezawierającą metryki Einsteina żadne rozwiązanie tych równań nie bylo znane. W pracy [38] problem ten zostal po raz pierwszy pokonany, jednakże tylko, dla wyróżnionych konforemnych struktur Nurowskiego. Te struktury były generowane przez

$$F = q^2 + \sum_{k=0}^{6} a_k p^k + bz, \qquad \text{gdzie } a_k \text{ to stałe.} \tag{25}$$

Z rozwiązaniem tym związana jest grupa holonomii $\mathbf{G}_{2(2)}$, co zostało udowodnione przy pomocy następującego twierdzenia,

Twierdzenie 22 ([**Hab5**, Twierdzenie 1]). *Niech $(M, [g_F])$ będzie strukturą konforemną związaną z dystrybucją typu $(2,3,5)$, określoną przy pomocy funkcji (25). Wtedy analityczna metryka Feffermana-Grahama ze znikającym tensorem Ricciego jest dana jako*

$$\widetilde{g}_F = -2\mathrm{d}t\mathrm{d}u + t^2 g_F - 2tu\mathsf{P} - u^2 B.$$

gdzie P *oraz B są odpowiednio tensorami Schoutena oraz Bacha metryki g_F. Jej holonomia jest zawarta w $\mathbf{G}_{2(2)}$. Ponadto jeśli przynajmniej jedna ze stałych a_3, a_4, a_5 lub a_6 jest niezerowa, to grupa holonomii metryki $\widetilde{g}$ jest równa całej grupie $\mathbf{G}_{2(2)}$.*

Jest to jeden z pierwszych przykładów metryk pseudo-riemannowskich z holonomią $\mathbf{G}_{2(2)}$. Ich istnienie zostało już udowodnione w [10], jednak konstrukcja przykładowych metryk, w szczególności zupełnych i zwartych, była tam przeprowadzona jedynie dla przypadku riemannowskiego z holonomią $\mathbf{G}_2$. Jedyne ówcześnie znane metryki z holonomią $\mathbf{G}_{2(2)}$ to te zawarte w pracy [16].

Twierdzenie (22) zostało uogólnione w [28], gdzie pokazano, że dla każdej analitycznej konforemnej struktury Nurowskiego holonomia metryki Feffermana-Grahama ze znikającym tensorem Ricciego jest zawarta w $\mathbf{G}_{2(2)}$. W pracy tej zostało również przedstawione *dostateczne* kryterium (niezależne od Twierdzenia 22 i niespełnione przez przykłady podane w [**Hab5**]) na to, aby grupa holonomii była równa $\mathbf{G}_{2(2)}$. Nie zostały tam jednak podane żadne rozwiązania spełniające to kryterium.

Znalezienie jawnej postaci metryk Feffermana-Grahama dla szczególnych konforemnych klas Nurowskiego, takich jak (25), było możliwe dzięki własności analogicznej do tej posiadanej przez konforemne pp-fale. Dla pewnego założenia o postaci rozwiązania, równania Feffermana-Grahama redukują się do *liniowego* układu równań różniczkowych. Zostało to również wykorzystane w [**Hab9**] do konstrukcji metryk Feffermana-Grahama z holonomią $\mathbf{G}_{2(2)}$ dla szerszej niż w (25) klasy konforemnych struktur Nurowskiego. Najbardziej ogólna klasa takich struktur, $[g_F]$, dla których można zastosować to podejście jest generowana przez następującą funkcję,

$$F = q^2 + f(x,y,p) + h(x,y)z. \tag{26}$$

Klasa konforemna $[g_F]$ jest wtedy zadana przez metrykę

$$g_F = g_{f,h} = -2\theta^1\theta^5 - 2\theta^2\theta^4 + \theta^3\theta^3, \tag{27}$$

gdzie koreper jest zdefiniowany przy pomocy następujących jednoform

$$\begin{aligned}
&\theta^1 = \mathrm{d}y - p\,\mathrm{d}x, \quad \theta^2 = \mathrm{d}z + (q^2 - f - hz)\,\mathrm{d}x - 2q\,\mathrm{d}p,\\
&\theta^3 = 2\sqrt{2}\,(\mathrm{d}p - q\mathrm{d}x), \quad \theta^4 = 3\,\mathrm{d}x,\\
&\theta^5 = (\tfrac{9}{10}pf_{pp} + \tfrac{2}{5}ph^2 - \tfrac{3}{5}p^2h_y - \tfrac{3}{5}ph_x - 4qh - 3f_x)\,\mathrm{d}x\\
&\qquad + (\tfrac{3}{5}ph_y + \tfrac{3}{5}h_x - \tfrac{9}{10}f_{pp} - \tfrac{2}{5}h^2)\,\mathrm{d}y - 2h\,\mathrm{d}p + 6\,\mathrm{d}q.
\end{aligned} \tag{28}$$

Tensor Schoutena tej metryki jest nilpotentny stopnia 2 i jest dany jako

$$\mathsf{P} = \mathsf{P}_{11}(\theta^1)^2 + \mathsf{P}_{14}\,\theta^1\theta^4 + \mathsf{P}_{44}(\theta^4)^2.$$

Jego obraz jest przestrzenią całkowicie zerową, i jako taki jest zawarty w jego jądrze,

$$\mathrm{Im}(\mathsf{P}) = \mathrm{Ann}(\theta^1, \theta^3, \theta^4) \subset \mathrm{Ker}(\mathsf{P}) = \mathrm{Ann}(\theta^1, \theta^4).$$

Ponadto, zarówno Im(P), jak i Ker(P) spełniają pewne warunki całkowalności. To, że tensor Schoutena występuje w pierwszym członie rozwinięcia (14), sugeruje następujący ansatz dla szukanej metryki Feffermana-Grahama ze znikającym tensorem Ricciego:

$$\widetilde{g}_{f,h} = 2\mathrm{d}t\mathrm{d}(\rho t) + t^2\big(g_{f,h} + A\,(\theta^1)^2 + 2B\,\theta^1\theta^4 + C\,(\theta^4)^2\big), \tag{29}$$

gdzie $A = A(x, y, p, \rho)$, $B = B(x, y, p, \rho)$ i $C = C(x, y, p, \rho)$. Można udowodnić następujące twierdzenie,

Twierdzenie 23 ([**Hab9**, Rozdział 4.1]). *Metryka pre-Feffermana-Grahama (29) ma znikający tensor Ricciego wtedy i tylko wtedy, gdy A, B i C spełniają*

$$\begin{aligned} L(A) &= \tfrac{9}{40} f_{pppp}, \quad \textit{gdzie} \quad L = 2\rho\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - 3\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{8}\frac{\partial^2}{\partial p^2}, \\ L(B) &= -\tfrac{1}{36} A_x + \tfrac{3}{40} f_{ppp} + \tfrac{9}{20} h_y, \\ L(C) &= -\tfrac{1}{18} B_x + \tfrac{1}{324} A + \tfrac{1}{30} f_{pp} - \tfrac{2}{15} h^2 + \tfrac{1}{5}(p h_y + h_x), \end{aligned} \tag{30}$$

z warunkami brzegowymi $A|_{\rho=0} = B|_{\rho=0} = C|_{\rho} = 0 = 0$.

