Autoreferat
Tomasz Cieślak

Podstawowe dane osobowe
Imię i nazwisko Tomasz Cieślak
Data i miejsce urodzenia 05.03.1980, Białystok
Adres Instytut Matematyczny PAN, Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa
e-mail: cieslak@impan.pl

Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

- **Doktorat z matematyki**: praca doktorska "Własności rozwiązań quasiliniowych układów równań parabolicznych opisujących chemotaksję", obroniona z wyróżnieniem w Instytucie Matematycznym PAN, luty 2008 r.
- **Magisterium z matematyki**: praca "Model chemotaksji z uwzględnieniem efektu przegęszczenia", Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, czerwiec 2004 r.

Przebieg kariery naukowej

1999-2004, studia magisterskie, matematyka, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski.

październik 2004- wrzesień 2007, studia doktoranckie, Instytut Matematyczny PAN.

październik 2007-wrzesień 2008, asystent, Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski.

październik 2008-wrzesień 2009, adiunkt, Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski.

styczeń 2009- wrzesień 2009, adiunkt (1/3 etatu), Instytut Matematyczny PAN.

czerwiec 2009-grudzień 2011, post-doc, Uniwersytet w Zurychu, Zurych, Szwajcaria.

wrzesień 2011- dziś, adiunkt, Instytut Matematyczny PAN.

1 Wskazanie osiągnięcia habilitacyjnego.

Wskazanym osiągnięciem jest cykl 5 prac zatytułowany:

Wybuchy rozwiązań w pełni parabolicznego układu typu Keller-Segel.

1.1 Lista prac zawierających wskazane osiągnięcie

[TM] T. Cieślak, Trudinger-Moser type inequality for radially symmetric functions in a ring and applications to Keller-Segel in a ring. Discrete and Continuous Dynamical Systems B 18 (2013), 2505-2512.

[CL] T. Cieślak, Ph. Laurençot, Finite time blow-up for a one-dimensional quasilinear parabolic-parabolic chemotaxis system, Annales de l'Institut Henri Poincaré Analyse Non Linéaire 27 (2010), 437-446.

[CS1] T. Cieślak, C. Stinner, Finite-time blowup and global-in-time unbounded solutions to a parabolic-parabolic quasilinear Keller-Segel system in higher dimensions. Journal of Differential Equations 252 (2012), 5832-5851.

[CS2] T. Cieślak, C. Stinner, Finite-time blowup in a supercritical quasilinear parabolic-parabolic Keller-Segel system in dimension 2. Acta Applicandae Mathematicae 129 (2014), 135-146.

[CS3] T. Cieślak, C. Stinner, New critical exponents in a fully parabolic quasilinear Keller-Segel system and applications to volume filling models. 31 stron, przyjęte do druku, Journal of Differential Equations 2014

Mój udział w każdej z współautorskich prac [CL], [CS1-CS3] powinien być oceniony na 50%. Odpowiednie oświadczenia są załączone.

1.2 Omówienie zagadnienia

W pracach [31] oraz [38] autorzy podjęli próbę opisania sytuacji poruszających się komórek, które z jednej strony dyfundują, z drugiej produkują substancję zwaną dalej chemoatraktantem, której gradient wyznacza dodatkowy kierunek ich ruchu. W ten sposób zamierzano opisać ruch *Dictyostelium Discoideum* oraz zrozumieć zagadnienie samoorganizacji tego typu komórek. Otóż zaobserwowano eksperymentalnie, że organizm ten, potrafi w celu opuszczenia terenu, w którym brakuje pokarmu, sformułować tak zwaną sporę, to znaczy twór oznaczający się dużą gęstością komórek, aby następnie, wykorzystując wiatr przenieść przynajmniej część komórek dalej, gdzie być może pokarm jest obecny. Podejrzewano, że zjawisko chemotaksji (dążenia do gradientu pewnej przyciągającej substancji) będzie w stanie wytłumaczyć zjawisko agregacji. Autorzy [31] wyprowadzili układ równań, następnie uproszczony przez nich samych oraz w [38], i zapostulowali, że rozwiązania tego układu przy pewnych warunkach początkowych, w skończonym czasie będą się agregować. Jako agregację interpretujemy zjawisko formowania w skończonym czasie osobliwości, najlepiej przypominającej kształtem Deltę Diraca.

Uproszczona forma układu (zwanego dziś układem Keller-Segel) wyprowadzonego w [31] to w pełni paraboliczny układ równań różniczkowych cząstkowych, w którym niewiadome to $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geqslant 1$ to ograniczony obszar o gładkim brzegu. Funcje dodatnie ϕ i ψ modelują nieliniową dyfuzję oraz nieliniową chemowrażliwość. Warunki początkowe u_0, v_0 to nieujemne ograniczone funkcje. Stała $\epsilon > 0$.

$$
\begin{cases}
u_t = \nabla \cdot (\phi(u)\nabla u) - \nabla \cdot (\psi(u)\nabla v), & x \in \Omega,\ t > 0, \\
\epsilon v_t = \Delta v - v + u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\
\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\
u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), & x \in \Omega,
\end{cases} \tag{1.1}
$$

Jak już wspomnieliśmy problem agregacji tłumaczy się na matematyczne zjawisko powstania osobliwości rozwiązania w skończonym czasie. Kwestia istnienia rozwiązań wybuchających (i ewentualnie kształt takich rozwiązań tuż przed wybuchem) jest problemem, którego dotyczą wyniki mojej rozprawy habilitacyjnej.

Najpierw zarysuję stan wiedzy w tej dziedzinie w momencie kiedy zacząłem pracować nad tym zagadnieniem, czyli około końca 2008 roku.

Zanim do tego przejdę, pozwolę sobie zaznaczyć, że klasyczny układ Keller-Segel to taki, gdzie $\phi \equiv 1$, a $\psi(u) \equiv u$. Niemniej jednak, modele z nieliniowymi funkcjami ϕ i ψ są również bardzo popularne w literaturze. Przede wszystkim ze względu na swoje znaczenie przy opisywaniu zjawisk chemotaksji w procesie angiogenezy, sposobu w jaki rak próbuje ściągnąć pokarm z organizmu, który infekuje. Otóż nieliniowe funckje ϕ i ψ pozwalają opisać fakt, że komórki mają skończony rozmiar, zatem dyfuzja komórek musi być zmodyfikowana, aby uwzględnić to, że jesli w danym miejscu i czasie (x, t) gęstość komórek wynosi u, to wpływa ona na szansę jaką mają kolejne komórki, aby dostać się w miejsce (x, t). Oczywiści, im $u(x, t)$ większe, tym szansa mniejsza. Szczegółowe rozważania na ten temat zostały przedstawione w [26]. Autorzy proponują tam odpowiednie formuły na ϕ i ψ

$$
\phi(u) := q'(u) - uq(u), \quad \psi(u) := uq(u), \tag{1.2}
$$

gdzie q powinno być rozumiane jako prawdopodobieństwo, że kolejna komórka wejdzie w miejsce, w którym gęstość komórek już wynosi u. Oczywiście

$$
q(u) \text{ jest funkcją malejącą.} \tag{1.3}
$$

Powróćmy do wybuchów rozwiązań układu (1.1). Po pierwsze, jest to układ równań parabolicznych o trójkątnej części głównej. Klasyczna teoria daje istnienie lokalnych w czasie jednoznacznych regularnych rozwiązań, pod warunkiem że starujemy z danych początkowych ograniczonych. Klasyczny jest również rezultat, że dopóki rozwiązanie u, v jest ograniczone w normie L^∞, to rozwiązanie można jednoznacznie przedłużać jako regularne. Zatem nieistnienie rozwiązań jest równoważne z wybuchem normy $L^\infty(\Omega)$. Ponadto, widzimy że

$$
\int_\Omega u(x,t)dx = \int_\Omega u_0(x)dx \tag{1.4}
$$

w konsekwencji zastosowania wzoru Stokesa do pierwszego równania (1.1). Mamy również następujący fakt: jeśli startujemy z nieujemnych danych, rozwiązanie, w każdym czasie istnienia jest wciąż nieujemne. Wobec powyższej uwagi i (1.4) widzimy, że wybuch rozwiązania musi oznaczać pewien rodzaj agregacji, oczywiście powstaje pytanie, czy wybuch będzie miał miejsce w jednym punkcie, kilku czy może na większym zbiorze. Zaznaczmy, że z (1.4) widać, że zbiór wybuchów musi mieć miarę 0. Dodajmy wreszcie, że rozwiązania zaczynające się ze sferycznie symetrycznych danych u_0, v_0 pozostają sferycznie symetryczne w trakcie ewolucji.

Pierwszy rezultat na temat wybuchów rozwiązań pewnego uproszczenia (1.1) został pokazany w [30]. Co istotne, uproszczony układ z [30] nie jest już w pełni paraboliczny. Autorzy rozważali (1.1) dla wartości $\epsilon = 0$, zatem drugie równanie było eliptyczne (tak naprawdę było ono jeszcze trochę zmienione), dodatkowo $\phi = 1, \psi = u$. W tej sytuacji, dla wymiaru $n = 2$ pokazano, że istnieją wartości masy początkowej m_0, m_1 takie, że rozwiązania (1.1) istnieją globalnie w czasie i są ograniczone jeśli u_0 ma masę mniejszą niż m_0, podczas gdy dla masy początkowej większej niż m_1 sferycznie symetryczne rozwiązanie wybucha. Zatem, wynik Jägera i Luckhausa daje nie tylko agregację, ale i sugestię, że samoorganizacja jest niejako zaklęta w prawach fizyki, to wielkość począkowa masy komórek determinuje możliwość nastąpienia agregacji.

