Autoreferat

Tomasz Adamowicz

Podstawowe dane osobowe

Imię i nazwisko	Tomasz Adamowicz
Adres	Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa
Email	tadamowi@impan.pl
Strona WWW	http://www.impan.pl/∼tadamowi/

Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

- **Doktorat z matematyki**: rozprawa doktorska *"On the geometry of p-harmonic mappings"* napisana pod kierunkiem profesora Tadeusza Iwańca, obroniona na **Syracuse University (USA) w kwietniu 2008 roku** (stopień naukowy oficjalnie przyznany w maju 2008 roku). Dyplom nostryfikowany w Instytucie Matematycznym PAN w październiku 2013 roku.
- **Magisterium z matematyki**: praca *„Logarytmiczne rezidua z zastosowaniami w teorii osobliwości"* napisana pod kierunkiem profesora Bronisława Jakubczyka, obroniona z wyróżnieniem na **Uniwersytecie Warszawskim w czerwcu 2004 roku**.
- **Stopień inżyniera informatyki stosowanej**: praca *„Implementacja i porównanie różnych metod wnioskowania rezolucyjnego"* napisana pod kierunkiem doktor Felicji Okulickiej–Dłużewskiej, obroniona na **Politechnice Warszawskiej w czerwcu 2002 roku**.

Przebieg kariery naukowej

1998 - 2002 studia inżynierskie, informatyka stosowana, Wydział Fizyki Teoretycznej i Matematyki Stosowanej (obecnie Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych), Politechnika Warszawska.

1999 - 2004 studia magisterskie, matematyka, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski.

2004 - 2008 doktorant, Syracuse University (USA).

2008 - 2010 postdok, Visiting Assistant Professor, University of Cincinnati (USA), opiekun stażu podoktorskiego: profesor Nageswari Shanmugalingam.

2010 - 2013 postdok, Linköping Universitet (Szwecja), opiekunowie stażu: profesor Anders i Jana Björn.

2013 - adiunkt, Instytut Matematyczny PAN.

1 Wskazane osiągnięcia habilitacyjne

Wskazanym osiągnięciem jest cykl 6 prac zatytułowany:

Wybrane zagadnienia geometrycznej teorii funkcji i przekształceń dla równań różniczkowych cząstkowych typu eliptycznego ze zmiennym wykładnikiem

1.1 Lista prac zawierających wskazane osiągnięcia

[**AH1**] T. Adamowicz, P. Hästö, Mappings of finite distortion and PDE with nonstandard growth, *International Mathematics Research Notices IMRN*, 10 (2010), 1940–1965.

[**AH2**] T. Adamowicz, P. Hästö, Harnack's inequality and the strong $p(x)$-Laplacian, *Journal of Differential Equations*, Vol. 250, Issue 3, (2011), 1631–1649.

[**AL**] T. Adamowicz, N. L. P. Lundström, The boundary Harnack inequality for variable exponent p-Laplacian, Carleson estimates, barrier functions and $p(\cdot)$-harmonic measures, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, przyjęte do druku w styczniu 2015 roku, 36 stron, doi: 10.1007/s10231-015-0481-3.

[**A**] T. Adamowicz, Phragmén-Lindelöf theorems for equations with nonstandard growth, *Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications*, 97 (2014), 169—184.

[**AG**] T. Adamowicz, P. Górka, The Liouville theorems for elliptic equations with nonstandard growth, *Communications on Pure and Applied Analysis*, 14 (2015), no. 6, 2377—2392.

[**AT**] T. Adamowicz, O. Toivanen, Hölder continuity of quasiminimizers with nonstandard growth, *Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications*, 125 (2015), 433—456.

W przypadku prac współautorskich [AH1], [AH2] i [AL] mój udział oceniam na 50%, zaś dla prac [AG] oraz [AT] mój wkład był nieco większy, 60%. Odpowiednie oświadczenia zostały dołączone do wniosku.

1.2 Inne wyniki naukowe uzyskane po doktoracie

Publikacje napisane po doktoracie niewchodzące w skład osiągnięcia habilitacyjnego (w chronologii rosnącej dat ukazania się artykułu):

(1) On a variant of the maximum principle involving radial p-Laplacian with applications to nonlinear eigenvalue problems and nonexistence results, współautor A. Kałamajska, *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 34(1), (2009), 1–20.

(2) Maximum principles and nonexistence for radial solutions to equation involving p-Laplacian, współautor A. Kałamajska, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 33(13) (2010), 1618–1627.

(3) Non-conformal Loewner type estimates for modulus of curve families, współautor N. Shanmugalingam, *Annales AcademiæScientiarum Fennicæ, Mathematica*, 35 (2010), 609–626.

(4) Remarks on time map for quasilinear equations, współautor z P. Korman, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 376(2) (2011), 686–695.

(5) Prime ends on metric spaces, współautorzy A. Björn, J. Björn, N. Shanmugalingam, *Advances in Mathematics*, 238 (2013), 459–505.

(6) Regularity of $p(\cdot)$-superharmonic functions, the Kellogg property and semiregular boundary points, współautorzy A. Björn, J. Björn, *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire*, 6 (2014), 1131—1153.

(7) Maximal operator in variable exponent Lebesgue spaces on unbounded quasimetric measure spaces, współautorzy P. Harjulehto, P. Hästö, *Mathematica Scandinavica*, 116(1) (2015), 5—22.

(8) The geometry of planar p-harmonic mappings: convexity, level curves and isoperimetric inequality, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Cl. Sci. (5)*, XIV(1) (2015), 263—292.

(9) Three-spheres theorem for p-harmonic mappings, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 53(3-4) (2015), 1015—1032.

(10) Three-spheres theorems for subelliptic quasilinear equations in Carnot groups of Heisenberg-type, współautor B. Warhurst, praca przyjęta do druku w *Proceedings of the American Mathematical Society*.

(11) Harmonic functions on metric measure spaces, współautorzy M. Gaczkowski, P. Górka, praca w recenzji od grudnia 2015 roku.

(12) Prime ends in the Heisenberg group $\mathbb{H}_1$ and the boundary behavior of quasiconformal mappings, współautor B. Warhurst, praca w recenzji od grudnia 2015 roku.

Spis treści

1.3 Omówienie zagadnienia

Jednym z najważniejszych równań różniczkowych matematyki jest równanie Laplace'a a rozwiązujące go funkcje harmoniczne odgrywają istotną rolę w wielu obszarach matematyki. Znaczenie tego równania bierze się zarówno ze związków z zastosowaniami jak również z faktu, że równanie Laplace'a jest bazowym przykładem równania różniczkowego cząstkowego typu eliptycznego, a własności jego rozwiązań służyły i służą do budowania dalszych uogólnień i odkrywania własności nieliniowych odpowiedników laplasjanu, np.: równań i funkcji p-harmonicznych, A-harmonicznych i ogólnych równań typu (A, B)-harmonicznego, odpowiednio:

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0 \quad \text{dla } 1 < p < \infty, \qquad \text{(harmoniczne dla } p = 2) \tag{1}$$

$$\operatorname{div} A(x, u, \nabla u) = 0, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} A(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u). \tag{3}$$

W ostatnich dwóch przykładach równań najczęściej zakłada się monotoniczność i odpowiednią jednorodność operatora A oraz określa charakter i szybkość wzrostu operatorów A i B. Równania tego typu występują nie tylko w wielu obszarach nieliniowej analizy ale również w zastosowaniach, m.in.: w glacjologii [27], fizyce kwantowej [39], kosmologii [107], nieliniowej teorii elastyczności [34], zagadnieniach związanych z górnictwem [29], przepływach typu Hele-Shaw [133]. Kolejne związki z zastosowaniami przedstawione będą w dalszej części prezentacji. Te i inne wyniki dla równań wyrastających z p-laplasjanu pozwalają nazwać ten operator różniczkowy „maskotką nieliniowej analizy"(Drábek [63]). Równania przedstawione powyżej odgrywają również ważną rolę w nieliniowej teorii potencjału zarówno w ujęciu euklidesowym [93] jak również w analizie na przestrzeniach metrycznych [42] (również rozdział 2.0.8 autoreferatu). Co więcej, równania (1)–(3) mają naturalne odpowiedniki w teorii przekształceń w obszarach euklidesowych jak również między rozmaitościami różniczkowymi, np. [98, 101] i [85, 164] (rozdział 2.0.7 poniżej). Równania typu (1)-(3), szczególnie (1), odgrywają ważną rolę w rachunku wariacyjnym jako prowadzące do przykładów funkcjonałów energii i związanych z nimi własnościami minimów i kwaziminimów (rozdział 1.4.4), np.: równanie (1) jest równaniem Eulera-Lagrange'a dla funkcjonału energii

$$E_\Omega(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx, \qquad \text{dla } u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega),\ \Omega \text{ obszar w } \mathbb{R}^n.$$

Przejdę teraz do opisu równań różniczkowych ze zmiennym wykładnikiem oraz podstawowych zagadnień geometrycznej teorii funkcji i przekształceń.

Równania różniczkowe cząstkowe typu eliptycznego ze zmiennym wykładnikiem (o niestandardowym wzroście) i przestrzenie Musielaka–Orlicza

Przestrzenie funkcyjne ze zmiennym wykładnikiem po raz pierwszy pojawiły się w pracy Orlicza [154] (definicja (15) na stronie 207) a następnie w pracach Nakano [148, 149] oraz w monografii Musielaka [147] również np. w pracy Hudzik–Kamińska [97], Kováčik–Rákosník [114] i Fan-Zhao [69]. Wyniki osiągnięte w ostatnich latach opisane zostały w monografiach Diening–Harjulehto–Hästö–Růžička [62] oraz Cruz-Uribe–Fiorenza [54].

Niech Ω będzie otwartym, spójnym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. W kontekście autoreferatu, mierzalną funkcję $p\colon \Omega \to [1,\infty]$ będziemy nazywać *zmiennym wykładnikiem*. Oznaczmy,

$$p_A^+ := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in A} p(x), \quad p_A^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in A} p(x), \quad p^+ := p_\Omega^+ \quad \text{oraz} \quad p^- := p_\Omega^-$$

dla dowolnego $A \subset \Omega$. Dla funkcji mierzalnej $u : \Omega \to \mathbb{R}$ zdefiniujmy następującą funkcję *(semi)modularną*:

$$\varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}(u) := \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}\, dx.$$

Z definicji przyjmujemy, że $t^\infty = \infty\chi_{(1,\infty]}(t)$, [62, rozdział 2].

Definicja 1.1. Przestrzeń *Lebesgue'a ze zmiennym wykładnikiem*(*variable exponent Lebesgue space)* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ składa się z funkcji mierzalnych $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ takich, że:

$$\varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}(u/\lambda) < \infty$$

dla pewnego $\lambda > 0$.

Normę w $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ definiujemy funkcjonałem Luxemburga

$$\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} := \inf\Big\{\lambda > 0 :\ \varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}\big(\tfrac{u}{\lambda}\big) \le 1\Big\}.$$

Dla takiej normy, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ jest przestrzenią Banacha. Przestrzenie tego typu są szczególnym przypadkiem przestrzeni Musielaka-Orlicza, np. [114]. Dla $p = const$ otrzymujemy klasyczne przestrzenie Lebesgue $L^p(\Omega)$.

Analogicznie definiujemy:

Definicja 1.2. Przestrzeń *Sobolewa ze zmiennym wykładnikiem* $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ (*variable exponent Sobolev space*) składa się z mierzalnych funkcji $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, których dystrybucyjny gradient $\nabla u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

$W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ jest przestrzenią Banacha z normą

$$\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

Własności przestrzeni $L^{p(\cdot)}$ i $W^{1,p(\cdot)}$ są istotnie różne od ich odpowiedników L^p i $W^{1,p}$ dla stałego p. Opiszemy teraz pokrótce te z własności, które mają największy wpływ na analizę równań ze zmiennym wykładnikiem.

(1) Brak funkcyjnej zależności między normą a funkcją modularną (podobnie jak w przestrzeniach Orlicza). Zachodzi następująca nierówność:

$$\min\left\{\varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}(u)^{\frac{1}{p^-}}, \varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}(u)^{\frac{1}{p^+}}\right\} \le \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \le \max\left\{\varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}(u)^{\frac{1}{p^-}}, \varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}(u)^{\frac{1}{p^+}}\right\}. \tag{4}$$

(2) W przeciwieństwie do stałego p, funkcje gładkie nie muszą być gęste w przestrzeni $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ (kontrprzykład dla p kawałkami stałego: Zhikov [176], dla jednostajnie ciągłego p: Hästö [90]). Optymalna regularność zmiennego wykładnika dająca gęstość nie jest znana. Znamy przykłady warunków dostatecznych skutkujących taką własnością, np.: twierdzenie 9.2.2 w [62]. Warunkiem najbardziej rozpowszechnionym w literaturze przedmiotu jest tzw. *log-hölderowska ciągłość*: zakładamy, że dla ograniczonego z góry wykładnika ($p^+ < \infty$) zachodzi warunek:

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{c_1}{\log(e + 1/|x-y|)} \tag{5}$$

dla wszystkich $x, y \in \Omega$ i pewnej stałej $c_1 > 0$. Dodatkowo, dla nieograniczonych obszarów zakładamy odpowiednie zanikanie p:

$$|p(x) - p_\infty| \le \frac{c_2}{\log(e + |x|)} \tag{6}$$

dla wszystkich $x \in \Omega$. Stałą *log-hölderowskiej ciągłości* definiujemy jako $c_{log} := \max\{c_1, c_2\}$.

Warunki (5) i (6) odgrywają również kluczową rolę np.: w dowodzie ograniczoności operatora maksymalnego Hardy'ego-Littlewooda $Mf : L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \to L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ dla $p^- > 1$, twierdzenie 4.3.8 w [62] (twierdzenie 1.7 w [8] dla przestrzeni kwazimetrycznej z miarą, rozdział 2.0.5 poniżej).

(3) Kluczowe nierówności, typu Poincaré, Sobolewa, są niejednorodnymi nierównościami dla funkcji modularnych, np.: niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie ograniczonym obszarem, p będzie log-hölderowsko ciągłym, ograniczonym wykładnikiem oraz niech funkcja $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ będzie taka, że $\|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \le 1$. Wówczas dla dowolnego $z \in \Omega$ zachodzi nierówność:

$$\int_\Omega \left(\frac{|u|}{\operatorname{diam}\Omega}\right)^{p(x)} dx \le c \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} + c \int_{B(z, \operatorname{diam}\Omega)} (e + |x|)^{-m}, \tag{7}$$

gdzie $m > 0$, stała c zależy od n, m i p^+, c_{log} (propozycja 8.2.8 w [62]).

Podobne nierówności zachodzą również w tzw. obszarach Johna. Zauważmy, że normowe nierówności Poincaré i Sobolewa mają taką samą, jednorodną, postać jak dla stałego p. Niemniej, dla wielu oszacowań występujących w teorii równań ze zmiennym wykładnikiem potrzebne są nierówności dla funkcji modularnych, np.: w oszacowaniach typu Caccioppoli, nierównościach Harnacka, oszacowaniach pojemności (definicja 2.1 w [7], rozdział 10 w [62])

Równania różniczkowe cząstkowe o rozwiązaniach w przestrzeniach typu Orlicza (również Musielaka-Orlicza) oraz zagadnienia wariacyjne o (kwazi)minimach w przestrzeniach tego typu badane są od wielu lat, np.: w kontekście przekształceń o skończonej dystorsji, Iwaniec–Martin [99], przekształceń oraz geometrii rozmaitości, Hajłasz–Iwaniec–Malý–Onninen [84], regularności minimów funkcjonałów energii, Gianetti-Passarelli di Napoli [76]. Wzrost zainteresowania całkami wariacyjnymi oraz równaniami ze zmiennym wykładnikiem datuje się od prac Zhikov [175], Zhikov–Kozlov–Oleinik [179], Alkhutov [24] i Marcelliniego [139, 140, 141]. W ostatnich z wymienionych prac, badano zagadnienia minimalizacji funkcjonałów energii o *niestandardowym wzroście typu* (p, q), tj. dla całek typu:

$$E_\Omega(u) = \int_\Omega F(x, |\nabla u(x)|)\, dx,$$

gdzie F spełnia następujące warunek wzrostu, dla ustalonych stałych c, L i wykładników p i q:

$$c|z|^p \le F(x, z) \le L(1 + |z|^q) \qquad \text{dla } 1 < p < q.$$

Dla $p = q$ otrzymujemy całki wariacyjne o standardowym wzroście. W szczególnym przypadku, gdy zmienny wykładnik p jest funkcją ograniczoną $p_\Omega^- \le p(x) \le p_\Omega^+$ dla $x \in \Omega$, powyższe zagadnienie obejmuje również przypadek całki o wzroście typu $p(x)$, tj.

$$F(x, z) = \frac{1}{p(x)}|z|^{p(x)}$$

oraz związane z F operatory *$p(\cdot)$-Laplace'a* (występujące w literaturze również jako *$p(x)$-harmoniczne* lub *laplasjany ze zmiennym wykładnikiem*):

$$\Delta_{p(\cdot)} u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = 0, \tag{8}$$

$$\operatorname{div}(p(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = 0. \tag{9}$$

Okazuje się, że pomimo pozornego, symbolicznego podobieństwa do zagadnień o standardowym wzroście i równań typu p-harmonicznego, równania ze zmiennym wykładnikiem wykazują cechy nie obserwowane dla równań odpowiadających stałemu p. Na przykład, rozwiązanie zagadnienia $p(\cdot)$-Dirichleta dla równań ze zmiennym wykładnikiem nie musi istnieć nawet w najprostszym, jednowymiarowym przypadku, nawet dla gładkiego wykładnika (przykład 3.6 w [87]). Co więcej, rozwiązanie nie musi być funkcją liniową (przykład 3.2 w [87]) jak to jest w przypadku $p = const$ i zagadnień na odcinku w $\mathbb{R}$. Dopiero połączenie założeń na ograniczoność wykładnika i jego regularność pozwala udowodnić istnienie ograniczonych rozwiązań, np.: twierdzenia 3.8 i 4.1 w [87]. Inną, istotną różnicą między (8) i (9) a równaniem p-harmonicznym jest brak skalowalności rozwiązań tych równań.

Czasem przełomu dla zagadnień ze zmiennym wykładnikiem okazała się pierwsza dekada XXI stulecia, kiedy ukazały się artykuły ukazujące związki takich równań i całek wariacyjnych z zastosowaniami oraz ukazujące znaczenie zmiennego wykładnika w modelowaniu zjawisk fizycznych o charakterze anizotropowym (niejednorodnym). Przedstawię kilka takich przykładów.

(1) Acerbi i Mingione [1, 2] badali regularność rozwiązań równań opisujących stacjonarne płyny elektroreologiczne, tj. płyny, których własności zmieniają się pod wpływem zewnętrznego pola elektromagnetycznego opisanego zmiennym wykładnikiem $p(\cdot)$, na przykład:

$$-\operatorname{div}\left((1 + |D_S u|^2)^{\frac{p(x)-2}{2}} D_S u\right) + \nabla\pi = f(x, u, \nabla u),$$

gdzie $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ dla $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ jest polem wektorowym prędkości przepływu, $D_S u$ oznacza symetryczny gradient u, zaś π ciśnienie. Powyższy układ równań wynika z modelu Rajagopal–Růžička a dalsza jego dyskusja znajduje się w rozdziale 1 w [1], również w pracach Diening–Růžička [63] oraz monografii Růžički [162].

(2) Chen, Levin i Rao [51] zaproponowali model przetwarzania obrazów oparty na zmiennym wykładniku (właściwie: odtwarzania obrazów, tj. usuwania zanieczyszczeń powstałych, na przykład, w wyniku niedokładności kamery lub jej uszkodzenia). Przedstawiając ich pomysł pominę szczegóły techniczne algorytmu, skupiając się na jego idei. Niech $u : \Omega \to \mathbb{R}$ dla $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ odpowiada obrazowi w ten sposób, że wartości $u(x)$ odpowiadają kolorom lub odcieniom szarości obrazu w punkcie $x \in \Omega$. Wówczas ∇u odpowiada zmianie wartości koloru. Niech I oznacza zanieczyszczony obraz a $\lambda > 0$ pewną stałą. Minimalizwanie następującego funkcjonału energii odpowiada usuwaniu zanieczyszczeń obrazu:

$$E_\Omega(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega (u-I)^2,$$

gdzie $u \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, a zmienny wykładnik $1 \leq p(x) \leq 2$. Równaniem Eulera-Lagrange powyższej całki wariacyjnej jest

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) - \lambda(u-I) = 0.$$

Idea, aby badać tego typu zagadnienie narodziła się z chęci stworzenia algorytmu łączącego najlepsze cechy dwóch najbardziej rozpowszechnionych algorytmów z jednoczesnym ograniczeniem ich słabych stron, tj.: algorytmu TV (inna używana nazwa: ROF (Rudin–Osher–Fatemi)) dla $p = 1$ oraz algorytmu Arsenin'a–Tichonov'a (Chambolle'a–Lions'a) dla $p = 2$. Artykuł [51] zawiera również wyniki numeryczne przemawiające na korzyść nowego algorytmu (patrz również Li–Li–Pi [123]).

(3) Zhikov [177, 178] badał model termistora oparty na zmiennym wykładniku (zagadnienie (1.15) w [178]). W takim modelu, w równaniu (8), $p(x)$ opisuje temperaturę w punkcie x termistora, zaś u jest potencjałem pola elektrycznego (patrz również [129]).

Okres ostatnich piętnastu lat jest czasem dynamicznego rozwoju teorii równań i całek wariacyjnych ze zmiennym wykładnikiem. Zagadnienia poruszane w licznych pracach (tylko w ciągu ostatnich pięciu lat ukazało się ich ponad 600 wg. MathSciNet) obejmują m.in. (nie)istnienie rozwiązań dla równań niejednorodnych typu (2) z $A = \Delta_{p(\cdot)}u$ typu eliptycznego, np.: Pucci-Zhang [160], zagadnienia wartości własnych, np.: Lang-Méndez [116], teorię regularności, np.: Bies–Górka [41], równania paraboliczne (np. w kontekście przetwarzania obrazu), regularność minimów całek wariacyjnych zarówno o wartościach skalarnych jak i wektorowych, np.: Tachikawa [166].

Opiszemy teraz główne zagadnienia geometryczne, które będą przedmiotem naszego zainteresowania.

Geometria równań różniczkowych cząstkowych typu eliptycznego

Geometryczna teoria funkcji i przekształceń (w skrócie: GTFiP) wyrasta z następujących zagadnień:

(1) znaleźć odpowiednik przekształceń konforemnych i funkcji holomorficznych dla obszarów w przestrzeniach $\mathbb{R}^n$, dla $n \geq 3$ i bardziej ogólnych przestrzeni, oraz

(2) na ile własności funkcji harmonicznych zachowane są dla rozwiązań równań i układów równań eliptycznych i (kwazi)minimów funkcjonałów energii?

Oba pytania są przedmiotem badań od ponad stu lat i znajdują swoje odpowiedzi zarówno dla zagadnień w obszarach euklidesowych, na rozmaitościach jak i w przestrzeniach metrycznych z miarą. Rozległość zakresu badań GTFiP sprawia, że w poniższym opisie ograniczę się jedynie do tych zagadnień, które bezpośrednio wiążą się z tematyką autoreferatu.

Przekształcenia konforemne dla obszarów w $\mathbb{R}^n$, dla $n \geq 2$ opisane są układem równań Beltramiego, który składa się z $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ równań przy n niewiadomych funkcjach współrzędnych przekształcenia konforemnego. Jest to więc układ nadokreślony a twierdzenie Liouville' z 1850 roku pokazuje, że rozwiązania klasy C^3 takiego układu zachowujące oientacje są, z dokładnością do podobieństw, przekształceniami Möbiusa (podobne twierdzenia zachodzą przy słabszych założeniach na regularność przekształcenia, np.: $W^{1,n}$, są to wyniki Reshetnyaka, Gehringa, Iwańca–Martina, patrz rozdział 1.3 w [99] oraz Liu [128]). Zatem wyżejwymiarowe przestrzenie $\mathbb{R}^n$ są ubogie w tak określone przekształcenia konforemne. Podobnie teoria funkcji i przekształceń holomorficznych w wyższych wymiarach jest ograniczona do przestrzeni $\mathbb{R}^n$ o parzystych wymiarach. Okazuje się, że ważnym analogiem funkcji holomorficznych i przekształceń konforemnych (w dowolnym wymiarze n), są *przekształcenia kwaziregularne* i *kwazikonforemne.*

Definicja 1.3. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ będzie przekształceniem z przestrzeni Sobolewa $W^{1,n}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ takim, że jakobian f spełnia warunek $J(f, x) \geq 0$ w Ω. Wówczas powiemy, że f jest przekształceniem *kwaziregularnym* o ile istnieje stała (dystorsja) $K \geq 1$ taka, że zachodzi nierówność dystorsyjna:

$$|Df(x)|^n \leq KJ(f, x) \quad \text{p.w. w } \Omega. \tag{10}$$

Jeśli f jest dodatkowo homeomorfizmem, to f nazywamy przekształceniem *kwazikonforemnym.*

Własności takich przekształceń i ich podobieństwo do funkcji holomorficznych zostało opisane w bogatej literaturze przedmiotu, np.: Ahlfors [16], Astala–Iwaniec–Martin [31], Lehto–Virtanen [118], Rickman [161], Väisälä [169].