Operator L ma w tym przypadku postać zbliżoną do operatora z równania (21). Rozwiązanie układu (30) umożliwia otrzymanie jawnej postaci metryki Feffermana-Grahama ze znikającym tensorem Ricciego dla omawianej klasy struktur konforemnych Nurowskiego. Wynik ten znajduje się w pracy [**Hab9**, Rozdział 4] i może być sformułowany za pomocą poniższego twierdzenia,

Twierdzenie 24 ([**Hab9**, Twierdzenia 4.2, 4.3 oraz 4.4]). *Ogólne, analityczne rozwiązanie układu* (30), *znikające w* $\rho = 0$, *to*

$$\begin{aligned} A &= 3\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\partial^{(2k+2)} f}{\partial p^{(2k+2)}}\,\rho^k, \quad \textit{gdzie} \quad a_k = \frac{1}{5}\frac{(2k-1)(2k-3)}{2^{2k}(2k)!}, \\ B &= -\tfrac{3}{20}\rho h_y - \tfrac{1}{3}\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}(2k-5) a_k \frac{\partial^{(2k+1)} f}{\partial p^{(2k+1)}}\,\rho^k \\ C &= \tfrac{2}{45}\rho h^2 - \tfrac{1}{15}\rho(p h_y + h_x) + \tfrac{2}{27}\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}(k-3)(2k-5) a_k \frac{\partial^{2k} f}{\partial p^{2k}}\,\rho^k. \end{aligned} \tag{31}$$

W szczególności gdy f oraz h są funkcjami analitycznymi, jednoznacznie określona analityczna metryka Feffermana-Grahama klasy konforemnej $[g_{f,h}]$ *to (29), z A, B i C danymi przez (31). Holonomia tej metryki jest zawarta w* $\mathbf{G}_{2(2)}$.

Ponadto gdy $A_\rho \neq 0$, *holonomia metryki Feffermana-Grahama* $\widetilde{g}_{f,h}$ *jest równa* $\mathbf{G}_{2(2)}$. *Przykładem realizacji tego przypadku jest zadanie f w postaci wielomianu zmiennej p rzędu* ≥ 4.

W pracy [**Hab9**, Rozdział 4] zostało również pokazane, że analityczne rozwiązanie układu (30) jest również rozwiązaniem pewnego układu równań różniczkowych pierwszego rzędu. Pozwoliło to na znalezienie jawnej postaci stabilnej równoległej trójformy, która redukuje holonomię $\widetilde{g}_{f,h}$ do $\mathbf{G}_{2(2)}$. Ponadto w pracy tej podane zostało ogólne nieanalityczne rozwiązanie układu (30) z członami typu $\rho^{5/2}$, oraz przykłady metryk Feffermana-Grahama ze znikającym tensorem Ricciego, których składowe nie są wielomianami w ρ. Niedawno, więcej przykładów metryk Feffermana-Grahama nie będących wielomianami w ρ i z holonomią równą $\mathbf{G}_{2(2)}$ (pochodzących od innych konforemnych struktur Nurowskiego) zostało znalezionych w pracy [39].

Konforemne struktury Bryanta oraz ich metryki Feffermana-Grahama. W analogii do konstrukcji konforemnych struktur Nurowskiego, Bryant [11] stowarzyszył z dystrybucją $\mathcal{D}$ typu $(3,6)$ (dystrybucja wektorowa rzędu 3 na $\mathbb{R}^6$, taka że $\mathcal{D}+[\mathcal{D},\mathcal{D}]$ rozpina $T\mathbb{R}^6$) konforemną strukturę o sygnaturze $(3,3)$, nazwaną później *konforemną strukturą Bryanta*. Grupa konforemnej holonomii struktur tego typu redukuje się do $\mathbf{Spin}(3,4) \subset \mathbf{SO}(4,4)$ i w analogii do przypadku $\mathbf{G}_{2(2)}$ podjęte zostały próby skonstruowania metryk Feffermana-Grahama z holonomią $\mathbf{Spin}(3,4)$. Niestety, w tym przypadku istnienie Ricci płaskich metryk Feffermana-Grahama, a co za tym idzie takich metryk z holonomią $\mathbf{Spin}(3,4)$, jest ograniczona poprzez przeszkodę (tensor obstrukcji) i należy mieć dużą intuicję aby wybrać dystrybucję $(3,6)$, której klasa konforemnych metryk Bryanta miałaby znikający tensor obstrukcji i jednocześnie byłaby konforemnie nieeinsteinowska (w przypadku konforemnie einsteinowskim holonomia zredukowałaby się poważniej, od $\mathbf{Spin}(3,4)$ do stabilizatora pewnego traktora). Mając to na uwadze, w pracy [**Hab9**, Rozdział 5] rozważaliśmy struktury Bryanta, generowane przez następującą dystrybucję typu $(3,6)$,

$$\mathcal{D}_f = \operatorname{span}\left(\frac{\partial}{\partial x^3} - x^2 \frac{\partial}{\partial y^1},\ \frac{\partial}{\partial x^1} - f\frac{\partial}{\partial y^2},\ \frac{\partial}{\partial x^2} - x^1\frac{\partial}{\partial y^3} \right), \tag{32}$$

gdzie $(x^1,x^2,x^3,y^1,y^2,y^3)$ są współrzędnymi na $\mathbb{R}^6$ a $f = f(x^1,x^3,y^2)$ jest gładką funkcją wszystkich swoich zmiennych i $\frac{\partial f}{\partial x^3} \neq 0$. Wtedy, dla następującego koreperu,

$$\begin{aligned}
\theta^1 &= \mathrm{d}y^1 + x^2\,\mathrm{d}x^3, & \theta^2 &= \tfrac{\partial f}{\partial x^3}\,(\mathrm{d}y^2 + f\,\mathrm{d}x^1),\\
\theta^3 &= \mathrm{d}y^3 + x^1\,\mathrm{d}x^2, & \theta^4 &= \tfrac{\partial f}{\partial x^3}\,\mathrm{d}x^1,\\
\theta^5 &= (\tfrac{\partial f}{\partial x^3})^{-1}\mathrm{d}x^2 - \tfrac{1}{3}\tfrac{\partial^2 f}{(\partial x^3)^2}(\tfrac{\partial f}{\partial x^3})^{-2}\,\theta^1, & \theta^6 &= \tfrac{\partial f}{\partial x^3}\,\mathrm{d}x^3 + p_1\theta^1 + p_2\theta^2 + p_3\theta^3,
\end{aligned}$$

z pewnymi dobrze określonymi funkcjami p_i, klasa konforemna jest określona za pomocą metryki

$$g_f = 2\theta^1\theta^4 + 2\theta^2\theta^5 + 2\theta^3\theta^6. \tag{33}$$

Dla struktur konforemnych zdefiniowanych poprzez funkcję f w powyższy sposób, tensor Schoutena jest (tak jak dla metryki (27)) nilpotentny stopnia 2, z jądrem i obrazem spełniającymi pewne warunki całkowalności. W tym przypadku równania Feffermana-Grahama ponownie sprowadzają się do *liniowego* niejednorodnego układu równań. Można to podsumować w następujący sposób,

Twierdzenie 25 ([**Hab9**, Rozdział 5.2]). *Struktury konforemne $[g_f]$ zdefiniowane poprzez metryki (33) z $f = f(x^1,x^3,y^2)$ mają następujące własności,*