Jednak, wynik Jägera i Luckhausa ogranicza się przypadku paraboliczno-eliptycznego, dodatkowo nie wiadomo czy $m_1 = m_2$. Warto wspomnieć, że technika użyta w [30] nie przenosi się na przypadek w pełni paraboliczny. Otóż autorzy używają zamiany zmiennych, wyprowadzają równanie, które jest spełnione przez wielkość

$$U(r,t) := \int_0^r s^{n-1} u(s,t)ds. \tag{1.5}$$

Okazuje się, że w przypadku sferycznie symetrycznych rozwiązań paraboliczno-eliptycznej wersji (1.1), U spełnia już pojedyńcze zdegenerowane równanie paraboliczne. To oznacza, że można używać zasad porównawczych. Autorzy konstruują podrozwiązanie równania na U, które pokazuje, że $U_r(0)$ musi wybuchnąć w skończonym czasie, a to oznacza że u wybucha. Tu trzeba podkreślić ogromną różnicę między paraboliczno-eliptycznym uproszczeniem, a oryginalnym układem (1.1). W przypadku w pełni parabolicznym jesteśmy odcięci od zasad porównawczych!

Następnie trzeba wspomnieć o pracy Nagai'ego [34]. Nagai rozważa tam paraboliczno-eliptyczne uproszczenie (1.1) z $\epsilon = 0, \phi = 1, \psi = u$ znów ograniczając się do rozwiązań sferycznie symetrycznych w kuli $\Omega = B_R$. Nagai pokazuje, że w wymiarze $n = 2$ można określić dokładne wartości m_1 oraz m_2. Mianowicie $m_1 = m_2 = 8\pi$! Zatem ustalona jest wielkość masy determinująca samoorganizację komórek przy symtrycznych warunkach początkowych. Dodatkowo Nagai pokazuje, że w wymiarach $n \geqslant 3$, niezależnie od tego jak mała będzie początkowa masa rozwiązań, jeśli tylko początkowe sferycznie symetryczne dane są odpowiednio skoncentrowane wokół środka, rozwiązanie musi wybuchnąć w skończonym czasie. Wreszcie, pokazane jest w każdym wymiarze $n \geqslant 2$, że wybuch musi nastąpić w środku koła.

Nagai szukając wybuchów używa metody momentów. Mianowicie rozważa on ewolucję funkcji

$$M_n(t) := \int_\Omega |x|^n u(x,t)dx. \tag{1.6}$$

Oblicza, że taka funkcja musi w skończonym czasie T uzyskać wartość zero, ale to oznacza, że, wobec (1.4) oraz nieujemności u, dochodzimy do sprzeczności z założeniem globalnego istnienia rozwiązania. Z zasady przedłużalności wiemy zatem, że rozwiązanie wybucha w czasie $t \leqslant T$. W tym momencie warto wspomnieć, że metoda momentów użyta była wcześniej w przypadku podobnego do (1.1) układu (znów paraboliczno-eliptycznego) opisującego ewolucję cząstek oddziałujących na siebie grawitacyjnie, patrz [7].

Wreszcie w 2001r. Nagai, używając dość skomplikowanej modyfikacji metody momentów ([35]), pokazał, że wymiarze $n = 2$ rozwiązania paraboliczno-eliptycznego układu Keller-Segel wybuchają również jeśli startujemy z danych bez symetrii, jednak wówczas taki wybuch następuje już dla początkowych mas $m > 4\pi$. I znów okazuje się, że jest to wartość krytyczna. Trochę wcześniej, w [37] oraz [5] pokazano, że tak w paraboliczno-eliptycznym przypadku $\epsilon = 0$, jak i w przypadku w pełni parabolicznym, jeśli rozwiązanie zaczyna się z danych o masie mniejszej niż 4π rozwiązania istnieją globalnie w czasie. Znów warto nadmienić, że metoda prowadząca do tego wyniku, poza standardowymi oszacowaniami a priori, wykorzystuje ograniczenie od dołu funkcjonału Lapunowa stowarzyszonego z (1.1). Aby je uzyskać trzeba użyć nierówności Trudingera-Mosera z optymalną stałą (patrz [33, 37]) oraz nierówności Jensena. Ten sposób szacowania został zaczerpnieęty z [7]. Po uzyskaniu oszacowań wynikających z ograniczenia funkcjonału Lapunowa, aby prowadzić dalej oszacowania a priori, używa się nierówności Bilera-Hebischa-Nadzieji, [6].

Znacznie mniej wiedziano o oryginalnym w pełni parabolicznym układzie (1.1) z $\epsilon > 0$. Otóż jedyny dostępny przed 2010 rokiem wynik na temat wybuchu rozwiązań, należący do Herrero i Velazqueza, wskazywał jedno konkretne wybuchające sferycznie symetryczne rozwiązanie w przypadku dwuwymiarowym, o masie większej niż 8π. Nie było wiadomo czy zjawisko wybuchu jest w jakimś sensie generyczne. Nie było wiadomo czy istnieją rozwiązania wybuchające w wyższych wymiarach. Nie wiadomo było jaką rolę gra początkowa masa. Dodatkowo metoda użyta w [25] jest bardzo skomplikowana i wydaje się nie być możliwym przeniesienie jej na zagadnienia quasiliniowe, np. te z ϕ i ψ danymi przez (1.2). Natomiast Nagai ze współautorami ustalił, że jeśli sferycznie symetryczne rozwiązanie (1.1) w dwuwymiarowym kole z $\phi = 1, \psi = u$ wybucha, to musi to uczynić w środku koła, patrz [36]. Znów, nie wiadomo co w wyższych wymiarach.

Jako, że zagadnienie wybuchów rozwiązań (1.1) uznano za istotne, było wiele wysiłków w celu jego rozwiązania. M.in. w [27] pokazano, że w dwuwymiarowym przypadku, dla $\phi = 1, \psi = u$ i sferycznie symetrycznych danych o masie więszej niż 8π, istnieją rozwiązania nieograniczone, nie potrafiono jednak ustalić czy te rozwiązania wybuchają w czasie skończonym czy też istnieją dowolnie długo. Pokazano tam także, że dla mas przekraczających 4π, ale różych od wielokrotności 4π, mamy do czynienia z rozwiązaniami nieograniczonymi w przypadku braku symetrii w układzie (1.1). Nie będziemy opisywać ze szczegółami metody użytej w omawianej pracy teraz, gdyż poświęcimy jej sporo uwagi omawiając główne osiągnięcie habilitacyjne. Nadmienimy jednak, że podobna metoda, powiązana z układami dynamicznymi, została również użyta w [45] oraz [28] w celu wykazywania nieograniczoności rozwiązań w quasiliniowym układzie (1.1) w przypadkach nadkrytycznych nieliniowości ϕ, ψ. Zaznaczmy, że i tutaj kwestia tego czy otrzymane nieograniczone rozwiązania istnieją globalnie w czasie czy też wybuchają wcześniej pozostała otwarta.

1.3 Szczegóły osiągnięcia

1.3.1 Wybuch w jednowymiarowym quasiliniowym układzie, wyniki z pracy [CL]

Wynik uzyskany w wspólnie z Ph. Laurençot w [CL] to istnienie rozwiązań wybuchających w skończonym czasie w układzie (1.1), przy następujących założeniach:

(i) $\Omega = (0,1)$, $\phi(u) = (1+u)^{-p}$, $p > 1$, $\psi(u) = u$,

(ii) ϵ bliskie 0,

(iii) masa początkowa $\int u_0(x)dx$ duża, u_0 odpowiednio skoncentrowane, a $\|v_0\|_{H^1(0,1)}$ małe w odniesieniu do $\int u_0(x)dx$.

Po dokładne sformułowanie twierdzenia (precyzujące relacje między wielkościami ϵ, $\int u_0(x)dx$, p oraz $\|v_0\|_{H^1(0,1)}$ gwarantujące istnienie rozwiązania wybuchającego), gdzie widać również, że dla każdej nieliniowości ϕ jak w punkcie (i) istnieje rodzina warunków początkowych prowadzących do eksplozji rozwiązania, odsyłam do [Theorem 1, CL]. W Twierdzeniu 7 w pracy [CL] podany jest warunek (32) opisujący w sposób bardziej jawny warunki na u_0, v_0 zapewniające wybuch rozwiązania w skończonym czasie.

Teraz chciałem zaznaczyć, że mimo lat badań był to pierwszy wynik podający całą rodzinę rozwiązań wybuchających w skończonym czasie w przypadku oryginalnego, w pełni parabolicznego układu (1.1). W [25] autorzy skonstruowali co prawda pewne konkretne rozwiązanie wybuchające w semiliniowym układzie dwuwymiarowym, nie było jednak wiadomo na ile generyczne jest zjawisko wybuchu. Ponadto, nasz wynik był pierwszym obrazującym wybuchy rozwiązań w układzie quasiliniowym. Zaznaczmy, że badania nad wybuchami tak w przypadku semiliniowym jak i quasiliniowym trwały. Jak wspominaliśmy we wprowadzeniu, w pracach [27, 28, 45] pokazano istnienie rozwiązań nieograniczonych. Mimo wysiłków nie zdołano jednak stwierdzić czy uzyskany tam wybuch następuje w czasie skończonym czy też zwyczajnie oznacza istnienie rozwiązania nieograniczonego.

Pozwolę sobie teraz pokrótce opisać podany przez nas dowód twierdzenia o wybuchach. Bazuje on na połączeniu dwóch pomysłów. Po pierwsze uogólnieniu metody momentów, po drugie dostrzeżenia, że w jednowymiarowym przypadku, funkcjonał Lapunowa związany z (1.1) jest ograniczony z dołu, co daje pewne dodatkowe informacje o rozwiązaniu.