Wśród przykładów takich przekształceń wymieńmy: funkcje analityczne, przekształcenia bilipszycowskie, konforemne (dla $K = 1$), dyfeomorfizmy. (Niech $f : \Omega \to D$ będzie dyfeomorfizmem. Wówczas $f|_{\Omega'}$ dla $\Omega' \Subset \Omega$ jest przekształceniam kwazikonforemnym.) Przekształcenia kwaziregularne posiadają ważne uogólnienie, tzw. *przekształcenia o skończonej dystorsji*, dla których K jest funkcją $K = K(x, f) < \infty$ p.w. w Ω. Takie przekształcenia są przedmiotem intensywnych badań w czasie ostatniej dekady, np.: Hencl–Koskela [95], Iwaniec–Martin [99]. W zależności od stopnia założonej całkowalności $K(x, f)$ otrzymujemy różne własności przekształceń, np.: ciągłość, otwartość, warunek Łuzina. Istotną rolę odgrywają warunki całkowalności funkcji dystorsji w przestrzeniach Orlicza, np.: $\operatorname{Exp} L$, $L^p \log L^q$. Związki między teorią przekształceń kwaziregularnych a teorią równań różniczkowych typu eliptycznego, w szczególności odkrycie związków z równaniami ze zmiennym wykładnikiem są przedstawione w rozdziale 1.4.1 autoreferatu.

Ostatnie lata przynoszą również wzrost zainteresowania innymi klasami przekształceń, które wyrastają z funkcji analitycznych i przekształceń konforemnych, są to: przekształcenia harmoniczne (vide monografia Duren'a [64]), p-harmoniczne (rozdział 2.0.7 autoreferatu), o skończonej konforemnej energii (np.: Iwaniec–Onninen [100]). Ważną motywacją dla moich badań opisanych w rozdziale 2.0.8 jest fakt, że przekształcenia kwazikonforemne mają naturalne odpowiedniki w grupach Heisenberga (np.: Korányi–Reimann [112, 113], Heinonen–Holopainen [92]) i ogólniej, w przestrzeniach metrycznych z miarą, tzw. *przekształcenia kwazisymetryczne*, np.: Heinonen [91], Heinonen–Koskela [94], Bonk [46], Bonk–Kleiner [47].

W kontekście drugiego z głównych zagadnień GTFiP interesować nas będą równania typu (1)-(3) ze szczególnym uwzględnieniem operatora $p(\cdot)$-laplasjanu:

$$A(x, u, \nabla u) := |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u.$$

Dla takich operatorów będziemy badać następujące zagadnienia:
(1) nierówności typu Harnacka, w tym słabe nierówności Harnacka (rozdział 1.4.1),
(2) globalną całkowalność (nad)rozwiązań (rozdział 1.4.1),

(3) oscylacje rozwiązań (rozdział 1.4.2),
(4) oszacowania typu Carlesona dla rozwiązań w obszarach typu NTA, (ang. nontangentially accessible domains, rozdział 1.4.2),
(5) konstrukcje barier (rozdział 1.4.2),
(6) brzegowe nierówności Harnacka (rozdział 1.4.2),
(7) istnienie i oszacowania dla miar $p(\cdot)$-harmonicznych (rozdział 1.4.2),
(8) twierdzenia Phragména-Lindelöfa: odpowiednik zasad maksimum na nieograniczonych obszarach w $\mathbb{R}^n$ oraz twierdzenia Liouville (rozdział 1.4.3),
(9) oszacowania de Giorgi dla kwaziminimów całek wariacyjnych o niestandardowym wzroście i wynikającą stąd hölderowska regularność kwaziminimów oraz rozwiązań równań typu (A, B)-harmonicznego z warunkami wzrostu opisanymi zmiennym wykładnikiem (rozdział 1.4.4).

Dalsze własności geometryczne równań i układów równań eliptycznych typu p-harmonicznego opisane zostaną w następujących rozdziałach:
(1) zagadnienia z przeszkodą, ang. *obstacle problem*, funkcje superharmoniczne, twierdzenie o strukturze punktów regularnych i nieregularnych dla zagadnień Dirichleta, twierdzenie Kellogga (rozdział 2.0.5),
(2) nieliniowe zagadnienia wartości własnej, nieistnienie rozwiązań (rozdział 2.0.6),
(3) geometria p-harmonicznych układów równań: związki z przekształceniami kwaziregularnymi, twierdzenia o trzech sferach, wypukłość poziomic oraz oszacowania ich długości dla funkcji współrzędnych przekształcenia, nierówności izoperymetryczne (rozdział 2.0.7),
(4) funkcje harmoniczne i związane z nimi zagadnienia analizy na przestrzeniach metrycznych z miarą, oszacowania dla niekonforemnych modułów rodziny krzywych (pojemności), brzeg pierwszych końców jako przykład brzegu, względem którego można rozpatrywać ogólne zagadnienie Dirichleta w przestrzeniach metrycznych (rozdział 2.0.8),
(5) równania typu eliptycznego na grupie Heisenberga, własności przekształceń kwaziregularnych w grupie Heisenberga $\mathbb{H}_1$ (rozdział 2.0.8).

1.4 Szczegóły osiągnięć

W tym rozdziale przedstawimy szczegóły osiągnięcia habilitacyjnego, uzupełniając wedle potrzeby również informacje z ogólnego wprowadzenia.

1.4.1 Silny $p(\cdot)$-laplasjan, przekształcenia o skończonej dystorsji, jednorodna nierówność Harnacka, wyniki z prac [AH1], [AH2]

Jedną z przyczyn, dla których przekształcenia kwaziregularne i ich uogólnienia odgrywają tak istotną rolę w GTFiP są ich związki z geometrią równań eliptycznych. Na przykład, jeden z fundamentalnych wyników Reshetnyaka orzekający, że *niestałe przekształcenie kwaziregularne* $f = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *jest przekształceniem otwartym i dyskretnym*, został udowodniony poprzez obserwacje, że f można przypisać równanie A-harmoniczne, które spełnione jest przez $\ln |Df|, f_1, \dots, f_n$ oraz pochodne cząstkowe funkcji współrzędnych (np. rozdział 14 w Heinonen–Kilpeläinen–Martio [93]). Co więcej, zachodzą wyniki odwrotne: Bojarski–Iwaniec [45], dla $p \geq 2$ oraz Manfredi [137], dla $1 < p < \infty$ niezależnymi metodami udowodnili, że jeśli u jest niestałą funkcją p-harmoniczną w obszarze w $\mathbb{R}^2$ (równanie (1)), to jej zespolony gradient

$$u_z := \frac{1}{2}(u_x - iu_y)$$

jest przekształceniem kwaziregularnym z dystorsją $K = \frac{1}{2}(p - 1 + 1/(p - 1))$ (patrz również Aronsson-Lindqvist [30]). Istnienie takiego związku daje np.: opis struktury punktów krytycznych funkcji u oraz tzw. zasadę jednoznacznego przedłużania (ang. unique continuation property). Oba wyniki pozostają pytaniami otwartymi poza $\mathbb{R}^2$. Poza równaniem p-harmonicznym podobny wynik nie był znany do 2010 roku. Moją motywacją dla badań nad równaniami ze zmiennym wykładnikiem było pytanie:

czy dla funkcji $p(\cdot)$-harmonicznej (8) *lub* (9) *w obszarze w $\mathbb{R}^2$ zachodzi odpowiednik wyniku Bojarskiego–Iwańca–Manfrediego?*

Negatywnej odpowiedzi na to pytanie udzieliłem w pracy z P. Hästö [AH1] w przykładzie 3.1. Niemniej okazuje się, że własność ta zachodzi dla równania, które nazwaliśmy *silnym $p(\cdot)$-laplasjanem*:

$$\widetilde{\Delta}_{p(\cdot)}\, u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) - |\nabla u|^{p(x)-2}\log(|\nabla u|)\langle \nabla u, \nabla p\rangle = 0, \tag{11}$$

zdefiniowanego dla $u \in W^{1,p(\cdot)}_{loc}(\Omega)$, obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ograniczonego wykładnika $p : \Omega \to (1,\infty)$, takiego, że ∇p istnieje. W pracach [AH1], [AH2] rozważamy np.: p lipszycowskie w Ω lub takie, że $\nabla p \in L^n \log L^n(\Omega)$ (przechodząc do słabego sformułowania (11) można przyjąć również, że $\nabla p \in L^{p(\cdot)} \log L^{p(\cdot)}(\Omega)$). Nazwa operatora pochodzi stąd, że dla $u \in C^2$ (lub $u \in W^{2,p(\cdot)}_{loc}(\Omega)$, tzw. silnych rozwiązań według terminologii rozdziału 9 książki Gilbarg–Trudinger [78]) operator $\widetilde{\Delta}_{p(\cdot)}\, u$ przyjmuje silną postać p-laplasjanu jak dla stałego p:

$$\widetilde{\Delta}_{p(\cdot)}\, u = |\nabla u|^{p(\cdot)-4}\big((p(\cdot)-2)\,\Delta_\infty u + |\nabla u|^2\,\Delta\, u\big), \tag{12}$$

gdzie Δ_∞ oznacza ∞-laplasjan (tzw. operator Aronssona). Operator $\widetilde{\Delta}_{p(\cdot)}\, u$ ma inne cenne własności, których nie posiadają operatory typu (8) i (9):

- skalowalność rozwiązań: jeśli u jest rozwiązaniem (11), to również λu dla $\lambda \in R$ jest rozwiązaniem,
- dla nieujemnych rozwiązań (11) zachodzi jednorodna nierówność Harnacka ze stałą Harnacka niezależną od u.

Dalsze badania dla silnego $p(\cdot)$-laplasjanu obejmują m.in.: związki z teorią rozwiązań lepkościowych, Juutinen–Lukkari–Parviainen [105] oraz gry stochastyczne, Pérez-Llanos [157]. Zauważmy również, że (11) jest przykładem równania z prawą stroną zależną od $|\nabla u|$. Takie równania nie były dotychczas intensywnie badane ustępując równaniom typu: $-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x,u)$, przy różnych warunkach wzrostu f (patrz uwaga 1.6 w [AH1], również [AG]).

Pierwszym wynikiem z [AH1], który przedstawimy jest następujący rezultat.

Twierdzenie 1.1 (twierdzenie 1.2 w [AH1])**.** *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie ograniczonym obszarem klasy C^2 oraz niech $g \in C^{1,\gamma}(\partial\Omega)$. Załóżmy, że p jest lipszycowsko ciągłym wykładnikiem spełniającym $1 < p^- \leq p^+ < \infty$. Wówczas istnieje słabe rozwiązanie $u \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ następującego zagadnienia brzegowego:*

$$\begin{cases} \widetilde{\Delta}_{p(\cdot)}\, u = 0 & w\ \Omega \\ u = g & na\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{13}$$

takie, że dla każdego obszaru $D \subset \Omega$ zachodzi zasada maksimum

$$\sup_D |u| \leq \sup_{\partial D} |u|.$$

Ponadto, zespolony gradient $u_z = \frac{1}{2}(u_x - iu_y)$ rozwiązania u jest przekształceniem o skończonej dystorsji $K_p(\cdot)$

$$K_p(x) = \frac{1}{2}\bigg(p(x) - 1 + \frac{1}{p(x)-1}\bigg).$$

Ponieważ $1 < p^- \leq p^+ < \infty$, to $K_p(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$. A zatem u_z jest przekształceniem kwaziregularnym.

W dowodzie rozważamy rodzinę operatorów zdefiniowanych jako ε-zaburzenia $\widetilde{\Delta}_{p(\cdot)}$ parametryzowaną $\varepsilon > 0$:

$$\widetilde{\Delta}^{\varepsilon}_{p(\cdot)}\, u^\varepsilon := \operatorname{div}\left((\varepsilon + |\nabla u^\varepsilon|^2)^{\frac{p(\cdot)-2}{2}} \nabla u^\varepsilon\right) - (\varepsilon + |\nabla u^\varepsilon|^2)^{\frac{p(\cdot)-2}{2}} \log \sqrt{\varepsilon + |\nabla u^\varepsilon|^2}\, \langle \nabla u^\varepsilon, \nabla p \rangle.$$

Rozwiązania zagadnień (13) dla $\widetilde{\Delta}^{\varepsilon}_{p(\cdot)}\, u$ dla tego samego, ustalonego g, istnieją i są klasy $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ na podstawie wyników Fana [70] i dyskusji w rozdziale 10 w [78]. Podobnie wynika zasada maksimum dla u^ε. Co więcej, normy $|u^\varepsilon|_{C^{1,\gamma}(\Omega)}$ szacują się jednostajnie niezależnie od ε. Ta obserwacja wraz z ograniczonością wykładnika p implikują, że u^ε zbiega do u punktowo w $\overline{\Omega}$ dla $\varepsilon \to 0$ oraz, że u jest rozwiązaniem (13).

Rozwiązaniom u^ε przypisujemy ich zespolone gradienty $F^\varepsilon := (u^\varepsilon_x, -u^\varepsilon_y)$, dla których pokazujemy że są kwaziregularnymi przekształceniami na zwartych podzbiorach Ω z tą samą ograniczoną dystorsją. Dowodzimy jednostajnej ciągłości takiej rodziny przekształceń, a następnie wykorzystując twierdzenie Arzeli-Ascoliego pokazujemy, że F^ε zbiegają jednostajnie na zwartych podzbiorach Ω do przekształcenia F. Korzystając z faktu, że dystorsja $K_{F^\varepsilon} \in \operatorname{Exp} L(\Omega)$ otrzymujemy, z jednego z twierdzeń o zwartości rodziny przekształceń o skończonej dystorsji z eksponencjalnie całkowalną dystorsją, że również F jest takim przekształceniem (więcej: kwaziregularnym).

Twierdzenie 1.1 uogólnia wyniki [45, 137] na przypadek klasy równań różniczkowych ze zmiennym wykładnikiem. Okazuje się, że udowodnić możemy wynik jeszcze ogólniejszy i nie znany wcześniej w teorii równań typu A-harmonicznego (nawet dla stałego p). Rozważając zmienny wykładnik $p(\cdot)$, który osiąga swoje infimum $p^- = 1$ w Ω, możemy znaleźć funkcje silnie $p(\cdot)$-harmoniczne (tj. słabe rozwiązania równania (11)), których zespolony gradient jest przekształceniem o skończonej dystorsji, ale nie jest kwaziregularny (dystorsja jest nieograniczona).

Twierdzenie 1.2 (twierdzenie 1.3 w [AH1])**.** *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie ograniczonym obszarem klasy C^2 oraz niech $g \in C^{1,\gamma}(\partial\Omega)$. Załóżmy, że dla wykładnika $p \in C(\overline{\Omega})$ istnieje zbiór $Y := \{x \in \Omega : p(x) = 1\}$ taki, że*

(1) miara Hausdorffa zbioru $\mathcal{H}_1(Y) = 0$, oraz

(2) $p|_{\Omega'}$ jest funkcją lipszycowską na każdym $\Omega' \Subset \Omega \setminus Y$.

Wówczas istnieje słabe rozwiązanie $u \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ zagadnienia brzegowego (13) *spełniające zasadę maksimum. Jeśli $K_p(\cdot) \in \operatorname{Exp} L(\Omega)$, dla dystorsji $K_p(\cdot)$ jak w twierdzeniu 1.1, to zespolony gradient u_z jest przekształceniem o skończonej dystorsji $K_p(\cdot)$, nieograniczonej na Y.*

Dowód tego twierdzenia wykorzystuje oszacowanie typu Caccioppoli (twierdzenie 5.1 w [AH1]) oraz wyniki z pracy Harjulehto–Hästö–Latvala [86] dla $p(\cdot)$-laplasjanu. Definiujemy ciąg obcięć wykładnika p:

$$p_\lambda(\cdot) := \max\{p(\cdot), \lambda\} \quad \text{dla } \lambda > 1.$$

Zauważmy, że przy założeniach twierdzenia, p_λ są funkcjami lipszycowskimi dla każdego $\lambda > 1$, a zatem możemy stosować twierdzenie 1.1 uzyskując silnie $p(\cdot)$-harmoniczne rozwiązanie u_λ. Tę obserwację wykorzystujemy następnie w propozycji 6.1 [AH1]. Pokazujemy istnienie takiego malejącego ciągu $\lambda_j \to 1$, ograniczonej funkcji $u : \Omega \to \mathbb{R}$ oraz ciągu silnych $p_{\lambda_j}(\cdot)$-harmonicznie rozwiązań u_{λ_j}, dla których zachodzą:

1. $u_{\lambda_j} \to u$ w $L^{p(\cdot)}(\Omega)$,

2. $u_{\lambda_j} \rightharpoonup u$ słabo w $W^{1,p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\Omega \setminus Y)$,

3. u jest silnie $p(\cdot)$-harmoniczne w $\Omega \setminus Y$.

Ponieważ miara Hausdorffa $\mathcal{H}_1(Y) = 0$, więc Y jest zbiorem usuwalnym dla funkcji w $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, skąd otrzymujemy, że de facto $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Twierdzenie o zwartości dla przekształceń o skończonej dystorsji zastosowane do rodziny zespolonych gradientów funkcji u_{λ_j} skutkuje tym, że u_z jest również takim przekształceniem.

Głównym wynikiem artykułu [AH2] jest nierówność Harnacka dla rozwiązań równania (11). Przed ukazaniem się naszej pracy nie było wiadomo, czy dla równań ze zmiennym wykładnikiem istnieją jednorodne nierówności Harnacka ze stałą niezależną od rozwiązań. Na przykład dla nieujemnych rozwiązań u równania $p(\cdot)$-harmonicznego znane są tylko oszacowania postaci:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in B} u(x) \le c(\|u\|_{L^{ns}(4B)}) \big(\operatorname*{ess\,inf}_{x\in B} u(x) + |B|^{\frac{1}{n}} \big), \tag{14}$$

dla ograniczonego log-hölderowsko ciągłego wykładnika $p(\cdot)$, kuli $B \subset \mathbb{R}^n$ oraz $s > p^+_{4B} - p^-_{4B}$. Co więcej wiadomo, że stała c w powyższej nierówności Harnacka musi zależeć od u nawet dla lipszycowsko ciągłego wykładnika p (przykład 3.1 w Harjulehto–Kinnunen–Lukkari [88]). Zależność od stałej i niejednorodność nierówności Harnacka jest źródłem wielu trudności w dowodach w teorii równań ze zmiennym wykładnikiem, np.: przy iterowaniu nierówności typu (14) w badaniach oszacowań Carlesona i brzegowych nierównościach Harnacka (twierdzenie 3.7 w [AL]). Uniemożliwia również proste wywnioskowanie hölderowskiej ciągłości jak to jest dla stałego p.

Okazuje się, że dla silnych $p(\cdot)$-laplasjanów sytuacja jest inna.

Twierdzenie 1.3 (twierdzenie 1.2 w [AH2])**.** *Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest ograniczonym obszarem oraz, że log-hölderowsko ciągły wykładnik p spełnia jeden z warunków:*

1. $1 < p^- \le p^+ < n$ *oraz* $\nabla p \in L^n \log L^n(\Omega)$, *lub*

2. $1 < p^- \le p^+ < \infty$ *oraz* $\nabla p \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ *dla* $q \ge \max\{p, n\} + \delta$ *i pewnego* $\delta > 0$.

Wówczas, jeśli u jest nieujemnym rozwiązaniem równania (11)*, to zachodzi*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in B} u(x) \le c \operatorname*{ess\,inf}_{x\in B} u(x),$$

dla kul B takich, że $2B \Subset \Omega$. Stała c nie zależy od u, tylko od n, p^-, p^+ oraz $c_{\log}(p)$.

Założenia twierdzenia są spełnione np.: dla ograniczonych i lipszycowskich wykładników $p(\cdot)$.

Zanim opiszemy dowód nierówności Harnack przedstawmy kilka jej konsekwencji. Wśród wniosków z twierdzenia 1.3 wymieńmy:

1. silną zasadę minimum dla nieujemnych rozwiązań (11), wniosek 1.3 [AH2],

2. silną zasadę minimum dla nieujemnych nadrozwiązań wynikającą ze słabej nierówności Harnacka, twierdzenie 4.6 [AH2],

3. lokalną hölderowską ciągłość rozwiązań na obszarach $\Omega' \Subset \Omega$ ze stałymi zależnymi tylko od n, p oraz $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, wniosek 1.4 w [AH2].

Podkreślmy, że takie wnioski dla $p(\cdot)$-laplasjanów nie wynikają z odpowiednich nierówności Harnacka. Podobnie, nie zachodzi poniższy wynik o globalnej całkowalności nadrozwiązań $p(\cdot)$-harmonicznego równania.

Powiemy, że obszar $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$ jest *obszarem typu hölderowskiego* jeśli dla pewnego ustalonego $x_0 \in \Omega$ i dla wszystkich $x \in \Omega$ zachodzi następujące oszacowanie wzrostu metryki kwazihiperbolicznej k_Ω:

$$k_\Omega(x, x_0) \leq c \log \frac{\operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)}{\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)} + c \tag{15}$$

dla pewnej stałej $c > 0$. Metrykę k_Ω definiujemy następująco:

$$k_\Omega(x, y) := \inf \int_\gamma \frac{ds(z)}{\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)},$$

gdzie infimum jest rozważane względem wszystkich prostowalnych krzywych w Ω łączących x i y. Nazwa tego typu obszarów pochodzi z faktu, że dla jednospójnych obszarów $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^2$ przekształcenie Riemanna z dysku jednostkowego na Ω jest α-hölderowsko ciągłe z wykładnikiem α zależnym od c wtedy i tylko wtedy gdy Ω spełnia analog (15) dla metryki hiperbolicznej (Becker-Pommerenke [38]). Przykładem obszarów typu hölderowskiego są obszary typu Johna (wymienione w autoreferacie również w innych kontekstach np. rozdział 3 w [AL], rozdziały 10 i 11 w [6], rozdział 2.0.8 poniżej).

Zagadnienie globalnej całkowalności (nad)rozwiązań jest klasycznym zagadnieniem teorii potencjału. Armitage [28] udowodnił, że funkcje (nad)harmoniczne nie muszą być p-całkowalne na kuli w $\mathbb{R}^n$ dla $p = \frac{n}{n-1}$ oraz, że dla dodatnich nadharmonicznych funkcji taka własność zachodzi o ile $0 < p < \frac{n}{n-1}$. Dla nadrozwiązań równania p-harmonicznego (1) w obszarach hölderowskich w $\mathbb{R}^n$ analogiczny wynik uzyskał Lindqvist [126], zaś Maasalo [135] pokazała globalną całkowalność funkcji p-superharmonicznych w obszarach hölderowskich na przestrzeniach metrycznych z miarą (zagadnienie równań różniczkowych na przestrzeniach metrycznych dyskutujemy pokrótce w rozdziale 2.0.8 autoreferatu).

Dla równań typu silnie $p(\cdot)$-harmonicznego zachodzi odpowiednik powyższych rezultatów (nie znany dla klasycznych równań typu $p(\cdot)$-harmonicznego).

Twierdzenie 1.4 (twierdzenie 1.5 w [AH2])**.** *Załóżmy, że Ω jest obszarem typu hölderowskiego a wykładnik $p(\cdot)$ spełnia założenia twierdzenia 1.3. Jeśli u jest nieujemnym nadrozwiązaniem* (11)*, to istnieje $q > 0$, zależne tylko od n, p oraz* $\operatorname{diam}\Omega$*, takie że*

$$\int_\Omega u^q \, dx < \infty.$$

Przejdźmy teraz do dowodu twierdzenia 1.3. Dowód wykorzystuje metodę iteracji Mosera. W odróżnieniu od typowych funkcji testujących postaci

$$\phi_1 = u^\gamma \eta^{p^+}, \qquad \text{dla } \eta \in C_0^\infty$$

używanych w dowodach nierówności Harnacka dla $p(\cdot)$-laplasjanu, rozważamy funkcje

$$\phi_2 = u^{1-(1+\gamma)p(\cdot)} \eta^{p(\cdot)}.$$

Użycie takich funkcji testujących pozwala uniknąć zależności stałej Harnacka od rozwiązania jak to jest w przypadku równań typu (8) lub (9). Za to $\nabla\phi_2$ składa się z większej liczby składników (w tym zawierających ∇p) niż $\nabla\phi_1$, które wymagają dokładniejszej analizy. Wykorzystując funkcje testujące ϕ_2 pokazujemy oszacowanie Caccioppoli dla $p^+ < n$ (lemat 3.2) oraz analogiczne dla $p^+ \geq n$ (lemat 3.4).

Lemat 1.1 (lemat 3.2 w [AH2]). *Załóżmy, że $p(\cdot)$ jest wykładnikiem takim, że $1 < p^- \leq p^+ < n$ oraz $\nabla p \in L^n \log L^n(\Omega)$. Niech u będzie nieujemnym nadrozwiązaniem* (11). *Wówczas dla każdego $\gamma > 0$ istnieje takie $c = c(p^-, p^+)$, że zachodzi oszacowanie*

$$\left\| \frac{\eta \nabla u}{u^{1+\gamma}} \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq c \left\| \frac{\nabla \eta}{u^\gamma} \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + c \left\| \frac{\eta}{u^\gamma} \right\|_{L^{p^*(\cdot)}(\Omega)} \|\nabla p\|_{L^n \log L^n(\operatorname{supp}\eta)}$$

dla każdej nieujemnej funkcji lipszycowskiej $\eta \in C_0(\Omega)$.