1. *Tensor Bacha metryk g_f znika tożsamościowo. Tensor Schoutena g_f jest nilpotentny stopnia 2, $\mathsf{P}_i{}^k\mathsf{P}_{kj} = 0$, z równoległym jądrem $\operatorname{Ker}(\mathsf{P}) = \operatorname{Ann}(\theta^2,\theta^4,\theta^6)$.*
2. *Tensor obstrukcji struktur konforemnych $[g_f]$ znika ($\mathcal{O} = 0$), jednakże nie są one konforemnie cottonowskie (a co za tym idzie nie są konforemnie einsteinowskie).*
3. *Każda metryka Feffermana-Grahama ze znikającym tensorem Ricciego dla klasy $[g_f]$ daje się zapisać jako*

$$\widetilde{g}_{f,Q} = 2\mathrm{d}(\rho t)\mathrm{d}t + t^2(\,g_f + 2\,\rho\,\mathsf{P} + \rho^3\,Q\,), \tag{34}$$

gdzie P jest tensorem Schoutena g_f, a

$$Q \;=\; \textstyle\sum_{i,j=2,4,6} Q_{ij}\,\theta^i\theta^j, \qquad \text{dla } Q_{ij} = Q_{ij}(x^1,x^3,y^2). \tag{35}$$

jest niejednoznacznością Feffermana-Grahama.

Jądro tensora Schoutena P metryk g_f oprócz spełniania pewnych warunków całkowalności (jak w przypadku konforemnych struktur Nurowskiego) jest też równoległe względem koneksji Levi-Civity ∇ metryk g_f. Wraz z Twierdzeniem 3 implikuje to fakt, że w tym przypadku konforemna holonomia jest zawarta w stabilizatorze całkowicie zerowej płaszczyzny wymiaru 4 w wiązce traktorowej. Korzystając z wyników z pracy [13], mówiących o równoważności konforemnej holonomii i holonomii odpowiadającej jej metryki Feffermana-Grahama, prowadzi to do wniosku, że metryki Feffermana-Grahama klas konforemnych rozważanych w twierdzeniu 25 muszą posiadać holonomię zawartą w stabilizatorze zerowych dystrybucji rzędu 4 w $\mathbf{Spin}(3,4)$. Rozważania te można sformalizować w następującej postaci,

Wniosek 26 ([**Hab9**, Rozdział 5.4]). *Niech $[g_f]$ będzie klasą konforemną metryki* (33) *z $f = f(x^1, x^3, y^2)$, a $\widetilde{g}_{f,Q}$ metryką Feffermana-Grahma (34). Wtedy*

$$\mathfrak{hol}(\widetilde{g}_{f,Q}) \subset \mathfrak{gl}(4,\mathbb{R}) \ltimes \Lambda^2\mathbb{R}^4 = \left\{ \begin{pmatrix} X & Z \\ 0 & -X^\top \end{pmatrix} \mid X \in \mathfrak{gl}(4,\mathbb{R}),\ Z + Z^\top = 0 \right\} \subset \mathfrak{so}(4,4),$$

gdzie $\Lambda^2\mathbb{R}^4$ może być utożsamiana z antysymetrycznymi macierzami 4×4. Przykłady metryk Fffermana-Grahama, dla różnych f i Q, wraz z ich holonomiami, są dane w Tabeli 1.

	f	Q	Holonomia	Wymiar
1.	$(x^3)^2 + (y^2)^2$	$Q_{44} = 1$	$\mathfrak{gl}(4,\mathbb{R}) \ltimes \Lambda^2\mathbb{R}^4$	22
2.	$x^1(x^3)^2$	$Q_{66} = 1$	$\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R}) \ltimes \Lambda^2\mathbb{R}^4 \simeq \mathfrak{po}(3,3)$	21
3.	$(x^1)^2 + (x^3)^2$	$Q_{22} = 1$	$(\mathbb{R} \oplus \mathfrak{sp}(2,\mathbb{R})) \ltimes \Lambda^2\mathbb{R}^4$	17
4.	$(x^1)^2 + (x^3)^2$	$Q_{22} = 1$	$\mathfrak{sp}(2,\mathbb{R}) \ltimes (\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^{3,2}) \simeq \mathfrak{po}(3,2) \oplus \mathbb{R}$	16
5.	$(x^3)^2$	0	$\mathfrak{sp}(2,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^{3,2} \simeq \mathfrak{po}(3,2)$	15
6.	x^3	$Q_{44} = 1$	$(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \ltimes \mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})) \ltimes \mathbb{R}^{3,2}$	12
7.	$(x^1)^s x^3$	0	$\mathfrak{he}(4,\mathbb{R})$	7

Tabela 1: Holonomia metryk $\tilde{g}_{f,Q}$

Ze względu na to, że $\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{so}(3,3)$, mamy $\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R}) \ltimes \Lambda^2\mathbb{R}^4 \simeq \mathfrak{po}(3,3)$, gdzie $\mathfrak{po}(3,3) = \mathfrak{so}(3,3) \ltimes \mathbb{R}^{3,3}$ jest algebrą Poincarégo o sygnaturze $(3,3)$, $\mathfrak{sp}(2,\mathbb{R})$ symplektyczną algebrą Liego a $\mathfrak{he}(4,\mathbb{R})$ siedmiowymiarową algebrą Heisenberga w $\mathfrak{gl}(4,\mathbb{R})$.

Powyższe metryki Feffermana-Grahama są jedynymi istniejącymi przykładami metryk konforemnych klas Bryanta nie będących klasami konforemnie einsteinowskimi. W [**Hab9**] został podany również przykład z nieznikającym tensorem obstrukcji, dla którego dystrybucja $\mathcal{D}$ (32) jest określona przy pomocy funkcji $f = x^3 + x^1x^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$. Zagadnienie znikania tensora obstrukcji konforemnych klas Bryanta i jego związku z redukcją holonomii jest przedmiotem następnego rozdziału.

Tensor obstrukcji i konforemna holonomia. Dla przestrzeni o parzystym wymiarze istnienie gładkiej metryki Feffermana-Grahama ze znikającym tensorem Ricciego jest zależne od tensora *obstrukcji Feffermana-Grahama* $\mathcal{O}$. Znika on dla struktur konforemnych, które są lokalnie konforemnie einsteinowskie w słabym sensie (w tym przypadku holonomia jest zawarta w stabilizatorze standardowego traktora). W celu lepszego zrozumienia związku pomiędzy konforemną holonomią oraz tensorem Feffermana-Grahama $\mathcal{O}$ wprowadzona została następująca definicja [**Hab8**],

Definicja 27 ([**Hab8**, Rozdział 4.1]). Niech (M,c) będzie rozmaitością konforemną, $\mathfrak{hol}_x(M,c)$ algebrą konforemnej holonomii w punkcie $x \in M$, a $\mathcal{T}|_x$ włóknem standardowej konforemnej wiązki traktorowej. Ponadto, niech $\mathcal{D}_x$ będzie podprzestrzenią przestrzeni T_xM, taką że

$$\mathcal{D}_x := \left\{\tau(A(W)) \mid W \in \mathcal{T}|_x, A \in \mathfrak{hol}_x(M,c) \text{ takie, że } A|_{\mathcal{E}_-} = 0 \text{ oraz } A(\mathcal{E}_-^\perp) \subset \mathcal{E}_-\right\} \subset T_xM,$$

gdzie τ jest złożeniem rzutowania $\mathcal{E}_-^\perp \to \mathcal{E}_-^\perp/\mathcal{E}_-$ z izomorfizmem (4) między $\mathcal{E}_-^\perp/\mathcal{E}_-$ i TM. Wtedy

$$\mathcal{D} = \cup_{x\in M}\mathcal{D}_x$$

nazywamy *konforemną dystrybucję holonomii* (M,c).

