Autoreferat do wniosku habilitacyjnego

Tomasz Kochanek

1 Podstawowe dane osobowe

- Imię i nazwisko: Tomasz Kochanek
- Adres: Instytut Matematyczny PAN, Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa
- E-mail: tkoch@impan.pl
- Strona WWW: https://www.impan.pl/~tkoch

2 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

- Doktor nauk matematycznych: rozprawa doktorska pt. *Zagadnienie stabilności dla funkcji arytmetycznych* napisana pod kierunkiem prof. dr. hab. Romana Gera; recenzenci: prof. dr hab. Henryk Hudzik i prof. dr hab. Andrzej Schinzel. Obroniona w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach w czerwcu 2010.
- Magister matematyki: praca magisterska pt. *O równaniu Gołąba-Schinzla* napisana pod kierunkiem prof. dr. hab. Romana Gera, obroniona w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach w maju 2006.

3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu

- od października 2013: Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk oraz Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego (7-letnia pozycja łączona); stanowisko: adiunkt.
- od czerwca 2019: Wydział Informatyki Politechniki Czeskiej w Pradze; w ramach projektu GAČR 18-00960Y – *Vybraná témata nelineární funkcionální analýzy a teorie aproximací.*
- październik 2010 – wrzesień 2013: Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach; stanowisko: adiunkt.
- październik 2008 – wrzesień 2010: Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach; stanowisko: asystent.

Wizyty naukowe:

- listopad 2016: Uniwersytet Karola w Pradze, Czechy; wizyta naukowa na zaproszenie dr. Marka Cútha i prof. Ondřeja Kalendy
- maj 2016: Uniwersytet w Murcji, Hiszpania; wizyta naukowa na zaproszenie prof. Antonio Avilésa.
- marzec 2014: Uniwersytet w Debreczynie, Węgry; wizyta naukowa na zaproszenie prof. Lajosa Molnára i prof. Zsolta Pálesa.

4 Wskazane osiągnięcia habilitacyjne

4.a. Wskazanym osiągnięciem jest cykl 7 prac zatytułowany

Problem trzech przestrzeni i metody pozaskończone
w geometrii przestrzeni Banacha.

4.b. Składają się na niego następujące publikacje:

[Koc13] T. Kochanek, *Stability of vector measures and twisted sums of Banach spaces*, Journal of Functional Analysis **264** (2013), 2416–2456.

[KK14] T. Kania, T. Kochanek, *The ideal of weakly compactly generated operators acting on a Banach space*, Journal of Operator Theory **71** (2014), 455–477.

[HKK14] K.P. Hart, T. Kania, T. Kochanek, *A chain condition for operators from $C(K)$-spaces*, Quarterly Journal of Mathematics **65** (2014), 703–715.

[KK16] T. Kania, T. Kochanek, *Uncountable sets of unit vectors that are separated by more than* 1, Studia Mathematica **232** (2016), 19–44.

[DK16] S. Draga, T. Kochanek, *Direct sums and summability of the Szlenk index*, Journal of Functional Analysis **271** (2016), 642–671.

[DK17] S. Draga, T. Kochanek, *The Szlenk power type and tensor products of Banach spaces*, Proceedings of the American Mathematical Society **145** (2017), 1685–1698.

[CDK19] R.M. Causey, S. Draga, T. Kochanek, *Operator ideals and three-space properties of asymptotic ideal seminorms*, Transactions of the American Mathematical Society **371** (2019), 8173–8215.

W przypadku prac: [KK14], [KK16], [DK16] i [DK17] wkład każdego z współautorów należy ocenić na około 50%. Wkład autora rozprawy w prace [HKK14] i [CDK19] to około 40%. Odpowiednie oświadczenia współautorów zostały dołączone do wniosku.

4.c. Omówienie celu naukowego i osiągniętych wyników

4.c.1. Wstęp

Tematem rozprawy są pewne zagadnienia teorii przestrzeni Banacha dotyczące geometrii i geometrii asymptotycznej, domkniętych dwustronnych ideałów w algebrze operatorów ograniczonych, a także własności strukturalnych – ze szczególnym uwzględnieniem badania rozszerzeń przez krótkie ciągi dokładne i związków z miarami wektorowymi. Wspólnym mianownikiem tych badań jest tzw. *problem trzech przestrzeni* oraz stosowanie metod pozaskończonych, które w części poświęconej geometrii opierają się głównie na użyciu *indeksu Szlenka*, jednego z najważniejszych indeksów porządkowych w teorii przestrzeni Banacha.