W dowodzie lematu wykorzystujemy również nierówności Höldera dla przestrzeni Zygmunda (nierówność (2.1) w [AH2]). Następnie, metodą iteracji Mosera udowadniamy oszacowanie z dołu dla nieujemnych nadrozwiązań i $\alpha > 0$:

$$\left(\fint_{2B} u(x)^{-\alpha}\, dx \right)^{-\frac{1}{\alpha}} \leq c \operatorname*{ess\,inf}_{x \in B} u(x),$$

dla kul B takich, że $2B \Subset \Omega$ o odpowiednio małych promieniach, dla których $\|\nabla p\|_{L^n \log L^n(2B)} < c'$ (dla $p^+ < n$) lub $\|\nabla p\|_{L^{q(\cdot)}(2B)} < c'$ (dla $p^+ < \infty$).

Dowód oszacowania $\operatorname{ess\,sup}_B u$ dla nieujemnego podrozwiązania (11) wymaga innego podejścia (twierdzenie 3.8 w [AH2]). Zainspirowani dowodem twierdzenia 3.11 z Malý–Ziemer [136] definiujemy następującą funkcję:

$$G_l(t) := \begin{cases} \frac{1}{\gamma} t^\gamma, & t \in [0, l), \\ l^{\gamma-1} t - (1 - \frac{1}{\gamma}) l^\gamma, & t \geq l \end{cases}$$

o własności, że $G_l \in C^1([0,\infty))$ oraz $G_l'(t) = \min\{t, l\}^{\gamma-1}$. Kluczowa jest funkcja testująca:

$$\phi(x) = \eta^{p(x)} \int_0^{u(x)} \min\{t, l\}^{(\gamma-1)p(x)}\, dt,$$

dla $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$. Zauważmy, że $\phi \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Użycie takiej funkcji w (11) prowadzi nas do oszacowania (str. 1641-43 w [AH2]):

$$\left\| u^\gamma \eta \right\|_{L^{n' p(\cdot)}(\Omega)} \leq c \left\| u^\gamma \nabla \eta \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

W oszacowaniach wykorzystujemy również skalowalność równania (11). Używając iteracji jak dla dolnego oszacowania otrzymujemy tezę twierdzenia 3.8. Ostatnim krokiem dowodu jest połączenie oszacowań dla dodatnich i ujemnych średnich w twierdzeniach 3.5 i 3.8. Jest to konsekwencją kolejnego oszacowania typu Caccioppoli (lemat 4.2):

Lemat 1.2 (lemat 4.2 w [AH2]). *Załóżmy, że wykładnik p jest ograniczony oraz*

$$\nabla p \in L^{p(\cdot)} \log L^{p(\cdot)}(\Omega).$$

Wówczas dla nieujemnych nadrozwiązań u równania (11) *zachodzi*

$$\int_\Omega \big(|\nabla \log u|\, \eta \big)^{p(x)}\, dx \leq c \int_\Omega |\nabla \eta|^{p(x)} + \big(\eta\, |\nabla p|\, |\log(\eta\, |\nabla p|)| \big)^{p(x)} + \chi_{\{\eta > 0\}}\, dx$$

gdzie $\eta \in C_0(\Omega)$ jest nieujemna i lipszycowska. Stała c zależy tylko od p^- i p^+.

W konsekwencji lematu, $\log u$ spełnia (wniosek 4.3 oraz uwaga 4.4 w [AH2]):

$$\fint_B \big|\log u - (\log u)_B\big|\, dx \leq \fint_B |\log u - (\log u)_B|^{p(x)}\, dx \leq c,$$

gdzie $(\log u)_B$ oznacza wartość średnią po kuli B. Stąd, $\log u \in \mathrm{BMO}(B)$ i stosując wariant lematu Johna-Nirenberga, wniosek 19.10 w [93] otrzymujemy

$$\left(\fint_B u^\alpha\, dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq c\left(\fint_B u^{-\alpha}\, dx\right)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Z tego oszacowania, nierówność Harnacka wynika na podstawie krótkiego argumentu z pokryciami.

1.4.2 Brzegowe nierówności Harnacka, oszacowania Carlesona, funkcje barier, $p(\cdot)$-harmoniczne miary, wyniki z pracy [AL]

Klasyczna brzegowa nierówność Harnacka dla funkcji harmonicznych u i v w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ orzeka, że jeśli u i v zanikają w sposób ciągły w każdym regularnym punkcie zbioru $U \cap \partial\Omega$ oraz są ograniczone w otoczeniu każdego nieregularnego punktu zbioru $U \cap \partial\Omega$, to zachodzi nierówność

$$\frac{u(x)}{u(y)}\frac{v(y)}{v(x)} \leq A,$$

dla wszystkich $x, y \in K \cap \Omega$, dla zwartego $K \subset U$. Stała A zależy od Ω, K oraz U. Definicja punktów (nie)regularnych i dyskusja ich znaczenia w teorii potencjału (vide kryterium Wienera) znajduje się np.: w rozdziałach 6.16 i 9.5 książki [93]. W kontekście autoreferatu rola punktów (nie)regularnych w teorii równań ze zmiennym wykładnikiem jest opisana w rozdziale 2.0.5.

Istotą brzegowych nierówności Harnacka (w skrócie: BNH), determinującą metody dowodów jest charakter brzegu obszaru (definicje obszarów opisanych w poniższym rozdziale jak również wzajemne relacje między nimi zostały opisane np.: w artykułach Aikawa [18, 19]). Dla funkcji harmonicznych w obszarach lipszycowskich pierwsze wyniki udowodnili Kemper [108], Ancona [25], Dahlberg [55] oraz Wu [174]. Następnie, Caffarelli-Fabes-Mortola-Salsa [48] rozszerzyli wyniki Kempera na bardziej ogólne równania eliptyczne drugiego rzędu, zaś Jerison–Kenig [102] na przypadek obszarów NTA (ang. non-tangentially accessible), Bañuelos–Bass–Burdzy [35] i Bass–Burdzy [36] badali zagadnienie dla obszarów hölderowskich, zaś Aikawa [17] badał przypadek obszarów typu jednostajnego (ang. uniform domains).

Nieliniowa natura równań typu A-harmonicznego sprawiła, że dopiero ostatnia dekada przyniosła wyniki z BNH dla równań tego typu: Aikawa–Kilpeläinen–Shanmugalingam–Zhong [21] zbadali przypadek funkcji p-harmonicznych w obszarach $C^{1,1}$ (tzn. z warunkiem kuli), Lewis–Nyström [119]-[121] dla obszarów lipszycowskich i tzw. płaskich w sensie Reifenberga (ang. Reifenberg-flat). Kolejne wyniki z tego obszaru badań ukazały się w pracach Avelin–Lundström–Nyström [33] dla równań typu (3), Nyström [152] dla obszarów w grupie Heisenberga oraz Kuusi–Mingione–Nyström [115] i Nyström–Persson–Sande [153] dla równań typu parabolicznego. Dalsza literatura została opisana we wstępie do pracy [AL].

Główne wyniki pracy [AL] to:

(a) oszacowania typu Carlesona w obszarach NTA w $\mathbb{R}^n$ dla równania $p(\cdot)$-harmonicznego (8),

(b) wprowadzenie dwóch typów barier (typu Wolanski i Bauman),

(c) brzegowa nierówność Harnacka dla funkcji $p(\cdot)$-harmonicznych i obszarów spełniających warunek kuli,

(d) definicja i oszacowania dla miar $p(\cdot)$-harmonicznych.

Przed ukazaniem się naszej pracy żaden z tych wyników nie był znany w literaturze. Wyniki (a) i (c) zostały ostatnio uogólnione na przypadek równań eliptycznych w pełni nieliniowych, Avelin–Julin [32]. Możliwe dalsze kierunki badań są opisane poniżej.

Następujący wynik został udowodniony dla obszarów typu NTA (definicja 2.6 w [AL]). Wśród przykładów takich obszarów wymieńmy kwazidyski, ograniczone obszary lipszycowskie i pewne zbiory o fraktalnym brzegu (np.: płatek von Kocha). Podobne oszacowania typu Carlesona są znane np.: dla równań parabolicznych, Garofalo [74] i p-harmonicznych na przestrzeniach metrycznych, Aikawa-Shanmugalingam [22].

Twierdzenie 1.5 (oszacowanie typu Carlesona, twierdzenie 3.7 w [AL])**.** *Załóżmy, że obszar $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest typu NTA z parametrami M_Ω i r_Ω. Niech $w \in \partial\Omega$, $0 < r \leq r_\Omega$ a $p(\cdot)$ niech będzie zmiennym wykładnikiem typu log-hölderowskiego spełniającym albo $p^+ \leq n$ lub $p^- > n$.*

Rozważmy funkcję $p(\cdot)$-harmoniczną u dodatnią w $\Omega \cap B(w,r)$, ciągłą w $\overline{\Omega} \cap B(w,r)$ taką, że $u = 0$ na $\partial\Omega \cap B(w,r)$. Wówczas istnieją stałe c i c', dla których zachodzi nierówność:

$$\sup_{\Omega\cap B(w,r')} u \leq c\left(u(a_{r'}(w)) + r'\right), \tag{16}$$

gdzie $r' = r/c'$.

Stała c zależy od $n, p, \sup_{B(w,r)\cap\Omega} u$ oraz M_Ω, zaś c' zależy od n, p^-, p^+, c_{log} i M_Ω, r_Ω.

W porównaniu do klasycznych oszacowań typu Carlesona, powyższe zawiera dodatkowy wyraz r' oraz stała c zależy od u. Jest to konsekwencją dyskutowanej w rozdziale 1.4.1 postaci nierówności Harnacka dla funkcji $p(\cdot)$-harmonicznych (lemat 3.1 w [AL]). Zauważmy jednak, że c zależy od $\sup_{B(w,r)\cap\Omega} u$ po większej kuli.

Dowód nierówności (16) wykorzystuje iteracje nierówności Harnacka (lemat 3.1) dla odpowiednio wybranego łańcucha kul dla obszarów jednostajnych z metryką kwazihiperboliczną (oszacowania (3.1) i (3.2) w [AL]), jak również nowe oszacowania oscylacji funkcji $p(\cdot)$-harmonicznych (lematy 3.4 i 3.5 w [AL]) i wynikającą z nich hölderowską ciągłość aż do brzegu (lemat 3.6) dla obszarów, których dopełnienie jest jednostajnie $p(\cdot)$-grube (ang. uniformly $p(\cdot)$-fat), patrz definicja 3.3 w [AL]. W wymienionych wynikach pomocniczych ważną rolę odgrywa pojęcie względnej pojemności (ang. relative capacity, inna nazwa: wariacyjna pojemność) przypomnianej w definicji 2.2 w [AL]. W kontekście autoreferatu, pojemności występują również w badaniach nad twierdzeniem Phragména–Lindelöfa oraz w analizie punktów (nie)regularnych, rozdziały 1.4.3 oraz 2.0.5.

Rozdział 4 w [AL] zawiera konstrukcje dwóch rodzajów barier, które nazwaliśmy: typu Wolanski (uogólniają wynik Wolanski [173]) oraz typu Bauman (zainspirowane pracą [37]). Bariery odgrywają ważną rolę w charakteryzacji punktów regularnych, np.: twierdzenie 9.8 w [93] oraz twierdzenia 11.2, 11.11 w Björn–Björn [42]; również w zagadnieniach wartości własnych operatorów eliptycznych, np.: Berestycki–Rossi [40]. Ich analogi w teorii równań ze zmiennym wykładnikiem nie były dotychczas znane. W pracy [AL] używamy ich w dowodzie BNH. Dalsze zastosowania barier są przedmiotem badań w toku wspólnie z N. Lundströmem.

Dla barier typu Wolanski (lemat 4.1 w [AL]) pokazaliśmy, że jeśli $p(\cdot)$ jest zmiennym wykładnikiem lipszycowsko ciągłym na kuli $\overline{B(y,2r)} \subset \mathbb{R}^n$, to dla $M > 0$ i $x \in B(y,2r)$ funkcja

$$\hat{u}(x) = \frac{M}{e^{-\mu} - e^{-4\mu}}\left(e^{-\mu} - e^{-\mu\frac{|x-y|^2}{r^2}}\right)$$

jest $p(\cdot)$-nadrozwiązaniem w $B(y,2r)\setminus B(y,r)$ dla $\mu\geq\mu_*$ i $r\leq r_*$, gdzie $r_*=r_*(p^-,||\nabla p||_{L^\infty})$ oraz $\mu_*=\mu_*(p^+,p^-,n,||\nabla p||_{L^\infty},M)$. Co więcej, zachodzi:

$$\hat{u}(x)=M \text{ na } \partial B(y,2r) \quad \text{oraz} \quad \hat{u}(x)=0 \text{ na } \partial B(y,r).$$

Podobnie można skonstruować $p(\cdot)$-podrozwiązanie o analogicznych własnościach. W porównaniu do pracy [173], nasza konstrukcja nie zakłada zależności r od M (uwaga 4.2 w [AL]). W konstrukcji barier typu Bauman (lemat 4.3 w [AL]) pokazujemy istnienie $p(\cdot)$-nadrozwiązań (i analogicznych $p(\cdot)$-podrozwiązań) postaci:

$$\hat{u}(x)=\frac{M}{1-2^{-\mu}}\left[1-\left(\frac{r}{|x-y|}\right)^{\mu}\right].$$

Głównym wynikiem pracy jest BNH dla obszarów w $\mathbb{R}^n$ spełniających warunek kuli (definicja 2.7 w [AL]). Jest to warunek równoważny faktowi, że obszar jest typu $C^{1,1}$ (lemat 2.2 w [21]). Dodajmy, że takie obszary spełniają również warunek NTA, a zatem są typu jednostajnego.

Niech $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ spełnia warunek kuli. Przez $A_r(w)$ oznaczamy punkt w Ω taki, że

$$d(A_r(w),\partial\Omega)=r \quad \text{oraz} \quad |A_r(w)-w|=r$$

dla $w\in\partial\Omega$. Istnienie takiego punktu wynika z warunku wewnętrznej kuli (z promieniem r_i) dla $r\leq r_i/2$.

Twierdzenie 1.6 (twierdzenie 5.4 w [AL])**.** *Załóżmy, że $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ jest obszarem spełniającym warunek kuli z promieniem r_b. Niech $w\in\partial\Omega$, $0<r<r_b$ oraz niech $p(\cdot)$ będzie ograniczonym, lipszycowsko ciągłym zmiennym wykładnikiem. Rozważmy funkcje $p(\cdot)$-harmoniczne u i v, dodatnie w $\Omega\cap B(w,r)$, takie, że $u=0=v$ na $\partial\Omega\cap B(w,r)$.*

Wówczas istnieją stałe c, C oraz $\tilde{c}$ takie, że zachodzą nierówności:

$$\begin{aligned} &(1)\quad \frac{1}{c}\frac{d(x,\partial\Omega)}{r}\leq u(x)\leq c\frac{d(x,\partial\Omega)}{r}, \\ &(2)\quad \frac{1}{C}\leq\frac{u(x)}{v(x)}\leq C \qquad dla \quad x\in\Omega\cap B(w,r/\tilde{c}). \end{aligned} \tag{17}$$

Stała $\tilde{c}$ zależy od r_b, oraz $p^-,||\nabla p||_{L^\infty}$, stała c zależy od $n,p^+,p^-,||\nabla p||_{L^\infty}$, $\sup_{B(w,r)\cap\Omega}u$, $u(A_{2\tilde{r}}(w))$ (dla $\tilde{r}:=r/\tilde{c}$) oraz r_b. Ponadto, stała C zależy od tych samych parametrów co c i dodatkowo od $v(A_{2\tilde{r}}(w))$ i $\sup_{B(w,r)\cap\Omega}v$.

Co więcej, c i C są funkcjami rosnącymi jako funkcje $\sup_{\Omega\cap B(w,r)}u$, $\sup_{\Omega\cap B(w,r)}v$ a malejącymi jako funkcje $u(A_{2\tilde{r}}(w))$ i $v(A_{2\tilde{r}}(w))$.

Równoważne sformułowanie BNH zostało podane w uwadze 5.5 w [AL]. Dla stałego p powyższy wynik odpowiada BNH z pracy [21], szczegóły w uwadze 5.7 w [AL]. Zależność stałych $c,\tilde{c},C$ od geometrii obszaru (promienia r_b i wymiaru n) oraz własności wykładnika (p^+,p^-, $\|\nabla p\|_{L^\infty}$) są naturalne. Podobnie jest z zależnością od $u(A_{2\tilde{r}}(w))$ (i analogicznie dla v), wynikającą z warunku kuli: istotne jest to, że stałe c i C są funkcjami malejącymi tych parametrów, a więc ich wartości są kontrolowane. Co do zależności od $\sup_{B(w,r)\cap\Omega}u$ (i podobnie dla v), to jest ona konsekwencją zastosowania twierdzenia 1.5.

Dowód twierdzenia 1.6 wynika z połączenia dolnego i górnego oszacowania wzrostu $u(x)$ w zależności od odległości $d(x,\partial\Omega)$, odpowiednio: lemat 5.1 w [AL] (dla obszarów z warunkiem wewnętrznej kuli) i lemat 5.3 (dla obszarów z warunkiem zewnętrznej kuli). W obu lematach

wykorzystujemy istnienie barier typu Wolanski. Oba lematy nie były znane dotychczas w literaturze i mają wartość niezależnie od wykorzystania ich w dowodzie BNH, np.: dla badania tempa zaniku dodatnich funkcji $p(\cdot)$-harmonicznych przy brzegu. Co więcej, w lemacie 5.1 zauważamy, że w zależności od geometrii obszaru (warunek wewnętrznej kuli lub warunek kuli) stałe zależą od innego zestawu parametrów.
Dalsze możliwe kierunki badań dla BNH to:

- uzyskanie brzegowych oszacowań dla równań (A, B)-harmonicznych (równania (3)) o niestandardowym wzroście, np.: dla $A = \Delta_{p(\cdot)}$, w tym odpowiedników lematów 5.1 i 5.3.

- uzyskanie BNH dla równań $p(\cdot)$-harmonicznych dla obszarów innego typu niż spełniających warunek kuli, np.: obszarów lipszycowskich.

Ostatnia część pracy [AL] poświęcona jest zdefiniowaniu i oszacowaniom miar $p(\cdot)$-harmonicznych. Miary harmoniczne odgrywają ważną rolę np.: w dowodach BNH [55, 102]. Istnieją różne nieliniowe odpowiedniki miar harmonicznych, tzw. miary p-harmoniczne, np.: Llorente–Manfredi–Wu [130], Lewis–Nyström–Vogel [122]. Nasze podejście w [AL] bliższe jest temu z pracy [122]. Miary p-harmoniczne występują np.: w zagadnieniach typu *free boundary*, [121], jak również w grach stochastycznych, Peres–Sheffield [156].

W lemacie 6.2 udowadniamy istnienie miar $p(\cdot)$-harmonicznych. W oparciu o naszą wiedzę jest to pierwszy w literaturze przedmiotu dowód istnienia takich miar.

Lemat 1.3 (lemat 6.2 w [AL])**.** *Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $w \in \partial\Omega$, $0 < r < \infty$ oraz, że p jest ograniczonym i log-hölderowsko ciągłym zmiennym wykładnikiem.*

Niech u będzie dodatnią funkcją $p(\cdot)$-harmoniczną w $\Omega \cap B(w, 2r)$, ciągłą w $\overline{\Omega} \cap B(w, 2r)$ taką, że $u \equiv 0$ na $\partial\Omega \cap B(w, 2r)$. Rozszerzmy u do $B(w, 2r)$ przez 0, tzn. zdefiniujmy $u \equiv 0$ na $B(w, 2r) \setminus \Omega$.

Wówczas istnieje dokładnie jedna, dodatnia, borelowska miara μ w $\mathbb{R}^n$, z nośnikiem w $\partial\Omega \cap B(w, r)$, która spełnia

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u, \nabla \psi \rangle dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \psi \, d\mu, \tag{18}$$

dla każdego $\psi \in C_0^\infty(B(w, r))$.

Dowodzimy wpierw, że rozszerzenie u do $B(w, 2r)$ jest $p(\cdot)$-podrozwiązaniem. Następnie, korzystając z związków miedzy normą a funkcją modularną (oszacowania (4)) oraz nierówności Höldera dla funkcji w przestrzeniach $L^{p(\cdot)}$ oraz oszacowania typu Caccioppoli (lemat 6.1 w [AL]) pokazujemy, że μ jak w (18) jest nieujemną dystrybucją w $B(w, r)$ zadającą dodatnią miarę.

W twierdzeniu 6.3 w [AL] pokazujemy następujące oszacowanie na miarę $p(\cdot)$-harmoniczną w obszarach Ω, których dopełnienie jest jednostajnie $p(\cdot)$-grube (z parametrami c_0, r_0, patrz definicja 3.3 w [AL], również uwaga 6.4). Przy oznaczeniach i założeniach na p i u jak w lemacie 1.3 i dodatkowym założeniu, że $p^+ < n$ zachodzi górne oszacowanie:

$$\mu(\partial\Omega \cap B(w, \bar{r}))^\alpha \leq C \bar{r}^{\frac{n-p^+}{p^- - 1}} \sup_{B(w, 3\bar{r}) \cap \Omega} u, \tag{19}$$

gdzie $\bar{r} = r/\bar{c}$ oraz $\alpha = \frac{p^+}{p^-(p^- - 1)}$. Stała C zależy tylko od n, p^+, p^-, podczas gdy $\bar{c}$ zależy dodatkowo od c_{log}, $\sup_{B(w,r) \cap \Omega} u$ i parametrów obszaru c_0, r_0. Jeśli $p^- > 2$, to zachodzi również odwrotne, dolne oszacowanie postaci

$$\sup_{B(w,\tilde r)\cap\Omega} u \le c\left(\tilde r^{\beta\frac{p^+}{p^-}(p^- - n)}\,\mu(\partial\Omega\cap B(w,r))^{\beta} + \tilde r\right), \tag{20}$$

dla $\beta = \frac{p^-}{(p^+)^2 - p^-}$.

Podobne wyniki dla stałego p otrzymali Eremenko–Lewis [65], Kilpeläinen–Zhong [109]. Twierdzenie 6.3, [AL] uogólnia wyniki z pracy Lundström–Nyström [134] w tym sensie, że w szczególnym przypadku, gdy $p = p^+ = p^-$ otrzymujemy tezę z lematu 2.7 w [134].

Naszkicuję teraz dowody oszacowań (19) i (20).

W pierwszym kroku dowodu górnego oszacowania (19) korzystamy z lematu 3.4 [AL], dzięki czemu możemy znaleźć odpowiednią stałą $\bar c$ taką, że zachodzi

$$\sup_{B(w,3\bar r)} u < 1 \qquad \text{dla} \qquad \bar r := r/\bar c < 1. \tag{21}$$

Korzystając z oszacowania (6.4) z dowodu lematu 1.3 dostajemy górne oszacowanie (6.7) na miarę $\mu(\partial\Omega\cap B(w,\bar r))$ w terminach funkcji modularnych potęg gradientu $|\nabla u|$:

$$\mu(\partial\Omega\cap B(w,\bar r)) \le C\bar r^{\frac{n}{p^+}-1}\max\left\{\left(\int_{B(w,2\bar r)} |\nabla u|^{p(x)}dx\right)^{\frac{p^+-1}{p^-}}, \left(\int_{B(w,2\bar r)} |\nabla u|^{p(x)}dx\right)^{\frac{p^--1}{p^+}}\right\}. \tag{22}$$

Nierówność typu Caccioppoli (lemat 6.1 w [AL]) zastosowana w połączeniu z (21) daje oszacowanie

$$\int_{B(w,2\bar r)} |\nabla u|^{p(x)}dx \le C(p^+,n)\,\bar r^{n-p^+}\,\big(\sup_{B(w,3\bar r)} u\big)^{p^-}. \tag{23}$$

To oszacowanie wykorzystane w (22) wraz z (21) daje pierwszą tezę, (19), twierdzenia 6.3.