Korzystając z (2) podprzestrzeń $\mathcal{D}_x \subset T_xM$ może być zadana w alternatywny sposób jako:

$$\mathcal{D}_x = \mathfrak{hol}_x(M,c) \cap \mathfrak{g}_+.$$

Nazwa *dystrybucja* użyta w powyższej definicji jest niewielkim nadużyciem ze względu na fakt, że wymiar $\mathcal{D}_x$ może się zmieniać wraz z punktem x, a to nie jest cechą *dystrybucji wektorowych* rozważanych w geometrii. Jest ona jednak umotywowana następującym twierdzeniem,

Twierdzenie 28 ([**Hab8**, Twierdzenie 4.2]). *Niech (M,c) będzie rozmaitością konforemną. Istnieje wtedy otwarty, gęsty zbiór $M_0 \subset M$, taki że funkcja*

$$\mathrm{rk}^{\mathcal{D}} : M \ni p \mapsto \dim(\mathcal{D}_x),$$

jest stała na każdej jego spójnej składowej.

Konforemna dystrybucja holonomii $\mathcal{D}$ umożliwia więc stratyfikację rozmaitości - rozkład na zbiory, na których wymiar $\mathcal{D}_x$ jest stały. Okazuje się, że każda część tego rozkładu jest sumą *zakrzywionych orbit* zdefiniowanych przez redukcję konforemnej holonomii, wprowadzonych w [13] w kontekście ogólnej geometrii cartanowskiej [**Hab8**, Twierdzenie 4.1].

Okazuje się, i było to dla nas wielką niespodzianką, że na podzbiorach M_0 na których dystrybucja $\mathcal{D}$ ma stały rząd, jest ona ściśle związana z dystrybucjami wyjątkowych struktur konforemnych Nurowskiego i Bryanta:

Twierdzenie 29 ([**Hab8**, Twierdzenie 1.4]). *Niech (M,c) będzie gładką rozmaitością konforemną o sygnaturze (p,q). Jeśli U jest zbiorem otwartym na którym $\mathcal{D}|_U$ jest dystrybucją wektorową, to $\mathcal{D}|_U$ jest całkowalna lub, jeśli $(p,q) = (2,3)$, jest dystrybucją typu $(2,3,5)$ definiującą konforemną strukturę Nurowskiego c na U. Dla $(p,q) = (3,3)$ jest ona typu $(3,6)$ i definiuje konforemną strukturę Bryanta c na U (jeśli nie jest całkowalna).*

Głównym powodem wprowadzenia pojęcie konforemnej dystrybucji holonomii jest jej związek z tensorem obstrukcji Feffermana-Grahama,

Twierdzenie 30 ([**Hab8**, Twierdzenie 1.1]). *Niech (M,c) będzie gładką rozmaitością konforemną wymiaru $n \geq 4$ o sygnaturze (p,q) z tensorem obstrukcji Feffermana-Grahama $\mathcal{O}$. Wtedy obraz $\mathcal{O}$ w punkcie $x \in M$ jest zawarty w $\mathcal{D}_x$. Co więcej, jeśli $\mathfrak{hol}(M,c)$ jest właściwą podalgebrą $\mathfrak{so}(p+1,q+1)$, to obraz $\mathcal{O}$ jest podprzestrzenią zatkowicie zerową. W szczególności $\mathrm{rk}(\mathcal{O}) \leq min(p,q)$.*

Następstwa tego twierdzenia są oczywiste:

Po pierwsze, pokazuje ono że jeśli tensor obstrukcji ma maksymalny rząd n w jakimś punkcie, to jest to przypadek z ogólną holonomią. Wtedy tensor $\mathcal{O}$ może być interpretowany jako *uniwersalny tensor obstrukcji*, który uniemożliwia istnienie równoległych traktorów *jakiegolwiek z typów tensorowych* na (M,c) (zdefiniowanych na iloczynach tensorowych $\mathcal{T}$). Jeśli taki traktor miałby istnieć, to tensor $\mathcal{O}$ musiałby mieć nietrywialne jądro w każdym punkcie.

Po drugie, istnienie redukcji konforemnej holonomii może być użyte do ograniczenia rzędu tensora obstrukcji. Dla przykładu, istnienie standardowego równoległego traktora (istnienie lokalnie einsteinowskiej metryki w klasie c) pociąga za sobą znikanie tego tensora.

Dotychczas żadne inne ograniczenie postaci $\mathcal{O}$ nie było powiązane z warunkiem określającym klasę konforemną. My takie związki, jak ten właśnie tu opisany, podaliśmy. Zanim opiszemy te zwiazki bardziej szczegółowo w poniższych wnioskach, ptrzebujemy zdefiniować dwa pojęcia. Pierwszym z nich jest pojęcia *normalnego konforemnego pola wektorowego*, czyli infinitezymalnej symetrii konforemnej V takiej, że $V \lrcorner C = V \lrcorner W = 0$, gdzie C jest tensorem Cottona, a W tensorem Weyla jakiejś metryki z klasy konforemnej. Drugim potrzebnym nam pojęciem jest pojecie *spinora twistorowego*, czyli pola spinorów $\phi \in \Gamma(S^g)$, czyli cięcia wiązki spinorowej S^g dla rozmaitości M z metryką g, które spełnia *równanie twistorowe* $\nabla_X \phi + \frac{1}{n} X \cdot D\phi = 0$, z ∇ - koneksją Levi-Civity dla g i D - operatorem Diraca. Oba pojęcia, tzn normalnego pola konforemnego i spinora twistorowego są pojęciami konforemnie niezmienniczymi.

Wniosek 31 ([**Hab8**, Wniosek 1.2]). *Jeśli spełnione są założenia Twierdzenia 30, to tensor obstrukcji znika w następujących przypadkach:*

1. *Struktura konforemna jest riemannowska oraz* $\mathfrak{hol}(M,c) \subsetneq \mathfrak{so}(1,n+1)$.
2. *Struktura konforemna jest lorentzowska oraz* $\mathfrak{hol}(M,c) \subsetneq \mathfrak{su}(1,n/2)$.
3. *Struktura konforemna jest konforemnie einsteinowska w słabym sensie lub jest specjalnym iloczynem einsteinowskim [26].*
4. *Istnieje normalne konforemne pole wektorowe V takie, że $g(V,V) \neq 0$, lub wymiar przestrzeni takich pól wektorowych jest ≥ 2. Jest to przypadek przestrzeni Feffermana nad kwaternionowymi strukturami kontaktowymi o sygnaturze $(4k+3, 4l+3)$ (z holonomią $\mathfrak{hol}(M,c) \subset \mathfrak{sp}(p+1,q+1)$);*
5. *Klasa (M,c) posiada strukturę spinorową, i dla $g \in c$ z wiązką spinorów S^g, istnieją dwa spinory twistorowe $\varphi_{i=1,2} \in \Gamma(M,S^g)$ takie, że przestrzenie $\{X \in TM \mid X \cdot \varphi_i = 0\}$ są komplementarne w każdym punkcie.*