Ogólne sformułowanie problemu trzech przestrzeni jest następujące: niech $\mathcal{P}$ będzie własnością mogącą przysługiwać przestrzeniom Banacha i załóżmy, że X jest przestrzenią zawierającą domkniętą podprzestrzeń Y, przy czym zarówno Y, jak i przestrzeń ilorazowa

X/Y mają własność $\mathcal{P}$. Czy także X musi mieć wówczas własność $\mathcal{P}$? Jeśli odpowiedź jest twierdząca, to mówimy, że $\mathcal{P}$ jest *własnością trzech przestrzeni* (w skrócie: 3SP od ang. *three-space property*). Dla niektórych $\mathcal{P}$ (takich jak np. ośrodkowość, czy refleksywność) odpowiedź daje się uzyskać elementarnie, jednak często problem ten okazuje się nietrywialny i prowadzi do ciekawych konstrukcji nowych przestrzeni (przegląd klasycznych wyników można znaleźć w monografii [21]). Pierwszym spektakularnym rezultatem na temat problemu trzech przestrzeni było negatywne rozwiązanie problemu Palaisa przez Enflo, Lindenstraussa i Pisiera [37], którzy pokazali, że własność bycia przestrzenią izomorficzną z przestrzenią Hilberta nie jest własnością 3SP, choć już superrefleksywność taką własnością jest, podobnie jak posiadanie nietrywialnego typu Rademachera. Wynik dla superrefleksywności opierał się na wyrażeniu tej własności w języku asymptotycznego zachowania się ciągu „stałych typowych" odpowiadających *typowi martyngałowemu*, wprowadzonemu przez Pisiera [86], oraz na wyprowadzeniu nierówności wiążącej stałe typowe odpowiadające przestrzeniom X, Y oraz X/Y. W podobnym schemacie przebiega dowód własności 3SP dla typu Rademachera, oczywiście z nierównością wiążącą stałe rademacherowskie. Strategia ta była inspiracją dla dowodu jednego z głównych twierdzeń pracy [CDK19], które mówi, że możliwość asymptotycznie jednostajnie gładkiego przenormowania, z danym optymalnym typem potęgowym p modułu asymptotycznej gładkości, jest własnością 3SP. Omówimy to dokładnie w sekcji 4.c.8.

Problem trzech przestrzeni można, rzecz jasna, rozważać w odniesieniu do krótkich ciągów dokładnych w zupełnie dowolnej kategorii obiektów. Dla lokalnie ograniczonych F-przestrzeni (czyli przestrzeni quasi-Banacha), które różnią się od przestrzeni Banacha brakiem lokalnej wypukłości, teoria ta została rozwinięta przez Kaltona [53]. Charakteryzując rozszczepialność krótkich ciągów dokładnych przez pewien efekt stabilności dla odwzorowań *quasi-liniowych*, pokazał on, że w pewnym sensie metoda użyta przez Enflo, Lindenstraussa i Pisiera przy konstrukcji kontrprzykładu do problemu Palaisa była jedyną możliwą i musiała opierać się na znalezieniu quasi-liniowego odwzorowania $\ell_2 \to \ell_2$ niedającego przybliżyć się żadnym odwzorowaniem liniowym (niezbędne definicje będą podane w sekcji 4.c.2). Rozważając tego typu stabilność, Kalton wprowadził klasę $\mathcal{K}$-*przestrzeni*, dla których każde quasi-liniowe odwzorowanie o wartościach rzeczywistych da się odpowiednio przybliżyć odwzorowaniem liniowym. We wspólnej pracy z Robertsem [58] wykazali, że c_0 i ℓ_∞ (ogólniej: wszystkie $\mathscr{L}_\infty$-przestrzenie) są $\mathcal{K}$-przestrzeniami, przy czym kluczowym krokiem w dowodzie było twierdzenie o stabilności dla prawie addytywnych funkcji zbioru. W artykule [Koc13] zajmujemy się wektorowymi wersjami tego twierdzenia uzyskując tym samym szereg związków pomiędzy problemem stabilności dla miar wektorowych a własnościami rozszerzeń przez krótkie ciągi dokładne, w tym własnościami 3SP. Będzie to treścią podrozdziału 4.c.3.