Otóż funkcjonał Lapunowa związany z układem (1.1) to

$$F(u,v) := \int_\Omega \Phi(u)dx - \int_\Omega uvdx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega v^2 dx, \tag{1.7}$$

$\Phi(u) := \int\limits_{s_0}^{s}\int\limits_{s_0}^{\sigma} \frac{\phi(\tau)}{\psi(\tau)}\, d\tau\, d\sigma$, $\quad s > 0$. Więcej, wiemy że spełnia on wzdłuż trajektorii

$$\frac{d}{dt}F(u(x,t),v(x,t)) = -\int_\Omega v_t^2 dx - \int_\Omega \frac{|\phi(u)\nabla u - \psi(u)\nabla v|^2}{\psi(u)} dx. \tag{1.8}$$

Łatwo zauważyć, że w wymiarze 1, nasz funkcjonał Lapunowa jest ograniczony od dołu (włożenie Sobolewa i zachowana masa), patrz [Lemma 4, CL]. Ta informacja oraz fakt, że w (1.8) mamy człon produkcji entropii, który jest normą L^2 funkcji v_t, pozwala nam wyprowadzić nierówność różniczkową na wielkość

$$m_q(t) := \int_0^1 U^q(x,t)dx, \tag{1.9}$$

gdzie $U(x,t) := \int_0^x u(s,t)ds$. Ta nierówność prowadzi do wniosku, że istnieje skończony czas T taki, że $m_q(T) = 0$, jeśli tylko założymy, że rozwiązania układu (1.1) istnieją dla dowolnego czasu $t > 0$. Tu otrzymujemy sprzeczność z nieujemnością u oraz zachowaniem masy (1.4). Zatem założenie o istnieniu rozwiązania dla dowolnego czasu $t > 0$ było fałszywe. Jak ustaliliśmy we wprowadzeniu, oznacza to wybuch rozwiązania w normie $L^\infty(0,1)$.

Na koniec skomentuję fakt, iż wprowadzona przez nas wielkość (1.9) jest uogólnieniem momentu $M_n(t)$ danego przez (1.6). Otóż całkując przez części widzimy, że

$$M_1(t) = U(1,t) - m_1(t) = \int_0^1 u_0(x)dx - m_1(t),$$

w ostatniej nierówności wykorzystaliśmy (1.4). Użycie M_1 do naszych celów nie ma szans powodzenia, po pierwsze nie można oszacować wyrazów brzegowych próbując uzyskać odpowiednią nierówność różniczkową, która miałaby prowadzić do wniosku, że moment dąży do 0 w skończonym czasie. Okazuje się, że wprowadzona przez nas modyfikacja m_q dla $q > 1$ pozwala uniknąć tego problemu. W dalszych obliczeniach okazuje się istotne (patrz dowód Twierdzenia 7, [(33) i linia powyżej, CL]), aby wybrać $q > 2$. Dokonujemy szacowań przy użyciu nierówności Jensena oraz nierówności Höldera, które wymagają użycia m_q z $q > 2$.

1.3.2 Wybuchy rozwiązań sferycznie symetrycznych w wielu wymiarach, wyniki z prac [CS1-CS3]

W pracy [46] Michael Winkler dokonał przełomowego kroku. Pokazał on, że w wymiarach $n \geqslant 3$, w semiliniowym układzie (1.1), tzn. dla $\phi \equiv 1, \psi(u) = u$, istnieje w przestrzeni danych początkowych gęsty podzbiór sferycznie symetrycznych warunków początkowych (obszar Ω jest kulą) takich, że rozwiązania z nich startujące wybuchają w skończonym czasie. W pracach [CS1-CS3], wspólnie z Christianem Stinnerem, uogólniamy ten wynik na przypadek quasiliniowego układu (1.1). Dowodzimy następujących twierdzeń.

W pracy [CS1] pokazujemy, że dla Ω będącego kulą w $\mathbb{R}^n, n \geqslant 3$, dla $\psi(u)$ o co najmniej liniowym wzroście oraz ϕ i ψ spełniających nadkrytyczną relację [(1.4), CS1], niezależnie od wielkości początkowej masy $\int_\Omega u_0(x)dx$, istnieje duży zbiór sferycznie symetrycznych danych początkowych, które generują wybuchające rozwiązania. Po dokładne sformułowanie wyniku (przedstawiające warunki, które muszą być spełnione przez dane początkowe) odsyłamy do [Theorem 1.1, CS1]. Zaznaczmy, że jak wiadomo z [40] warunek [(1.4), CS1] jest optymalny, tzn. jeśli nie jest on spełniony, wówczas każde rozwiązanie (1.1) z wielomianowymi funkcjami ϕ, ψ, takimi, że ψ jest co najmniej liniowego wzrostu, istnieje globalnie w czasie i jest funkcją ograniczoną.

Wreszcie, w [Theorem 1.6, CS1], pokazaliśmy przykład ilustrujący konieczność założenia typu

$$\psi(u) \geqslant Cu,$$

gdzie C jest pewną stałą dodatnią. Udowodniliśmy, że jeśli pozwolimy, aby ψ było postaci $u\beta(u)$, gdzie β ma odpowiedni zanik w nieskończoności, wówczas każde rozwiązanie jest zdefiniowane globalnie w czasie. Z [45] wiemy, że istnieją w tym zakresie parametrów rozwiązania nieograniczone.

W pracy [CS2], rozszerzamy wyniki z [CS1] na przypadek dziedzin dwuwymiarowych. Wymaga to pewnych drobnych usprawnień kilku oszacowań z [CS1]. Główne wyniki tej pracy to [Theorem 1.1, CS2], gdzie pokazujemy, że w przypadku nadkrytycznych warunków na ϕ i ψ, niezależnie od wartości masy, oraz założenia o braku zaniku funkcji β (znów, $\psi(u) := u\beta(u)$) mamy wybuch rozwiązania w skończonym czasie. Natomiast w [Theorem 1.4, CS2] konstruujemy przykłady β zanikających, generujących globalne w czasie rozwiązania. Wynik ten wzmacnia wynik z [Theorem 1.6, CS1] w klasie potęgowych funkcji ϕ, ψ.

Wyniki prac [CS1, CS2] prowadzą do naturalnego pytania o to jaka jest ewentualna krytyczna wartość zaniku jaki może mieć funkcja β, rozróżniająca między istnieniem rozwiązań wybuchających w skończonym czasie, a sytuacją wykluczającą wybuchy w czasie skończonym. Odpowiedzi na to pytanie poświęcona jest połowa pracy [CS3]. Główne wyniki tam osiągnięte pokazują, że w przypadku dyfuzji liniowej (tzn. $\phi(u) \equiv 1$) dla

$$\psi(u) \geqslant Cu^q,$$

$q > \frac{2}{n}$, mamy do czynienia, niezależnie od wielkości początkowej masy, z istnieniem szerokiej klasy sferycznie symetrycznych danych początkowych generujących rozwiązania wybuchające w skończonym czasie w obszarach kulistych w dowolnym wymiarze $n \geqslant 2$. Znów, otrzymany wynik jest optymalny. Z [28] wiemy, że każde rozwiązanie (1.1) z $\phi \equiv 1$, $\psi(u) = (1+u)^q$ dla $q < \frac{2}{n}$, jest ograniczone. Dokładne sformułowanie tego wyniku znajdzie czytelnik w [Corollary 1.2, CS3].

Z drugiej strony, w [Theorem 1.3, CS3], istotnie rozszerzamy klasę nieliniowości ϕ, ψ, które prowadzą do globalnie w czasie zdefiniowanych (być może nieograniczonych) rozwiązań układu (1.1). Porównanie wyników z [Corollary 1.2, CS3] oraz [Theorem 1.3, CS3], pokazuje że w klasie nieliniowości ϕ, ψ będących funkcjami potęgowymi, jesteśmy bardzo blisko krytycznych wykładników rozróżniających między rozwiązaniami wybuchającymi w skończonym czasie, a tymi które istnieją dla dowolnych czasów $t > 0$.

Zanim omówimy metody prowadzące do dowodów wyżej wymienionych wyników, zaprezentujemy też wynik przedstawiony w drugiej części pracy [CS3]. Zajmujemy się tam szczegółową analizą układu (1.1) dla ϕ i ψ wziętych z pracy modelującej efekt przegęszczenia [26]. To znaczy ϕ, ψ są dane przez (1.2), gdzie funkcja q opisująca prawdopodobieństwo wtargnięcia komórki w rejon (x, t), gdzie gęstość pozostałych komórek wynosi $u(x, t)$ jest zadana wzorem

$$q(u) = (1+u)^{-\gamma}, \quad \gamma \geqslant 0. \tag{1.10}$$

Najciekawszym wynikiem uzyskanym w tym względzie jest istnienie krytycznej masy w wymiarze $n = 2$, patrz [Theorem 4.2 i Remark 4.3, CS3]. Niech wielkość będzie zdefiniowana jako

$$\begin{aligned} m_* &= 8\pi(1+\gamma) \text{ dla } u_0, v_0 \text{ sferycznie symetrycznych,} \\ m_* &= 4\pi(1+\gamma) \text{ bez założenia symetrii.} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Okazuje się, że mamy następującą alternatywę:

(i) Dla danych początkowych o masie $\int_\Omega u_0(x)dx < m_*$ każde rozwiązanie dwuwymiarowego układu (1.1) z ϕ, ψ danymi przez (1.2) dla q zadanego przez (1.10) jest ograniczone.