Wniosek 32 ([**Hab8**, Wniosek 1.3]). *Jeśli spełnione są założenia Twierdzenia 30, to dla każdego z poniższych przypadków rząd $\mathcal{O}$ jest ≤ 1.*

1. $(p,q) = (3,3)$ *oraz* $\mathfrak{hol}(M,c) \subsetneq \mathfrak{spin}(3,4)$;
2. $(p,q) = (n,n)$ *oraz* $\mathfrak{hol}(M,c) \subset \mathfrak{gl}(n+1)$;
3. $\mathrm{Hol}(M,c)$ *zachowuje nietrywialną dwuformę, co znaczy, że klasa (M,c) dopuszcza normalne konforemne pole wektorowe. Ten przypadek stosuje się w szczególności do konforemnych struktur Feffermana, tzn do sygnatura $(p,q) = (2r+1, 2s+1)$ i $\mathfrak{hol}(M,c) \subset \mathfrak{su}(r+1,s+1)$);*
4. *działanie $\mathrm{Hol}(M,c)$ na stożek świetlny $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^{p+1,q+1}$ nie posiada orbity będącej zbiorem otwartym.*

Dla każdej z powyższych geometrii można zawsze jawnie znaleźć podprzestrzeń $V \subset TM$ taką, że w każdym punkcie $\mathrm{Im}(\mathcal{O}) \subset V$.

Dwa rezultaty z tych wniosków były znane w literaturze przed naszymi badaniami - są to a) rezultaty dotyczące struktur einsteinowskich w słabym sensie [22] i specjalnych iloczynów einsteinowskich [26] z Wniosku 31, i b) rezultaty dotyczące konforemnych struktur Feffermana [27] z Wniosku 32. Jednak nasze ogólne podejście z [**Hab8**] umożliwia ich alternatywne dowody. Ponadto warto zauważyć, że nasze dwa ostatnie przypadki z Wniosku 31 są konforemnie niezmiennicze i nie odwołują się do konkretnej metryki z klasy konforemnej. Odnotujmy też, że przypadek (1)

we Wniosku 32 nie daje się wykorzystać do poszukiwań metryk Feffermana-Grahama z holonomią *równą* $\mathbf{Spin}(3,4)$ - jedynie jeśli holonomia konforemna (a co za tym idzie i holonomia metryki Feffermana-Grahama) jest zredukowana poważniej niż do grupy $\mathbf{Spin}(3,4)$, można wypowiedzieć sie na temat rzędu bądź znikania $\mathcal{O}$. Nie wyklucza to jednak możliwości istnienia konforemnych struktur ze znikającym tensorem obstrukcji oraz konforemną holonomią równą $\mathbf{Spin}(3,4)$. Jednak ich odnalezienie jest trudne i będzie tematem dalszych badań. Co więcej, mocno wierzymy, że wprowadzone przez nas konforemne dystrybucje holonomii okażą się potężnym narzędziem przydatnym nie tylko w badaniach dotyczących tensora obstrukcji ale także w badaniach innych aspektów specjalnych struktur konforemnych.

References for Section 4.3

[1] W. Ambrose and I. M. Singer. A theorem on holonomy. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 75:428–443, 1953.

[2] I. M. Anderson, T. Leistner, A. Lischewski, and P. Nurowski. Conformal Walker metrics and linear Fefferman-Graham equations. Preprint: arXiv:1609.02371, Sept. 2016.

[3] S. Armstrong. Definite signature conformal holonomy: A complete classification. *J. Geom. Phys.*, 57(10):2024–2048, 2007.

[4] S. Armstrong and F. Leitner. Decomposable conformal holonomy in Riemannian signature. *Math. Nachr.*, 285(2-3):150–163, 2012.

[5] T. N. Bailey, M. G. Eastwood, and A. R. Gover. Thomas's structure bundle for conformal, projective and related structures. *Rocky Mountain J. Math.*, 24(4):1191–1217, 1994.

[6] H. Baum and A. Juhl. *Conformal differential geometry*, volume 40 of *Oberwolfach Seminars*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2010. Q-curvature and conformal holonomy.

[7] Y. Benoist and P. de la Harpe. Adhérence de Zariski des groupes de Coxeter. *Compos. Math.*, 140(5):1357–1366, 2004.

[8] M. Berger. Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes. *Bull. Soc. Math. France*, 83:279–330, 1955.

[9] H. W. Brinkmann. Einstein spaces which are mapped conformally on each other. *Math. Ann.*, 94(1):119–145, 1925.

[10] R. L. Bryant. Metrics with exceptional holonomy. *Ann. of Math. (2)*, 126(3):525–576, 1987.

[11] R. L. Bryant. Conformal geometry and 3-plane fields on 6-manifolds. In *Developments of Cartan Geometry and Related Mathematical Problems*, volume 1502 of *RIMS Symposium Proceedings*, pages 1–15, 2006.

[12] A. Čap and A. R. Gover. A holonomy characterisation of Fefferman spaces. *Ann. Global Anal. Geom.*, 38(4):399–412, 2010.

[13] A. Čap, A. R. Gover, and M. Hammerl. Projective BGG equations, algebraic sets, and compactifications of Einstein geometries. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 86(2):433–454, 2012.

[14] A. Čap and K. Sagerschnig. On Nurowski's conformal structure associated to a generic rank two distribution in dimension five. *J. Geom. Phys.*, 59(7):901–912, 2009.

[15] A. Čap and J. Slovák. *Parabolic geometries. I*, volume 154 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. Background and general theory.

[16] V. Cortés, T. Leistner, L. Schäfer, and F. Schulte-Hengesbach. Half-flat structures and special holonomy. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 102(3):113–158, 2010.

[17] G. de Rham. Sur la reductibilité d'un espace de Riemann. *Comment. Math. Helv.*, 26:328–344, 1952.

[18] A. J. Di Scala, T. Leistner, and T. Neukirchner. Geometric applications of irreducible representations of Lie groups. In *Handbook of pseudo-Riemannian geometry and supersymmetry*, volume 16 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 629–651. Eur. Math. Soc., Zürich, 2010.

[19] A. J. Di Scala and C. Olmos. The geometry of homogeneous submanifolds of hyperbolic space. *Math. Z.*, 237(1):199–209, 2001.

[20] A. J. Di Scala and C. Olmos. A geometric proof of the Karpelevich-Mostow theorem. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 41(4):634–638, 2009.

[21] M. G. Eastwood and J. W. Rice. Conformally invariant differential operators on Minkowski space and their curved analogues. *Comm. Math. Phys.*, 109(2):207–228, 1987.

[22] C. Fefferman and C. R. Graham. Conformal invariants. *Astérisque*, (Numero Hors Serie):95–116, 1985. The mathematical heritage of Élie Cartan (Lyon, 1984).

[23] C. Fefferman and C. R. Graham. *The ambient metric*, volume 178 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.

[24] C. L. Fefferman. Monge-Ampère equations, the Bergman kernel, and geometry of pseudoconvex domains. *Ann. of Math. (2)*, 103(2):395–416, 1976.

[25] A. R. Gover. Almost conformally Einstein manifolds and obstructions. In *Differential geometry and its applications*, pages 247–260. Matfyzpress, Prague, 2005.

[26] A. R. Gover and F. Leitner. A sub-product construction of Poincaré-Einstein metrics. *Internat. J. Math.*, 20(10):1263–1287, 2009.