W dwóch dalszych podrozdziałach omawiamy prace [KK14], [HKK14], dotyczące struktury kraty domkniętych dwustronnych ideałów w algebrze operatorów ograniczonych na przestrzeni Banacha, a także pracę [KK16] dotyczącą *stricte* geometrii sfery jednostkowej nieośrodkowych przestrzeni Banacha. Cechą charakterystyczną tych badań jest stosowanie metod pozaskończonych – klasyczna indukcja pozaskończona jest tu łączona z metodami kombinatoryki nieskończonościowej (takimi jak techniki ramseyowskie, czy też kombinatoryka na ω_1) oraz metodami teorii przestrzeni Banacha i operatorów na nich (jak np. projekcyjne rozkłady jedności, czy też charakteryzacje słabej zwartości w duchu twierdzenia Pełczyńskiego). W artykule [KK14] wprowadzamy ideał operatorów *słabo zwarcie generowalnych* jako tych operatorów, których obraz zawarty jest w pewnej słabo zwarcie generowalnej (WCG od ang. *weakly compactly generated*) podprzestrzeni przeciwdziedziny. Badanie przestrzeni WCG zostało zainicjowane przez Amira i Lindenstraussa [4], którzy wykazali szereg fundamentalnych twierdzeń strukturalnych, m.in. to, że na każdej przestrzeni WCG działa pewien różnowartościowy, ograniczony operator liniowy w przestrzeń $c_0(\Gamma)$, dla pewnego zbioru indeksów Γ. Wprowadzenie pojęcia ideału operatorów WCG pozwoliło zidentyfikować jedyny maksymalny (domknięty, dwustronny) ideał w algebrze operatorów na tzw. *długiej przestrzeni Jamesa* $\mathcal{J}_p(\omega_1)$ (dla $1 < p < \infty$), a także podać kilka równoważnych jego opisów. W pracy [HKK14] dążyliśmy do podania odpowiednika twierdzenia Pełczyńskiego [84], oryginalnie odnoszącego się do operatorów słabo zwartych, który działałby dla operatorów WCG określonych na przestrzeni $C(K)$ funkcji ciągłych na zwartej przestrzeni Hausdorffa K. Określiliśmy *porządek zgodności* $\prec$ na $C(K)$ i zaproponowaliśmy warunek nieodseparowywania nieprzeliczalnych $\prec$-łańcuchów. Warunek ten lokuje się pomiędzy słabą zwartością a słabą zwartą generowalnością, w pewnych sytuacjach, np. dla ekstremalnie niespójnej K, charakteryzuje on dokładnie operatory słabo zwarte. Artykuł [KK16], jak już wspomnieliśmy, dotyczy geometrii sfery jednostkowej S_X nieośrodkowej przestrzeni Banacha. Był on zainspirowany dwoma klasycznymi wynikami na temat zbiorów odseparowanych w dowolnej nieskończenie wymiarowej przestrzeni unormowanej X: twierdzeniem Kottmana [64] mówiącym, że S_X zawiera nieskończony ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ o tej własności, że $\|x_m - x_n\| > 1$ dla wszelkich $m \neq n$, oraz silniejszym twierdzeniem Eltona-Odella [36], które mówi, że istnieje takie $\varepsilon = \varepsilon(X) > 0$ oraz taki ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset S_X$, że $\|x_m - x_n\| \geqslant 1 + \varepsilon$ dla wszelkich $m \neq n$. Omówimy kilka rezultatów będących odpowiednikami tych dwóch twierdzeń w sytuacji, gdy X jest przestrzenią nieośrodkową i żądamy, aby moc odseparowanego podzbioru S_X była nie tylko nieskończona, ale i nieprzeliczalna. Okazuje się m.in. że dla nieośrodkowych przestrzeni refleksywnych prawdziwy jest nieprzeliczalny odpowiednik twierdzenia Kottmana, podczas gdy dla nieośrodkowych przestrzeni superrefleksywnych zachodzi nieprzeliczalny odpowiednik twierdzenia Eltona-Odella.

Sekcja 4.c.6 poświęcona jest omówieniu podstawowych definicji i faktów dotyczących indeksu Szlenka, który jest indeksem porządkowym przypisanym każdej przestrzeni Asplunda. Pojęcie to wprowadził Szlenk [95] w celu udzielenia negatywnej odpowiedzi na pytanie o istnienie przestrzeni uniwersalnej w klasie ośrodkowych i refleksywnych przestrzeni Banacha. Indeks Szlenka definiowany jest przez pozaskończony ciąg *derywacji* jednostkowej kuli dualnej, które na każdym kroku wycinają *-słabo otwarte zbiory o małej średnicy; jeśli przestrzeń jest przestrzenią Asplunda, to po pewnej (być może pozaskończonej) liczbie kroków otrzymamy zbiór pusty. Derywacje te przypominają pochodną zbioru w klasycznej topologii i, rzeczywiście, indeks Szlenka jest analogonem indeksu Cantora-Bendixsona, co najogólniej wyraża niedawne twierdzenie Causeya [23] mówiące, że dla dowolnej zwartej przestrzeni Hausdorffa K indeks Szlenka przestrzeni $C(K)$ jest równy najmniejszej liczbie porządkowej postaci ω^{ξ}, nieprzekraczającej indeksu Cantora-Bendixsona przestrzeni K.