Dolne oszacowanie (20) wymaga bardziej złożonego dowodu. Zaczynamy od znalezienia pomocniczej funkcji h będącej rozwiązaniem zagadnienia $p(\cdot)$-Dirichleta na kuli $B(w,\tilde r)$ z danymi brzegowymi u (promień $\tilde r := r/\tilde c$ dla $\tilde c$ wyznaczonej w dowodzie). Korzystając z oszacowania Harnacka dla h (lemat 3.1 w [AL]) oraz oszacowania oscylacji u (lemat 3.6 w [AL]) dostajemy oszacowanie (6.11):

$$h(x) - u(x) \ge \beta \sup_{B(w,\tilde r/2)} u - \tilde r, \tag{24}$$

dla $x \in B(w,t\tilde r)$, gdzie t jest odpowiednio małe a stała β zależy od $n, p^-, p^+, c_{log}, c_H, \sup_{B(w,r)\cap\Omega} u$ oraz parametrów obszaru c_0, r_0. Dzięki tej nierówności otrzymujemy, że funkcja

$$\psi := \min_{B(w,\tilde r)}\left\{h - u, \max\left\{0, \beta\sup_{B(w,\tilde r/2)} u - \tilde r\right\}\right\} \tag{25}$$

jest nieujemna w $B(w,\tilde r)$ oraz należy do $W_0^{1,p(\cdot)}(B(w,\tilde r))$. A zatem ψ jest funkcją testującą dla funkcji $p(\cdot)$-harmonicznej h. Ta obserwacja w połączeniu z definicją miary μ w (18) oraz wnioskiem z monotoniczności operatora $|\nabla u|^{p(\cdot)-2}\nabla u$ pozwala zaobserwować, że (szczegóły oszacowania na stronie 32 w [AL])

$$\frac{1}{2^{p^+-1}}\int_{\{\nabla\Psi\neq 0\}\cap B(w,\tilde r)} (|\nabla h| + |\nabla u|)^{p(x)-2}\,|\nabla h - \nabla u|^2dx = \int_{B(w,\tilde r)} \psi d\mu \le \max\{0, \beta M(\tilde r) - \tilde r\}\mu(B(w,\tilde r)).$$

Powyższa nierówność w połączeniu z nierównością [AL, (6.14)] wynikającą wprost z definicji ψ pozwala nam wywnioskować nierówność [AL, (6.13)]:

$$\int_{B(w,\tilde{r})} |\nabla\psi|^{p(x)}dx \leq 2^{p^+-1}\max\{0, \beta \sup_{B(w,\tilde{r}/2)} u - \tilde{r}\}\mu(\partial\Omega \cap B(w,\tilde{r})). \tag{26}$$

W celu pokazania oszacowania (20) musimy oszacować lewą stronę powyższej nierówności z dołu poprzez funkcję modularną $\varrho_{L^{p(\cdot)}(B(w,\tilde{r}))}(\psi)$, której dolne oszacowanie zależy od $\sup_{B(w,\tilde{r})\cap\Omega} u$. W rezultacie udowodnimy oszacowanie [AL, (6.18)], z którego wyniknie (20). Aby uzyskać jak najlepsze oszacowania z dołu na $\int_{B(w,\tilde{r})} |\nabla\psi|^{p(x)}dx$, chcemy uniknąć stosowania niejednorodnych modularnych nierówności Poincaré-Sobolewa (podobnych do (7) z rozdziału 1.3). Stosujemy więc jednorodną normową nierówność [AL, (6.17)], która w połączeniu z własnością (4) dla norm i funkcji modularnych, vide oszacowania [AL, (6.15)-(6.16)], daje nam nierówność [AL, (6.17)]. Do oszacowania prawej strony tejże nierówności ponownie wykorzystujemy analizę podobną do (6.15) i (6.16).

Twierdzenie 6.3 wraz z oszacowaniem Carlesona daje nam słaby warunek podwajania dla miar $p(\cdot)$-harmonicznych, wniosek 6.5 w [AL]. Jest to jednak pierwszy wynik tego typu w literaturze.

1.4.3 Równania ze zmiennym wykładnikiem na nieograniczonych obszarach: twierdzenia Phragména–Lindelöfa i Liouville'a, wyniki z prac [A] i [AG]

Zachowanie rozwiązań oraz pod- i nadrozwiązań równań eliptycznych na obszarach nieograniczonych (w tym na całej przestrzeni) jest jednym z klasycznych zagadnień badanych dla równań z laplasjanem i p-laplasjanem. W kontekście tego drugiego operatora Lindqvist [125] udowodnił następujące twierdzenie (twierdzenie 4.6 w [125]):

Niech u będzie funkcją p-podharmoniczną w półprzestrzeni $\mathbb{R}^n_+$ oraz załóżmy, że

$$\limsup_{x\to\partial\mathbb{R}^n_+} u(x) \leq 0.$$

Wówczas, albo $u \leq 0$ w $\mathbb{R}^n_+$, albo

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{\sup_{\{x\in\mathbb{R}^n_+ \,:\, |x|=R\}} u(x)}{R} > 0. \tag{27}$$

Analogiczny wynik dla funkcji subharmonicznych w $\mathbb{R}^2$ został udowodniony przez Phragména–Lindelöfa [158] nadając nazwę klasie twierdzeń opisujących asymptotyczne zachowania rozwiązań na nieograniczonych obszarach. Związane z tym zagadnieniem są tzw. zasady maksimum na nieograniczonych obszarach, np.: Vitolo [170], Jin–Lancaster [103, 104].

Zagadnienia powyższego typu nie były badane dla równań ze zmiennym wykładnikiem. Dlatego, jednym z celów artykułu [A] było zainicjowanie badań w kierunku zagadnień na obszarach nieograniczonych dla równań ze zmiennym wykładnikiem i w dalszej perspektywie, ogólniejszych o niestandardowym wzroście. Metody dostępne w literaturze okazały się niewystarczające do naszych celów: podejście z pracy Lindqvista [125] jest oparte o własności n-harmonicznych miar i zasadę porównawczą zastosowaną do przeskalowanych rozwiązań (dowód reguły 4.3 w [125]). Żadne z tych narzędzi nie jest dostępne dla równań z operatorem typu (8) (patrz dyskusja następująca po (8) i (9)). Dodatkowo, wynik Lindqvista jest ograniczony do obszarów typu: półprzestrzeń i $\mathbb{R}^n \setminus H^q$ dla q-wymiarowej hiperpłaszczyzny H^q. Inne podejście, oparte o oszacowania typu de Giorgi (lematy 2.4 i 2.8 w [80]) dla podrozwiązań, zaproponował Granlund [80]. Dla (pod)rozwiązań równań z $\Delta_{p(\cdot)}$ analogiczne oszacowania mają postać niejednorodną, która przy iteracji nierówności nie skutkuje potrzebnymi oszacowaniami jak to jest w dowodzie twierdzenia 1.5 w [80], np.: oszacowanie supremum w twierdzeniu 4.7 w [89] i nierówność typu Poincaré (7). Kolejną metodę badania interesującego nas zagadnienia wykorzystali Jin–Lancaster [103]. Ich wyniki jednak wymagają założenia C^2-regularności rozwiązań i współczynników rozważanych równań, nie mogą być zatem zastosowane do typowych rozwiązań równań typu p-harmonicznego lub $p(\cdot)$-harmonicznego, które są klasy $C^{1,\alpha}$.

Głównym wynikiem [A] jest poniższe twierdzenie 1.7 (twierdzenie 3.3 w pracy), w którym sformułowałem ogólny warunek, uwzględniający różne aspekty geometrii nieograniczonych obszarów, przy którym zachodzi alternatywa Phragména–Lindelöfa dla podrozwiązań równania (8) (również dla podrozwiązań silnego $p(\cdot)$-laplasjanu, patrz uwaga 3.4 w [A]). Zastosowania obejmują: półprzestrzenie (wniosek 3.5 w [A]), obszary kątowe (wniosek 3.7 w [A]) i obszary nazwane zwężającymi się w nieskończoności (wniosek 3.10 w [A]).

Wpływ geometrii obszaru na zachowanie rowiązania, w szczególności porowatość obszaru, opisujemy funkcją τ, zdefiniowaną dla $R > 1$ i ustalonego $c \geq 0$ (rozdział 3.1 w [A]):

$$\tau(|x|) = \tau_R^c(|x|) := R^{-\fint_0^{|x|} \frac{\lambda_{n-1}(\Omega\cap S_t)}{\lambda_{n-1}(S_t)} dt} \quad \text{dla } |x| \geq c, \tag{28}$$

oraz $\tau_R^c(|x|) := \tau_R^c(c)$ dla $|x| < c$. Rozważenie takiej funkcji zostało zainspirowane pracą Miklyukova [145]. Przez λ_{n-1} oznaczyliśmy $(n-1)$-wymiarową miarę Lebesgue'a, a przez S_t sferę o środku w 0 i promieniu t. W przykładzie 2.3 w [A] wyliczono wartości funkcji τ dla różnych obszarów, np.:

- dla półprzestrzeni $\mathbb{R}^n_+$ zachodzi $\frac{\lambda_{n-1}(\Omega\cap S_t)}{\lambda_{n-1}(S_t)} = \frac{1}{2}$ i stąd $\tau(|x|) = R^{-\frac{1}{2}}$ dla wszystkich $x \in \Omega$; ponadto $c = 0$,
- dla obszaru kątowego z kątem rozwarcia α zachodzi $\tau(|x|) = R^{-\alpha}$,
- dla stożka o kącie $0 < \alpha \leq \pi$ zachodzi $\tau(|x|) = R^{\frac{1}{2}(1-\cos\frac{\alpha}{2})}$.

Kolejny przykład rozważany w pracy to nieograniczony pas w $\mathbb{R}^2$. Rozdział 3.1 w [A] zawiera również oszacowania na τ i $\nabla\tau$, patrz (3.3) i (3.4)-(3.6) w [A].

Związane z funkcją τ są funkcje $\rho_\Omega^-(|x|)$ oraz $\rho_\Omega^+(|x|)$ zdefiniowane następująco:

$$\rho_\Omega^-(|x|) := \operatorname*{ess\,inf}_{0\leq t\leq|x|} \frac{\lambda_{n-1}(\Omega\cap S_t)}{\lambda_{n-1}(S_t)} \quad \text{oraz} \quad \rho_\Omega^+(|x|) := \operatorname*{ess\,sup}_{0\leq t\leq|x|} \frac{\lambda_{n-1}(\Omega\cap S_t)}{\lambda_{n-1}(S_t)}.$$

Wyrażenia ρ_Ω^- i ρ_Ω^- można interpretować, odpowiednio, jako funkcje dolnej i górnej gęstości $(n-1)$-wymiarowych cięć obszaru Ω sferami o promieniu t.

W badanym zagadnieniu ważną rolę odgrywa zachowanie się zmiennego wykładnika $p(x)$ dla $|x| \to \infty$. Wprowadzamy zatem następujące założenia na asymptotykę wykładnika $p(\cdot)$ (nierówność (3.6) w [A]):

Załóżmy, że $p : \Omega \to (1, \infty)$ jest zmiennym wykładnikiem ograniczonym i log-hölderowsko ciągłym oraz, że $p^- \neq n-1$. Ponieważ najistotniejsze jest zachowanie się wykładnika dla dużych $|x|$, więc bez utraty ogólności zakładamy, że $p \equiv const$ na pewnej kuli $B(c)$, gdzie c jest stałą związaną z funkcją τ (przedyskutowaną w rozdziale 3.1 [A] i powyżej).

Co do szybkości zaniku wykładnika, to przyjmujemy, że ∇p spełnia:

$$|\nabla p(x)| \leq c_p|x|^{-\alpha_p} \quad \text{dla } |x| > c, \quad x \in \Omega, \tag{29}$$

dla pewnych ustalonych $c_p > 0$ oraz $0 \leq \alpha_p < \infty$, gdzie $\alpha_p \neq \frac{n}{p^-}$.

Twierdzenie 1.7 (twierdzenie 3.3 w [A]). *Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest nieograniczonym obszarem a wykładnik $p(\cdot)$ spełnia powyższe założenia, w tym (29).*

Niech u będzie $p(\cdot)$-podrozwiązaniem takim, że $\lim u(x) \le 0$ dla $\Omega \ni x \to \partial\Omega$. Oznaczmy

$$m_R := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega \cap B_R} \tau(|x|)(u_+(x))^{p(x)}.$$

Wówczas, albo $u \le 0$ w Ω albo

$$\liminf_{R \to \infty} \frac{m_R}{R^\gamma} > 0, \tag{30}$$

dla γ takiego, że $\lim_{R\to\infty} \Gamma(R) = 0$, gdzie

$$\Gamma(R) := R^{1+\gamma} \Bigg(R^{n-p^-\alpha_p} + R^{\frac{1}{2}p^+\left(\rho_\Omega^+(2R) - \rho_\Omega^-(2R)\right) + n - p^-} \tag{31}$$
$$+ \max\left\{ \mathrm{cap}_{p^+}^{p^-/p^+}(\overline{\Omega \cap B_R}, \Omega \cap B_{2R}), \mathrm{cap}_{p^+}(\overline{\Omega \cap B_R}, \Omega \cap B_{2R}) \right\} R^{n - n\frac{p^-}{p^+}} \Bigg).$$

Funkcja $\Gamma(R)$ składa się z trzech składników, z których każdy opisuje inny parametr wpływający na zachowanie funkcji u w Ω (w kolejności wystąpienia w (31)):

(a) szybkość zaniku wykładnika $p(\cdot)$,

(b) porowatość obszaru Ω,

(c) względną wielkość obszaru Ω zawartego w pierścieniu $B_{2R} \setminus B_R$ wyrażoną w języku wariacyjnej pojemności (wzory (2.4) i (2.5) w [A]).

Dowód twierdzenia 1.7 opiera się na wykorzystaniu funkcji:

$$\phi(x) = \eta(x)^{p(x)} \tau(|x|) u_+(x), \quad \eta \in C_0^\infty(\Omega \cap B_{2R})$$

jako testującej w słabym sformułowaniu nierówności $p(\cdot)$-harmonicznej dla podrozwiązania (wzór (2.7) w [A]). W wyniku obliczeń otrzymujemy nierówność [A, (3.11)]. Całki występujące po prawej stronie tego oszacowania oznaczamy przez I_0, I_1 oraz I_2 odpowiednio i szacujemy oddzielnie (3.12)-(3.14) w [A]. W rezultacie otrzymujemy nierówność [A, (3.15)]:

$$\begin{aligned} c(p^-, p^+) \int_{\Omega \cap B_{2R}} |\nabla u_+|^{p(x)} \tau \eta^{p(x)} \le & \int_{\Omega \cap B_{2R}} u_+^{p(x)} |\nabla p|^{p(x)} \tau \eta^{\frac{p(x)}{2}} \\ & + \int_{\Omega \cap B_{2R}} u_+^{p(x)} \tau |\nabla \eta|^{p(x)} \\ & + \int_{\Omega \cap B_{2R}} u_+^{p(x)} \tau \left(\frac{|\nabla \tau|}{\tau} \right)^{p(x)} \eta^{p(x)}. \end{aligned} \tag{32}$$

Całki po prawej stronie oszacowania odpowiadają powyższym własnościom (a), (b) i (c). Wykorzystując założenia na $p(\cdot)$, ∇p, definicję i własności $\tau, \nabla\tau$ otrzymujemy nierówność [A, (3.22)]:

$$\int_{\Omega \cap B_R} |\nabla u_+|^{p(x)} \le c \frac{\mathrm{m}_{2R}}{R^\gamma} \Gamma(R), \tag{33}$$

gdzie $\Gamma(R)$ a priori przyjmuje cztery możliwe postaci w zależności od α_p i p^- (patrz (3.23) w [A]). Dalej dowód przebiega nie wprost. Ponadto, pokazujemy, że dla $\alpha_p = \frac{n}{p^-}$ lub $p^- = n - 1$

otrzymujemy albo sprzeczność (dla $\gamma > -1$) albo trywialną tezę wyeliminowaną z rozważań przez założenia na $p(\cdot)$ poczynione w dyskusji bezpośrednio poprzedzającej sformułowanie twierdzenia 1.7.

W rozdziale 3.3 pracy ilustrujemy powyższe twierdzenie przykładami obszarów w $\mathbb{R}^n$, znajdując warunki na α_p, a więc na szybkość zaniku ∇p, które dają asymptotyczny opis zachowania podrozwiązania dla dużych $|x|$. W szczególnych przypadkach, gdy p jest stałe, częściowo otrzymujemy wyniki znane dla p-laplasjanów, np.: dla półprzestrzeni w $\mathbb{R}^n$ odzyskujemy wynik Lindqvista [125], wniosek [A, 3.5]. Co więcej dla przypadku obszaru kątowego w $\mathbb{R}^2$ wniosek [A, 3.7] jest nowy również dla stałego p. Dyskusję przykładów ilustrujemy równoważnymi sformułowaniami wniosków (uwagi 3.6, 3.9 w [A]).

W drugiej części pracy [A] dowodzimy twierdzenie Phragména–Lindelöfa dla podrozwiązań klasy niejednorodnych równań (A, B)-harmonicznych, postaci ((4.1) w pracy):

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(\cdot)-2}\nabla u) = f(x, u, \nabla u), \tag{34}$$

dla $f \not\equiv 0$, $f(\cdot, t, \xi) \in L^1_{loc}(\Omega)$ dla ustalonych $(t, \xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ oraz takiej, że f spełnia w Ω warunek wzrostu [A, 4.3] z parametrem $q > n$ i zmiennym wykładnikiem α:

$$u(x)f(x, u(x), \nabla u(x)) \geq c|u(x)|^{\alpha(x)}\left(1 + |\nabla u(x)|^{p^+\frac{p^- -\alpha^+}{\alpha^+}\frac{q}{n-1}}\right). \tag{35}$$

W twierdzeniu 4.3 w [A] dowodzimy, że dla nieograniczonego obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, przy założeniach wzrostu na f jak w (35) i dla podrozwiązania u równania (34) z $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$ zachodzi alternatywa: albo $u \equiv 0$ albo

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{\operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega\cap B_R}(1 + |u(x)|)}{R^\gamma} > 0,$$

dla każdego γ spełniającego warunek

$$\gamma \leq \frac{(q-n)\frac{p^-}{p^+} + q(\frac{p^-}{\delta} - 1)}{q(\frac{p^+}{\delta} - \frac{q-1}{q}\alpha^+)}, \tag{36}$$

przy dowolnym ustalonym $1 \leq \delta < \frac{p^-}{\alpha^+}$.

Twierdzenie 4.3 w [A] jest pierwszym przykładem tego typu twierdzeń dla niejednorodnych równań z $p(\cdot)$-laplasjanem, uogólnia twierdzenie 4.6 z [125] dla stałego p, patrz wniosek 4.4 w [A].

W szczególnym przypadku $n = p = 2$ i $\alpha^+ > \frac{2}{q-1}$ z twierdzenia 4.3 wynika alternatywa Phragména–Lindelöfa dla $\gamma = 1$ a więc jak dla klasycznego przypadku laplasjanu w (27). Wówczas równanie (34) i warunek (4.3) przyjmują postać:

$$\begin{aligned}
&\Delta u = f(x, u, \nabla u),\\
&u(x)f(x, u(x), \nabla u(x)) \geq c|u(x)|^{\alpha(x)}\left(1 + |\nabla u(x)|^{2q\frac{2-\alpha^+}{\alpha^+}}\right).
\end{aligned}$$

Wynik ten jest nowy również dla równań z laplasjanem.

W pracy [AG] kontynuujemy badania nad równaniami z niestandardowym wzrostem na nieograniczonych obszarach dowodząc twierdzeń typu Liouville'a dla następujących funkcji (patrz poniższe definicje 1.4 i 1.5):

(1) rozwiązań równań $\mathcal{A}$-harmonicznych (rozdział 3 w [AG]),

(2) rozwiązań równań $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-harmonicznych (rozdział 4 w [AG]),

(3) nadrozwiązań równań $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-harmonicznych; badamy również zagadnienia nieistnienia rozwiązań (rozdział 4.1 w [AG]).

Twierdzenia Liouville'a dla równań $\mathcal{A}$-harmonicznych ze standardowym wzrostem są dobrze opisane w literaturze, np.: w pracach Caristi–Mitidieri [50] oraz Mitidieri–Pokhozaev [146] (rozdział 2) dla równań obejmujących m.in. operator średniej krzywizny oraz zdegenerowane równania kwazieliptyczne, jak np.: równanie p-harmoniczne. Dalsze badania w tym obszarze dla równań i układów równań obejmują wyniki np.: D'Ambrosio [56], D'Ambrosio–Mitidieri [57]-[59], Filippucci [71] i Serrin [165]. Na rozmaitościach riemannowskich twierdzenie Liouville'a dla $\mathcal{A}$-nadrozwiązań jest równoważne p-paraboliczności rozmaitości (twierdzenie 5.4 w Holopainen–Pankka [96], oraz dyskusja w rozdziale 6 pracy [6]).

Okazuje się, że w momencie pisania pracy [AG] literatura zagadnień typu Liouville'a dla równań o wzroście typu $p(\cdot)$ składała się z jednej pracy Wanga [172] i kilku prac o tematyce pokrewnej, np.: Pucci-Zhang [160] dla zagadnień (nie)istnienia rozwiązań dla równań $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-harmonicznych o specjalnej strukturze (patrz $(\mathcal{E}_\lambda)$ oraz $(\mathcal{A}_1)$ w [160]).

Praca [AG] jest więc, wedle naszej wiedzy, pierwszą pracą, w której zajęto się problematyką twierdzeń Liouville'a dla równań $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-harmonicznych z niestandardowym wzrostem.

Przedstawimy teraz podstawowe definicje i wyniki pracy [AG].

Definicja 1.4 (definicja 2.2 w [AG])**.** Niech $p : \Omega \to [1, \infty]$ będzie zmiennym wykładnikiem. Powiemy, że funkcja typu Carathéodory'ego $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest o *niestandardowym wzroście* (lub, że jest o *wzroście typu* $p(\cdot)$, jeśli istnieją funkcje a, b spełniające następujące warunki dla dowolnego $(x, t, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$:

(1) $\langle \mathcal{A}(x, t, \xi), \xi \rangle \geq a(x)|\xi|^{p(x)}$, dla mierzalnej funkcji $a : \Omega \to \mathbb{R}$ ograniczonej od dołu przez $a_- > 0$.

(2) $|\mathcal{A}(x, t, \xi)| \leq b(x)|\xi|^{p(x)-1}$, dla mierzalnej funkcji $b : \Omega \to \mathbb{R}$ takiej, że $a \leq b$ w obszarze Ω i ograniczonej z góry przez $b^+ < \infty$.

Przykładem operator $\mathcal{A}$ spełniającego definicję 1.4 jest $\mathcal{A} = \Delta_{p(\cdot)} := |\xi|^{p(x)-2}\xi$. Dla stałego p, operatory $\mathcal{A}$-harmoniczne i związane z nimi równania są fundamentalne w teorii potencjału, np.: Heinonen–Kilpeläinen–Martio [93]. Zauważmy, że w przeciwieństwie do klasycznej teorii, nie wymagamy monotoniczności operatora $\mathcal{A}$ ani jego jednorodności (dla porównania: (3.6) i (3.7) w rozdziale 3 w [93]). Dla równań ze zmiennym wykładnikiem ta ostatnia własność nie zachodzi dla prototypicznego $\mathcal{A} = \Delta_{p(\cdot)}$.

Definicja 1.5 (definicja 2.3 w [AG])**.** Załóżmy, że $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i $\mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ są funkcjami typu Carathéodory'ego, $\mathcal{A}$ spełnia definicję 1.4 oraz $|\mathcal{B}(x, t, \xi)| \leq c(x)(1 + |\xi|^{p(x)-1})$ dla pewnej funkcji mierzalnej $c : \Omega \to \mathbb{R}$ ograniczonej z góry, $\sup_\Omega c = c^+ < \infty$.

Funkcję $u \in W^{1,p(\cdot)}_{loc}(\Omega)$ nazwiemy $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-(pod)rozwiązaniem, jeśli

$$\int_\Omega \langle \mathcal{A}(x, u, \nabla u), \nabla \phi \rangle \, dx \, (\leq) = \int_\Omega \mathcal{B}(x, u, \nabla u) \phi \, dx \tag{37}$$

dla każdego (nieujemnego) $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Podobnie definiujemy $(\mathcal{A},\mathcal{B})$*-nadrozwiązania.* Ciągłe, słabe rozwiązania nazywamy *funkcjami* $(\mathcal{A},\mathcal{B})$*–harmonicznymi.* Jeśli $\mathcal{B}\equiv 0$, to wtedy mówimy o równaniach $\mathcal{A}$-harmonicznych.

Dyskusję wyników rozpoczniemy od obserwacji, że w przeciwieństwie do zagadnień dla stałego p, nawet w prostym, jednowymiarowym przypadku twierdzenie Liouville'a nie musi zachodzić dla funkcji $p(\cdot)$-harmonicznych (przykład 3.1 w [AG]). Co więcej, naturalna metoda dowodu dla równań p-harmonicznych, wynikająca z nierówności Harnacka, nie może być zastosowana dla równań o niestandardowym wzroście z powodu niejednorodności takich nierówności (np.: oszacowanie (14) dyskutowane w rozdziale 1.4.1). Używając nierówności typu Caccioppoli dla równań $\mathcal{A}$-harmonicznych (lemat 3.1) pokazujemy serię trzech twierdzeń (twierdzenia 3.2, 3.3 i 3.4 w pracy), z których pierwsze dwa orzekają, że jeśli istnieje rosnący i nieograniczony ciąg promieni $\{R_k\}_{k=1}^{\infty}$, taki że wykładnik $p(\cdot)$ jest odpowiednio duży na pierścieniach $B_{2R_k}\setminus B_{R_k}$, to funkcja $\mathcal{A}$-harmoniczna u określona na $\mathbb{R}^n$ jest stała. Dokładniej, zachodzą następujące stwierdzenia:

- (twierdzenie 3.2) Jeśli istnieje $\delta>0$, taka, że $p^-_{B_{2R_k}\setminus B_{R_k}}\geq n+\delta$ dla wszystkich k, to ograniczona funkcja $\mathcal{A}$-harmoniczna u w $\mathbb{R}^n$ jest stała.
- (twierdzenie 3.3) Jeśli istnieje $1\leq q\leq p^+<\infty$, taka, że $p^-_{B_{2R_k}\setminus B_{R_k}}=q$ dla wszystkich k, to funkcja $\mathcal{A}$-harmoniczna u w $\mathbb{R}^n$ jest stała o ile $\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^{p(x)}<\infty$.