(ii) Przy tych samych założeniach, dla danych początkowych sferycznie symetrycznych o masie większej niż $8\pi(1+\gamma)$ istnieją rozwiązania nieograniczone. Przy czym dla $\gamma > 1$ (definicja γ w (1.10)) rozwiązania te są zdefiniowane dla dowolnych czasów.

Zwróćmy zatem uwagę, że w przypadku sferycznej symetrii mamy do czynienia z istnieniem masy krytycznej rozróżniającej między dwoma rodzajami jakościowego zachowania rozwiązań.

Zacznijmy od szkicu dowodu twierdzeń o wybuchach. Jak stwierdził Winkler w [46], w przypadku semiliniowym, dla obszarów $\Omega = B_R \subset \mathbb{R}^n$ w wymiarach $n \geqslant 3$, istnieją stałe $A > 0$, $K(m) > 0$ takie, że zbiór $B(m, A)$,

$$
\begin{aligned}
(u_0, v_0) \in B(m, A) \quad := \quad & \Big\{(u_0, v_0) \in C^0(\bar{\Omega}) \times W^{1,\infty}(\Omega) : \; u_0, v_0 \text{ są sferycznie symetryczne} \\
& \text{oraz dodatnie w } \bar{\Omega},\ \textstyle\int_\Omega u_0 dx = m > 0,\ \|v_0\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leqslant A, \\
& \text{i } F(u_0, v_0) \leqslant -K(m) \cdot (1 + A^2)\Big\}, \qquad (1.12)
\end{aligned}
$$

zawiera warunki początkowe generujące rozwiązania wybuchające. W tym celu Winkler dowodzi, że każde sferycznie symetryczne rozwiązanie (1.1) spełnia punktowe oszacowanie

$$v(x) \leqslant C|x|^{-\kappa} \qquad (1.13)$$

dla pewnych $C > 0, \kappa > 0$. Następnie pokazuje on, że na rozwiązaniach zaczynających się z danych z $B(m, A)$, używając (1.13), można wykazać następującą nierówność

$$\frac{F(u, v)}{D^\theta(u, v) + 1} \geqslant -C(m, \kappa), \qquad (1.14)$$

gdzie $C(\kappa, m)$ to pewna stała, $\theta < 1$, a

$$D(u, v) := \left(\int_\Omega v_t^2 dx - \int_\Omega \frac{|\phi(u)\nabla u - \psi(u)\nabla v|^2}{\psi(u)} dx\right)$$

to człon produkcji entropii z (1.8). Zatem (1.14) oraz (1.8) pozwalają wykazać, że w skończonym czasie $F(u(t), v(t))$ dąży do $-\infty$. A to implikuje wybuch rozwiązań.

Naszym celem było przełożenie tego rozumowania na przypadek quasiliniowy nadkrytyczny. Oszacowanie (1.13) jest niezależne od pierwszego równania (1.1). Nasz zbiór $B(m, A)$ jest bardzo podobny, inna jest tylko stała $K(m)$. Musieliśmy wykazać nierówność (1.14) dla dowolnych ϕ, ψ nadkrytycznych. Wymagało to bardziej dokładnych szacowań niż w oryginalnej pracy Winklera. Na człon $\int_\Omega uvdx$ oraz oba wyrazy z D mieliśmy mniej miejsca w *dobrych* częściach funkcjonału Lapunowa F. Dzięki zauważeniu, że po pierwsze możemy wykorzystać

$\Phi(u)$ z (1.7), a ponadto dokładniej użyć sumy $\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx$, udało nam się tą procedurę zamknąć.

W [Lemma 3.2, CS1] podrasowujemy oszacowania Winklera, aby w przypadku $n \geqslant 3$ mieć możliwość korzystać z sumy $\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx$ w absorbowaniu wyrazów $\int_\Omega uvdx$ oraz D. [Lemma 3.3, CS1] oraz [Lemma 3.4, CS1] to oszacowania, dzięki którym mamy możliwość w pełni użyć członu $\int_\Omega \Phi(u)dx$ jako absorbującego. Wreszcie w [Lemma 3.5, CS1] pokazujemy jak zebrać poprzednie oszacowania i uzyskać kluczowy w dowodzie wybuchów [Lemma 3.1, CS1]. Jak chodzi o wymiar $n = 2$, jedyna istotna poprawka to nowe oszacowania w [Lemma 2.4, CS2]. Wreszcie, w [Lemma 2.1, CS3] udało nam się uzyskać pewne poprawki naszych wyników przy mniejszych założeniach na temat zaniku ψ.

Teraz omówimy metody prowadzące do pokazania, że nie zakładając odpowiedniego zaniku na ψ dostajemy rozwiązania istniejące globalnie w czasie. Jak chodzi o [Theorem 1.6, CS1] czy [Theorem 1.4, CS 2] pomysł polega na dostrzeżeniu możliwości wykorzystania zaniku ψ w celu oszacowań (zależnych od czasu) odpowiednich norm u i ∇v jednocześnie, odsyłamy czytelnika do [Lemma 5.1, CS1] oraz [Lemma 4.1, CS2]. To dosyć oryginalny, ale mało skomplikowany pomysł. Znacznie bardziej skomplikowany jest argument z [Lemma 3.1, CS3]. Prowadzi on jednak do bardziej dokładnego wyniku. Znów idea polega na jednoczesnym szacowaniu odpowiednich norm u i ∇v, tym razem wyższych, w ramach bardziej skomplikowanych oszacowań. Inspiracją dla tej metody jest praca [44]. Jej autor potrzebował wiedzieć, że

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}}|\nabla v|^2 \leqslant 0 \text{ na } \partial\Omega, \tag{1.15}$$

w powyższych oznaczeniach $\vec{n}$ oznacza wektor normalny. Wobec faktu, że Winkler w [44] ogranicza się do obszaru wypukłego, (1.15) jest spełnione w wyniku tego, że v spełnia zerowy warunek Neumanna na brzegu Ω. My potrafimy całą procedurę przeprowadzić dla dowolnych obszarów o gładkim brzegu. Używamy w tym celu pomysłów z pracy [29]. W szczególności zamiast (1.15) wystarczy nam

$$\frac{\partial |\nabla v|^2}{\partial \vec{n}} \leqslant c_\Omega |\nabla v|^2 \text{ on } \partial\Omega,$$

gdzie $c_\Omega > 0$ to stała zależna jedynie od krzywizn $\partial\Omega$.

Na koniec tego rozdziału omówimy krótko metody dzięki, którym pokazaliśmy twierdzenie o istnieniu masy krytycznej dla dwuwymiarowego (1.1) z ϕ, ψ zadanymi przez (1.2), (1.10). Centralnym punktem dowodu jest analiza funkcjonału Lapunowa (1.7). Po pierwsze zauważamy, że

$$F(u,v) \approx (\gamma+1)\int_\Omega u \log u dx - \int_\Omega uvdx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx,$$

dokładne znaczenie tego napisu zawarte jest w nierównościach [(4.6) i (4.13), CS3]. Wiedząc, że tak można oszacować nasz funkcjonał Lapunowa dowodzimy jego ograniczenie od dołu pod warunkiem, że masa początkowa jest mniejsza niż m_* zdefiniowane w (1.11), patrz [Lemma 4.4, CS3]. Dowód ograniczenia używa nierówności Trudingera-Mosera z optymalną stałą, patrz

[33, 42, 41, 37]. Jest to adaptacja metody z [7, 37]. Jak zaznaczono w tezie Lematu 4.4, ograniczenie funkcjonału daje nam w szczególności całkowalność członów produkcji entropii. Dla $\gamma \in [0, 1]$, możemy naśladując metodę z [37] pokazać oszacowania a priori dla (1.1). Kluczowe są tu oszacowania $\int_0^t \int_\Omega v_t^2(x, s)dxds$ oraz $\int_\Omega u \log u$, które dostajemy z ograniczoności funkcjonału Lapunowa. Ponadto, istotna jest nierówność Bilera-Hebischa-Nadzieji, patrz [6]. Dla $\gamma > 1$ wymyśliliśmy autorską metodę uzyskiwania oszacowań a priori wykorzystującą całkowalność drugiego z członów produkcji entropii, patrz [Proposition 4.1, CS3] oraz [Case $\gamma > 1$, Lemma 4.8, CS3]. Mając oszacowania a priori funkcji u w $L^\gamma(\Omega)$, używając oszacowań regularnościowych dla równania przewodnictwa ciepła w drugim równaniu (1.1), otrzymujemy oszacowanie ∇v w L^∞. Następnie za pomocą [11, Lemma 2.2], dostajemy ograniczenie rozwiązania u w L^∞.

Teraz czas streścić sposób wykazania istnienia sferycznie symetrycznych rozwiązań nieograniczonych. Fakt, że muszą one być być zdefiniowane globalnie w czasie, to po prostu wniosek z [Theorem 1.3, CS3]. Nieograniczoność uzyskujemy stosując metodę o posmaku układów dynamicznych użytą w [27]. Składa się ona z kilku kroków.

Krok 1 Pokazujemy, że funcjonał Lapunowa nie jest ograniczony od dołu na zbiorze warunków początkowych.

Krok 2 Pokazujemy, że ograniczoność rozwiązań implikuje ich zbieżność (przynajmniej na podciągu) do stanów stacjonarnych.

Krok 3 Pokazujemy, że funcjonał Lapunowa jest ograniczony od dołu na zbiorze warunków początkowych.

Te trzy kroki oraz fakt, że zgodnie ze wzorem (1.8) $F(u, v)$ maleje wzdłuż rozwiązań, prowadzą do sprzeczności z założeniem ograniczoności rozwiązania.