Zachowanie się indeksu Szlenka oraz pewnych wielkości z nim związanych (w szczególności tzw. *typu potęgowego Szlenka*) tłumaczy się zarówno na własności strukturalne, jak i geometryczne danej przestrzeni Banacha. Zwłaszcza silne są związki z wielkościami opisującymi geometrię asymptotyczną przestrzeni, takimi jak moduły asymptotycznej gładkości i wypukłości wprowadzone przez Milmana [79]. Co więcej, także pokrewne pojęcie *sumowalności* indeksu Szlenka, zdefiniowane w pracy Knausta, Odella i Schlumprechta [61], odgrywa ważną rolę w teorii przenormowań i klasyfikacji przestrzeni Banacha względem jednostajnych homeomorfizmów, co jest przedmiotem fundamentalnej pracy Godefroy, Kaltona i Lanciena [42]. W sekcji 4.c.7 omawiamy dwa artykuły [DK16] i [DK17] poświęcone badaniom nad zachowywaniem się typu potęgowego i sumowalności indeksu Szlenka ze względu na branie (nieskończonych) sum prostych oraz injektywnych iloczynów tensorowych. Ten drugi aspekt daje np. ciekawe wnioski na temat asymptotycznej geometrii pewnych przestrzeni operatorów zwartych. Warto zaznaczyć, że tego typu zagadnienia wpisują się w szerszy schemat badań teorii przestrzeni Banacha polegający na stosowaniu różnorodnych indeksów pozaskończonych, mających uchwycić interesujące nas własności strukturalne w sposób jakościowy (przykładem jest ℓ_1-*indeks* Bourgaina [11] mierzący stopień skomplikowania „ℓ_1-podstruktur"danej przestrzeni). Indeks Szlenka oraz typ potęgowy mają też związki z teorią ideałów w algebrach operatorów na przestrzeni Banacha. Związkom tym poświęcona jest część pracy [CDK19], która będzie tematem ostatniego podrozdziału, w którym to omówimy również główny wynik tej pracy mówiący, że posiadanie typu potęgowego Szlenka nieprzekraczającego danej liczby $p \in [1, \infty)$ jest własnością $\mathsf{3SP}$.

4.c.2. Problem trzech przestrzeni

W dalszej części tekstu przez *operator* rozumiemy operator liniowy i ograniczony działający między dwiema przestrzeniami Banacha. Symbolem $\mathscr{B}(X, Y)$ oznaczamy przestrzeń operatorów działających między przestrzeniami X i Y, a symbolem $\mathscr{B}(X)$ przestrzeń $\mathscr{B}(X, X)$. Fakt istnienia izomorfizmu dwóch przestrzeni Banacha X i Y, czyli bijetywnego operatora z $\mathscr{B}(X, Y)$, notujemy symbolem $X \sim Y$. Przez B_X i S_X oznaczamy odpowiednio domkniętą kulę jednostkową oraz sferę jednostkową przestrzeni X.

Krótkim ciągiem dokładnym (w kategorii Ban przestrzeni Banacha) nazywamy diagram postaci

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{\ i\ } Z \xrightarrow{\ q\ } X \longrightarrow 0, \tag{4.1}$$

gdzie $X, Y, Z \in \mathsf{Ban}$, $i\colon Y \to Z$ jest operatorem injektywnym, $q\colon Z \to X$ operatorem surjektywnym oraz $\mathrm{im}(i) = \ker(q)$. Wówczas Z zawiera podprzestrzeń $i(Y)$ izomorficzną z Y, a z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym wnosimy, że $Z/i(Y) \sim X$ przez izomorfizm $T\colon Z/Y \to X$ spełniający $T \circ \pi = q$, gdzie π to kanoniczne rzutowanie Z na Z/Y. Mówimy, że ciągi dokładne $0 \to Y \to Z_1 \to X \to 0$ oraz $0 \to Y \to Z_2 \to X \to 0$ są *równoważne*, jeżeli istnieje taki operator $T \in \mathscr{B}(Z_1, Z_2)$, że następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z_1 \arrow[r] \arrow[d, "T"] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z_2 \arrow[r] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dla dowolnych przestrzeni Banacha X i Y mamy zawsze trywialny ciąg dokładny

$$0 \to Y \to Y \oplus X \to X \to 0, \tag{4.2}$$

w którym rozważamy kanoniczne zanurzenie Y w $Y \oplus X$ oraz kanoniczne rzutowanie z $Y \oplus X$ na X. Mówimy, że ciąg dokładny (4.1) *rozszczepia się*, jeżeli jest on równoważny z ciągiem (4.2). W takim przypadku musi oczywiście zachodzić $Z \sim X \oplus Y$, choć nie jest to warunek wystarczający[1]. Przytoczmy tu podstawowy fakt charakteryzujący

[1] Kwestia ta związana jest z tzw. problemem Hartego. Okazuje się, że istnieje nawet przykład nierozszczepialnego ciągu dokładnego postaci $0 \to X \to X \oplus X \to X \to 0$; tutaj oczywiście zanurzenie X w $X \oplus X$ nie jest zanurzeniem kanonicznym (zob. [21, §1.10]).

rozszczepialność krótkich ciągów dokładnych ([21, §1.1]).