  Jeśli dodatkowo założymy, że $q\geq n$ dla wszystkich k, to teza zachodzi dla ograniczonych funkcji $\mathcal{A}$-harmonicznych, [AG, wniosek 1].

Trzecie z twierdzeń (twierdzenie 3.4) orzeka, że dla ograniczonego wykładnika z $p^-<n$ zachodzi teza twierdzenia Liouville'a dla ograniczonych $\mathcal{A}$-harmonicznych u, o ile u zanika odpowiednio szybko na pierścieniach, tj. $u_k:=u|_{B_{2R_k}\setminus B_{R_k}}$ spełnia

$$u_k\leq\frac{c}{R_k^{\alpha}}\quad k=1,2,\ldots,$$

dla pewnego $\alpha>\frac{n}{p^-}-1$ oraz $c>0$ i ciągu promieni $\{R_k\}_{k=1}^{\infty}$ jak powyżej.

Dodatkowo, pokazujemy że oszacowanie Caccioppoli (lemat 3.1) skutkuje również twierdzeniem typu Phragména–Lindelöfa (wniosek 2 i uwaga 1), tzn. pokazujemy (przy powyższej notacji), że jeśli

$$|u(x)|\leq C|x|^{\alpha}\quad\text{dla pewnego } C>0 \text{ oraz } \alpha<\frac{p^-}{p^+}-\frac{n}{p^+},$$

dla $x\in B_{2R_k}\setminus B_{R_k}$, to u jest stałą funkcją. W szczególnym przypadku, gdy $p=p^+=p^-$, funkcja u jest niestała oraz $\alpha<1-\frac{n}{p}$ otrzymujemy, że $\liminf_{R\to\infty}\frac{|u(x)|}{|x|^{\alpha}}>C$.

Rozdział 4 pracy [AG] poświęcony jest twierdzeniom Liouville'a dla równań i nierówności $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-harmonicznych dla $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ jak w definicjach 1.4 i 1.5. Dowodzimy oszacowań Caccioppoli (lemat 4.1), z których wywodzimy następujący wynik:

Twierdzenie 1.8 (twierdzenie 4.2 w [AG])**.** *Załóżmy, że istnieją takie* $\delta>0$ *i* $\gamma<0$ *oraz nieograniczony, rosnący ciąg* $\{R_k\}_{k=1}^{\infty}$ *taki, że*

$$p^-_{B_{2R_k}\setminus B_{R_k}}\geq n+\delta+1-\gamma.$$

Dodatkowo załóżmy, że operator $\mathcal{B}(\cdot,u(\cdot),\nabla u(\cdot))u(\cdot)^{\gamma}\in L^1(\mathbb{R}^n)$*, jako funkcja* $x\in\mathbb{R}^n$ *oraz, że* $\mathcal{B}$ *spełnia następujące równanie:*

$$\lim_{R\to\infty}\int_{B_R}\mathcal{B}(x,u(x),\nabla u(x))u(x)^{\gamma}dx=0.$$

Wówczas, każda dodatnia, ograniczona funkcja $(\mathcal{A},\mathcal{B})$*-harmoniczna* u *w* $\mathbb{R}^n$ *jest stała.*

Następnie badamy (słabe) nadrozwiązania w $\mathbb{R}^n$ równań z $\mathcal{A}$ o wzroście typu $p(\cdot)$ oraz $\mathcal{B} = f(u)$ dla ciągłych nieujemnych $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ (nierówność (8) w [AG]):

$$\mathrm{div}\mathcal{A}(x, u, \nabla u) \geq f(u). \tag{38}$$

Typowym przykładem jest $f(t) = ct^q$ dla $c, q > 0$ badane np.: w pracach [58, 59] oraz [71]. Dla takich nadrozwiązań udowadniamy, że jeśli $p^- > n$, a u jest ograniczonym nadrozwiązaniem oraz $f(t) = 0$ dla dokładnie jednej wartości t, to u jest stałą funkcją (twierdzenie 4.3). Wynik częściowo uogólnia twierdzenie 3.13 z pracy D'Ambrosio [56] oraz twierdzenie 3.1 z pracy D'Ambrosio–Mitidieri [59], patrz uwaga 3 w [AG].

Twierdzenie skutkuje następującymi wnioskami o nieistnieniu ograniczonych nadrozwiązań przy założeniu $p^- > n$:

- (wniosek 3) Jeśli f jest funkcją ściśle wypukłą taką, że $f(t) \neq 0$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$, to nie istnieje ograniczone nadrozwiązanie (38).
- (wniosek 4) Jeśli f jest funkcją ściśle rosnącą taką, że $f(0) \neq 0$, to nie istnieje ograniczone nadrozwiązanie (38).

Powyższe wnioski odpowiadają twierdzeniu 3.4 w D'Ambrosio–Mitidieri [59].

Ostatni wynik pracy, to twierdzenie Liouville'a dla ograniczonych nadrozwiązań równań typu Riccatiego (twierdzenie 4.4 w [AG]):

$$\mathrm{div}\mathcal{A}(x, \nabla u) = f(|\nabla u|),$$

dla $p^- > n$ oraz ciągłej funkcji $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ spełniającej warunek

$$c(x)|\nabla u|^{q(x)} \leq f(|\nabla u|) \leq d(x)(1 + |\nabla u|^{p(x)-1}),$$

dla x z danego obszaru, zmiennego wykładnika $q(\cdot)$, mierzalnych i ograniczonych funkcji $0 < c_- \leq c \leq c^+$, $0 < d_- \leq d \leq d^+$ takich że $c^+ < d_-$. Podobne zagadnienie było badane przez Filippucci (twierdzenie 3.1 w [71]) dla $f(x, z, \xi) \geq a(x)z^q|\xi|^\theta$ i $q > 0$ oraz operatora $\mathcal{A}(x, u, \nabla u) = g(x)h(u)A(|\nabla u|)\nabla u$.

1.4.4 Hölderowska ciągłość kwaziminimów i rozwiązań równań (A, B)-harmonicznych o niestandardowym wzroście, wyniki pracy [AT]

We rozdziale 1.3 poświęconym omówieniu zagadnienia wspomnieliśmy pokrótce związki między rachunkiem wariacyjnym a równaniami o niestandardowym wzroście oraz zastosowaniami w przetwarzaniu obrazu. Celem tego rozdziału jest pogłębienie opisu metod wariacyjnych w teorii równań ze zmiennym wykładnikiem.

Rozważmy ograniczony obszar $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dla $n \geq 1$ oraz funkcje typu Carathéodory'ego $f = f(x, t, p) : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Zdefiniujmy całkę wariacyjną (funkcjonał energii)

$$F_\Omega(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))dx. \tag{39}$$

Powiemy, że $u \in W^{1,p(\cdot)}_{loc}(\Omega, \mathbb{R})$ jest *K-kwaziminimum funkcjonału energii* F_Ω dla pewnego $K \geq 1$, jeśli na każdym otwartym zbiorze $\Omega' \Subset \Omega$ zachodzi

$$F_{\Omega'}(u) \leq K F_{\Omega'}(v) \quad \text{dla każdej } v \in W^{1,p(\cdot)}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}) \text{ spełniającej } u - v \in W^{1,p(\cdot)}_0(\Omega', \mathbb{R}).$$

Równoważnie, u jest K-kwaziminimum, jeśli dla każdej funkcji $\phi \in W^{1,p(\cdot)}_{loc}(\Omega, \mathbb{R})$ z nośnikiem $\operatorname{supp}\phi \Subset \Omega$ zachodzi $F_{\operatorname{supp}\phi}(u) \leq K F_{\operatorname{supp}\phi}(u+\phi)$. Dla $K = 1$ otrzymujemy definicję lokalnego minimum.

Atrakcyjność i zainteresowanie zawdzięczają kwaziminima przykładom funkcji (i przekształceń dla kwaziminimów o wartościach wektorowych), które nie są minimami, ale są kwaziminimami dzięki czemu stosują się do nich ogólne wyniki teorii kwaziminimów, np.: rozwiązania równań eliptycznych i układów równań (A, B)-harmonicznych (szczegółowo opisane we wzorach (2.7)-(2.8) oraz (2.9)-(2.13) w pracy Giaquinta–Giusti [77]), przekształcenia kwaziregularne (twierdzenie 2.4 w [77]), jak również minima dla zagadnień z przeszkodą (przykład 6.4 w rozdziale 6, Giusti [79]) czy rozwiązania równań typu Riccatiego, Martio [138]. Pojęcie kwaziminimów jest też badane w kontekście przestrzeni metrycznych, np.: Kinnunen–Martio [110], Kinnunen–Shanmugalingam [111] oraz, w ostatnich latach, dla równań parabolicznych, np.: Parviainen [155], Fujishima–Habermann–Kinnunen–Masson [73], Masson–Parviainen [142]. Dalsze ciekawe własności i przykłady kwaziminimów opisane są np.: w Björn–Björn–Marola [43].

Na potrzeby tego rozdziału wspomnijmy również, że w odróżnieniu od minimów p-tej energii Dirichleta ($f(x, u, \nabla u) = |\nabla u|^p$ w (39)), zagadnienie Dirichleta dla kwaziminimów analogicznych energii nie ma jednoznaczności, nie zachodzą również zasady porównawcze. Z drugiej jednak strony, kwaziminima dobrze zachowują się ze względu na zaburzenia, np.: jeśli u jest kwaziminimum, to $u + f$ również, o ile $|\nabla f| \leq c|\nabla u|$ (twierdzenie 1.1 w [43]).

W pracy [AT] badaliśmy kwaziminima całek (39) dla f o ogólnym wzroście postaci (wzory (5) i (6) w [AT])

$$|z|^{p(x)} - b(x)|y|^{r(x)} - g(x) \leq f(x, y, z) \leq \mu|z|^{p(x)} + b(x)|y|^{r(x)} + g(x), \tag{40}$$

przy następujących założeniach:

$$\begin{aligned}
&\mu \geq 1, \quad p(x) \leq r(x) \leq p^*(x) \text{ dla } x \in \Omega,\\
&b \geq 0 \text{ oraz } b \in L^{\sigma(\cdot)}(\Omega) \text{ dla ciągłego } \sigma, \text{ takiego, że } \sigma(x) > \frac{p^*(x)}{p^*(x) - r(x)} \text{ dla } x \in \Omega, \\
&g \geq 0, \text{ oraz } g \in L^t(\Omega), \text{ dla } t > \frac{n}{p^-}.
\end{aligned} \tag{41}$$

Wykładnik $p^*(\cdot) = \frac{p(\cdot)n}{n-p(\cdot)}$ oznacza sprzężony wykładnik Sobolewa dla $p(x) < n$ w Ω. Dodatkowo zakładamy, że $p(\cdot)$ jest ograniczonym log-hölderowsko ciągłym wykładnikiem z $\|\nabla p\|_{L^s(\Omega)} < \infty$ dla pewnego $s > n$ (np.: $p(\cdot)$ ograniczony i lipszycowsko ciągły).

Główne wyniki pracy [AT] to:

- lokalna hölderowska ciągłość kwaziminimów całek wariacyjnych F_Ω przy powyższych warunkach na f i dodatkowym założeniu, że $t > n$, [AT, twierdzenie 2]. Wykładnik hölderowskiej ciągłości α zależy od p^-, p^+, t oraz n ([AT, twierdzenie 2]),

- dowód, że słabe rozwiązania klasy równań (A, B)-harmonicznych przy poniższych warunkach wzrostu (44) są kwaziminimami, skąd wynika lokalna hölderowska ciągłość tych rozwiązań (twierdzenie 3 i wniosek 1 w [AT]).

Zanim omówimy dowód pierwszego z powyższych twierdzeń, porównajmy go do wcześniejszych wyników z teorii regularności kwaziminimów:

- dla funkcjonałów energii ze stałymi wykładnikami p i r w (40), hölderowska ciągłość została udowodniona np.: w rozdziale 7 książki Giusti [79].

Następnie, dla funkcjonałów energii ze zmiennymi wykładnikami p i r spełniającymi założenia (41) oraz

- dla $b = g = 0$, hölderowską ciągłość kwaziminimów pokazano w pracy Acerbi–Mingione [1],

- dla $b = g = const$ analogiczne wyniki zostały udowodnione przez Chiadò Piat–Coscia [52, twierdzenie 4.1] (przy założeniach (1.3) w [52]) oraz przez Fan-Zhao [67, twierdzenie 3.1] (przy założeniach (3.1) w [67]).

- dla $b = const$ oraz $g \in L^{s(\cdot)}$ dla $s(\cdot) > n/p(\cdot)$ hölderowską ciągłość kwaziminimów zbadano w pracy Fan-Zhao [68, twierdzenie 3.2].

Zatem nowość wyniku polega na zbadaniu przypadku, gdy oba współczynniki b i g są funkcjami całkowalnymi. W szczególności przejście od stałego lub ograniczonego b do $b = b(x)$ i całkowalnego $b \in L^{\sigma(\cdot)}$ wymaga rozwinięcia oszacowań de Giorgi na przypadek f w (41) (lemat 3 w [AT]) oraz oszacowań typu L^∞ na poziomicach kwaziminimów (twierdzenie 1 w [AT]). Również wyniki pomocnicze, np.: lematy 1 i 2 są nowe w literaturze w takiej ogólności.

Dowód twierdzenia jest rozwinięciem metody dowodowej z pracy [52]. Oszacowanie typu Caccioppoli [AT, lemat 3] pozwala na oszacowanie funkcji modularnych gradientu kwaziminimum u poprzez funkcje modularne u na poziomicach u zawartych w danej kuli o promieniu R:

$$A(k, R) := \{x \in \Omega : u(x) > k\} \cap B_R.$$

Nierówność Caccioppoli jest użyta w, kluczowym dla zastosowania metody de Giorgi, następującym oszacowaniu dla kwaziminmum u (twierdzenie 1 i nierówność (12) w [AT]):

$$\sup_{B_{R/2}} (u - k) \leq cR^{\frac{p^-}{p^+}} \left(\left(\frac{|A(k, R)|}{R^n} \right)^\beta \fint_{A(k,R)} \left| \frac{u - k}{R} \right|^{p(x)} dx + \frac{1}{R^{\frac{n}{t}}} \right)^{\frac{1}{p^+}}, \tag{42}$$

dla $\beta > 0$ spełniającego $\beta(1 + \beta - 1/t) = 1/n$, $t > n$ i stałej $c = c(n, p^-, p^+, s)$. W porównaniu do twierdzenia 1 z pracy Toivanen'a [168] prawa strona powyższej nierówności zależy od R^{p^-/p^+} i od ilorazu $|A(k, R)|/R^n$, co czyni oszacowanie dokładniejszym. W dowodzie (42) otrzymujemy najpierw oszacowanie dla $\sup u$ i poziomicy u dla $k = 0$ (strona 443 w [AT]). Przejście do $u - k$ wymaga użycia technicznych, ale niezbędnych wyników pomocniczych (lematy 1 i 2), które zostały udowodnione w addendum do artykułu. Dowodzimy w nich, że jeśli u jest kwaziminimum całki wariacyjnej F_Ω dla f jak w (40), to również jest kwaziminimum całki (7) w [AT], dodatkowo $u - k$ jest kwaziminimum całki (8) w [AT]. W dowodzie lokalnej hölderowskiej ciągłości u (twierdzenie 2), oszacowanie $\sup u$ przez oscylacje u (nierówność na dole strony 445 w [AT]), otrzymujemy poprzez wykorzystanie oszacowania ilorazu miary poziomicy $|A(k_\nu, R)|/R^n$ poprzez oscylacje kwaziminimum u na kulach B_{2R} (szczegóły: patrz lemat 5).

Zastosowania twierdzenia 2 omawiamy w rozdziale 4 pracy: drugim głównym wynikiem pracy jest dowód, że słabe rozwiązania następującej klasy równań (A, B)-harmonicznych są kwaziminimami funkcjonału energii zdefiniowanego poprzez współczynniki wzrostu operatorów A i B (patrz (31)-(32) w [AT]), skąd wynika lokalna hölderowska ciągłość tych rozwiązań (twierdzenie 3 i wniosek 1 w [AT]):

$$-\mathrm{div} A(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u), \tag{43}$$

dla $A : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i $B : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spełniających warunki wzrostu:

$$\begin{aligned} \langle A(x, u, \xi), \xi \rangle &\geq \mu |\xi|^{p(x)} - b(x)|u|^{\tilde{r}(x)} - f(x), \\ |A(x, u, \xi)| &\leq \mu |\xi|^{p(x)-1} + b(x)|u|^{\tilde{\sigma}(x)} + g(x), \\ |B(x, u, \xi)| &\leq \mu |\xi|^{\tilde{\tau}(x)} + b(x)|u|^{\tilde{\delta}(x)} + h(x). \end{aligned} \tag{44}$$

Zakładamy, że $\mu \geq 1$, $f \in L^t(\Omega)$, $g \in L^{tp'(\cdot)}(\Omega)$ oraz $h \in L^{tr'(\cdot)}(\Omega)$, $b \in L^{s(\cdot)}(\Omega)$, dla ograniczonych zmiennych wykładników takich, że dla $x \in \Omega$ zachodzi:

$$\begin{aligned}
&p(x) \leq r(x) \leq p^*(x),\\
&\tilde{r}(x) = r(x) - \tilde{\varepsilon} \qquad \text{dla pewnego } 0 < \tilde{\varepsilon} < p^- - 1,\\
&\tilde{\sigma}(x) = r(x)\frac{p(x)-1}{p(x)}, \qquad \tilde{\tau}(x) = p(x)\left(1 - \frac{1}{\tilde{r}(x)}\right), \qquad \tilde{\delta}(x) = \tilde{r}(x) - 1,
\end{aligned} \tag{45}$$

$$s(x) = \begin{cases} \frac{p(x)}{p(x)-1}\max\{\sigma(x), t\frac{p^*_-}{p^*_- - r_+}\} & \text{dla } p(x) \leq \frac{r(x)}{1+\tilde{\varepsilon}},\\ \frac{r(x)}{\tilde{r}(x)-1}\max\{\sigma(x), t\frac{p^*_-}{p^*_- - r_+}\} & \text{dla } p(x) > \frac{r(x)}{1+\tilde{\varepsilon}}. \end{cases}. \tag{46}$$

Wynik uogólnia wcześniejsze podobne rezultaty Giaquinta–Giusti (twierdzenie 2.1 w [77]) dla całek wariacyjnych o stałych wykładnikach oraz Fan–Zhao [68, twierdzenie 2.2]) dla warunków wzrostu przy $b = const$ lub $b \in L^\infty$. Ogólniejsze założenia na współczynniki w (44) umożliwiają nam udowodnienie hölderowskiej regularności np.: dla klas równań postaci

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = V(x)|u|^{q(x)-2}u, \qquad \text{([AT, przykład 1]),}\\
&-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + |u|^{p(x)-2}u = \lambda g(x)|u|^{\alpha(x)-2}u - h(x)|u|^{\beta(x)-2}u + K(x), \text{ ([AT, przykład 2]).}
\end{aligned}$$

Takie równania wyrastają z zagadnień własnych dla operatorów $p(\cdot)$-harmonicznych (dla $V \equiv \lambda \in R$) badanych m.in. w pracach Franzina–Lindqvist [72], Mihăilescu–Pucci–Rădulescu [144], Lang–Méndez [116].

Dowód twierdzenia 3 w [AT]) wykorzystuje słabe sformułowanie równania (43) z warunkami (44), które prowadzą do oszacowania (33) w [AT]. Kolejne składniki prawej strony szacujemy wykorzystując nierówności Young'a i twierdzenia o zanurzeniu dla przestrzeni Sobolewa o stałych wykładnikach (oszacowania (43)-(45) w pracy).

2 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowych

W rozdziale omówimy pozostałe wyniki uzyskane po doktoracie, które nie weszły w skład osiągnięcia habilitacyjnego.

2.0.5 Dalsze wyniki z teorii równań ze zmiennym wykładnikiem i analizy harmonicznej, prace [7] i [8]

W pracy [7] badamy zagadnienia teorii potencjału dla równania $p(\cdot)$-harmonicznego postaci:

$$\mathrm{div}(p(\cdot)|\nabla u|^{p(\cdot)-2}\nabla u) = 0.$$

Własności takiego równania są analogiczne do własności równania $\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(\cdot)-2}\nabla u) = 0$. Główne wyniki pracy dotyczą punktów regularnych i nieregularnych funkcji $p(\cdot)$-harmonicznych. Przypomnijmy, że dla danego ograniczonego obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ punkt $x_0 \in \partial\Omega$ jest *regularny*, jeśli

$$\lim_{\Omega \ni y \to x_0} u(y) = f(x_0) \quad \text{dla każdej funkcji } f \in C(\partial\Omega),$$

gdzie u jest rozwiązaniem zagadnienia $p(\cdot)$-Dirichleta z ciągłymi danymi brzegowymi f. Powiemy, że punkt $x_0 \in \partial\Omega$ jest nieregularny, jeśli nie jest regularny. Analizując definicję punktu regularnego, widzimy, że można zapisać ją następująco:

1. dla każdej funkcji $f \in C(\partial\Omega)$ istnieje granica $\lim_{\Omega \ni y \to x_0} u(y)$, oraz
2. dla każdej funkcji $f \in C(\partial\Omega)$ istnieje ciąg $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ punktów z Ω taki, że $u(y_j) \to f(x_0)$ gdy $y_j \to x_0$ dla $j \to \infty$.

Punkt $x_0 \in \partial\Omega$, dla którego zachodzi warunek (1), ale nie zachodzi warunek (2) nazwiemy *punktem półregularnym*, zaś punkt dla którego zachodzi warunek (2), ale nie zachodzi warunek (1) nazwiemy *punktem silnie nieregularnym.*

Własności punktów (nie)regularnych są badane od dawna, jedne z pierwszych ich przykładów należą do Zaremby (przykład 13.3 w Björn–Björn [42]) oraz Lebesgue'a (przykład 13.4 w [42]). Przykłady dla teorii ze zmiennym wykładnikiem podano w pracy [7] (przykłady 8.2, 8.6, propozycje 8.7 i 8.8). Wspomnijmy również, że dla $p = const$ warunkiem dostatecznym regularności punktu x_0 jest aby spełniał test Wienera (np.: twierdzenie 11.24 w [42]) lub aby istniała bariera w x_0.

Okazuje się, że punktów nieregularnych jest mało w sensie pojemności.

Twierdzenie 2.1. *(Własność Kellogga dla równań $p(\cdot)$-harmonicznych, twierdzenie 1.1 w [7]) Zbiór punktów nieregularnych ma zerową $p(\cdot)$-pojemność Sobolewa.*

Przypomnijmy, że *$p(\cdot)$-pojemność Sobolewa* zbioru $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest zdefiniowana następująco

$$C_{p(\cdot)}(\Omega) := \inf_{u \in W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} (|u|^{p(x)} + |\nabla u|^{p(x)})\, dx,$$

gdzie infimum rozważamy względem wszystkich $u \in W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ takich, ze $u \geq 1$ w pewnym otoczeniu Ω. (Pojemności i ich znaczenie w teorii funkcji Sobolewa ze zmiennym wykładnikiem zostały opisane np.: w rozdziałach 10 i 11 [62]; dla stałego wykładnika np.: [42], Evans–Gariepy [66].)

Dowód Twierdzenia 2.1 jest krótszy i oparty o bardziej podstawowe własności $p(\cdot)$-(nad)-rozwiązań niż wcześniejszy dowód z pracy Latvala–Lukkari–Toivanen [117] wykorzystujący m.in. pojęcia balejażu i kryterium Wienera.

Kolejnym wynikiem pracy [7] jest twierdzenie o trychotomii, klasyfikujące punkty brzegowe obszarów. Jest to pierwszy wynik tego typu w teorii potencjału dla równań o zmiennym wykładniku.

Twierdzenie 2.2 (twierdzenie 1.2 w [7])**.** *Punkt brzegowy $x_0 \in \partial\Omega$ jest albo regularny, półregularny, albo silnie nieregularny.*

W pracy pokazaliśmy również usuwalność zbiorów o zerowej $C_{p(\cdot)}$ pojemności dla ograniczonych funkcji $p(\cdot)$-(nad)harmonicznych (twierdzenia 1.3, 6.1, 6.2 w [7]). Wynik podobnej natury uzyskał Lukkari [132]. Dowód twierdzenia 2.2 jest prostszy, dopuszcza nieograniczone obszary Ω i zachodzi przy ogólniejszych założeniach na zmienne wykładniki niż w [132].
Dalsze wyniki z pracy obejmują również:
(1) nową charakteryzację lokalnie ograniczonych z góry funkcji $p(\cdot)$-superharmonicznych jako półciągłych z dołu regularyzacji $p(\cdot)$-nadrozwiązań (ang. lower semicontinuous regularization), twierdzenie 1.4;
(2) twierdzenia charakteryzujące punkty regularne (twierdzenie 7.1) i półregularne (twierdzenia 8.1 i 8.4).