Dowód Kroku 1 to konstrukcja odpowiedniego ciągu w Lemacie 4.6. Ciąg ten jest modyfikacją pewnego ciągu z [39] oraz [43]. Nasz funkcjonał wymagał jednak przygotowania, aby można było przyłożyć do niego modyfikację ciągu z pracy Struwego i Tarantello.

Krok 2 to w miarę standardowa wersja zasady LaSalle'a dla równań parabolicznych. Zdecydowanie najwięcej trudu w naszym przypadku wygenerował dowód Kroku 3. Ten dowód jest zawarty w Appendiksie. Podążamy za ideami z pracy [27]. Fakt, że nasz funkcjonał różni się od tego z [27] wymaga modyfikacji pewnych pomysłów. W dowodzie [Lemma 5.1, CS3] znajdzie czytelnik dość skomplikowane rozumowanie przez zaprzeczenie, gdzie oprócz metod teorii miary używamy nierówności Brézisa-Merle'a ([8]), nierówności Harnacka czy tożsamości Pochożajewa.

1.3.3 Rozwiązania sferycznie symetryczne w pierścieniu, wyniki z pracy [TM]

W świetle wyników Winklera z [46] oraz naszych w [CS1-CS3] powstaje pytanie czy rozwiązania sferycznie symetryczne (1.1) mogą wybuchać w obszarach innych niż kula. W pracy [TM] podaję odpowiedź na to pytanie w pierścieniach $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : r \leqslant |x| \leqslant R\}$, $n \geqslant 2$ dla semiliniowej wersji (1.1), tzn. $\phi \equiv 1, \psi(u) = u$. W [Theorem 2.2, TM] pokazuję, że rozwiązania sferycznie symetryczne w pierścieniu, niezależnie od wymiaru, istnieją globalnie w czasie, dodatkowo są ograniczone. Dowód składa się z trzech głównych kroków. Pierwszy z nich, być może interesujący sam w sobie, to wyprowadzona oraz udowodniona przeze mnie nieliniowa nierówność włożeniowa, podobna do nierówności Trudingera-Mosera, patrz [Theorem 1.1, TM]. Mówi ona, że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje stała $C(\epsilon, r, R)$ taka, że

$$\ln \int_\Omega e^{f(x)} dx \leqslant \epsilon \|\nabla f\|^2_{L^2(\Omega)} + C(\epsilon, r, R) + \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}(R-r)} \int_\Omega |f(x)| dx,$$

zachodzi dla każdej sferycznie symetrycznej funkcji $f \in W^{1,2}(\Omega)$. Fakt, że zachodzi ona dla dowolnie małego $\epsilon > 0$ wykorzystuję następnie w [Lemma 2.1, TM]. Pokazuję tam, że funkcjonał Lapunowa związany z (1.1) jest ograniczony od dołu. Następnie wiedzę płynącą z tego faktu, mianowicie ograniczenie

$$\int_\Omega u \log u dx, \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \text{ oraz } \int_0^t \int_\Omega v_t^2 dx ds$$

wykorzystuję, aby uzyskać oszacowania a priori $\sup_{t \geqslant 0} \int_\Omega u^2(x,t) dx < \infty$. W tym celu używam między innymi nierówności Bilera-Hebischa-Nadzieji czy pewnej chytrej wersji nierówności Grönwalla. Znając powyższe oszacowanie, dzięki teorii regularności równań parabolicznych, potrafię oszacować ∇v w L^∞, co prowadzi, dzięki użyciu metody Alikakosa ([1]), do oszacowania normy L^∞ rozwiązania (1.1). To kończy dowód.

Na koniec wspomnę, że wynik z [TM] mówi, że jesteśmy blisko stwierdzenia, że sferycznie symetryczne rozwiązania semiliniowej wersji (1.1) mogą wybuchać tylko w 0. Jest to pytanie otwarte w wymiarach $n \geqslant 3$. Z moich rozważań w [TM] wynika, że oszacowanie od dołu funkcjonału Lapunowa i płynące z niego ograniczenia [(2.5)-(2.7), TM] zachodzą w pierścieniach przy dowolnie małym $r > 0$ także, jeśli rozpatrujemy rozwiązania sferycznie symetryczne w kuli. Pytanie czy da się je wykorzystać w celu pokazania, że wybuch może nastąpić tylko w środku kuli trwają. Między innymi próbą odpowiedzi na to pytanie zajmuje się mój były magistrant, A. Klimek.

2 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowych

2.1 Zagadnienia omawiane w doktoracie

Bardzo krótko omówię główne wyniki doktoratu. Główne twierdzenie doktoratu to oszacowanie normy L^∞ słabych rozwiązań równania

$$u_t = \nabla . (\phi(u)\nabla u - u\beta(u)\nabla v), \ u_0 \in L^\infty(\Omega),$$

gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ to obszar ograniczony o gładkim brzegu. Funkcje ϕ i $\beta : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ mogą zanikać w nieskończoności do 0. Jeśli spełniają one oszacowanie

$$\frac{\beta}{\phi} \leqslant M,$$

dla pewnej stałej $M > 0$, a ∇v jest ograniczony, pokazałem, że u jest ograniczone. Wynik został opublikowany w [11, Theorem 2.2]. Jego dowód to odpowiednia modyfikacja metody de

Giorgi, wykorzystująca pewną wprowadzoną przeze mnie nieliniową funkcję testującą, która wpleciona w iteracyjne oszacowania metody de Giorgi, daje oszacowanie normy L^∞.

Wynik ten pozwolił na pokazanie istnienia globalnych rozwiązań w pewnych modelach chemotaksji uwzględniających efekt *volume filling*. Kolejne prace, które powstały na skutek mojego doktoratu to: [12], [10] oraz [18].

2.2 Wykładniki krytyczne w quasiliniowym paraboliczno-eliptycznym układzie Keller-Segel

W serii prac [21], [14], [15] oraz [16] studiujemy paraboliczno-eliptyczny układ Keller-Segel (1.1) z $\epsilon = 0$, $\psi(u) = u$. W związku z tym, że ten układ jest paraboliczno-eliptyczny, rozważania na jego temat są istotnie różne niż studia nad w pełni parabolicznym układem. Przede wszystkim, było już znanych kilka metod, dzięki którym można badać kwestię istnienia rozwiązań wybuchających. Chodzi o opisane przeze mnie we wstępie metodę momentów oraz metodę Jägera-Luckhausa. W pracy [21] chcieliśmy wyznaczyć krytyczne wykładniki w dyfuzji rozróżniające między sytuacją, gdy wszystkie rozwiązania istnieją globalnie w czasie i są ograniczone, przypadek podkrytyczny, a możliwością istnienia rozwiązań wybuchających, przypadek nadkrytyczny. Niech $n \geqslant 1$, pokazaliśmy następujący wynik.

- Jeśli $\phi(s) \geqslant c(1+s)^{-p}$ dla $s \geqslant 0$, gdzie $c > 0$ to pewna stała, $p < \frac{2}{n} - 1$ wówczas rozwiązania (1.1) są globalne w czasie i ograniczone ([21, Theorem 2.4]).
- Jeśli jednak $\phi(s) \leqslant c(1+s)^{-p}$ dla $s \geqslant 0$, gdzie $c > 0$ to stała, $p > \frac{2}{n} - 1$, wówczas istnieją dane początkowe u_0 takie, że $\limsup_{t \nearrow T} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty$ dla pewnego skończonego $T > 0$ ([21, Theorem 3.2]).

Część nadkrytyczna twierdzenia (zachodząca niezależnie od wielkości początkowej masy), uzyskana została dla danych sferycznie symetrycznych z pomocą metody z [30]. Mianowicie, wyprowadziliśmy równanie, które jest spełnione przez $U(r,t) := \int_0^r s^{n-1}u(s,t)ds$, okazało się, że jest to jedno równanie paraboliczne [21, (3.6)], które spełnia zasadę porównawczą. Następnie konstruowliśmy podrozwiązania o gradiencie U wybuchającym w 0 w skończonym czasie. Stoi to w sprzeczności z globalnym istnieniem rozwiązań (1.1).

Zatem, w klasie potęgowych nieliniowości ϕ mamy krytyczne wykładniki $p = \frac{2}{n} - 1$. Pytanie co dzieje się w przypadku krytycznym. Odpowiedzi na to pytanie, w wymiarach $n \geqslant 2$ udzielamy w pracy [14]. Pokazujemy tam, że dla $\phi(u) = (1+u)^{1-\frac{2}{n}}$, $\psi(u) = u$, sferycznie symetryczne dane początkowe o odpowiednio dużej masie i odpowiedniej koncentracji, generują rozwiązania (1.1) z $\epsilon = 0$ wybuchające w skończonym czasie. Ponadto, uzyskaliśmy krótszy i bardziej elegancki dowód o wybuchach w przypadku nadkrytycznym, nizezależnie od wielkości masy. Tym razem uogólnialiśmy metodę momentów.

Wydaje się, że zdecydowanie najciekawszy jest wynik z prac [15, 16]. Otóż okazuje się, że w przeciwieństwie do przypadków wielowymiarowych, w wymiarze $n = 1$ nie ma dyfuzji, przy których mamy masę krytyczną! W pracy [15] wynik ten pokazany jest dla nieliniowości potęgowych. Mianowicie, w [15, Theorem 4] pokazujemy, że dla $\phi(u) = 1/u$ rozwiązania zaczynające się od dodatnich danych początkowych muszą istnieć dla dowolnego czasu i są ograniczone.