[27] C. R. Graham and K. Hirachi. Inhomogeneous ambient metrics. In *Symmetries and Overdetermined Systems of Partial Differential Equations*, volume 144 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 403–420. Springer, New York, 2008.

[28] C. R. Graham and T. Willse. Parallel tractor extension and ambient metrics of holonomy split G_2. *J. Differential Geom.*, 92(3):463–505, 2012.

[29] M. Hammerl, K. Sagerschnig, J. Šilhan, A. Taghavi-Chabert, and V. Žádník. Fefferman-Graham ambient metrics of Patterson-Walker metrics. Preprint, arXiv:1608.06875, Aug. 2016.

[30] C. R. LeBrun. Ambi-twistors and Einstein's equations. *Classical Quantum Gravity*, 2(4):555–563, 1985.

[31] T. Leistner. On the classification of Lorentzian holonomy groups. *J. Differential Geom.*, 76(3):423–484, 2007.

[32] F. Leitner. Normal conformal Killing forms, 2004. arXiv.org:math/0406316.

[33] F. Leitner. A remark on unitary conformal holonomy. In *Symmetries and Overdetermined Systems of Partial Differential Equations*, volume 144 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 445–460. Springer, New York, 2008.

[34] F. Leitner. Aspects of conformal holonomy. In *Complex and differential geometry*, volume 8 of *Springer Proc. Math.*, pages 205–233. Springer, Heidelberg, 2011.

[35] A. Lischewski. Reducible conformal holonomy in any metric signature and application to twistor spinors in low dimension. *Differential Geom. Appl.*, 40:252–268, 2015.

[36] S. Merkulov and L. Schwachhöfer. Classification of irreducible holonomies of torsion-free affine connections. *Ann. of Math. (2)*, 150(1):77–149, 1999.

[37] P. Nurowski. Differential equations and conformal structures. *J. Geom. Phys.*, 55(1):19–49, 2005.

[38] P. Nurowski. Conformal structures with explicit ambient metrics and conformal G_2 holonomy. In *Symmetries and Overdetermined Systems of Partial Differential Equations*, volume 144 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 515–526. Springer, New York, 2008.

[39] T. Willse. Cartan's incomplete classification and an explicit ambient metric of holonomy G_2^*. *Eur. J. Math.*, 4(2):622–638, 2018.

[40] H. Wu. On the de Rham decomposition theorem. *Illinois J. Math.*, 8:291–311, 1964.

5 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

5.1 Prace nie będące podstawą habilitacji

[L1] T. Leistner. Screen bundles of Lorentzian manifolds and some generalisations of pp-waves. *J. Geom. Phys.*, 56(10):2117–2134, 2006.

[L2] M. Eastwood and T. Leistner. Higher symmetries of the square of the Laplacian. In *Symmetries and Overdetermined Systems of Partial Differential Equations*, volume 144 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 319–338. Springer, New York, 2008.

[L3] D. Alekseevsky, V. Cortés, A. Galaev, and T. Leistner. Cones over pseudo-Riemannian manifolds and their holonomy. *J. Reine Angew. Math.*, 635:23–69, 2009.

[L4] V. Cortés, T. Leistner, L. Schäfer, and F. Schulte-Hengesbach. Half-flat structures and special holonomy. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 102(3):113–158, 2010.

[L5] A. S. Galaev and T. Leistner. On the local structure of Lorentzian Einstein manifolds with parallel distribution of null lines. *Classical Quantum Gravity*, 27(22):5003, 2010.

[L6] H. Baum, K. Lärz, and T. Leistner. On the full holonomy group of Lorentzian manifolds. *Math. Z.*, 277(3-4):797–828, 2014.

[L7] H. Baum, T. Leistner, and A. Lischewski. Cauchy problems for Lorentzian manifolds with special holonomy. *Differential Geom. Appl.*, 45:43–66, 2016.

[L8] T. Leistner and D. Schliebner. Completeness of compact Lorentzian manifolds with abelian holonomy. *Math. Ann.*, 364(3-4):1469–1503, 2016.

[L9] W. Globke and T. Leistner. Locally homogeneous pp-waves. *J. Geom. Phys.*, 108:83–101, 2016.

[L10] T. Leistner and A. Lischewski. Hyperbolic evolution equations, Lorentzian holonomy, and Riemannian generalised Killing spinors. *J. Geom. Anal.*, Oct 2017. In press.

[L11] T. Leistner, P. Nurowski, and K. Sagerschnig. New relations between G_2 geometries in dimensions 5 and 7. *Internat. J. Math.*, 28(13):1750094, 46, 2017.

[L12] A. R. Gover and T. Leistner. Invariant prolongation of the Killing tensor equation. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 2018. In press.

5.1.1 Omówienie wyników z prac nie będących podstawą habilitacji

Lokalna struktura rozmaitości lorentzowskich ze zredukowaną holonomią, [L1], [L5] oraz [L9]. Po uzyskaniu wyników dotyczących klasyfikacji lorentzowskich holonomii w pracy doktorskiej temat ten był dalej przeze mnie eksplorowany w kontekście poszukiwania rozmaitości lorentzowskich ze zredukowaną holonomią. W badaniu zagadnienia lokalnej struktury takich rozmaitości skupiałem się na pp-falach. W pracy [L1] przedstawiona została ich charakteryzacja za pomocą wiązek ekranu, co pozwoliło na opis niezależny od współrzędnych i uogólnienia. W [L5] bdałem związki równań Einsteina z pewnymi redukcjami holonomii, natomiast w [L9] badałem pp-fale lokalnie jednorodne; pokazałem, że warunek lokalnej jednorodności zmusza pp-fale do bycia zwykłymi falami płaskimi, co umożliwiło klasyfikację przypadku lokalnie jednorodnego.

Rozmaitości lorentzowskie ze zredukowaną holonomią: rezultatuy globalne, [L6] i [L8]. Pierwszą pracą dotyczącą tego tematu było [L6]. Dla rozmaitości lorentzowskich postaci M/Γ, gdzie Γ jest dyskretną grupą transformacji, zbadana została zależność pomiędzy Γ a pełną (tzn zawierającą także swoje niespójne składowe) grupą holonomii. W tym kontekście przeanalizowaliśmy równanie na równoległe spinory i skonstruowaliśmy przykłady rozmaitości globalnie hiperbolicznych, a także przykłady z grupą holonomii generowaną przez nieskończenie wiele elementów. Praca ta była kontynuowana w [L8], gdzie badaliśmy pytanie kiedy zwarta rozmaitość lorentzowska ze zredukowaną holonomią jest geodezyjnie zupełna. Jako przykład takich rozmaitości przedstawione zostały zwarte pp-fale, które są geodezyjnie zupełne oraz uniwersalnie nakrywane przez standardową metrykę pp-fal na $\mathbb{R}^n$.

Zagadnienie początkowe dla rozmaitości lorentzowskich ze zredukowaną holonomią, [L7] i [L10]. W pracy [L7] sformułowane zostało zagadnienie początkowe i warunki na to aby rozmaitość lorentzowska dopuszczała równoległe zerowe pole wektorowe, czyli w szczególności zredukowaną holonomię. Następnie pokazane zostało, że w przypadku analitycznym ten problem Cauchy'ego jest dobrze postawiony i że posiada on jednoznaczne rozwiązanie. W [L10] uogólniliśmy to do kategorii gładkiej; w szczególności zanalizowliśmy równanie określające równoległe spinory w tej kategorii, oraz znaleźliśmy interesujący związek tego zagadnienia ze zredukowaną holonomią riemannowską i uogólnionymi urojonymi spinorami Killinga.