Dalsza charakteryzacji punktów regularnych wymaga barier (np.: twierdzenia 11.2 i 11.11 w [42]), prace nad którymi zostały niedawno zapoczątkowane w pracy [AL] (rozdział 1.4.2 autoreferatu).

Praca [8] jest konsekwencją zainteresowań autorów zarówno obszarem teorii zmiennego wykładnika jak i analizą na przestrzeniach metrycznych (rozdział 2.0.8 autoreferatu). W [8] udowadniamy ograniczoność operatora maksymalnego Hardy'ego–Litlewood'a jako operatora z $L^{p(\cdot)}(X)$ w $L^{p(\cdot)}(X)$ dla $p^- > 1$ i nieograniczonej przestrzeni kwazimetrycznej X (twierdzenie 1.7 w [8]). Wykładnik $p(\cdot)$ należy do klasy miarowych log-hölderowsko ciągłych wykładników zdefiniowanych w ujęciu metrycznym po raz pierwszy [8, definicja 1.3]. Dla miary podwajającej na X klasa ta zawiera log-hölderowsko ciągłe wykładniki jak w definicji 1.2 w [8]. W rozdziałach 2 i 3 pracy badamy szczegółowo relacje między tymi klasami wykładników.

Poprzednie wyniki dla zagadnienia ograniczoności operatora maksymalnego dotyczą: $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, Diening [60] (przy mniej ogólnych warunkach na wykładnik niż w [8]), ograniczonych przestrzeni kwazimetrycznych i ograniczonych wykładników (przy analogicznych założeniach na wykładnik jak w [60]). W [8] dopuszczamy, aby $p(\cdot)$ był nieograniczony z góry. Co więcej, do dowodu twierdzenia 1.7 nie potrzebujemy założenia podwajania miary w X. Jako wniosek otrzymujemy ograniczoność operatora maksymalnego w przypadku euklidesowym, dla $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n, \mu)$, miary Radona μ i wykładnika $p(\cdot)$ w klasie miarowych log-hölderowsko ciągłych wykładników (wniosek 1.9). Wynik ten nie był znany wcześniej.

2.0.6 Zasady maksimum, nieliniowe zagadnienia własne, (nie)istnienie rozwiązań: wyniki prac [10, 11], [12]

Prace [10, 11] oraz [12] należą do nurtu badań wyrastającego z zagadnienia własnego dla operatorów typu p-harmonicznego. Klasyczne zagadnienie bada istnienie i własności rozwiązań równania:

$$\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = \lambda |u|^{p-2}u,$$

które dla $p = 2$ redukuje się do znanego zagadnienia dla laplasjanu.

W [10] badamy radialnie symetryczne rozwiązania $w \in C^1(B) \cap C(\overline{B})$ równania ((2.1) w pracy):

$$-a(|x|)\operatorname{div}\left(|\nabla w(x)|^{p-2}\nabla w(x)\right) = \phi(w(x)) \quad \text{p.w. w} \quad B = B(0,R) \subset \mathbb{R}^n, \tag{47}$$

gdzie $B = B(0, R)$ oznacza kulę o środku w 0 i promieniu $R > 0$. Oznaczając $w(x) = u(|x|)$ otrzymujemy, równoważne, równanie różniczkowe zwyczajne ((2.2) w pracy). Odnośnie wagi $a(\cdot)$ zakładamy, że:

1. $a \in W^{1,1}_{loc}((0,R)) \cap L^\infty((0,r))$ dla $r < R$
2. $a \geq 0$ oraz dla p.w. $\tau \in (0, R)$ zachodzi

$$a'(\tau) \leq \frac{p(n-1)}{p-1}\frac{a(\tau)}{\tau}.$$

Główny wynik [10] to propozycja 2.1, która orzeka, że dla nieparzystej ciągłej funkcji ϕ, takiej że $\tau\phi(\tau) > 0$ p.w., $|w|$ osiąga swoje supremum na kuli B w jej środku, gdzie w jest rozwiązaniem równania (47). Jeśli zaś zachodzi $\tau\phi(\tau) < 0$ p.w., to $|w(x)|$ jest niemalejącą funkcją $|x|$, w szczególności zachodzi słaba zasada maksimum dla $|w|$. Wnioski obejmują m.in. monotoniczność rozwiązań o stałym znaku (wniosek 2.3 w [10]), zastosowania do zagadnienia własnego z $\phi(x) = \lambda|w|^{q-2}w$ dla $q > 1$ (wniosek 3.1) oraz istnienie tylko trywialnych rozwiązań (propozycja 4.1) i nieistnienie radialnych rozwiązań (propozycje 4.3, 4.4, 4.5). Korzystając z wariantu tożsamości Derricka–Pohozaeva pokazujemy przykłady klas równań (47) bez nietrywialnych, radialnych i nieujemnych rozwiązań (propozycja 4.7).

W pracy [11] rozszerzamy część wyników [10] na przypadek radialnych rozwiązań równań postaci:

$$-a(|x|)\mathrm{div}\left(|\nabla w(x)|^{p-2}\nabla w(x)\right) + h(|x|, w(x), \langle\nabla w(x), \frac{x}{|x|}\rangle) = \phi(w(x)) \text{ p.w. w } B = B(0,R).$$

Założenia na a, w, ϕ są analogiczne do pracy [10]. Funkcja h, określona na $(0,R)\times\mathbb{R}^2$, jest funkcją Carathéodory'ego, taką że $\sup_{|\lambda_1|<K, |\lambda_2|<K} |h(\cdot, \lambda_1, \lambda_2)| \in L^1_{loc}(0,R)$. Dodatkowo zakładamy relacje między h oraz a (warunki (B_1), (B_2), (C_1), (C_2) w pracy). Główny wynik pracy to zasady maksimum dla $|w|$ (twierdzenie 2.1). Jako wnioski, otrzymujemy m.in. nieistnienie nietrywialnych rozwiązań (propozycje 2.1 oraz 5.1) oraz opis oscylacji rozwiązania (twierdzenie 3.1, twierdzenie 5.2).

Tematyka uogólnionych zagadnień własnych jest kontynuowana w pracy [12]. Dla zagadnienia postaci:

$$\begin{cases} \left(|u'(t)|^{p-2}u'(t)\right)' + f(u(t)) = 0, \quad 0 < t < T, \\ u(0) = 0, \quad u(T) = 0, \quad u'(0) = r > 0 \end{cases} \tag{48}$$

badamy liczbę dodatnich rozwiązań równania tzw. metodą *time map* T opisaną przez Schaaf [163]. W rozdziale 3 pracy wyprowadzamy odpowiedni wzór na operator T, którego dodatniość i wypukłość można określić poprzez warunki na f (odpowiednio: propozycja 1 oraz twierdzenia 6.1 i 6.2 w [12]). Dodatniość T skutkuje istnieniem co najwyżej jednego dodatniego rozwiązania u dla (48), zaś wypukłość daje istnienie co najwyżej dwóch rozwiązań.

2.0.7 Układy równań eliptycznych typu p-harmonicznego, prace [4, 5]

W omówieniu zagadnienia (rozdział 1.3) jako jeden z głównych celów geometrycznej teorii funkcji i przekształceń wskazaliśmy badanie klas przekształceń uogólniających funkcje holomorficzne i przekształcenia konforemne w $\mathbb{R}^2$ w wyższych wymiarach euklidesowych i na przestrzeniach metrycznych z miarą. Jako jedną z takich klas wymieniliśmy przekształcenia harmoniczne w obszarach w $\mathbb{R}^2$. W tym rozdziale opiszemy nieliniowy odpowiednik wektorowych funkcji harmonicznych, tzw. przekształcenia p-harmoniczne. Badania w tym zakresie są kontynuacją tematyki mojego doktoratu.

Niech $1 < p < \infty$. Mówimy, że $u = (u^1, \ldots, u^m) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dla $m \geqslant 1$ jest *przekształceniem p-harmonicznym* o ile $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ spełnia (jako słabe rozwiązanie) układ równań

$$\begin{cases} \mathrm{div}(|Du|^{p-2}\nabla u^1) &= 0 \\ \vdots & \\ \mathrm{div}(|Du|^{p-2}\nabla u^m) &= 0 \end{cases} \tag{49}$$

Symbol Du oznacza macierz Jakobiego u, zaś $|Du|$ jej normę euklidesową. Dla $m = 1$ powyższy układ redukuje się do równania równoważnego (1). Dla $p = 2$ otrzymujemy układ równań harmonicznych i przekształcenia harmoniczne. Najczęściej badany przypadek to $m = n$. Co więcej, układ równań (49) jest układem Eulera–Lagrange'a dla zagadnienia Dirichleta minimalizacji energii

$$\int_\Omega |Dv|^p.$$

Zrozumienie własności przekształceń p-harmonicznych pozwala studiować ogólne układy równań typu $\mathrm{div} A(x,u,Du) = B(x,u,Du)$. Układy równań typu p-harmonicznego występują np.: w nieliniowej teorii sprężystości i geometrii różniczkowej.

W pracy [4] badamy p-harmoniczne przekształcenia klasy C^2 w obszarach na płaszczyźnie. Dla takich przekształceń możliwe jest sformułowanie układu równań spełnionego przez zespolone gradienty funkcji współrzędnych u^1 i u^2 odpowiednio ([3], uogólnienie w Addendum w [4]):

$$f = \frac{1}{2}(u^1_x - i\,u^1_y), \quad g = \frac{1}{2}(u^2_x - i\,u^2_y). \tag{50}$$

W punktach, w których $f \neq 0$ i $g \neq 0$ zachodzi

$$\begin{cases} \left(2p + \frac{4|g|^2}{|f|^2}\right) f_{\overline{z}} &= (2-p)\left(\frac{\overline{f}}{f}\, f_z + \frac{f}{\overline{f}}\,\overline{f_z}\right) \\ &\quad + (2-p)\left[\frac{\overline{g}}{f}\, g_z + \frac{g}{\overline{f}}\overline{g_z} + \left(\frac{\overline{g}}{f} + \frac{g}{\overline{f}}\right) g_{\overline{z}}\right] \\ \left(2p + \frac{4|f|^2}{|g|^2}\right) g_{\overline{z}} &= (2-p)\left(\frac{\overline{g}}{g}\, g_z + \frac{g}{\overline{g}}\,\overline{g_z}\right) \\ &\quad + (2-p)\left[\frac{\overline{f}}{g}\, f_z + \frac{f}{\overline{g}}\overline{f_z} + \left(\frac{\overline{f}}{g} + \frac{f}{\overline{g}}\right) f_{\overline{z}}\right] \end{cases}$$

Okazuje się, że powyższy układ można rozwiązać względem $f_{\overline{z}}$ i $g_{\overline{z}}$ otrzymując następujące przedstawienie przekształcenia u:

$$\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}_{\overline{z}} = A(f,g) \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}_z + \overline{A(f,g)} \overline{\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}_z}. \tag{51}$$

Macierz $A(f,g)$ (wzory (A.1) i (A.2) w [4]) posiada ciekawą własność. Okazuje się bowiem, że struktura $A(f,g)$ pozwala oszacować współczynniki tej macierzy niezależnie od u, tylko jako funkcje od p (wzory (A.3) i (A.4) w [4]). Jest to uogólnienie wyniku znanego dla funkcji p-harmonicznych na płaszczyźnie udowodnionego przez Bojarskiego–Iwańca [45]. Wykorzystując (51) pokazałem następujące własności przekształceń p-harmonicznych $u = (u^1, u^2)$:

(1) Oznaczmy, przez $H(v)$ hesjan funkcji v, tj. macierz drugich pochodnych cząstkowych v.

   Wówczas zachodzi następujące twierdzenie (twierdzenie 3.1 w [4]): niech $p \in [\frac{4}{3}, 2+\sqrt{2}]$. Jeśli $\det H(u^2) \geq 0$, to $\det H(u^1) \leq 0$.

   Jeśli $\det H(u^2) \geq 0$ ($\det H(u^1) \geq 0$) dla wszystkich punktów w Ω, to krzywizna Gaussa powierzchni wykresu funkcji u^1(odpowiednio u^2) spełnia $K_{u^1} \leq 0$ (odpowiednio $K_{u^2} \leq 0$) w Ω.

   Stąd wynikają własności wypukłości funkcji współrzędnych u^1 i u^2 (wnioski 3.5 i 3.6 w [4]).

(2) Wykorzystując wzory na funkcje krzywizny k_{u^1} poziomic funkcji u^1 (wzory (4.2)-(4.5) w pracy) pokazałem oszacowanie długości $L(c)$ poziomicy $\{u^1 = c\}$ zawartej w danej kuli o promieniu R (twierdzenie 4.3) np.: przy założeniach L^2-całkowalności norm hesjanów u^1, u^2 lub kwaziregularności gradientów f i g zachodzi

$$L(c) := \int_{\{x\in\Omega\,:\,u^1(x)=c\}} \mathrm{d}\mathcal{H}^1 \leq \int_{\Omega\cap B} |k_{u^1}| + 2\pi R. \tag{52}$$

   Wynik uogólnia rezultaty Lindqvista [127] i Talentiego [167] dla funkcji p-harmonicznych (analogiczny wynik zachodzi dla u^2).

Kolejnym wynikiem pracy [4] jest nierówność izoperymetryczna dla funkcji u^1 i u^2, którą pokazałem bez odwoływania się do układu (51), przy założeniu $u \in C^3(\overline{\Omega})$ i dodatkowych założeniach odnośnie brzegowego zachowania się funkcji współrzędnych i kwaziregularności ich gradientów (twierdzenie 6.1 w [4]):

Załóżmy, że $\Omega' \subset B_R \subset B_{4R} \Subset \Omega$ oraz niech $L(s)$ będzie jak w (52). Wówczas

$$\begin{aligned} &(\ln L(s))'' \geq 0, \qquad \text{dla } p = 2, \\ &L^{\frac{1}{p}}(s) \left(\tfrac{p}{p-1} L^{\frac{p-1}{p}}(s) \right)'' \geq -CR^{-\frac{4}{p}}, \qquad \text{dla } p \neq 2. \end{aligned}$$

Analogiczne nierówności zachodzą dla funkcji u^2. Równości zachodzą dla $u^2 \equiv 0$ lub $u^1 \equiv u^2$ oraz dla pierścienia kołowego Ω' (stąd nazwa nierówności). Wynik uogólnia prace Alessandriniego [23] i Longinettiego [131] dla funkcji p-harmonicznych.

Praca [5] dotyczy innego zagadnienia z geometrii funkcji i przekształceń, tzw. twierdzenia o trzech okręgach (sferach). W klasycznej wersji sformułowanej przez Hadamarda orzeka ono, że dla podharmonicznej funkcji u w obszarze w $\mathbb{R}^2$, dla dowolnych trzech koncentrycznych okręgów o promieniach $r_1 < r < r_2$ zachodzi nierówność:

$$M(r) \leq \frac{\log(r_2/r)}{\log(r_2/r_1)} M(r_1) + \frac{\log(r/r_1)}{\log(r_2/r_1)} M(r_2),$$

gdzie $M(r) = \sup_{x^2+y^2=r^2} u(x, y)$. A zatem $M(r)$ jest funkcją wypukłą $\log r$. Podobne wyniki zachodzą dla funkcji podharmonicznych w $\mathbb{R}^n$ dla $n > 2$ (wówczas $M(r)$ jest funkcją wypukłą r^{2-n}), funkcji A-harmonicznych, równania przewodnictwa ciepła (tzw. twierdzenie o trzech parabolach). W wersji multiplikatywnej, twierdzenie o trzech sferach odgrywa ważną rolę w zagadnieniach jednoznacznego przedłużania (ang. unique continuation property), np.: Lin–Nagayasu–Wang [124], Colding–De Lellis-Minicozzi [53] oraz Garofalo–Lin [75].

Główny wynik [5] to arytmetyczna wersja twierdzenia o trzech sferach w obszarach $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Z racji różnic w naturze układów (również równań) p-harmonicznych dla $1 < p < 2$ i $p > 2$ rozpatrujemy dwa rodzaje założeń. Dla $1 < p < 2$, zakładamy, że istnieje $\alpha > 0$, taka że funkcja współrzędna u^1 spełnia warunek wzrostu

$$|u^1(x) - u^1(x_0)| \geq C|x - x_0|^\alpha \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{r_2}. \tag{53}$$

Dla $2 < p < n$, zakładamy, że istnieje $c_1 > 0$ takie, że

$$|\nabla u^1| > c_1 \qquad \text{w } B_{r_2}. \tag{54}$$

Wówczas istnieje stała C i promień r_3 taki, że dla $\overline{B_{r_3}} \subset \Omega$ zachodzi nierówność:

$$M(r) \leq CM(r_1) + (1 - C)M(r_3).$$

Dla $1 < p < 2$ stała C zależy od n, p i stałej c_S z twierdzenia Sobolewa o zanurzeniu, r_1, r_2, c, α oraz $\|Du\|_{L^p(B_{2r_2})}$. Promień $r_3 > r_2$ zależy od p, n, r_2, α, oraz $\|Du\|_{L^p(B_{2r_2})}$.
Dla $2 < p \leq n$ stała C zależy n, p, c_S, r_1, r_2, c, c_1 oraz $\|Du\|_{L^p(B_{2r_2})}$, podczas gdy $r_3 = r_2$.

W przypadku harmonicznym, $p = 2 < n$, otrzymujemy $r_3 = r_2$ podczas gdy C zależy tylko od n, p, c_S oraz c, r_1, r_2.

Dowód twierdzenia wymaga nowego podejścia w porównaniu do przypadku skalarnego, opartego na istnieniu rozwiązań podstawowych i zasadzie porównawczej. Zamiast tego wykorzystujemy oszacowania de Giorgi dla funkcji współrzędnych u^i, dla $i = 1, \ldots, n$ nieznane wcześniej w kontekście przekształceń p-harmonicznych (lemat 2 w [5]). Badania nad twierdzeniami o trzech sferach kontynuuję w pracy [14] dla równań subeliptycznych na grupach Heisenberga (rozdział 2.0.8 autoreferatu).

2.0.8 Analiza na przestrzeniach metrycznych z miarą, równania subeliptyczne i przekształcenia kwazikonforemne na grupach Heisenberga, wyniki prac [13], [6], [14], [15], [9]

Analiza na przestrzeniach metrycznych z miarą wyrasta m.in. z pytania na ile istotne jest w rachunku różniczkowym istnienie w rozważanej przestrzeni układu współrzędnych i struktury wektorowej oraz, które z wyników znanych z badań w przestrzeniach euklidesowych przenoszą się na przypadek metryczny. Intensywny rozwój tej dziedziny trwa od prawie dwóch dekad, zapoczątkowany pracami Heinonena–Koskeli [94], Hajłasza [82], Hajłasza-Koskeli [83], i wcześniejszą, Gromova [81]. W analizie na przestrzeniach metrycznych szukamy m.in. odpowiedników pojęcia gradientu, funkcji harmonicznej, p-harmonicznej, krzywizny Ricciego, odwzorowań harmonicznych, dyfuzji czy pojęcia przekształcenia kwazikonforemnego. Podejście metryczne przenika również do wielu innych obszarów matematyki takich jak teoria grup czy układy dynamiczne.

Przypomnimy teraz dwa z podstawowych pojęć analizy na przestrzeniach metrycznych: moduł rodziny krzywych oraz (słaby) górny gradient.

Rozważmy przestrzeń metryczną (X, d, μ) z miarą borelowską μ. Niech Γ będzie rodziną niestałych prostowalnych krzywych w X. Wówczas, *p-moduł* rodziny Γ definiujemy następująco:

$$\mathrm{Mod}_p(\Gamma) := \inf_{\rho} \int_X \rho^p \, d\mu, \tag{55}$$

gdzie infimum jest rozważane względem wszystkich nieujemnych funkcji borelowskich $\rho : X \to [0, \infty]$ takich, że $\int_\gamma \rho \, ds \geq 1$ dla każdej krzywej $\gamma \in \Gamma$.

Mod_p zadaje miarę zewnętrzną na rodzinie wszystkich krzywych prostowalnych w X. Badania nad modułami rodzin krzywych (oraz ich odwrotnościami, znanymi dla $p = n$ pod nazwą *ekstremalnej długości*) zapoczątkowali Ahlfors, Beurling, Grötzsch oraz Teichmüller. Używając n-modułu w $\mathbb{R}^n$ (lub Q-modułu dla przestrzeni typu Ahlforsa) można zdefiniować kwazikonforemne i kwaziregularne przekształcenia (np.: Väisälä [169]). Pojęcie modułu odgrywa również fundamentalną rolę w badaniu przestrzeni Loewnera, np.: [91, 94], jest również użyte w definicji pojemności (np.: propozycja 2.17 w [94]) i odpowiedników gradientów i przestrzeni Sobolewa na przestrzeniach metrycznych.

Mówimy, że nieujemna funkcja borelowska $g : X \to [0, \infty]$ jest *górnym gradientem* funkcji u, jeśli dla każdej niestałej, prostowalnej krzywej $\gamma : [0, l_\gamma] \to X$, parametryzowanej długością łuku zachodzi

$$|u(\gamma(0)) - u(\gamma(l_\gamma))| \leq \int_\gamma g \, ds. \tag{56}$$

Jeśli powyższa własność g zachodzi dla krzywych poza rodziną krzywych o p-module równym zero, to g nazywamy *p-słabym górnym gradientem* funkcji u.

Dysponując pojęciem słabego gradientu można badać nieliniową teorię potencjału na przestrzeniach metrycznych, w szczególności rozważać funkcje p-harmoniczne, super- i subharmoniczne, np.: [42].

Oszacowania dla (konforemnego) n-modułu w $\mathbb{R}^n$ (Q-modułu w przestrzeniach typu Ahlforsa) są dobrze zbadane i opisane w literaturze, np.: rozdziały 6-11 w Väisälä [169]. Dla $p \neq n$ ($p \neq Q$) sytuacja jest odmienna. Literatura obejmuje zaledwie kilka publikacji, głównie dla p-modułów w $\mathbb{R}^n$. W pracy [13] udowodniliśmy wcześniej nieznane, górne i dolne, oszacowania na p-moduły rodzin krzywych w przestrzeniach metrycznych z miarą podwajającą. Jedną z konsekwencji własności podwajania dla łukowo spójnych przestrzeni X jest istnienie stałych $Q_1 \geq Q_2 \geq 1$

oraz $C \geq 1$ takich, że dla każdego $x_0 \in X$ i $0 < r \leq R < \mathrm{diam(X)}$ zachodzi:

$$\frac{1}{C}\left(\frac{r}{R}\right)^{Q_1} \leq \frac{\mu(B(x_0,r))}{\mu(B(x_0,R))} \leq C\left(\frac{r}{R}\right)^{Q_2}.$$

Wymieńmy kilka wyników z pracy [13]:

- Dla $x_0 \in X$ niech Γ oznacza rodzinę niestałych krzywych w X przechodzących przez x_0. Wówczas, dla $1 \leq p \leq Q_2$ zachodzi $\mathrm{Mod}_p(\Gamma) = 0$ (twierdzenie 3.1 w [13]).

- Zdefiniujmy następującą rodzinę krzywych dla $0 < 2r < R$:

  $$\Gamma(r,R) = \Delta(\overline{B}(x_0,r), X \setminus B(x_0,R), B(x_0,R))$$

  składającą się z krzywych łączących $\overline{B}(x_0,r)$ z $X \setminus B(x_0,R)$, które należą do $B(x_0,R)$. Jeśli $1 \leq p < Q_2$, to zachodzi nierówność

  $$\mathrm{Mod}_p(\Gamma) \leq C(R_0,Q_1)\,\frac{C_{R,\frac{r}{4}}}{C^p_{R,2r}}\,R^{Q_1-Q_2},$$

  dla $C_{R,r} = \frac{1}{2^{\alpha}-2}\left(\frac{1}{r^{\alpha-1}} - \frac{1}{R^{\alpha-1}}\right)$, $\alpha = \frac{Q_2-1}{p-1}$ oraz stałej $R_0 > 0$ takiej, że $r < R_0 < R$. Jeśli $p = Q_2$, to zachodzi nierówność

  $$\mathrm{Mod}_{Q_2}(\Gamma) \leq C'(R_0,Q_1)\,\frac{R^{Q_1-Q_2}}{C^{Q_2-1}_{R,r}}, \;\text{ dla }\; C_{R,r} = \ln\left(\frac{R}{r}\right).$$

- Dla $p > Q$ i przestrzeni X typu Q-Ahlforsa takiej, że w X zachodzi nierówność $(1,p)$-Poincaré mamy oszacowanie:

  $$\mathrm{Mod}_p(\Gamma_{xy}) \;\geq\; C\,d(x,y)^{Q-p},$$

  dla rodziny zwartych, prostowalnych krzywych Γ_{xy} łączących punkty $x, y \in X$ (propozycja 4.1).