Dodatkowo, w [15, Theorem 5] pokazujemy, że wśród nieliniowości ϕ, przy których rozwiązania (1.1) w wymiarze jeden istnieją globalnie i są ograniczone są także nieliniowości postaci

$$1/(1+u) \text{ czy } \frac{1}{(1+u)\,(\log(1+u))^{\alpha}}\,, \alpha \leqslant 1.$$

Ponadto, w [15, Theorem 10] pokazujemy, że niezależnie od wielkości początkowej masy, dla ϕ postaci

$$\frac{1}{(1+u)\,(\log(1+u))^{\alpha}}\,, \alpha \in (1,2],$$

rozwiązania jednowymiarowego (1.1) wybuchają w skończonym czasie. Warto podkreślić, że dowód wybuchów z Twierdzenia 10 jest też prostszym dowodem dla nieliniowości nadkrytycznych z [21].

Przede wszystkim chciałbym podkreślić metody, którymi pokazaliśmy wyniki w pracy [15]. Szczególnie metoda pokazywania istnienia globalnych rozwiązań jest kompletnie oryginalna. Bazuje ona na zamianie zmiennych wprowadzonej przez nas w pracy [15]. Mianowicie, niech F będzie funkcją odwrotną do $U(x) := \int_0^x u(x,s)dx$. Niech $f(y,t) = \partial_y F(y,t)$. Wówczas okazuje się, że f spełnia

$$\partial_t f = \partial_y^2 \Psi(f) - 1 + Mf\,, \qquad (y,t) \in (0,M) \times (0,T)\,, \tag{2.16}$$

gdzie $M = \int_0^1 u_0(x)dx$, a

$$\Psi'(r) := \frac{1}{r^2}\,\phi\left(\frac{1}{r}\right) \text{ dla } r > 0\,, \qquad \Psi(1) := 0\,.$$

Ponadto,

$$f(t,y)\; u(t, F(t,y)) = 1. \tag{2.17}$$

Zatem studiowanie jednowymiarowego układu (1.1) z $\epsilon = 0$, $\psi(u) = u$ sprowadza się do studiowania (2.16). Aby pokazać, że rozwiązania (1.1) istnieją globalnie w czasie, wobec (2.17), wystarczy zapewnić, że rozwiązania (2.16) są dodatnie. W [15, Theorem 4, Theorem 5] pokazujemy ten fakt. W tym celu, znajdujemy funkcjonał Lapunowa związany z (2.16), dostajemy dodatkowe oszacowania a priori z niego wynikające, a następnie sprawdzamy, że ta wiedza gwarantuje, że rozwiązania (2.16) są odcięte od 0.

W pracy [16] pokazujemy, że nieliniowość generująca istnienie masy krytycznej nie istnieje również w klasie funkcji ciągłych, patrz [16, Theorem 1.1], rozszerzając tym samym wyniki pracy [15].

Na koniec chciałem wspomnieć o wynikach z pracy [9]. Dotyczy ona jednowymiarowego w pełni parabolicznego ($\epsilon > 0$) układu (1.1) z $\psi(u) = u$. Była ona poświęcona badaniu wykładników krytycznych. Pokazaliśmy, że podobnie jak w układzie paraboliczno-eliptycznym nieliniowe dyfuzje $\phi(u) = (1+u)^{-p}, p > -1$, prowadzą do ograniczonych rozwiązań. Rozszerzyliśmy wynik o wybuchach z pracy [CL], mianowicie pokazaliśmy, że dla każdej nieliniowści $\phi \in L^1(1,\infty) \cap C[0,\infty)$ znajdziemy dane początkowe, które generują wybuchające rozwiązania. Wreszcie, badaliśmy przypadek nieliniowości $\phi(u) = 1/(1+u)$. Udowodniliśmy, że dla małych mas istnieją wówczas ograniczone globalne w czasie rozwiązania. Nie wiadomo jednak czy, jak w przypadku paraboliczno-eliptycznym, rozwiązania będą globalne w czasie dla dowolnych mas.

2.3 Pewne paraboliczne układy równań

W tym miejscu chciałem przedstawić skrócony opis wyników z prac [17] oraz [19].

W pracy [19] rozważamy układ parabolicznych równań cząstkowych, który został zaproponowany jako uproszczony opis zjawiska angiogenezy. Jest to sposób w jaki rak ściąga pokarm z organizmu. Interesowało nas asymptotyczne zachowanie rozwiązań. Dużą trudnością w [19] są nieliniowego warunki brzegowe. Używając do tego teorii półgrup udało nam się skonstruować lokalne w czasie regularne jednoznaczne rozwiązania. Znane były już dwa konkretne stany stacjonarne obrazujące pewną równowagę w układzie rak-organizm. Pokazaliśmy, że w zależności od parametrów układu, rozwiązania zbiegają do różnych stanów stacjonarnych, gdy czas dąży do nieskończoności. Istotne jest, że w obu przypadkach mieliśmy do czynienia z globalną stabilnością (tzn., że nasz wynik mówi o zbieżności niezależnie od danych początkowych). W pracy konstruowaliśmy nadrozwiązania problemu używając wariacyjnej charakteryzacji pierwszej wartości własnej dla operatorów eliptycznych i jej związku z istnieniem nadrozwiązania. Odpowiednie twierdzenie dla operatorów eliptycznych o nieliniowych warunkach brzegowych zostało udowodnione w [2].

Praca [17] zajmuje się rozwiązywalnością oraz asymptotyką rozwiązań tzw. układu chemorepulsji. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geqslant 2$ będzie obszarem ograniczonym o gładkim brzegu. Powiemy, że funkcje $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ rozwiązują układ chemorepulsji jeśli spełniają

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \nabla \cdot (\nabla v), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ v_t = \Delta v - v + u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.18}$$

Z jednej strony, jak chodzi o strukturę, (2.18) wygląda bardzo podobnie do (1.1) z $\phi = 1, \psi(u) = u$. Jak zaraz się jednak okaże, różny znak w górnym równaniu, zupełnie zmienia właściwości rozwiązań tego układu. W [17, Theorem 1.1] pokazaliśmy, że w wymiarze $n = 2$, niezależnie od wielkości masy, dla dowolnych regularnych danych początkowych, rozwiązania (2.18) istnieją globalnie w czasie, są jednoznaczne i ograniczone. Zatem nie ma mowy o pojawieniu się osobliwości w skończonym czasie. Ponadto wykazaliśmy, że każde rozwiązanie zbiega do konkretnego stałego stanu stacjonarnego. Udał nam się to dzięki znalezieniu funkcjonału Lapunowa

$$F(u,v) := \int_\Omega u \log u dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx.$$

Ponadto, w wymiarach $n = 3, 4$ konstruujemy globalne w czasie słabe rozwiązania (2.18) [17, Theorem 1.2]. Po definicję naszych słabych rozwiązań odsyłam do [17, Definition 1.2]. Uzyskujemy je, za pomocą metody zwartościowej, jako granice rozwiązań serii problemów pomocniczych, patrz [17, (4)]. Aby przejść do granicy i pokazać, że uzyskane w granicy obiekty są rozwiązaniami wykorzystaliśmy lematy Aubina-Lionsa, tw. Vitali'ego oraz twierdzenie Dunforda-Pettisa. Oszacowania, które wyposażyły nas w odpowiednie środki, aby używać powyższych twierdzeń, dostaliśmy jako efekt znalezienia funkcjonałów Lapunowa dla serii problemów [17, (4)] oraz wynikających z nich oszacowań, które czytelnik znajdzie w [17, Lemma 2.2, Corollary

2.3]. Na koniec wspomnę, że pokazaliśmy również, iż uzyskane przez nas słabe rozwiązania zbiegają w granicy do jednorodnych stanów stacjonarnych.

2.4 Pewne zagadnienia geometrycznej teorii miary oraz ich zastosowania w hiperbolicznych równaniach różniczkowych oraz analizie funkcjonalnej

W tym paragrafie omówię wyniki prac [20] oraz [13]. W pierwszej z tych prac rozważamy następujący problem czy obiekty typu spirale Prandtla, Kadena lub Antona mają lokalnie skończoną energię kinetyczną. Nie wchodząc w szczegóły, powiedzmy że każdy z wymienionych obiektów, to nieciągłe samopodobne pole rotacji, z nieciągłością wzdłuż krzywej będącej spiralą. Obiekty takie zostały wypisane przez fizyków ze szkoły Prandtla, patrz [3], jako przepływy które miałyby generować rotację. Są to obiekty istotne z punktu widzenia fizyki matematycznej, gdyż zgodnie z paradoksem d'Alemberta, brak przepłwów o nieciągłej rotacji powoduje brak siły nośnej. Wyżej wymienione obiekty chciałoby się interpretować jako słabe rozwiązania dwuwymiarowego równania Eulera, ewentualnie jakiejś niejednorodnej jego wersji. Szczególnie spirale Kadena są obiektem, który matematycy chcą poznać głębiej. Wiąże się to z nadzieją, że być może za ich pomocą można znaleźć przykłady niejednoznaczności rozwiązań Delorta, patrz [4]. Aby określić nieściśliwe pole prędkości generowane przez rotację używamy operatora Biota-Savarta. W dwóch wymiarach ma on następującą postać

$$v =^{\perp} \nabla\psi, \quad \Delta\psi = rot\, v, \tag{2.19}$$

gdzie v jest danym polem prędkości, a $rot\ v$ to jego rotacja.

