Recenzja
rozprawy habilitacyjnej i dorobku naukowego
doktora Tomasza Cieślaka

Dr Tomasz Cieślak jest absolwentem Uniwersytetu Warszawskiego. Dyplom magistra matematyki otrzymał w 2004 r. na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki. W roku 2008 uzyskał stopień naukowy doktora nauk matematycznych w Instytucie Matematycznym PAN. Jego rozprawa doktorska nosiła tytuł "*Własności rozwiązań quasiliniowych układów równań parabolicznych opisujących chemotaksję*". Promotorem był dr hab. Dariusz Wrzosek. Na podkreślenie zasługuje fakt, iż rozprawa doktorska nagrodzona została Nagrodą Główną im. Wacławka przyznawaną przez Instytut Matematyczny PAN w 2008 r. oraz Nagrodą Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego za doktorat w 2009 r.

Habilitant opublikował dotychczas 17 prac naukowych, które w większości ukazały się w bardzo dobrych czasopismach głównie z zakresu równań różniczkowych, analizy oraz analizy funkcjonalnej i fizyki matematycznej. W tej liczbie14 prac ukazało się w czasopismach indeksowanych przez *Thomson-Reuters Web of Knowledge* (tzw *lista filadelfijska*). Jeśli chodzi o punktację (pochodzącą z wykazu czasopism Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego z 2014 r.) to 2 prace habilitanta ukazały się w czasopiśmie za 45 punktów (Journ. of Differential Equations.), pozostałe (po jednej publikacji) w

- Nonlin. Analysis (45),
- Journ. of Funct. Anal. (40),
- Ann. Inst. H. Poincare Anal. Nonlin., Discr. Cont. Dyn. Syst., Journ. Math. Anal. Appl., Nonlinearity, Top. Methods. Nonlin. Anal. (35),
- Acta. Math. Appl., ZAMP (30),
- Discr. Cont. Dyn. Syst. ser. B, (25),
- Compt. Rend. (20),
- Coll. Math. (15).

A. Ocena rozprawy habilitacyjnej

A.1 Krótkie omówienie rozprawy. W skład rozprawy habilitacyjnej zatytułowanej "*Wybuchy rozwiązań w pełni parabolicznego układu typu Keller-Segel*" wchodzi 5 prac. Ukazały się one drukiem w latach 2010-2014. Prace [CS1] i [CS3] zostały opublikowane w Journal of Differential Equations, [TM] w Discrete and Continuous Dynamical Systems, [CL] w Annales de l'Institut H. Poincare Analyse Nonlineaire, zaś [CS2] w Acta Applicandae Mathematicae. Habilitant jest jedynym autorem pracy [TM]. Pozostałe prace są z jednym współautorem: [CL] z Ph. Laurencotem, zaś [CS1]-[CS3] z C. Stinnerem.

Przejdę teraz do omówienia głównych wyników rozprawy. Dotyczą one układu równań cząstkowych określanego w literaturze mianem układu Keller-Segela, patrz (1.1) (numeracja pochodzi z autoreferatu). Jest to układ dwóch równań, który jest w pełni paraboliczny w przypadku gdy występujących w nich parametr $\varepsilon > 0$, zaś w przypadku $\varepsilon = 0$ jedno równanie jest paraboliczne, drugie zaś eliptyczne. Warunek brzegowy jest typu Neumanna, tzn układ jest izolowany w rozpatrywanym obszarze. Układ ten inspirowany jest zjawiskiem agregacji komórek badanym w naukach biologicznych. Człony zawierające pochodne drugiego rzędu (laplasjan w przypadku gdy $\phi \equiv 1$) odpowiadają za zjawisko dyssypacji w układzie, zaś wyrażenia pierwszego rzędu odpowiadają za zjawiska agregacji. W przypadku gdy agregacja dominuje rozwiązanie może wybuchać w skończonym czasie. Podstawowym zagadnieniem, którego dotyczy niniejsza rozprawa, jest problem czy rozwiązanie układu (1.1) może mieć wybuchającą normę $L^\infty(\Omega)$ w skończonym czasie. Oznacza to, iż rozwiązanie nie może być kontynuowane w sensie klasycznym (t.j. jako funkcja klasy C^2) i staje się dystrybucją. Ponieważ całka rozwiązania oraz znak jego pierwszej składowej $u(t,x)$ są stałe, zbiór na którym nieujemna funkcja $u(t,x)$ wybucha musi mieć miarę Lebesgue'a zero.