Stwierdzenie 4.1. *Niech* (4.1) *będzie ciągiem dokładnym przestrzeni Banacha X, Y i Z. Wówczas następujące warunki są parami równoważne:*

(i) *ciąg* (4.1) *rozszczepia się;*
(ii) *zanurzenie i dopuszcza retrakcję, tj. taki operator $r\colon Z \to Y$, że $r \circ i = \mathrm{id}_Y$;*
(iii) *iloraz q dopuszcza podniesienie, tj. taki operator $s\colon X \to Z$, że $q \circ s = \mathrm{id}_X$;*
(iv) *podprzestrzeń $i(Y)$ jest komplementarna w Z.*

Definicja 4.2. Przez *sumę skrętną* (ang. *twisted sum*) przestrzeni Banacha Y i X (kolejność jest tu istotna) rozumiemy dowolny ciąg dokładny postaci (4.1), przy czym na ogół mówimy o samej przestrzeni Z jako o sumie skrętnej Y i X, mając na myśli, że Z zawiera podprzestrzeń izomorficzną z Y, przy czym $Z/Y \sim X$. Mówimy, że dwie sumy skrętne są równoważne, jeżeli odpowiadające im ciągi dokładne są równoważne.

Symbolem Ext oznaczamy funktor, który każdej parze przestrzeni Banacha przypisuje rodzinę wszystkich klas równoważności sum skrętnych tych przestrzeni. Każdy element $\mathrm{Ext}(X,Y)$ nazywamy *rozszerzeniem przestrzeni X o przestrzeń Y*. Stosujemy zapis $\mathrm{Ext}(X,Y) = 0$, jeżeli każda suma skrętna przestrzeni Y i X jest trywialna, tj. równoważna z $Y \oplus X$.[2] Mamy więc na przykład:

- $\mathrm{Ext}(X,M) = 0$ dla dowolnych przestrzeni Banacha X i M, przy czym $\dim M < \infty$;
- $\mathrm{Ext}(X,\ell_\infty) = 0$ dla każdej przestrzeni Banacha X;
- $\mathrm{Ext}(X,c_0) = 0$ dla każdej ośrodkowej przestrzeni Banacha;
- $\mathrm{Ext}(L_1(\mu),Y) = 0$ dla dowolnej miary dodatniej μ i każdej przestrzeni Banacha Y komplementarnej w Y^{**}.

Pierwszy fakt to proste zastosowanie twierdzenia Hahna-Banacha. Drugi to injektywność przestrzeni ℓ_∞, czyli również prosty wniosek z twierdzenia Hahna-Banacha mówiący, że ℓ_∞ jest zawsze podprzestrzenią komplementarną. Trzeci fakt to twierdzenie Sobczyka o komplementarności c_0 w dowolnej ośrodkowej nadprzestrzeni. Ostatni to twierdzenie Lindenstraussa o podniesieniu (ang. *Lindenstrauss' lifting principle*); zob. [57, Prop. 2.1].

Podobną terminologię, jak opisana wyżej (ciąg dokładny, równoważność, rozszczepialność, czy suma skrętna), z oczywistymi modyfikacjami, stosujemy dla kategorii $\mathsf{q\text{-}Ban}$ przestrzeni quasi-Banacha lub, co na jedno wychodzi, lokalnie ograniczonych F-przestrzeni[3].

[2]Zwróćmy uwagę na zmianę kolejności argumentów funktora Ext w porównaniu z nazewnictwem sumy skrętnej. Jest to konwencja dość powszechnie przyjęta w literaturze.