Aby równanie Eulera w słabym sformułowaniu miało sens, musi zachodzić

$$v \in L^\infty(0,T; L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)). \tag{2.20}$$

Dodatkowo, powyższy warunek ma jasną interpretację fizyczną, pole prędkości musi mieć przynajmniej lokalnie skończoną energię kinetyczną. Wobec (2.19), możemy zaaplikować teorię regularności operatorów eliptycznych, widzimy że aby v spełniało (2.20), wystarczy aby dla dowolnego czasu $t \leqslant T$, $rot\ v \in H^{-1}(\mathbb{R}^2)$. W naszej pracy [20, Theorem 1.1] pokazujemy, że nawet szersza klasa obiektów, każde pole rotacji spełniające tak zwane prawa podobieństwa Prandtla (wszystkie spirale wymienione powyżej spełniają to wymaganie), ma skończoną normę $H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

Warunek samopodobieństwa Prandtla dla dodatniej miary radonowskiej μ o nośniku zawartym w ograniczonej kuli o promieniu R_0 znaczy, że spełnia ona

$$\mu(B(0,r)) = cr^\alpha, \text{ dla pewnych stałych } c, \alpha > 0. \tag{2.21}$$

Pola rotacji dane spiralami Prandtla, Kadena czy Antona można interpretować jako miary o gęstości skupionej na spirali.

Dowód [20, Theorem 1.1] jest z zakresu geometrycznej teorii miary i używa metod t-energii. Dla dodatniej liczby $t > 0$ i dodatniej miary radonowskiej μ na Ω, przez t-energię miary μ (oznaczaną $I_t(\mu)$) rozumiemy

$$I_t(\mu) := \int_\Omega \int_\Omega |x-y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y).$$

Wymyślony przez nas lemat geometryczny [20, Proposition 3.2] pozwala przechodzić z warunku (2.21) na oszacowania wzrostu miar na kulach $B(x,r)$, których środki i promienie spełniają $2r < |x| < R_0$. To daje podstawę, aby za pomocą pewnych manewrów wykorzystujących twierdzenie Fubini'ego oraz całkowanie przez zamianę zmiennych szacować odpowiednie t-energie. Jak zauważamy w [20, Proposition 3.1], to pozwala szacować normę H^{-1}.

Dodatkowo, w [20, Theorem 3.6] dowodzimy włożeń (również zwartych) przestrzeni miar Morreya w $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 2$. To twierdzenie było znane, jednak jego dowód w [32] był znacznie dłuższy i bardziej skomplikowany niż nasz. W szczególności używał teorii falek. Autorzy [32] stwierdzają, że zamieszczony tam dowód pochodzi od T.Tao i R.DeVore'a.

W pracy [13] zajmujemy się równaniem Huntera-Saxtona. Funkcja $u : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ spełania to równanie jeśli

$$\partial_t u(x,t) + \partial_x \left[\frac{1}{2} u^2(x,t)\right] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} w^2(x,t)dy, \quad w(x,t) = \partial_x u(x,t). \tag{2.22}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad w(x,0) = w_0(x) = u_0'(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Wiadomo, że dla pewnych danych nie istnieją globalne w czasie rozwiązania klasyczne. Dlatego wprowadza się słabe rozwiązania, te można zdefiniować globalnie w czasie, mamy jednak do czynienia z ich niejednoznacznością. Okazuje się jednak, że wśród wielu rozwiązań słabych można wybrać jednoznaczne rozwiązania dyssypatywne, po dowody i definicje odsyłamy do [47]. W pracach [22] oraz [23] Dafermos badał te rozwiązania. W pracy [23] udowodnił, że pod warunkiem, że startujemy z niemalejących danych początkowych u_0, rozwiązanie dyssypatywne jest tym, które minimalizuje straty energii E, gdzie E dane jest wzorem

$$E(t) := \int_{\mathbb{R}} w^2(x,t)dx,$$

w najwięszym tempie. Używając koncepcji charakterystyk uogólnionych z pracy [22] pokazaliśmy w [13], że ten fakt pozostaje prawdziwy dla wszystkich danych u_0 o skończonej energii. Wymagało to klasyfikacji charakterystyk dla dowolnych słabych rozwiązań (2.22), co samo w sobie wydaje się ciekawe, patrz rozdział trzeci naszej pracy. Ponadto, w wyniku obliczeń opartych na całce Stieltjesa, pewnych nowych oszacowań maksymalnych (patrz [13, Proposition 5.1]) czy pokryć Vitali'ego złych zbiorów (patrz [13, Lemma 4.4]), udało nam się doprowadzić rzecz do końca.

2.5 Nagrody, stypendia i granty badawcze

2008, Nagroda Wacławka za doktorat

2009, Nagroda Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego za doktorat w 2008 r.

2013, trzyletnie stypendium Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego dla Młodych Wybitnych Naukowców marzec 2013, zaproszony, jeden z ośmiu, referatów z okazji obchodów 40-lecia Zakładu Równań Różniczkowych Uniwersytetu Wrocławskiego i 85-lecia prof. Andrzeja Krzywickiego

2013-2016, członek jury konkursu Kuratowskiego.

2007-2008, grant promotorski MNiSW, wykonawca.

2009, projekt SPADE 2 Deterministic and stochastic dynamics, 7 program ramowy Unii Europejskiej, wykonawca.

2009-2011, grant niemiecki SFB Tr. 71 *Geometric Partial Differential Equations*, wykonawca.

grant MNiSW, NN 201366937, *Własności rozwiązań równań mechaniki ośrodka ciągłego i struktur geometrycznych*, wykonawca.

2012-2014, grant Iuventus Plus 0073/IP3/2011/71, zatytułowany *Badanie właściwości rozwiązań jednowymiarowych równan chemotaksji*, kierownik.

grant rządu hiszpańskiego pod tytułem *Sistemas de edps con difuzion cruzada. Aplicaciones a terapias y determinacion de parametros*, wykonawca.

program IRSES FLUX *Towards regularity*, 7 program ramowy Unii Europejskiej, wykonawca.

2013-2016, grant NCN *Osobliwe rozwiązania równań chemotaksji oraz nielepkiej hydro- i aerodynamiki*, kierownik.

2.6 Inna działalność naukowa

2.6.1 Dłuższe pobyty badawcze

2008, miesięczna wizyta na Université Paul Sabatier w Tuluzie, zaproszenie od Ph. Laurençot, stypendium z Université Paul Sabatier.

2008, miesięczna wizyta na Uniwersytecie Karola w Pradze, zaproszenie od Josefa Malka, stypendium z Centrum Necasa w Pradze.

2009, dwumiesięczny pobyt na Christian-Albrecht-Universität w Kilonii w ramach programu SPADE.

2013, miesięczna wizyta w Instytucie Stiekłowa, St. Petersburg, Rosja, w ramach programu IRSES FLUX.

2.6.2 Wybrane krótkie wyjazdy naukowe

- 2006, Uniwersytet Wrocławski
- 2006, Université Paul Sabatier w Tuluzie, Francja
- 2009, CRM, Barcelona, Hiszpania
- 2010, Universität Duisburg-Essen, Niemcy
- 2010, Politecnica de Madrid, Hiszpania
- 2011, SISSA, Triest, Włochy
- 2011, Uniwersytet w Sewilli, Hiszpania
- 2012, Uniwersytet w Odense, Dania
- 2012, Uniwersytet w Paderborn, Niemcy
- 2013, Uniwersytet w Sewilli, Hiszpania
- 2013, Uniwersytet Wrocławski

2.6.3 Cykle wykładów szkoleniowych

- lipiec 2012, cykl wykładów dla doktorantów w ramach programu ERASMUS, Uniwersytet w Odense.
- wrzesień 2014, *Convex integration scheme of producing rough solutions to Euler equations*, wykład szkoleniowy na IX Forum Równań Różniczkowych, Będlewo.

2.6.4 Wystąpienia konferencyjne i seminaryjne

Ponad 20 wykładów konferencyjnych lub seminaryjnych na wielu konferencjach w Polsce, Portugalii, Niemczech, Rosji, Danii, Czechach, Hiszpanii, Włoszech. Poniżej przykładowe zaproszone referaty wygłoszone podczas ostatnich lat.

- czerwiec 2010, Uniwersytet Duisburg-Essen, w ramach seminarium z analizy, tytuł: *Some parabolic models in the theory of hydrodynamics*
- listopad 2010, Politechnica de Madrid, w ramach "Meeting on chemotaxis", tytuł: *One-dimensional models of chemotaxis*
- marzec 2012, Seminarium Zakładu Równań Różniczkowych Uniwersytetu Wrocławskiego, tytuł: *Wybuchy w skończonym czasie rozwiązań w pełni parabolicznego quasiliniowego układu równań typu Keller-Segel*

- marzec 2013, 40-lecie Seminarium Zakładu Równań Różniczkowych Uniwersytetu Wrocławskiego i 85-lecie urodzin prof. Andrzeja Krzywickiego, Wrocław, tytuł: *Oszacowania Wolibnera i alternatywny dowód twierdzenia Yudovicha*

- maj 2013, Seminarium Równań Różniczkowych Uniwersytetu w Sewilli, dwa wykłady: *Prandtl spirals as elements of* H^{-1} oraz *No blowup for radially symmetric solutions to the Keller-Segel in a ring*

- listopad 2013, Seminarium Fizyki Matematycznej Instytutu Stiekłowa w St. Petersburgu, tytuł: *A model of chemorepulsion*

- marzec 2014, Seminarium Analizy Nieliniowej Uniwersytetu A. Mickiewicza w Poznaniu, tytuł: *Spirale Prandtla i Kadena jako przepływy generujące rotację*

- lipiec 2014, Madryt, w ramach konferencji AIMS, tytuł: *Critical mass in 2d volume filling Keller-Segel*

- wrzesień 2014, Poznań, w ramach wspólnego zjazdu PTM oraz DMV, tytuł: *Fully parabolic Keller-Segel model with volume filling*

2.6.5 Działalność recenzencka, organizacyjna, itp.

Jestem członkiem zarządu Warszawskiego Centrum Nauk Matematycznych.