- Przy założeniach poprzedniego wyniku zachodzi:

  $$\mathrm{Mod}_p(\Gamma(r,R)) \;\geq\; \frac{1}{C}\,R^{Q-p}.$$

Celem pracy [6] było zdefiniowanie i zbadanie podstawowych własności *(pierwszych) końców* w abstrakcyjnych przestrzeniach metrycznych z miarą. Pojęcie końców i pierwszych końców (ang. prime ends) zostało zdefiniowane przez Carathéodory'ego [49] dla jednospójnych obszarów na płaszczyźnie w celu badania ciągłych i homeomorficznych rozszerzeń przekształceń konforemnych. Carathéodory udowodnił m.in. istnienie homeomorfizmu między punktami na jednostkowym okręgu (brzeg dysku jednostkowego $\mathbb{D}$) a pierwszymi końcami obrazu $\phi(\mathbb{D})$ przekształcenia konforemnego ϕ. Jako przykład rozważmy jednostkowy dysk na płaszczyźnie z usuniętym promieniem. Punktowi na usuniętym promieniu odpowiada jeden punkt na brzegu topologicznym a dwa różne punty na brzegu pierwszych końców (z perspektywy przekształcenia konforemnego "dwie strony" usuniętego promienia różnią się). Dla zbiorów wielospójnych i bardziej ogólnych zbiorów w wyższych wymiarach, teoria pierwszych końców była badana np.: przez Kaufmanna [106], Mazurkiewicza [143] oraz Näkkiego [150, 151]. Klasyczna teoria pierwszych końców znajduje zastosowania w teorii kontinuów, układach dynamicznych, teorii przekształceń konforemnych i kwazikonforemnych (kwaziregularnych). Motywacją dla badań w [6] było zagadnienie Dirichleta dla funkcji p-harmonicznych i jego rozwiązywalność na ogólnych obszarach w przestrzeniach metrycznych oraz relacje między różnymi brzegami: topologicznym, pierwszych końców, brzegiem w metryce Mazurkiewicza (Björn–Björn–Shanmugalingam [44]). Związki teorii (pierwszych) końców z równaniami różniczkowymi cząstkowymi okazują się być głębsze. Ancona [26] definiuje końce i pierwsze końce dla obszarów w $\mathbb{R}^n$ a następnie wykorzystuje je w badaniach brzegowych nierówności Harnacka oraz brzegu Martina dla rozwiązań eliptycznych równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu o stałych współczynnikach (definicja 2.3 w [26], również lemat 6.3 w Aikawa–Hirata–Lundh [20]).

Zdefiniujemy wybrane, podstawowe pojęcia z pracy [6] oraz przedstawimy pokrótce kilka wyników. Niech $\Omega \subset (X, d, \mu)$ będzie obszarem w przestrzeni metrycznej X z metryką d i borelowską, podwajającą miarą μ. Mówimy, że zbiór spójny i ograniczony $E \subsetneq \Omega$ jest zbiorem *akceptowalnym*, o ile $\overline{E} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$. Ciąg $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ akceptowalnych zbiorów tworzy *łańcuch*, o ile dla $k = 1, 2, \ldots$ zachodzi:
(1) $E_{k+1} \subset E_k$,
(2) $\operatorname{dist}(\Omega \cap \partial E_{k+1}, \Omega \cap \partial E_k) > 0$,
(3) *impresja* łańcucha $\{E_k\}$ spełnia $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{E}_k \subset \partial\Omega$.
Powiemy, że łańcuch $\{E_l\}_{l=1}^{\infty}$ dzieli łańcuch $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$, jeśli dla każdego k istnieje l, takie że $E_l \subset F_k$. Dwa łańcuchy są równoważne, jeśli dzielą się wzajemnie. Klasę równoważnych łańcuchów nazywamy *końcem* i oznaczamy $[E_k]$. Zbiór wszystkich końców w Ω tworzy brzeg końców. Koniec, którego nie dzieli żaden inny koniec nazywamy *pierwszym końcem*, a zbiór wszystkich pierwszych końców w dziedzinie Ω nazywamy *brzegiem pierwszych końców* i oznaczamy $\partial_P\Omega$.

Niech $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ będzie łańcuchem w Ω, a $K \subset \Omega$ zbiorem zwartym. Dla ustalonego $1 \leq p < \infty$ oznaczmy przez $\operatorname{Mod}_p(E_k, K, \Omega)$ moduł rodziny krzywych, które należą do Ω, jeden ich koniec leży w E_k a drugi w zbiorze K. Wówczas, powiemy że $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ jest Mod_p*-łańcuchem* jeśli zachodzi $\lim_{k\to\infty} \operatorname{Mod}_p(E_k, K, \Omega) = 0$. Analogicznie definiujemy Mod_p*-(pierwsze) końce*.

Główne wyniki pracy [6] obejmują, oprócz zbadania podstawowych własności zdefiniowanych obiektów i porównania ich do wcześniejszych teorii końców Carathéodory'ego i Näkki'ego: końce o jednoelementowych impresjach i ich związki z krzywymi o jednym z końców na brzegu (ang. accessible points, rozdział 7 w [6]), topologię brzegu (pierwszych) końców (rozdział 8), relacje między brzegiem końców, topologicznym i zadanym przez metrykę Mazurkiewicza. W szczególności, twierdzenie 9.5 w [6] orzeka, że

podzbiór brzegu pierwszych końców $\partial_P\Omega$ składający się z pierwszych końców o jednopunktowych impresjach jest homeomorficzny z brzegiem Mazurkiewicza.

Podobne wyniki uzyskaliśmy dla tzw. obszarów skończenie spójnych na brzegu (ang. finitely connected at the boundary), twierdzenie 10.10 w [6], obszarów typu Johna, obszarów typu jednostajnego (ang. uniform domains), rozdział 11 w [6].

Warunki określające wzajemną jednoznaczność między brzegami pierwszych końców, Mazurkiewicza i topologicznym umożliwiają badanie zagadnienia Dirichleta dla funkcji p-harmonicznych, [44].

Ważnym przykładem przestrzeni metrycznej są grupy Heisenberga $\mathbb{H}_n$ (ogólniej: grupy Carnot-Carathéodory'ego) z nieprzemiennym działaniem grupowym. Waga i znaczenie takich przestrzeni wynika m.in. z faktu, że choć mają one strukturę przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^{2n+1}$, to ich wymiar Ahlforsa (oraz Hausdorffa) jest różny od topologicznego i równy $2n + 2$. Grupy $\mathbb{H}_n$ są przykładem przestrzeni Loewnera, mają również bardzo ciekawą geometrię krzywych, z których skończoną długość mają horyzontalne krzywe. Ponadto, na grupach $\mathbb{H}_n$ definiujemy dwie metryki: Heisenberga i sub-Riemannowską. Druga z metryk odgrywa istotną rolę w teorii sterowania.

Praca [14] dotyczy twierdzeń o trzech sferach dla równań subeliptycznych typu p-harmonicznego na grupach $\mathbb{H}_n$, tj. odpowiedników p-laplasjanów na grupach Heisenberga. Istotna różnica między takimi równaniami a ich euklidesowymi odpowiednikami wynika z definiowania subeliptycznych równań względem tzw. słabego horyzontalnego gradientu funkcji, tj. gradientu zdefiniowanego tylko poprzez wektory z horyzontalnej podwiązki wiązki stycznej [14, definicja 1]. Wyniki pracy obejmują, nieznane wcześniej w literaturze, twierdzenia o trzech sferach typu Hadamarda dla p-podrozwiązań dla $1 < p < \infty$ z odrębną dyskusją przypadków $p = Q$ i $p = 2$ (twierdzenia 2, 3, 4, 5 w [14]). Wnioski dotyczą asymptotyki podrozwiązań dla małych i dużych promieni oraz twierdzeń typu Liouville'a. Analogiczne wyniki zachodzą dla klasycznych harmonicznych podrozwiązań w $\mathbb{R}^2$, ale nie w ogólności dla wyższych wymiarów jak to pokazano w [14] dla grup $\mathbb{H}_n$.

Praca [15] dotyczy rozwinięcia teorii pierwszych końców opartych o pojęcie modułu rodziny krzywych dla grupy $\mathbb{H}_1$ (patrz Näkki [151]). Definiujemy obszary typu *collared* w $\mathbb{H}_1$ (uogólnienie definicji z [151, 169]), wykorzystując obszary typu jednostajnego. Dla takich obszarów oraz obszarów skończenie spójnych na brzegu opisujemy strukturę brzegu pierwszych końców. Wyniki te służą nam do zbadania brzegowego zachowania przekształceń kwazikonforemnych, co tłumaczy ograniczenie naszych rozważań tylko do grupy $\mathbb{H}_1$. Ma ona bowiem najbogatszą strukturę takich przekształceń (rozdział 2.3 w [15]). Udowadniamy również kwazikonforemne analogi twierdzeń typu Carathéodory'ego o rozszerzaniu przekształceń konforemnych do brzegu pierwszych konców i topologicznego (twierdzenia 3.1 i 3.7 w pracy). Najważniejsze wyniki pracy obejmują:

(1) twierdzenie Koebe o granicach przekształcenia kwazikonforemnego f wzdłuż krzywych zbiegających do punktów brzegowych dziedziny f ([15, twierdzenie 5.1]),

(2) twierdzenie Lindelöf'a o związkach między asymptotycznymi wartościami przekształcenia kwazikonforemnego ([15, definicja 5.2]) a zbiorem punktów głównych pierwszych końców (definicja 5.4 i twierdzenie 5.2 w [15]),

(3) twierdzenie Tsuji o pojemności Sobolewa zbioru granic łukowych przekształcenia kwazikonforemnego ([15, twierdzenie 5.3]).

Analogiczne wyniki dla przekształceń kwazikonforemnych w obszarach w $\mathbb{R}^n$ zostały zbadane przez Näkki'ego [151] oraz Vuorinena [171].

W pracy [9] badamy własności funkcji harmonicznych na przestrzeniach metrycznych z miarą zadanych poprzez własność wartości średniej, tzn.: dla obszaru Ω w (X, μ, d) oraz funkcji $f : \Omega \to \mathbb{R}$ w $L^1_{loc}(\Omega)$ powiemy, że jest ona *harmoniczna*, o ile

$$f(x) = \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(z) d\mu(z) \tag{57}$$

zachodzi dla wszystkich kul $B(x, r) \Subset \Omega$ o środkach $x \in \Omega$ oraz $r > 0$ (definicja 3.1 w [9]). Wprowadzamy również pojęcie funkcji *słabo harmonicznych*, dla których własność wartości średniej zachodzi dla pewnego niepustego zbioru dopuszczalnych promieni kul w każdym punkcie obszaru. Zbiór dopuszczalnych promieni zależy od punktu w obszarze. Słabsza definicja funkcji harmonicznych umotywowana jest historią badań dla obszarów w $\mathbb{R}^n$ nad pytaniem: dla ilu co najmniej promieni w każdym punkcie dziedziny f musi zachodzić (57) aby f była funkcją harmoniczną? Badania w tym zakresie prowadzili m.in. Koebe, Volterra, Kellogg, oraz Blaschke, Privaloff i Zaremba (rozdział 3 w [9]).

Dla obu rodzajów funkcji harmonicznych pokazujemy nierówności Harnacka na kulach, na zbiorach zwartych, słabe i silne zasady maksimum, zasady porównawcze, hölderowską ciągłość (twierdzenie 4.1 w [9] dla miar podwajających oraz twierdzenie 4.2 dla miar spełniających warunek zaniku na pierścieniach badanych przez Buckley'a) a także lipszycowską ciągłość dla miar jednostajnych (propozycja 5.2). Ponadto, wykorzystując słabe górne gradienty i wyniki Cheeger'a dla funkcji lokalnie lipszycowskich, pokazujemy różniczkowalność funkcji (słabo) harmonicznych na przestrzeniach metrycznych z miarą jednostajną, na których zachodzi nierówność $(1, p)$-Poincaré. Następnie badamy zagadnienie Dirichleta metodą dynamicznego programowania związaną z grami stochastycznymi. Metodą Perrona konstruujemy rozwiązanie silnie harmoniczne dla ciągłych danych brzegowych. W ostatnim rozdziale [9] pokazujemy różne twierdzenia typu Liouville'a.

Wyniki pracy są udowodnione dla następujących miar: ciągłych względem metryki, podwajających, jednostajnych, spełniających warunek zaniku na pierścieniach (ang. delta-annular decay condition). Opisujemy relacje między tymi miarami, dyskusję ilustrując przykładami.

2.1 Nagrody, stypendia i granty badawcze

2005, 2008 Donald E. Kibbey Prize in Mathematics for 2004-2005 (for 2007-2008) (Syracuse University).

Semestry wiosenne 2004, 2005, 2006 Research Assistantship (z grantu NSF profesora Tadeusza Iwańca).

2008 Outstanding TA Award (Syracuse University).

2013-2015 Granty z WCNM-u na dofinansowanie wizyt gości zagranicznych i dwóch konferencji.

2014-2017 Grant Sonata Narodowego Centrum Nauki 2013/09/D/ST1/03681 "Geometry of solutions to elliptic PDEs and systems of elliptic PDEs", kierownik.

2015-2017 Grant Iuventus Plus Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego 0009/IP3/2015/73 "Geometric function and mapping theory on metric spaces", kierownik (5 wykonawców, w tym dwoje magistrantów).

2.2 Inna działalność naukowa

2.2.1 Dłuższe pobyty badawcze

2009, 2010 Oulu University (Finlandia), współpraca z P. Hästö

2013 Instytut Mittag-Leflera (Szwecja), pobyt w ramach semestru "Evolutionary problems"

2.2.2 Wybrane krótkie wyjazdy naukowe (do dwóch tygodni)

2007, 2008, 2010, 2011, 2013, 2015 Helsinki University (Finlandia)

2010, 2012 Oulu University (Finlandia)

2013 Joensuu University (Finlandia)

2014 Umeå University (Szwecja)

2.2.3 Wystąpienia konferencyjne i seminaryjne

Wystąpienia konferencyjne (po doktoracie):

1. Recent Advances In Geometric Function Theory, Syracuse University (USA), maj 2008
2. Nonlinear Problems for Δ and Δ_p, Linköping (Szwecja), sierpień 2009
3. CODY Summer School: Analysis on Metric Spaces and Quasiconformal Structures, Warszawa, wrzesień 2009
4. AMS Southeastern Sectional Meeting, Special Session in Geometric Function Theory and Analysis on Metric Spaces, Lexington (USA), marzec 2010
5. Conference on Complex Analysis, Urbana-Champaign (USA), maj 2010
6. Variable Exponent Analysis, Oulu (Finlandia), lipiec 2010
7. ICM 2010 Satellite Conference: International Workshop on Harmonic and Quasiconformal Mappings, Madras (Indie), sierpień 2010
8. Function Spaces, PDE and Image Processing, Oulu (Finlandia), czerwiec 2012
9. Workshop in Analysis, Umeå University (Szwecja), marzec 2014
10. XVII Conference on Analytic Functions and Related Topics, Chełm, czerwiec 2014
11. Perspectives of Modern Complex Analysis, Będlewo, lipiec 2014
12. IX Forum Równań Różniczkowych Cząstkowych, Będlewo, wrzesień 2014
13. PTM-DMV joint meeting, sesja Mini-symposium on Geometric Analysis and Related Topics, Poznań, wrzesień 2014
14. Dynamical Systems and Applications, Łódź, kwiecień 2015
15. Research Term on Analysis and Geometry in Metric Spaces, ICMAT, Madryt (Hiszpania), czerwiec 2015
16. AMS-EMS-SPM joint meeting, sesja Recent Advances in Variable Exponent Spaces and Non-linear Problems, Porto (Portugalia), czerwiec 2015
17. PDEs, Potential Theory, Function Spaces In honor of Lars Inge Hedberg, Linköping (Szwecja), czerwiec 2015
18. Szóste Forum Matematyków Polskich, sesja: Analiza Geometryczna, Warszawa, wrzesień 2015

Wystąpienia seminaryjne (po doktoracie):

1. "On the p-harmonic mappings in the plane", PDE Seminar, University of Kentucky, Lexington (USA), luty 2009

2. “An Invitation to Nonlinear Potential Theory”, Texas Tech University, Lubbock (USA), luty 2010
3. “New PDEs in image processing”, Oulu University (Finlandia), wrzesień 2010
4. “On p-Laplacian, Variable Exponent Analysis and Image Processing”, Linköping University (Szwecja), październik 2010
5. “The Perron method for prime end boundary of domains in metric measure spaces”, Analysis Seminar, Helsinki University (Finlandia), listopad 2010
6. “p-Laplace type equations of nonstandard growth”, Analysis Seminar, Stockholm University (Szwecja), luty 2013
7. “Curvature problems for p-harmonic mappings in the plane”, Geometric Analysis Seminar, Helsinki University (Finlandia), marzec 2013
8. „Topics in geometric function and a mapping theory”, Young Researchers Colloquium, IMPAN, listopad 2013
9. „Wybrane zagadnienia z teorii równań różniczkowych cząstkowych ze zmiennym wykładnikiem”, otwarte seminarium z równań różniczkowych cząstkowych, MiNI PW, luty 2014
10. ”Analysis on metric measure spaces”, ”The Hadamard three-circles theorem and its generalizations”, Seminarium Geometria i Równania Różniczkowe IM PAN, styczeń i maj 2014
11. „Przekształcenia p-harmoniczne i ich geometria”, Uniwersytet Łódzki, grudzień 2015

2.2.4 Działalność edytorska, organizacyjna, recenzencka, członkowstwa, etc.

Edytor *„Calculus of variations and PDEs”Proceedings of the conference held in Szczawnica, July 9–12, 2012.* (pozostali edytorzy: Agnieszka Kałamajska, Stanisław Migórski i Anna Ochal), Banach Center Publications, 101. Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, Warsaw, 2014, 238 str.

Organizator i prowadzący *Graduate Students Seminar*, University of Cincinnati, 2008-2010 (24 seminaria).

Współorganizator (z Agnieszką Kałamajską, Stanisławem Migórskim i Anną Ochal) konferencji *ECM 2012 Satellite Conference: Calculus of Variations and PDEs*, Szczawnica, lipiec 2012 (http://www.ii.uj.edu.pl/∼ calcvarpde/)

Organizator i prowadzący *Seminarium z geometrycznej teorii funkcji i przekształceń w IM PAN* od października 2013, strona internetowa:

http://www.impan.pl/∼tadamowi/GFTseminar2015-16.html

Celem seminarium jest prezentacja wyników i edukacja z geometrycznej teorii funkcji i przekształceń. Tematyka obejmuje m.in. teorię równań i układów równań eliptycznych, nieliniową teorię potencjału, równania o niestandardowym wzroście i teorię przestrzeni Musielaka-Orlicza, przekształcenia kwaziregularne oraz ich uogólnienia, teorię przestrzeni Sobolewa i pokrewnych przestrzeni funkcyjnych, analizę na przestrzeniach metrycznych.

Organizator spotkania badawczego *"Variable exponent theory and applications"*, 26-29 październik 2014. Strona internetowa konferencji: http://bcc.impan.pl/14Variable/

Współorganizator (z Piotrem Nowakiem, MIM UW & IM PAN) spotkania badawczego *Geometric Function Theory meets Geometric Group Theory*, 14-17 październik 2015. Strona internetowa konferencji: http://bcc.impan.pl/15GFTGGT/

Oponent pracy doktorskiej Olliego Toivanena, sierpień 2013 (University of Eastern Finland, Joensuu, Finlandia). Promotorem pracy był prof. Visa Latvala.

Recenzent pracy magisterskiej pani Anny Kosiorek, listopad 2013. Opiekunem pracy była prof. Agnieszka Kałamajska (MIM UW).

Opisy artykułów dla bazy Math Sci Net: 43 opisy od 2008-ego roku.
Recenzje dla następujących czasopism: Acta Mathematica Scientia, Advances in Applied Clifford Algebras, Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ. Mathematica, Annales Polonici Mathematici, Complex Analysis and Operator Theory, Complex Analysis and Elliptic Equations, Demonstratio Mathematica, Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B, Dissertationes Mathematicae, Electronic Journal of Differential Equations, Filomat, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Mediterranean Journal of Mathematics, Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications, Rocky Mountain Journal of Mathematics, Studia Mathematica, Topological Methods in Nonlinear Analysis.

Członkostwo w Radzie Naukowej IM PAN, wybór w roku 2014, funkcja: przedstawiciel pracowników naukowych ze stopniem naukowym doktora bez habilitacji.

Członkostwo w AMS (2004-2008, ponownie od 2014 roku), PTM (oddział warszawski) od 2015 roku.

Literatura

[1] E. Acerbi, G. Mingione, *Regularity results for a class of functionals with non-standard growth*, Arch. Ration. Mech. Anal., 156(2) (2001), 121-–140.

[2] E. Acerbi, G. Mingione, *Regularity results for stationary electro-rheological fluids*, Arch. Ration. Mech. Anal., 164(3) (2002), 213-–259.

[3] T. Adamowicz, *On p-harmonic mappings in the plane*, Nonlinear Anal., 71 (2009), 502–511.

[A] T. Adamowicz, *Phragmén-Lindelöf theorems for equations with nonstandard growth*, Nonlinear Anal., 97 (2014), 169—184.

[4] T. Adamowicz, *The geometry of planar p-harmonic mappings: convexity, level curves and isoperimetric inequality*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa. Cl. Sci. (5), Vol. XIV(1) 2015, 263–292.

[5] T. Adamowicz, *Three-spheres theorem for p-harmonic mappings*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 53(3-4) (2015), 1015—1032.

[6] T. Adamowicz, A. Björn, J. Björn, N. Shanmugalingam, *Prime ends on metric spaces*, Adv. Math., 238 (2013), 459–505.

[7] T. Adamowicz, A. Björn, J. Björn, *Regularity of $p(\cdot)$-superharmonic functions, the Kellogg property and semiregular boundary points*, Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire, 6 (2014), 1131—1153.

[8] T. Adamowicz, P. Harjulehto, P. Hästö, *Maximal operator in variable exponent Lebesgue spaces on unbounded quasimetric measure spaces*, Math. Scand., 116(1) (2015), 5—22.

[AH1] T. Adamowicz, P. Hästö, *Mappings of finite distortion and PDE with nonstandard growth*, Int. Math. Res. Not. IMRN, 10 (2010), 1940–1965.

[AH2] T. Adamowicz, P. Hästö, *Harnack's inequality and the strong $p(x)$-Laplacian*, J. Differential Equations, 250(3) (2011), 1631–1649.

[9] T. Adamowicz, M. Gaczkowski, P. Górka, *Harmonic functions on metric measure spaces*, praca w recenzji od grudnia 2015 roku.

[AG] T. Adamowicz, P. Górka, *The Liouville theorems for elliptic equations with nonstandard growth*, Commun. Pure Appl. Anal., 14(6) (2015), 2377—2392.

[10] T. Adamowicz, A. Kałamajska, *On a variant of the maximum principle involving radial p-Laplacian with applications to nonlinear eigenvalue problems and nonexistence results*, Topol. Methods Nonlinear Anal., 34(1), (2009), 1–20.

[11] T. Adamowicz, A. Kałamajska, *Maximum principles and nonexistence for radial solutions to equation involving p-Laplacian*, Math. Methods Appl. Sci., 33(13) (2010), 1618–1627.

[12] T. Adamowicz, P. Korman, *Remarks on time map for quasilinear equations*, J. Math. Anal. Appl., 376(2) (2011), 686–695.

[AL] T. Adamowicz, N. L. P. Lundström, *The boundary Harnack inequality for variable exponent p-Laplacian, Carleson estimates, barrier functions and $p(\cdot)$-harmonic measures*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), przyjęte do druku w styczniu 2015 roku, 36 stron, doi: 10.1007/s10231-015-0481-3.

[13] T. Adamowicz, N. Shanmugalingam, *Non-conformal Loewner type estimates for modulus of curve families*, Ann. Acad. Sci. Fenn., 35 (2010), 609–626.

[AT] T. Adamowicz, O. Toivanen, *Hölder continuity of quasiminimizers with nonstandard growth*, Nonlinear Anal., 125 (2015), 433—456.

[14] T. Adamowicz, B. Warhurst, *Three-spheres theorems for subelliptic quasilinear equations in Carnot groups of Heisenberg-type*, praca przyjęta do druku w Proceedings of the AMS.

[15] T. Adamowicz, B. Warhurst, *Prime ends in the Heisenberg group $\mathbb{H}_1$ and the boundary behavior of quasiconformal mappings*, praca w recenzji od grudnia 2015 roku.

[16] L. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mappings*, Second edition. With supplemental chapters by C. J. Earle, I. Kra, M. Shishikura and J. H. Hubbard. University Lecture Series, 38. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[17] H. Aikawa, *Boundary Harnack principle and Martin boundary for a uniform domain*, J. Math. Soc. Japan, 53(1) (2001), 119–145.

[18] H. Aikawa, *Characterization of a uniform domain by the boundary Harnack principle*, Harmonic analysis and its applications, 1–17, Yokohama Publ., Yokohama, 2006.

[19] H. Aikawa, *Potential analysis on nonsmooth domains—Martin boundary and boundary Harnack principle*, Complex analysis and potential theory, 235–253, CRM Proc. Lecture Notes, 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.

[20] H. Aikawa, K. Hirata, T. Lundh, *Martin boundary points of a John domain and unions of convex sets*, J. Math. Soc. Japan, 58(1) (2006), 247–274.

[21] H. Aikawa, T. Kilpeläinen, N. Shanmugalingam, X. Zhong, *Boundary Harnack principle for p-harmonic functions in smooth euclidean domains*, Potential Anal., 26(3) (2007), 281–301.