[3]Przypomnijmy, że *F-przestrzenią* nazywamy przestrzeń liniowo-topologiczną, której topologia dana jest przez zupełną i niezmienniczą na przesunięcia metrykę. *Quasi-normą* na rzeczywistej bądź zespolonej przestrzeni liniowej X nazywamy funkcję $|\cdot|\colon X \to [0,\infty)$ spełniającą dwa pierwsze aksjomaty normy, wraz z osłabioną nierównością trójkąta: $|x+y| \leqslant C(|x|+|y|)$ $(x,y \in X)$ zachodzącą z pewną stałą $C \geqslant 1$. Najmniejszą taką stałą nazywamy *modułem wklęsłości* quasi-normy $|\cdot|$. Jeżeli X jest *lokalnie ograniczoną* przestrzenią liniowo-topologiczną, tj. ma bazę otoczeń zera złożoną ze zbiorów ograniczonych, to jej topologia zadana jest przez quasi-normę będącą funkcjonałem Minkowskiego dowolnego zbalansowanego i ograniczonego otoczenia zera. Na odwrót, każda przestrzeń quasi-unormowana $(X,|\cdot|)$ jest lokalnie ograniczona, gdyż bazą otoczeń zera jest rodzina $\{\varepsilon U\colon \varepsilon > 0\}$, gdzie U jest otwartą kulą jednostkową. Co więcej, klasyczne twierdzenie Aoki-Rolewicza gwarantuje, że $|\cdot|$ jest *p-wypukła*, tzn. spełnia nierówność $|x+y|^p \leqslant |x|^p + |y|^p$ $(x,y \in X)$, gdzie $0 < p \leqslant 1$ jest stałą określoną warunkiem $(2C)^p = 2$. Na X mamy więc metrykę $d(x,y) = |x-y|^p$ i jeśli jest ona zupełna, to przestrzeń X nazywamy przestrzenią *quasi-Banacha*. Podsumowując, lokalnie ograniczone F-przestrzenie to dokładnie przestrzenie *quasi-Banacha*.

Jeżeli $X, Y \in \mathsf{q\text{-}Ban}$, to mówimy, że para (X, Y) *rozszczepia się*, jeżeli dla każdej przestrzeni $Z \in \mathsf{q\text{-}Ban}$ tworzącej ciąg dokładny (4.1) ciąg ten rozszczepia się. Podkreślmy, że dla $X, Y \in \mathsf{Ban}$ warunek rozszczepialności pary (X, Y) jest (przynajmniej formalnie) silniejszy niż warunek $\mathrm{Ext}(X, Y) = 0$, bowiem w tym drugim przypadku żądamy rozszczepialności ciągu (4.1) przy dodatkowym założeniu lokalnej wypukłości przestrzeni Z. Zgodnie z tą uwagą można zadać naturalne pytanie, czy mając dwie przestrzenie Banacha Y i X, każda ich suma skrętna z kategorii $\mathsf{q\text{-}Ban}$ musi być tak naprawdę przestrzenią Banacha, innymi słowy – czy lokalna wypukłość jest własnością $\mathsf{3SP}$? Negatywną odpowiedź uzyskali niezależnie od siebie, i różnymi metodami, Kalton [53], Ribe [87] i Roberts [88]. Okazało się, że nawet *minimalne rozszerzenia*, tj. rozszerzenia o przestrzeń jednowymiarową $\mathbb{R}$, mogą nie być lokalnie wypukłe. Pokazuje to, jak drastyczny jest brak twierdzenia Hahna-Banacha w kategorii $\mathsf{q\text{-}Ban}$.

Twierdzenie 4.3 (Kalton, Ribe, Roberts)**.** *Para $(\ell_1, \mathbb{R})$ nie rozszczepia się.*

Kalton i Peck [55] wprowadzili pojęcie *$\mathcal{K}$-przestrzeni* jako takiej przestrzeni quasi-Banacha X, dla której para $(X, \mathbb{R})$ rozszczepia się. Powyższy wynik można więc wysłowić mówiąc, że ℓ_1 nie jest $\mathcal{K}$-przestrzenią. Dowód twierdzenia 4.3 oparty jest na pewnym ogólnym schemacie, który – jak pokazał Kalton w [53] – jest uniwersalną i w zasadzie jedyną metodą konstruowania nierozszczepiających się ciągów dokładnych.

Definicja 4.4. Niech X i Y będą przestrzeniami quasi-unormowanymi. Odwzorowanie $f\colon X \to Y$ nazywamy *quasi-liniowym*, jeżeli:

(i) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$;

(ii) $\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leqslant c(\|x\| + \|y\|)$ dla $x, y \in X$,

gdzie $c < \infty$ jest liczbą niezależną od x i y. Symbolem $\Delta(f)$ oznaczamy najmniejszą możliwą wartość c w warunku (ii); przez $\Lambda(X, Y)$ oznaczamy przestrzeń wszystkich odwzorowań quasi-liniowych z X do Y.

Odwzorowanie $f\colon X \to Y$ nazywamy *zero-liniowym*, jeżeli spełnia warunek (i), a także

(iii) $\displaystyle \Big\| f\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big) - \sum_{i=1}^n f(x_i) \Big\| \leqslant C \sum_{i=1}^n \|x_i\|$ dla wszelkich $n \in \mathbb{N}$ oraz $x_1, \ldots, x_n \in X$,

gdzie $C < \infty$ nie zależy od wyboru $x_1, \ldots, x_n \in X$. Symbolem $Z(f)$ oznaczamy najmniejszą możliwą wartość C w warunku (iii); przez $\Xi(X, Y)$ oznaczamy przestrzeń wszystkich odwzorowań zero-liniowych z X do Y.