Stożki w geometrii pseudo-riemannowskiej, [L3] i [L4]. Konstrukcje metryk stożków oraz ich uogólnień nad rozmaitościami pseudo-riemannoowskimi są istotnym narzędziem do analizowania nadokreślonych układów równań różniczkowych cząstkowych na rozmaitościach (przykładem tego może być konstrukcja metryk Feffermana-Grahama). Prowadzą one do interesujących konsekwencji dla związanych z nimi grup holonomii i równań na wyróżnione pola spinorowe. Fundamentalnym przykładem jest tu korespondencja odkryta przez Bära pomiędzy rozmaitościami riemannowskimi ze spinorami Killinga a równoległymi spinorami na stożkach nad tymi rozmaitościami. Aby uogólnić tę korespondencję na przestrzenie o dowolnej sygnaturze udowodniliśmy

w [L3] analog klasycznego rezultatu Gallota o nieredukowalności stożków. Blisko związany z konstrukcją metryk stożków nad rozmaitościami riemannowskimi, jest potok Hitchina, który umożliwia konstrukcję siedmiowymiarowych rozmaitości z holonomią grupy $\mathbf{G}_2$ z rozmaitości szesciowymiarowych wyposażonych w tzw. półpłaską strukturę $\mathbf{SU}(3)$. W pracy [L4] uogólniliśmy wynik Hitchina na przypadek niezwarty, dla metryk o sygnaturze $(2,4)$ i $(3,3)$, co umożliwiło konstrukcję pewnych rozmaitości z holonomią $\mathbf{G}_2$ startując z sześciowymiarowych jednorodnych rozmaitości z półpłaską strukturą $\mathbf{SU}(3)$.

Wyniki na temat (konforemnych) tensorów Killinga i na temat geometrii parabolicznych innych niż konforemne, [L2], [L11] oraz [L12]. Praca [L2] stanowi rozszerzenie wyników Eastwooda o Laplasjanie. Pokazuje jak symetrie kwadratu operatora Laplace'a Δ^2 w płaskiej przestrzeni są w jednoznacznej odpowiedniości z parami konforemnych tensorów Killinga i ich uogólnień. Jest to podstawą opisu algebry symetrii operatora Δ^2. W [L12], wykorzystując rzutowy rachunek traktorowy, przedstawione zostało pełne niezmiennicze przedłużenie równania określającego tensor Killinga na zakrzywionych rozmaitościach rzutowych. Wyniki zawarte w [L11] dotyczą związku między geometriami $\mathbf{G}_2$ dystrybucji typu $(2,3,5)$ i dystrybucjami kontaktowymi na przestrzeniach o wymiarze 5 a kontaktową geometrią Liego w wymiarze 7, oraz redukcjami holonomii związanych z tym związkiem.

5.2 Proszone artykuły, oraz artykuły przeglądowe

1. Baum, H., Leistner, T.: Lorentzian Geometry — Holonomy, Spinors, and Cauchy Problems. In *Geometric Flows and the Geometry of Space-Time*, editors V. Cortés, K. Kröncke and J. Louis, Volume 2 in Series "Lectures, Schools, and Workshops in Mathematical Science", Springer, to appear 2018.

2. Leistner, T.: Cauchy problems for Lorentzian special holonomy and generalised imaginary Killing spinors, *Oberwolfach Reports*, No. 36/2017, "Analysis, Geometry and Topology of Positive Scalar Curvature Metrics": 56–59, 2017.

3. Galaev, A., Leistner, T.: Recent developments in pseudo-Riemannian holonomy theory. *Handbook of Pseudo Riemannian Geometry*, Institut de Recherche Mathématique Avancée Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, Vol. 16: 581–629, 2010.

4. Galaev, A., Leistner, T.: Holonomy groups of Lorentzian manifolds: classification, examples, and applications. *Recent Developments in Pseudo-Riemannian Geometry*, ESI Lectures on Mathematics and Physics: 53–96, 2008.

5.3 Proszone wykłady i odczyty

1. Conference "Conformal and Symplectic Geometry", University of Auckland, Feb 5-9, 2018
2. Invited at Seminar at IEMath-GR, Universidad de Granada, Dec 5, 2017
3. Mini-course at the Simons Semester at the Banach Center "Symmetry and Geometric Structures", Polska Akademia Nauk, Warszawa, Aug 28-Sep 8, 2017
4. Workshop "Analysis, Geometry and Topology of Positive Scalar Curvature Metrics" at the Mathematical Research Institute Oberwolfach, July 6-12, 2017
5. Two invited lectures at the Workshop and Summer School "Geometric Flows and the Geometry of Space-time", Universität Hamburg, Sep 19-23, 2016
6. 7th Pacific Rim Conference on Mathematics, Seoul National University, June 27-July 1, 2016.
7. Seminar, Jeju National University, June 27, 2016

8. "Workshop on Analysis, Geometry and Mathematical Relativity: a celebration of Robert Bartnik's 60th birthday", Monash University, Feb 22-26, 2016
9. "Workshop on Analysis and Geometry in non-Riemannian spaces", University of New South Wales, Nov 2-4, 2015
10. Seminar, Universität Hamburg, Oct 19, 2015.
11. Geometry & Topology Seminar, University of Sydney, Sep 16, 2015
12. Differential Geometry Seminar, Mathematical Sciences Institute, Australian National University, March 12, 2015.
13. Friedrich-Schiller Universität Jena, Feb 7, 2015.
14. AMSI workshop "Differential Geometry, Complex Analysis, and Lie Theory", LaTrobe University Melbourne, Dec 5–72014.
15. Humboldt-Universität Berlin, November 29, 2014.
16. Universität Stuttgart, October 24, 2014.
17. Humboldt-Universität Berlin, April 11, 2014.
18. Banach Center Conference "Geometry of Projective Structures and Differential Equations", Polska Akademia Nauk, Warszawa, March 27, 2014.
19. Mathematisches Seminar, Universität Kiel, November 22, 2013
20. Seminar Geometric Analysis und Spectral Theory, Humboldt-Universität Berlin, Feb 13, 2013.
21. Workshop "The Interaction of Geometry and Representation Theory. Exploring new frontiers", Erwin Schrödinger International Institute for Mathematical Physics, Wien, Sep 3–14, 2012.
22. Mathematics Colloquium, University of Queensland, May 28, 2012.
23. Utah State University, May 8 und 9, 2012, two invited lectures.
24. Workshop "The Geometry of Differential Equations", ANU, September 19–23, 2011.
25. Institute for Theoretical Physics, Uniwersytet Warszawski, July 6, 2011.
26. Workshop "Modern Aspects in Differential Geometry", Leibniz-Universität Hannover, June 23, 2011.
27. Seminar on Gauge Theory, Universität Bielefeld, April 1, 2011.
28. Technische Universität München, December 9, 2010.
29. Workshop on Riemannian and Differential Geometry, La Trobe Unversity Melbourne, November 30 – December 2, 2010.
30. School of Mathematical Sciences Colloquium, May 2010, University of Adelaide.
31. Workshop on General Relativity and Geometric Analysis, Monash University, January 22–28, 2010.
32. Workshop on New Currents in Geometry in Australia, Institute for Geometry and its Applications, University of Adelaide, November 16–18, 2009.
33. Lorentzian Geometry: Analysis and Geometry of pseudo-Riemannian Manifolds, Alfried Krupp Kolleg Greifswald, July 20–22, 2009.
34. Geometry/Topology Seminar, Stony Brook University Mathematics Department, May 5, 2009