W pracy [CL] wspólnej z Ph. Laurencotem habilitant pokazał istnienie wybuchów w przypadku gdy wymiar przestrzenny $n = 1$, patrz Theorem 1, zaś obszar na którym sformułowany jest układ jest odcinkiem $(0, 1)$. Założenia przyjęte w tej pracy gwarantują potęgowo malejącą dyssypację, patrz warunek (13), średnia z drugiej składowej rozwiązania $v(t,x)$ (odpowiadającej stężeniu chemoatraktanta) w chwili zero wynosi 0 oraz całkowita masa M pozostaje w zależności od intensywności $\varepsilon > 0$, z jaką zmienia się stężenie chemoatraktanta, tak, że εM nie jest zbyt duże. Posługując się modyfikacją metody momentów oraz odpowiednio dobraną funkcją Lapunowa pokazano istnienie skończonego czasu $T > 0$, w którym funkcjonał $m_q(T)$, dany przez (1.9) znika. Oznacza to, iż rozwiązanie nie może być regularne, tak więc wybucha ono w skończonym czasie.

Na podkreślenie zasługuje fakt, iż jak zaznaczył to habilitant w swoim autoreferacie, był to pierwszy przykład quasiliniowego układu Keller-Segela, w którym udowodniono istnienie wybuchów.

Prace [CS1], [CS2] oraz [CS3] są artykułami wspólnymi habilitanta z Christianem Stinnerem. W pracach [CS1]-[CS2] kontynuowane jest badanie zagadnienie istnienia wybuchów w przypadku wielowymiarowym, gdy wymiar przestrzenny $n \geqslant 2$. Artykuł [CS1] dotyczy przypadku gdy $n \geqslant 3$, zaś [CS2] gdy $n = 2$. Autorzy wskazują w nich zbiór radialnie symetrycznych warunków początkowych, przy których rozwiązanie układu Kellera-Segela na kuli $B_R(0)$ w wymiarze $n \geqslant 2$, wybucha, patrz Twierdzenie 1.1 z pracy [CS1] oraz Twierdzenie 1.1 z pracy [CS2]. W dowodzie tych wyników używa się modyfikacji argumentu, adaptowanego do przypadku quasiliniowego, z pracy M. Winklera [46] (patrz lista referencji zawarta w autoreferacie) polegającego na oszacowaniu odpowiedniej funkcji Lypunowa $\mathcal{F}(u,v)$ przez wyrażenie odpowiadające produkcji entropii przez układ (1.1) (patrz (1.14)).

Z rezultatów pracy [CS1] wynika m. in., iż w przypadku gdy funkcje $\phi(s)$ i $\psi(s)$ występujące w układzie równań Kellera-Segela spełniają warunki (1.4), (1.5) z $\alpha > 4/(n+2)$ oraz (1.9) to zbiór radialnie symetrycznych warunków początkowych, przy których rozwiązania układu (1.1) w wymiarze $n \geqslant 3$, wybuchają w skończonym czasie jest gęsty w zbiorze fukcji lipschitzowskich, w topologii przestrzeni $L^p(B_R) \times W^{1,2}(B_R)$ (patrz Twierdzenie 1.1 oraz część ii) Twierdzenia 1.2).

Praca [CS2] podaje też warunek dostateczny, patrz Twierdzenie 1.4, dla globalnego istnienia klasycznego rozwiązania układu, w wymiarze $n \geqslant 2$. Sytuacja taka występuje wówczas gdy dyssypacja w układzie, opisana przez funkcję $\phi(s)$, jest dostatecznie silna, zaś czynnik $\psi(s)$, odpowiadający za zjawisko koncentracji rozwiązania i w efekcie za jego wybuch, nie jest zbyt duży (patrz warunek (1.14)). Ponadto wymaga się też aby między $\psi(s)$ oraz $\phi(s)$ zachodziła relacja (1.13).

Wyniki omówione powyżej są poprawione w pracy [CS3], tak iż m.in. możliwe jest sformułowanie alternatywy mówiącej o tym, iż w wymiarze $n \geqslant 2$ dla pewnej klasy układów Keller-Segela rozwiązanie istnieje globalnie jeśli $\phi(s) = (s+1)^{-p}, \psi(s) = s(1+s)^{q-1}$ oraz $p < 2/n - 2q$. Jeśli $p > 2/n - 2q$ to istnieją rozwiązania (radialnie symetryczne) wybuchające w normie L^∞ w nieskończonym czasie, gdy $q < 0$ oraz $2/n - q > p$, zaś w przypadku gdy $q > 2/n$ oraz $p > 2/n - q$ wybuchać one mogą w czasie skończonym, patrz Corollary 1.4 w pracy [CS3].

W artykule [TM], będącym samodzielną pracą habilitanta, pokazany został pewien wariant oszacowania typu Mosera-Trudingera dla funkcji radialnie symetrycznych na pierścieniu. Wynik ten jest następnie użyty w celu udowodnienia istnienia globalnego, klasycznego rozwiązania układu Kellera-Segela na pierścieniu w przypadku gdy $\phi(s) \equiv 1$ oraz $\psi(s) = s$, w przypadku gdy dane początkowe są funkcjami radialnie symetrycznymi, patrz Theorem 3 z pracy [TM].