Następujące fundamentalne twierdzenie pochodzące z [53] łączy problem rozszczepialności z efektem stabilności dla odwzorowań quasi- i zero-liniowych, czyli możliwością stosownego przybliżania ich odwzorowaniami liniowymi.[4]

Twierdzenie 4.5 (Kalton)**.** *Niech X i Y będą przestrzeniami quasi-Banacha i niech X_0 będzie gęstą podprzestrzenią przestrzeni X. Wówczas następujące warunki są parami równoważne:*

(i) *para (X, Y) rozszczepia się;*

[4] Podkreślmy, że nie zakładamy tutaj ciągłości odwzorowań liniowych, quasi-liniowych, ani zero-liniowych.

(ii) *jeżeli* $f \in \Lambda(X_0, Y)$, *to istnieje takie odwzorowanie liniowe* $h\colon X_0 \to Y$ *oraz stała* $L < \infty$, *że*
$$\|f(x) - h(x)\| \leqslant L\|x\| \quad dla\ x \in X_0;$$

(iii) *istnieje taka stała* $B < \infty$ (*zależna tylko od* X_0 *i* Y), *że dla dowolnego* $f \in \Lambda(X_0, Y)$ *istnieje odwzorowanie liniowe* $h\colon X_0 \to Y$ *spełniające*
$$\|f(x) - h(x)\| \leqslant B \cdot \Delta(f)\|x\| \quad dla\ x \in X_0.$$

W celu znalezienia odpowiednika twierdzenia 4.5 w przypadku lokalnie wypukłym, Cabello Sánchez i Castillo [14] rozważali odwzorowania zero-liniowe. Zauważyli oni, że bez większych zmian w oryginalnym dowodzie Kaltona otrzymujemy następujący wynik.

Twierdzenie 4.6 (zasadniczo Kalton)**.** *Niech* X *i* Y *będą przestrzeniami Banacha i niech* X_0 *będzie gęstą podprzestrzenią* X. *Wówczas następujące warunki są parami równoważne:*

(i) $\mathrm{Ext}(X, Y) = 0$;

(ii) *jeżeli* $f \in \Xi(X_0, Y)$, *to istnieje takie odwzorowanie liniowe* $h\colon X_0 \to Y$ *oraz stała* $L < \infty$, *że*
$$\|f(x) - h(x)\| \leqslant L\|x\| \quad dla\ x \in X_0;$$

(iii) *istnieje taka stała* $B < \infty$ (*zależna tylko od* X_0 *i* Y), *że dla dowolnego* $f \in \Xi(X_0, Y)$ *istnieje odwzorowanie liniowe* $h\colon X_0 \to Y$ *spełniające*
$$\|f(x) - h(x)\| \leqslant B \cdot Z(f)\|x\| \quad dla\ x \in X_0.$$

Opiszemy teraz ogólną metodę konstrukcji sum skrętnych przestrzeni (quasi-)Banacha (zob. [56]). Załóżmy, że $X, Y \in \mathsf{q\text{-}Ban}$ i że dane jest odwzorowanie $f \in \Lambda(X, Y)$. Rozważmy algebraiczną sumę prostą $Y \oplus X$, którą wyposażamy w quasi-normę daną wzorem $\|(y, x)\| = \|x\| + \|y - f(x)\|$. Otrzymaną przestrzeń quasi-unormowaną oznaczamy symbolem $Y \oplus_f X$. W przypadku, gdy $X, Y \in \mathsf{Ban}$, przestrzeń $Y \oplus_f X$ jest lokalnie wypukła (a zatem izomorficzna z przestrzenią Banacha) wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in \Xi(X, Y)$, i wówczas $Y \oplus_f X$ jest reprezentantem jednego z elementów $\mathrm{Ext}(X, Y)$ (zob. [14, Thm. 2]).

Własności stabilnościowe podane w twierdzeniach 4.5 i 4.6 możemy przeformułować w języku *odległości* między odwzorowaniami quasi-liniowymi, zdefiniowanej następująco: dla jednorodnych odwzorowań $f, g\colon X \to Y$ niech
$$\mathrm{dist}(f, g) = \sup\{\|f(x) - g(x)\| : \|x\| \leqslant 1\}.$$

Dwa ciągi dokładne $0 \to Y \to Y \oplus_f X \to X \to 0$ oraz $0 \to Y \to Y \oplus_g X \to X \to 0$ są wówczas równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy różnica $f - g$ jest odwzorowaniem trywialnym w tym sensie, że dla pewnego odwzorowania liniowego $h\colon X \to Y$ zachodzi $\mathrm{dist}(f - g - h) < \infty$. W szczególności, ciąg $0 \to Y \to Y \oplus_f X \to X \to 0$ rozszczepia się wtedy i tylko wtedy, gdy f leży w skończonej odległości od pewnego odwzorowania liniowego.