35. Universität Regensburg, March 5, 2009.
36. Technische Universität Dortmund, December 18, 2008
37. Westfälischen Wilhelms-Universität Münster, December 15, 2008
38. Leibniz-Universität Hannover, December 11, 2008
39. University of Adelaide, September 23, 2008.
40. Pure Mathematics Colloquium, Universität Hamburg, February 5, 2008
41. Differential geometry seminar, Universität Potsdam, July 19, 2007.
42. Seminario de Xeometría e Topoloxía, Universidad de Santiago de Compostela, July 18, 2007.
43. IVth International Meeting on Lorentzian Geometry, Santiago de Compostela, February 5–8, 2007, plenary lecture.
44. Programme *Geometry of pseudo-Riemannian manifolds with application in Physics*, Erwin Schrödinger Institute, Wien, October 2005.

5.4 Granty i projekty

5.4.1 Uczestnictwo jako kierownik

- *Holonomy groups and special structures in pseudo-Riemannian geometry* (2012–2016)
  Australian Research Council (ARC) Future Fellowship FT110100429,
  fellow salary & infrastructure: AUD 536,178
- *Holonomy groups in Lorentzian geometry* (2012–2015)
  ARC Discovery Project DP120104582 (sole Chief Investigator)
  postdoc salary & infrastructure: AUD 303,464 (EUR 211,919)
- *Spinor field equations in global Lorentzian geometry* (2011–2012)
  Group of Eight–DAAD Australia–Germany Joint Research Co-operation Scheme, with H. Baum (HU-Berlin), AUD 20,000 + EUR 12,000.
- *Geometry of Lorentzian and conformal manifolds with special holonomy* (2005–2007)
  Project in the Priority Program 1154 *Global Differential Geometry* of the German Research Foundation (DFG), with H. Baum (HU Berlin) and F. Leitner (Stuttgart).

5.4.2 Projekty finansowane przez jednostkę macierzystą

- Start-up Research Grant of the Faculty of Engineering, Computer and Mathematical Sciences, University of Adelaide, AUD 10,000, 2009–2011.
- Overseas Conference Leave Scheme of the Faculty of Engineering, Computer and Mathematical Sciences, University of Adelaide, AUD 2,000, November 2005.

5.4.3 Uczestnictwo w grantach jako członek zespołu

- Project A6 "Mathematical Aspects of String Compactifications" of the Collaborative Research Center (SFB) 676 "Particles, Strings and the Early Universe — the Structure of Matter and Space-Time" of the DFG, September 2007– July 2009
- Research Associate in the SFB 647 "Space-Time-Matter. Geometric and Analytic Structures", Humboldt-Universität Berlin, November – December 2006.

- Research associate in the Discovery Project DP0345550 "Classification and Invariants in Complex Differential Geometry" of the ARC (Chief investigators N. Buchdahl und M. Eastwood), November 2003 to November 2006

5.5 Wymiana naukowa

5.5.1 Proszone wizyty naukowe

12/2017	Invited researcher at the Universidad de Granada, Spain
08–09/2017	Senior Simons Professor during the Simons Semester at the Banach Center "Symmetry and Geometric Structures", Polska Akademia Nauk, Warszawa, mini-course (10 lectures) on Non-Riemannian holonomy
07/2017	Oberwolfach Research Institute for Mathematics
01/2017	University of Auckland
06/2016	Jeju National University, Universität Hamburg
2015	Humboldt-Universität Berlin, Universität Hamburg, Polska Akademia Nauk
2014	Universität Hamburg, Humboldt-Universität Berlin, Instytut Matematyczny Polska Akademia Nauk
2013	Centrum Fizyki Teoretycznej Polska Akademia Nauk, Eduard Čech Center for Algebra and Geometry, Masarykova Univerzita Brno
2012	Erwin Schrödinger International Institute for Mathematical Physics, Utah State University
2011	University Greifswald and Humboldt-Universität Berlin Erwin Schrödinger International Institute for Mathematical Physics Uniwersytet Warszawski
2010	Uniwersytet Warszawski and Humboldt-Universität Berlin
2009	Stony Brook University

5.5.2 Organizacja konferencji i warsztatów, wraz z takimi, kiedy to ja zabezpieczałem fundusze

February 2019	Australian-German Workshop on Differential Geometry in the Large that at the MATRIX International Research Institute.
December 2018	Conference Director of the 62nd Annual Meeting of the Australian Mathematical Society, to be held at the University of Adelaide; world leading experts as plenary speakers, about 15 sessions and about 400 participants
April 2015	IGA/AMSI Workshop *Symmetries and Spinors: Interactions between Geometry and Physics.* Main Speakers: Prof. José Figueroa O'Farrill (Edinburgh) and Prof. Maxim Zabzine (Uppsala) Funding from the Australian Mathematical Science Institute (AMSI) and the Institute for geometry and it Applications (IGA)
March 2014	*Workshop on Lorentzian and Conformal Geometry*, Alfried-Krupp-Kolleg Greifswald, 22 invited speakers, 93 participants Funding from the German Research Foundation, the Alfried Krupp-Kolleg Greifswald and the Universität Stuttgart

October 2013 Mini Workshop *Aspects of Finsler Geometry*, Institute for Geometry and Its Applications, University of Adelaide Main speaker Prof. Robert Bryant (Duke University)
Funding from the IGA

5.6 Działalność edytorska i recenzencka

5.6.1 Członkowstwo w komitetach redakcyjnych

Jestem członkiem komitetów redakcyjnych następujących czsopism:

- *Advances in Geometry*, published by De Gruyter, SCImago Journal Rank 0.489
- *Communications of the Korean Mathematical Society*, SCImago Journal Rank 0.210

5.6.2 Ja jako recenzent

Recenzent w instytucjach przyznających fundusze:

- Austrian Science Fund (since 2010)
- Australian Research Council: Discovery Project, Discovery Early Career Researcher Award and Future Fellowship Schemes (since 2012)
- National Research Foundation South Africa (since 2014)
- Czech Science Foundation (since 2018)

Recenzent w czasopismach: Od roku 2006 jestem regularnym recenzentem w wiodących czasopismach matematycznych i czasopismach z dziedziny fizyki teoretycznej; między innymi w takich jak:

Abhandlungen des Mathematischen Seminars der Universität Hamburg, Advances in Mathematics, Bulletin and Journal of the Australian Mathematical Society, Central European Journal of Mathematics, Classical and Quantum Gravity, Communications in Analysis and Geometry, Differential Geometry and Its Applications, Dissertationes Mathematicae, Forum of Mathematics (Sigma), International Journal of Mathematics, International Mathematics Research Notices, Journal of Differential Geometry, Journal of Geometric Analysis, Journal of Geometry and Physics, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Journal of Physics A, Journal and Proceedings of the London Mathematical Society, Mathematische Annalen, Mathematische Nachrichten, Pacific Journal of Mathematics, Rocky Mountain Journal of Mathematics, SIGMA, Transactions of the American Mathematical Society, Transformation Groups