Recenzowałem wiele artykułów wysłanych do różnych pism. Między innymi Journal of Differential Equations (3 razy), Discrete and Continuous Dynamical Systems B (5 razy), Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Anal. Non Linéaire, Nonlinearity, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, Journal of Biological Dynamics, Nonlinear Analysis TMA, Journal of Mathematical Analysis amd Applications, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Topological Methods in Nonlinear Analysis, Banach Center Publications, Communications on Pure and Applied Analysis.

Jestem też recenzentem dla bazy Math Sci Net American Mathematical Society.

Jestem członkiem jury konkursu Kuratowskiego na lata 2013-2016.

Wspólnie z prof. W. Zajączkowskim organizuję seminarium Równań Różniczkowych Cząstkowych w IMPAN.

Wspólnie z dr. P. Górką organizuję warsztaty z analizy dla doktorantów na Politechnice Warszawskiej.

Współorganizuję Young Researcher's Colloquium w IMPANie.

Na Festiwalu Nauki 2012 wygłosiłem wykład pt. "Paradoks d'Alemberta, czyli dlaczego samoloty nie powinny latać i dlaczego jednak latają".

Literatura

[1] N. Alikakos, An application of the invariance principle to Reaction-Diffusion equations. J. Differential Equations **33**, (1979) 203-225.

[2] H. Amann, J. López-Gómez, (1998). A priori bounds and multiple solutions for superlinear indefinite elliptic problems. J. Differential Equations **146** 336–374, (1998).

[3] L. Anton, Ausbildung eines Wirbels an der Kante einer Platte. Ing. Arch. **10** 411-427, (1939).

[4] J.-M. Delort, Existence de nappes de tourbillon en dimension deux. J. Amer. Math. Soc. **4** 553-586, (1991).

[5] P. Biler, Local and global solvability of some parabolic systems modelling chemotaxis, Adv. Math. Sci. Appl. **8**, (1998) 715-743.

[6] P. Biler, W. Hebisch, T. Nadzieja, The Debye system: existence and large time behavior of solutions. Nonlinear Anal. TMA **23**, (1994) 1189-1209.

[7] P. Biler, T. Nadzieja, Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interaction of particles I, Colloq. Math. **66**, (1994) 319-334.

[8] H. Brézis, F. Merle, Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of $-\Delta u = V(x)e^u$ in two dimensions. Commun. Partial Differential Equations **16**, 1223-1253 (1991).

[9] J. Burczak, T. Cieślak, C. Morales-Rodrigo, Global existence vs. blowup in a fully parabolic quasilinear 1D Keller-Segel system. Nonlinear Analysis TMA 75 (2012), 5215-5228.

[10] T. Cieślak, The solutions of the quasilinear Keller-Segel system concerning the volume-filling effect do not blow-up whenever the Lyapunov functional is bounded from below, Banach Center Publications (2006) vol.74, 127-132, Self-Similar Solutions of Nonlinear PDE, ed.: P.Biler, G.Karch.

[11] T. Cieślak, Quasilinear non-uniformly parabolic system modelling chemotaxis, Journal of Mathematical Analysis and Applications 326 (2007), 1410-1426.

[12] T. Cieślak, Global existence of solutions to a chemotaxis system with volume filling effect, Colloquium Mathematicum 111, (2008), 117-134.

[13] T. Cieślak, G. Jamróz, Maximal dissipation in Hunter-Saxton equation for bounded energy initial data. Preprint. arXiV 1405.7558.

[14] T. Cieślak, Ph. Laurençot, Finite time blow-up for radially symmetric solutions to a critical quasilinear Smoluchowski-Poisson system, Comptes Rendus Mathematique 347 (2009), 237-242.

[15] T. Cieślak, Ph. Laurençot, Looking for critical nonlinearity in the one-dimensional quasilinear Smoluchowski-Poisson system, Discrete and Continuous Dynamical Systems A 26 (2010), 417-430.

[16] T. Cieślak, Ph. Laurençot, Global existence vs. blowup for the one dimensional quasilinear Smoluchowski-Poisson system, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, vol. 80 (2011), 95-109.

[17] T. Cieślak, Ph. Laurençot, C. Morales-Rodrigo, Global existence and convergence to steady states in a chemorepulsion system, Banach Center Publ. vol.81, Parabolic and Navier-Stokes equations, 105-117. Eds. J.Rencławowicz, W. Zajączkowski.

[18] T. Cieślak, C. Morales-Rodrigo, Quasilinear nonuniformly parabolic-elliptic system modelling chemotaxis with volume filling effect. Existence and uniqueness of global solutions, Topological Methods in Nonlinear Analysis 29 (2007), 361-381.

[19] T. Cieślak, C. Morales-Rodrigo, Local behavior of an angiogenesis model with flux at the tumor boundary. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik 64 (2013), 1625-1641.

[20] T. Cieślak, M. Szumańska, A theorem on measures in dimension 2 and applications to vortex sheets. Journal of Functional Analysis 266 (2014), 6780-6795.

[21] T. Cieślak, M. Winkler, Finite time blow-up in a quasilinear system of chemotaxis, Nonlinearity 21(2008), 1057-1076.

[22] C. M. Dafermos, Generalized characteristics and the Hunter-Saxton equation. J. Hyperbolic Differ. Equ. **8**, 159-168 (2011).

[23] C. M. Dafermos, Maximal dissipation in equations of evolution. J. Differential Equations **252**, 567-587 (2012).

[24] E. Di Benedetto, Topics in Quasilinear Degenerate and Singular Parabolic Equation, in Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universitat, Bonn, Rudolph-Lipschitz-Vorlesung no.20, Sonderforschungsbereich 256, Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen.

[25] M.A. Herrero, J.J.L. Velázquez, A blow-up mechanism for a chemotaxis model. Ann. Scuola Norm. Sup. **24**, 633-683 (1997).

[26] T. Hillen, K.J. Painter, Volume-filling and quorum-sensing in models for chemosensitive movement. Canadian Applied Mathematics Quarterly **10**, 501-543 (2002).

[27] D. Horstmann, G. Wang, Blow-up in a chemotaxis model without symmetry assumptions. European J. Appl. Math. **12**, 159-177 (2001).

[28] D. Horstmann, M. Winkler, Boundedness vs. blow-up in a chemotaxis system. J. Differential Equations **215**, 52-107 (2005).

[29] S. Ishida, K. Seki, T. Yokota, Boundedness in quasilinear Keller-Segel system of parabolic-parabolic type on non-convex bounded domains. J. Differential Equations **256**, 2993-3010 (2014).

[30] W. Jäger, S. Luckhaus, On Explosions of Solutions To a System of Partial Differential Equations Modelling Chemotaxis, Trans. Amer. Math. Soc., **329**, 819-824 (1992).

[31] E. F. Keller, L. A. Segel, Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability. J. Theor. Biology **26**, 399–415 (1970).

[32] M. C. Lopes Filho, H.J. Nussenzveig Lopes, E. Tadmor, Approximate solutions of the incompressible Euler equations with no concentrations. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **17** 371-412, (2000).

[33] J. Moser, A sharp form of an inequality of N. Trudinger. Indiana Univ. Math. J. **20**, 1077-1092 (1971).

[34] T. Nagai, Blow-up of radially symmetric solutions to a chemotaxis system. Adv. Math. Sci. Appl. **5**, 581-601 (1995).

[35] T. Nagai, Blowup of nonradial solutions to parabolic-elliptic systems modeling chemotaxis in two-dimensional domains. J. Inequal. Appl. **6**, 37-55 (2001).

[36] T. Nagai, T. Senba, T. Suzuki, Chemotactic collapse in a parabolic system of mathematical biology. Hiroshima Math. J. **30**, 463-497 (2000).

[37] T. Nagai, T. Senba, K. Yoshida, Application of the Trudinger-Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis. Funkc. Ekvacioj **40**, 411-433 (1997).

[38] V. Nanjundiah, Chemotaxis, signal relaying and aggregation morphology. J. Theoretical Biology **42**, 63-105 (1973).

[39] M. Struwe, G. Tarantello, On multivortex solutions in Chern-Simons gauge theory. Bolletino U.M.I. (8) **1**, 109-121 (1998).

[40] Y. Tao, M. Winkler, Boundedness in a quasilinear parabolic-parabolic Keller-Segel system with subcritical sensitivity. J. Differential Equations **252**, 692-715 (2012).

[41] N. Trudinger, On imbeddings into Orlicz spaces and some applications. Indiana Univ. Math. J. **17**, 473-483 (1967).

[42] V. I. Yudovich, Some estimates connected with integral operators and with solutions of elliptic equations. Dokl. Akad. Nauk SSR **138**, 804-808 (1961).

[43] G. Wang, J. Wei, Steady state solutions of a reaction-diffusion system modeling chemotaxis. Math. Nachr. **233-234**, 221-236 (2002).

[44] M. Winkler, Boundedness in the higher-dimensional parabolic-parabolic chemotaxis system with logistic source. Comm. Partial Differential Equations **35**, 1516-1537 (2010).

[45] M. Winkler, Does a 'volume-filling effect' always prevent chemotactic collapse? Math. Meth. Appl. Sci. **33**, 12-24 (2010).

[46] M. Winkler, Finite-time blow-up in the higher-dimensional parabolic-parabolic Keller-Segel system. J. Math. Pures Appl. **100**, 748-767 (2013).

[47] P. Zhang, Y. Zheng, Existence and uniqueness of solutions to an asymptotic equation of a variational wave equation with general data. Arch. Ration. Mech. Anal. **155**, 49-83 (2000).

Tomasz Cieślak