A.2 Podsumowanie. Wyniki otrzymane przez habilitanta dotyczące wybuchów rozwiązań układu Kellera-Segela stanowią istotny wkład w badanie układów quasiliniowych równań parabolicznych. Pozwoliły one na sformułowanie dość precyzyjnych warunków dostatecznych, przy których układ ten dopuszcza istnienie rozwiązań radialnie symetrycznych wybuchających w skończonym, lub nieskończonym czasie w wymiarach $n \geqslant 2$. Bardzo wysoko oceniam rozprawę habilitacyjną przedstawioną przez dr Cieślaka. Rezultaty w niej zawarte są na bardzo dobrym, światowym poziomie, o czym m.in. świadczy fakt, iż wszystkie prace wchodzące w skład rozprawy ukazały się w znakomitych czasopismach matematycznych.

B. Ocena pozostałego dorobku naukowego.

W skład dorobku habilitacyjnego dr T. Cieślaka, nie będącego częścią rozprawy, wchodzi 12 prac. Spośród nich prace [2]-[4], [6], [7], [9], [11], [13], [16] (numeracja z listy publikacji załączonej do dokumentacji habilitanta) ukazały się w czasopismach indeksowanych przez Thomson Reuters w SCIENCE CITATION INDEX. Artykuły [1] – [3], są samodzielnymi pracami habilitanta, w dwóch pracach występuje on z 2 współautorami, a w pozostałych siedmiu z jednym współautorem. Prace habilitanta są cytowane 95 razy, według bazy Web of Science po odliczeniu autocytowań.

Prace habilitanta stanowiące jego dorobek podzielić można na 3 grupy tematyczne. Największą stanowią prace [1-4], [6-7], [9-11], które także dotyczą istnienia wykładników krytycznych dla niektórych wersji układu Kellera-Segela (jak np. układy Smoluchowskiego-Poissona), rozważanego w rozprawie habilitacyjnej. Na podkreślenie zasługuje tu praca [6], wspólna z M. Winklerem, w której uzyskano dość dokładny opis tych wykładników w przypadku eliptyczno-parabolicznym. Jest to najczęściej cytowana praca dr Cieślaka (32 cytowania za MathSciNet). Drugą grupę prac stanowią te poświęcone innym niż omawiany uprzednio układ Kellera-Segela, układom quasi-liniowych równań parabolicznych. Wymienić tu należy układ chemorepulsji (patrz (2.18)) badany w pracach [5] i [13]. Ponadto w jednej ze swoich ostatnich prac [16] (wspólnej z M. Szumańską) z geometrycznej teorii miary, habilitant dowodzi, iż borelowskie miary lokalnie samopodobne na $\mathbb{R}^2$ o zwartym nośniku należą do przestrzeni $H^{-1}(\mathbb{R}^2)$. Twierdzenie to jest zastosowane do opisu tzw. spiral Prandtla oraz Kadena. Są to obiekty ważne z punktu widzenia hydrodynamiki.

W latach 2009-11 dr Cieślak przebywał na postdocu w znakomitym ośrodku naukowym jakim jest Uniwersytet w Zurychu gdzie znajdował się pod opieką prof. C. De Lellisa. W trakcie swojej dotychczasowej kariery zbudował on liczne naukowe, z matematykami z Czech, Francji, Niemiec i Rosji. Kontakty te i potencjał badawczy dr Cieślaka z pewnością zaowocują w szybkim rozwoju dalszej kariery naukowej habilitanta. Podsumowując, uważam, iż dorobek naukowy dr Cieślaka jest na znakomitym poziomie. Habilitant jest matematykiem, posiadającym znaczną wiedzę i odznaczającym się wysoką kulturą matematyczną, którego wyniki budzą moje uznanie.

C. Konkluzja.

Uważam, iż zarówno rozprawa habilitacyjna jak i pozostały dorobek naukowy dr Tomasza Cieślaka stanowią ważny wkład do zrozumienia zagadnienia regularności rozwiązań nieliniowych równań ewolucyjnych typu parabolicznego. Habilitant jest światowej klasy ekspertem jeśli chodzi o swoją dziedzinę naukową. Uważam, iż dr Tomasz Cieślak jest już matematykiem w pełni dojrzałym i samodzielnym, tak, iż może on budować wokół siebie własną grupę badawczą. Wszystkie te przesłanki uzasadniają, moje gorące poparcie dla wniosku o nadanie mu stopnia doktora habilitowanego.

Lublin, 13 marca, 2015 r.

T. Komorowski

Tomasz Komorowski