[22] H. Aikawa, N. Shanmugalingam, *Carleson-type estimates for p-harmonic functions and the conformal Martin boundary of John domains in metric measure spaces*, Michigan Math. J. 53(1) (2005), 165-–188.

[23] G. Alessandrini, *Isoperimetric inequalities for the length of level lines of solutions of quasilinear capacity problems in the plane*, Z. Angew. Math. Phys. 40(6) (1989), 920–924.

[24] Yu. A. Alkhutov, *The Harnack inequality and the Hölder property of solutions of nonlinear elliptic equations with a nonstandard growth condition*, Differ. Uravn. 33(12) (1997), 1651–1660, 1726; tłumaczenie na język angielski w Differential Equations 33(12) (1997), 1653-–1663 (1998).

[25] A. Ancona, *Principe de Harnack à la frontière et théorème de Fatou pour un opérateur elliptique dans un domaine lipschitzien*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 28(4) (1978), 169–213.

[26] A. Ancona, *Régularité d'accès des bouts et frontière de Martin d'un domaine euclidien* (Regularity of attainability of ends and Martin boundary of a Euclidean domain), J. Math. Pures Appl. (9) 63(2) (1984), 215–260.

[27] D. Arcoya, J. Diaz, L. Tello, *S-Shaped bifurcation branch in a quasilinear multivalued model arising in climatology*, J. Differential Equations 150 (1998), 215–225.

[28] D. H. Armitage, *On the extension of superharmonic functions*, J. London Math. Soc. (2) 6 (1972), 109—121.

[29] G. Aronsson, L. C. Evans, Y. Wu, Y, *Fastslow diffusion and growing sandpiles*, J. Differential Equations, 131(2) (1996), 304-–335.

[30] G. Aronsson, P. Lindqvist, *On p-harmonic functions in the plane and their stream functions*, J. Differential Equations, 74(1) (1988), 157-–178.

[31] K. Astala, T. Iwaniec, G. Martin, *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane*, Princeton Mathematical Series, 48. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.

[32] B. Avelin, V. Julin, *A Carleson type inequality for fully nonlinear elliptic equations with non-Lipschitz drift term*, arXiv:1508.06403.

[33] B. Avelin, N. L. P. Lundström, K. Nyström, *Boundary estimates for solutions to operators of p-Laplace type with lower order terms*, J. Differential Equations, 250(1) (2011), 264–291.

[34] J. M. Ball, *Some Open Problems in Elasticity* in *Geometry, Mechanics and Dynamics* Springer, New York, 2002.

[35] R. Bañuelos, R. Bass, K. Burdzy, *Hölder domains and the boundary Harnack principle*, Duke Math. J., 64(1) (1991), 195–200.

[36] R. Bass, K. Burdzy, *A boundary Harnack principle in twisted Hölder domains*, Ann. Math., 134(2) (1991), 253–276.

[37] P. Bauman, *Positive solutions of elliptic equations in nondivergence form and their adjoints*, Ark. Mat., 22(2) (1984), 153–173.

[38] J. Becker, Ch. Pommerenke, *Hölder continuity of conformal mappings and nonquasiconformal Jordan curves*, Comment. Math. Helv., 57(2) (1982), 221-–225.

[39] V. Benci, P. D'Avenia, D. Fortunato, L. Pisani, *Solitons in Several Space Dimensions: Derrick's Problem and Infinitely Many Solutions*, Arch. Rat. Mech. Anal., 154(4) (2000), 297–324.

[40] H. Berestycki, L. Rossi, *Generalizations and properties of the principal eigenvalue of elliptic operators in unbounded domains*, Comm. Pure Appl. Math., 68(6) (2015), 1014-–1065.

[41] P. Bies, P. Górka, *Schauder theory in variable Hölder spaces*, J. Differential Equations, 259(7) (2015), 2850-–2883.

[42] A. Björn, J. Björn, *Nonlinear Potential Theory on Metric Spaces*, EMS Tracts in Mathematics 17, European Math. Soc., Zurich, 2011.

[43] A. Björn, J. Björn, N. Marola, *BMO, integrability, Harnack and Caccioppoli inequalities for quasiminimizers*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 27(6) (2010), 1489-–1505.

[44] A. Björn, J. Björn, N. Shanmugalingam, *The Dirichlet problem for p-harmonic functions with respect to the Mazurkiewicz boundary, and new capacities*, J. Differential Equations, 259(7) (2015), 3078-–3114.

[45] B. Bojarski, T. Iwaniec, *p-harmonic equation and quasiregular mappings*, Partial Differential Equations, Banach Center Publications, 19, Warsaw 1987.

[46] M. Bonk, *Uniformization of Sierpiński carpets in the plane*, Invent. Math., 186(3) (2011), 559—665.

[47] M. Bonk, B. Kleiner, *Quasisymmetric parametrizations of two-dimensional metric spheres*, Invent. Math., 150(1) (2002), 127-–183.

[48] L. Caffarelli, E. Fabes, S. Mortola, S. Salsa, *Boundary behavior of nonnegative solutions of elliptic operators in divergence form*, Indiana Univ. Math. J., 30 (1981), no. 4, 621–640.

[49] C. Carathéodory, *Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete*, Math. Ann., 73, (1913), 323–370.

[50] G. Caristi, E. Mitidieri, *Some Liouville theorems for quasilinear elliptic inequalities*, Doklady Math., 79(1) (2009), 118–124.

[51] Y. Chen, S. Levine, M. Rao, *Variable exponent, linear growth functionals in image restoration* SIAM J. Appl. Math., 66(4) (2006), 1383–1406.

[52] V. Chiadò Piat, A. Coscia, *Hölder continuity of minimizers of functionals with variable growth exponent*, Manuscripta Math., 93(3) (1997), 283–299.

[53] T. H. Colding, C. De Lellis, W. P. Minicozzi, *Three circles theorems for Schrödinger operators on cylindrical ends and geometric applications* Comm. Pure Appl. Math., 61(11) (2008), 1540–1602.

[54] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, *Variable Lebesgue spaces. Foundations and harmonic analysis*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser/Springer, Heidelberg, 2013.

[55] B. Dahlberg, *On estimates of harmonic measure*, Arch. Ration. Mech. Anal., 65 (1977), 275–288.

[56] L. D'Ambrosio, *Liouville theorems for anisotropic quasilinear inequalities*, Nonlinear Anal., 70(8) (2009), 2855–2869.

[57] L. D'Ambrosio, E. Mitidieri, *A priori estimates and reduction principles for quasilinear elliptic problems and applications*, Adv. Differential Equations, 17(9-10) (2012), 935–1000.

[58] L. D'Ambrosio, E. Mitidieri, *A priori estimates, positivity results, and nonexistence theorems for quasilinear degenerate elliptic inequalities*, Adv. Math., 224(3) (2010), 967–1020.

[59] L. D'Ambrosio, E. Mitidieri, *Liouville theorems for elliptic systems and applications*, J. Math. Anal. Appl., 413(1) (2014), 121–138.

[60] L. Diening, *Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$*, Math. Inequal. Appl., 7(2) (2004), 245-–253.

[61] L. Diening, M. Růžička *Strong solutions for generalized Newtonian fluids*, J. Math. Fluid Mech., 7 (2005), 413–450.

[62] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Růžička, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, Lecture Notes in Mathematics, 2017. Springer, Heidelberg, 2011.

[63] P. Drábek, *The p-Laplacian—mascot of nonlinear analysis*, Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.), 76(1) (2007), 85-–98.

[64] P. Duren, *Harmonic mappings in the plane*, Cambridge Tracts in Mathematics, 156, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[65] A. Eremenko, J. L. Lewis, *Uniform limits of certain A -harmonic functions with applications to quasiregular mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., 16(2) (1991), 361–375.

[66] L. Evans, R. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992. viii+268 pp.

[67] X. Fan, D. Zhao, *A class of De Giorgi type and Hölder continuity*, Nonlinear Anal., 36 (1999), 295–318.

[68] X. Fan, D. Zhao, *The quasi-minimizer of integral functionals with $m(x)$ growth conditions*, Nonlinear Anal., 39(7) (2000), 807–816.

[69] X. Fan, D. Zhao, *On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$*, J. Math. Anal. Appl., 263(2) (2001), 424-–446.

[70] X.-L. Fan, *Global $C^{1,\alpha}$ regularity for variable exponent elliptic equations in divergence form*, J. Differential Equations, 235(2) (2007), 397–417.

[71] R. Filippucci, *Nonexistence of positive weak solutions of elliptic inequalities*, Nonlinear Anal., 70(8) (2009), 2903–2916.

[72] G. Franzina, P. Lindqvist, *An eigenvalue problem with variable exponents*, Nonlinear Anal., 85 (2013), 1-–16.

[73] Y. Fujishima, J. Habermann, J. Kinnunen, M. Masson, *Stability for parabolic quasiminimizers*, Potential Anal., 41(3) (2014), 983-–1004.

[74] N. Garofalo, *Second order parabolic equations in nonvariational forms: boundary Harnack principle and comparison theorems for nonnegative solutions*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), 138 (1984), 267—296.

[75] N. Garofalo, F.-H. Lin, *Unique continuation for elliptic operators: a geometric-variational approach*, Comm. Pure Appl. Math., 40(3) (1987), 347–366.

[76] F. Giannetti, A. Passarelli di Napoli, *Regularity results for a new class of functionals with non-standard growth conditions*, J. Differential Equations, 254(3) (2013), 1280-–1305.

[77] M. Giaquinta, E. Giusti, *Quasiminima*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 1(2) (1984), 79–107.

[78] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, 1983.

[79] E. Giusti, *Direct Methods in the Calculus of Variations*, World Scientific, Singapore, 2003.

[80] S. Granlund, *A Phragmén-Lindelöf principle for subsolutions of quasilinear equations*, Manuscripta Math. 36(3) (1981/82), 355–365.

[81] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Progress in Mathematics, 152. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.

[82] P. Hajłasz, *Sobolev spaces on an arbitrary metric space*, Potential Anal., 5(4) (1996), 403–415.

[83] P. Hajłasz, P. Koskela, *Sobolev met Poincaré*, Mem. Amer. Math. Soc., 145 (2000).

[84] P. Hajłasz, T. Iwaniec, J. Malý, J. Onninen, *Weakly differentiable mappings between manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc., 192 (2008), no. 899.

[85] R. Hardt, F. Lin, C. Wang, *Singularities of p-energy minimizing maps*, Comm. Pure Appl. Math., 50(5) (1997), 399-–447.

[86] P. Harjulehto, P. Hästö, V. Latvala, *Minimizers of the variable exponent, non-uniformly convex Dirichlet energy*, J. Math. Pures Appl. (9), 89(2) (2008), 174-–197.

[87] P. Harjulehto, P. Hästö, Út V. Lê, M. Nuortio, *Overview of differential equations with non-standard growth*, Nonlinear Anal., 72(12) (2010), 4551–4574.

[88] P. Harjulehto, J. Kinnunen, T. Lukkari, *Unbounded supersolutions of nonlinear equations with nonstandard growth*, Bound. Value Probl. 2007, Article ID 48348.

[89] P. Harjulehto, T. Kuusi, T. Lukkari, N. Marola, M. Parviainen, *Harnack's inequality for quasiminimizers with nonstandard growth conditions*, J. Math. Anal. Appl. 344(1) (2008), 504-–520.

[90] P. Hästö, *Counter-examples of regularity in variable exponent Sobolev spaces*, The p-harmonic equation and recent advances in analysis, 133—143, Contemp. Math., 370, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[91] J. Heinonen, *Lectures on Analysis on Metric Spaces*, Springer, New York, NY, (2001).

[92] J. Heinonen, I. Holopainen, *Quasiregular maps on Carnot groups*, J. Geom. Anal., 7(1) (1997), 109–148.

[93] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, O. Martio, *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations*, Dover Publications, Inc., 2006.

[94] J. Heinonen, P. Koskela, *Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry*, Acta Math., 181 (1998), 1–61.

[95] S. Hencl, P. Koskela, *Lectures on mappings of finite distortion*, Lecture Notes in Mathematics, 2096. Springer, Cham, 2014.

[96] I. Holopainen, P. Pankka, *p-Laplace operator, quasiregular mappings and Picard-type theorems*, Quasiconformal mappings and their applications, 117–150, Narosa, New Delhi, 2007.

[97] H. Hudzik, A. Kamińska, *Equivalence of the Orlicz and Luxemburg norms in generalized Orlicz spaces* $L^{\mu}_{M}(T)$, Funct. Approx. Comment. Math., 9 (1980), 29—37.

[98] T. Iwaniec, L. Kovalev, J. Onninen, *Diffeomorphic approximation of Sobolev homeomorphisms*, Arch. Ration. Mech. Anal., 201(3) (2011), 1047-–1067.

[99] T. Iwaniec, G. Martin, *Geometric Function Theory and Non-linear Analysis*, Oxford Mathematical Monographs, 2001.

[100] T. Iwaniec, J. Onninen, *Deformations of finite conformal energy: Boundary behavior and limit theorems*, Trans. Amer. Math. Soc., 363(11) (2011), 5605-–5648.

[101] T. Iwaniec, J. Onninen, *n-Harmonic Mappings Between Annuli: The Art of Integrating Free Lagrangians*, Mem. Amer. Math. Soc., 218 (2012), no. 1023.

[102] D. Jerison, C. Kenig, *Boundary behavior of harmonic functions in nontangentially accessible domains*, Adv. Math., 46 (1982), 80–147.

[103] Z. Jin, K. Lancaster, *Theorems of Phragmén-Lindelöf type for quasilinear elliptic equations*, J. Reine Angew. Math., 514 (1999), 165–197.

[104] Z. Jin, K. Lancaster, *A maximum principle for solutions of a class of quasilinear elliptic equations on unbounded domains*, Comm. Partial Differential Equations, 27(7-8) (2002), 1271–1281.

[105] P. Juutinen, T. Lukkari, M. Parviainen, *Equivalence of viscosity and weak solutions for the* $p(x)$*-Laplacian*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 27(6) (2010), 1471-–1487.

[106] B. Kaufmann, *Über die Berandung ebener und räumlicher Gebiete (Primendentheorie)*, Math. Ann., 103 (1930), 70–144.

[107] N. Kawano, E. Yanagida, S. Yotsutani, *Structure theorems for positive radial solutions of* $\operatorname{div}(|Du|^{m-2}Du) + K(|x|)u^q = 0$ *in* R^n, J. Math. Soc. Japan, 45 (1993), 719–742.

[108] J.T. Kemper, *A boundary Harnack principle for Lipschitz domains and the principle of positive singularities*, Comm. Pure Appl. Math., 25 (1972), 247–255.

[109] T. Kilpeläinen, X. Zhong, *Growth of entire A-subharmonic functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 28(1) (2003), 181–192.

[110] J. Kinnunen, O. Martio, *Potential theory of quasiminimizers*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 28 (2003), 459–490.

[111] J. Kinnunen, N. Shanmugalingam, *Regularity of quasi-minimizers on metric spaces*, Manuscripta Math., 105(3) (2001), 401-–423.

[112] A. Korányi, H. M. Reimann, *Quasiconformal mappings on the Heisenberg group*, Invent. Math., 80(2) (1985), 309–338.

[113] A. Korányi, H. M. Reimann, *Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group*, Adv. Math., 111(1) (1995), 1—87.

[114] O. Kováčik, J. Rákosník, *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$*, Czechoslovak Math. J., 41(116) (1991), 592–618.

[115] T. Kuusi, G. Mingione, K. Nyström, *A boundary Harnack inequality for singular equations of p-parabolic type*, Proc. Amer. Math. Soc., 142(8) (2014), 2705-–2719.

[116] J. Lang, O. Méndez, *Extension of a result by Lindquist to Lebesgue spaces with variable exponents*, J. Differential Equations 259(2) (2015), 562-–595.

[117] V. Latvala, T. Lukkari, O. Toivanen, *The fundamental convergence theorem for $p(\cdot)$-superharmonic functions*, Potential Anal., 35(4) (2011), 329—351.

[118] O. Lehto, K. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane*, Second edition, Translated from the German by K. W. Lucas. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 126. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.

[119] J. L. Lewis, K. Nyström, *Boundary behaviour for p-harmonic functions in Lipschitz and starlike Lipschitz ring domains* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 40(5) (2007), 765–813.

[120] J. L. Lewis, K. Nyström, *Boundary behavior and the Martin boundary problem for p-harmonic functions in Lipschitz domains* Ann. of Math. (2), 172(3) (2010), 1907–1948.

[121] J. L. Lewis, K. Nyström, *Regularity and free boundary regularity for the p-Laplace operator in Reifenberg flat and Ahlfors regular domains*, J. Amer. Math. Soc., 25 (2012), 827–862.

[122] J. Lewis, K. Nyström, A. Vogel, *On the dimension of p-harmonic measure in space*, J. Eur. Math. Soc. 15(6) (2013), 2197-–2256.

[123] F. Li, Z. Li, L. Pi, *Variable exponent functionals in image restoration*, Appl. Math. Comput., 216(3) (2010), 870—882.

[124] C.-L. Lin, S. Nagayasu, J.-N. Wang, *Quantitative uniqueness for the power of the Laplacian with singular coefficients*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), 10(3) (2011), 513–529.

[125] P. Lindqvist, *On the Growth of the Solutions of the Differential Equation* $\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0$ *in n-Dimensional Space*, J. Differential Equations, 58 (1985), 307–317.

[126] P. Lindqvist, *On the definition and properties of p-superharmonic functions*, J. Reine Angew. Math., 365 (1986), 67-–79.

[127] P. Lindqvist, *On p-harmonic functions in the complex plane and curvature*, Israel J. Math., 63(3) (1988), 257–269.

[128] Z. Liu, *The Liouville theorem under second order differentiability assumption*, Adv. Math., 244 (2013), 207—240.

[129] M. Liero, T. Koprucki, A. Fischer, R. Scholz, A. Glitzky, *p-Laplace thermistor modeling of electrothermal feedback in organic semiconductor devices*, Z. Angew. Math. Phys., 66(6) (2015), 2957-–2977.

[130] J. Llorente, J. Manfredi, J.-M. Wu, *p-Harmonic measure is not additive on null sets*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), 4 (2005), no. 2, 357–373.

[131] M. Longinetti, *Some isoperimetric inequalities for the level curves of capacity and Green's functions on convex plane domains*, SIAM J. Math. Anal., 19(2) (1988), 377–389.

[132] T. Lukkari, *Singular solutions of elliptic equations with nonstandard growth*, Math. Nachr., 282(12) (2009), 1770-–1787.

[133] N. Lundström, *p-Harmonic functions near the boundary*, rozprawa doktorska, Umeå 2011.

[134] N. Lundström, K. Nyström, *The boundary Harnack inequality for solutions to equations of Aronsson type in the plane*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 36(1) (2011), 261–278.

[135] E.-O. Maasalo, *Global integrability of p-superharmonic functions on metric spaces*, J. Anal. Math., 106 (2008), 191-–207.

[136] J. Malý, W.P. Ziemer, *Fine regularity of solutions of elliptic partial differential equations*, Mathematical Surveys and Monographs, 51, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[137] J. Manfredi, *p-harmonic functions in the plane*, Proc. Amer. Math. Soc., 103(2) (1988), 473–479.

[138] O. Martio, *Quasiminimizing properties of solutions to Riccati type equations*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), 12(4) (2013), 823–832.

[139] P. Marcellini, *Regularity of minimizers of integrals of the calculus of variations with nonstandard growth conditions*, Arch. Rational Mech. Anal., 105(3) (1989), 267-–284.

[140] P. Marcellini, *Regularity and existence of solutions of elliptic equations with p, q-growth conditions*, J. Differential Equations, 90(1) (1991), 1-–30.

[141] P. Marcellini, *Regularity for elliptic equations with general growth conditions*, J. Differential Equations, 105(2) (1993), 296-–333.

[142] M. Masson, M. Parviainen, *Global higher integrability for parabolic quasiminimizers in metric measure spaces*, J. Anal. Math., 126 (2015), 307—339.

[143] S. Mazurkiewicz, *Recherches sur la théorie des bouts premiers*, Fund. Math., 33 (1945), 177–228.

[144] M. Mihăilescu, P. Pucci, V. Rădulescu, *Eigenvalue problems for anisotropic quasilinear elliptic equations with variable exponent*, J. Math. Anal. Appl., 340(1) (2008), 687—698.

[145] V. M. Mikljukov, *Asymptotic properties of subsolutions of quasilinear equations of elliptic type and mappings with bounded distortion*, Mat. Sb. (N.S.), 111(153) (1980), no. 1, 42–66, 159.

[146] E. Mitidieri, S. I. Pokhozaev, *Some generalizations of the Bernstein Theorem*, Differential Equations, 38(3) (2002), 373–378.

[147] J. Musielak, *Orlicz spaces and modular spaces*, Lecture Notes in Mathematics, 1034, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[148] H. Nakano, *Modulared Semi-Ordered Linear Spaces*, Maruzen Co., Ltd., Tokyo, 1950.

[149] H. Nakano, *Topology of linear topological spaces*, Maruzen Co., Ltd., Tokyo, 1951.

[150] R. Näkki, *Boundary behavior of quasiconformal mappings in n-space*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., 484 (1970), 1–50.

[151] R. Näkki, *Prime ends and quasiconformal mappings*, J. Anal. Math., 35 (1979), 13–40.

[152] K. Nyström, *p-Harmonic functions in the Heisenberg group: boundary behaviour in domains well-approximated by non-characteristic hyperplanes*, Math. Ann., 357(1) (2013), 307–353.

[153] K. Nyström, H. Persson, O. Sande, *Boundary estimates for solutions to linear degenerate parabolic equations*, J. Differential Equations, 259(8) (2015), 3577-–3614.

[154] W. Orlicz, *Über konjugierte exponentenfolgen*, Studia Math., 3 (1931), 200–212.

[155] M. Parviainen, *Global higher integrability for parabolic quasiminimizers in nonsmooth domains*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 31(1) (2008), 75-–98.

[156] Y. Peres, S. Sheffield, *Tug-of-war with noise: a game-theoretic view of the p-Laplacian*, Duke Math. J., 145(1) (2008), 91–120.

[157] M. Pérez-Llanos, *A homogenization process for the strong $p(x)$-Laplacian*, Nonlinear Anal., 76 (2013), 105—114.

[158] E. Phragmén, E. Lindelöf, *Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier*, Acta Math., 31(1) (1908), 381–406.

[159] M. Protter, H. Weinberger, *Maximum principles in differential equations*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1967.

[160] P. Pucci, Q. Zhang, *Existence of entire solutions for a class of variable exponent elliptic equations*, J. Differential Equations, 257(5) (2014), 1529–1566.

[161] S. Rickman, *Quasiregular mappings*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], 26. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[162] M. Růžička, *Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory*, Lecture Notes in Mathematics, 1748 Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[163] R. Schaaf, *Global solution branches of two-point boundary value problems*, Lecture Notes in Mathematics, 1458. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[164] R. Schoen, S.-T. Yau, *On univalent harmonic maps between surfaces*, Invent. Math., 44(3) (1978), 265–-278.

[165] J. Serrin, *The Liouville theorem for homogeneous elliptic differential inequalities. Problems in mathematical analysis*, No. 61. J. Math. Sci. (N. Y.), 179(1) (2011), 174–183.

[166] A. Tachikawa, *On the singular set of minimizers of $p(x)$-energies*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 50(1-2) (2014), 145–169.

[167] G. Talenti, *On functions, whose lines of steepest descent bend proportionally to level lines*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 10(4) (1983), 587–605.

[168] O. Toivanen, *Local boundedness of general minimizers with nonstandard growth*, Nonlinear Anal., 81 (2013), 62–69.

[169] J. Väisälä, *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 229. Springer–Verlag, Berlin–New York, 1971. xiv+144 pp.

[170] A Vitolo, *On the Phragmén-Lindelöf principle for second-order elliptic equations*, J. Math. Anal. Appl., 300(1) (2004), 244–259.

[171] M. Vuorinen, *On the existence of angular limits of n-dimensional quasiconformal mappings*, Ark. Mat., 18(2) (1980), 157–-180.

[172] L. F. Wang, *Liouville theorem for the variable exponent Laplacian*, (Chinese) J. East China Norm. Univ. Natur. Sci. Ed. (2009), no. 1, 84–93.

[173] N. Wolanski, *Local bounds, Harnack inequality and Hölder continuity for divergence type elliptic equations with nonstardard growth*, Rev. Un. Mat. Argentina, 56(1) (2015), 73–-105.

[174] J.-M. Wu, *Comparisons of kernel functions, boundary Harnack principle and relative Fatou theorem on Lipschitz domains*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 28(4) (1978), 147–167.

[175] V. V. Zhikov, *Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 50(4) (1986), 675–-710, 877.

[176] V. V. Zhikov, *On Lavrentiev's phenomenon*, Russian J. Math. Phys., 3(2) (1995), 249–-269.

[177] V. V. Zhikov, *Meyer-type estimates for solving the nonlinear Stokes system*, Differ. Uravn. 33(1) (1997), 107–114, 143; tłumaczenie na język angielski w Differential Equations, 33(1) (1997), 108–115.

[178] V. Zhikov, *On some variational problems*, J. Math. Phys., 5(1) (1997), 105–116.

[179] V. V. Zhikov, S. M. Kozlov, O. A. Oleinik, *Homogenization of differential operators and integral functionals*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

Tomasz Adamowicz