Uniwersalność opisanej wyżej konstrukcji przestrzeni $Y \oplus_f X$ wynika z następującego twierdzenia Kaltona-Pecka [56].

Twierdzenie 4.7 (Kalton, Peck)**.** *Niech X i Y będą przestrzeniami quasi-Banacha (lokalnie ograniczonymi F-przestrzeniami). Wówczas dla każdej sumy skrętnej Z przestrzeni Y i X istnieje takie $f \in \Lambda(X, Y)$, że ciąg $0 \to Y \to Z \to X \to 0$ jest równoważny z ciągiem $0 \to Y \to Y \oplus_f X \to X \to 0$.*

W przypadku lokalnie wypukłym odpowiadającym rezultatem jest następujący wynik pochodzący z [17].

Twierdzenie 4.8 (Cabello Sánchez, Castillo)**.** *Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha. Wówczas dla każdej lokalnie wypukłej sumy skrętnej Z przestrzeni Y i X istnieje takie $f \in \Xi(X, Y)$, że ciąg dokładny $0 \to Y \to Z \to X \to 0$ jest równoważny z ciągiem $0 \to Y \to Y \oplus_f X \to X \to 0$.*

Pomimo tego, że odwzorowania quasi- i zero-liniowe nie są na ogół ciągłe, możliwe jest ich przedłużanie z gęstych podprzestrzeni z zachowaniem quasi- lub zero-liniowości. Wynik ten jest wnioskiem z twierdzenia 4.7 (zob. [56, Thm. 3.1]).

Twierdzenie 4.9 (Kalton, Peck)**.** *Niech X i Y będą przestrzeniami quasi-Banacha i niech X_0 będzie gęstą podprzestrzenią przestrzeni X. Wówczas każde odwzorowanie $f_0 \in \Lambda(X_0, Y)$ ma przedłużenie $f \in \Lambda(X, Y)$. Co więcej, dla każdego przedłużenia $g \in \Lambda(X, Y)$ odwzorowania f_0 mamy $\mathrm{dist}(f - g - h) < \infty$, gdzie $h\colon X \to Y$ jest pewnym odwzorowaniem liniowym.*

Zero-liniowy odpowiednik tego twierdzenia dowodzi się podobnymi metodami, używając twierdzenia 4.8 zamiast 4.7, ale można też go nieco wzmocnić (a także wysłowić w kontekście grup unormowanych – zob. [15, Cor. 5.17]).

Twierdzenie 4.10 (Cabello Sánchez, Castillo)**.** *Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha i niech X_0 będzie gęstą podprzestrzenią przestrzeni X. Jeżeli $f_0 \in \Xi(X_0, Y)$, to każde quasi-liniowe przedłużenie $X \to Y$ odwzorowania f_0 musi być zero-liniowe.*

Jako ilustrację twierdzenia 4.7, opiszemy konstrukcję Ribego minimalnego rozszerzenia ℓ_1, które nie jest lokalnie wypukłe, i którego istnienie jest treścią twierdzenia 4.3 (szerszą dyskusję można znaleźć np. w [54]). Na przestrzeni liniowej c_{00} rzeczywistych ciągów o skończonym nośniku określamy funkcję $F\colon c_{00} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \log|x_n| - \Big(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\Big) \log\Big|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\Big| \qquad \text{dla } x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00},$$

przy czym przyjmujemy, że $0 \cdot \log 0 := 0$. Następujące elementarne oszacowanie dla $s, t > 0$:

$$\begin{aligned} |f(s+t) - f(s) - f(t)| &\leqslant |s\log(s+t) + s\log s| + |t\log(s+t) - t\log t| \\ &= \Big|s\log\frac{s}{s+t} + t\log\frac{t}{s+t}\Big| \\ &\leqslant (s+t)\Big|\frac{s}{s+t}\log\frac{s}{s+t} + \frac{t}{s+t}\log\frac{t}{s+t}\Big| \leqslant (s+t)\log 2 \end{aligned}$$

pokazuje, że funkcja $f(s) := s\log|s|$ $(s \in \mathbb{R})$ należy do $\Lambda(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ oraz $\Delta(f) \leqslant \log 2$. Wynika stąd, że $F \in \Lambda(c_{00}, \mathbb{R})$ oraz $\Delta(F) \leqslant 2\log 2$. Możemy więc rozważyć przestrzeń quasi-unormowaną $\mathbb{R} \oplus_F c_{00}$ (na c_{00} rozważamy normę ℓ_1), której uzupełnienie daje przestrzeń $Z \in \mathsf{q\text{-}Ban}$ tworzącą minimalne rozszerzenie ℓ_1. Na podstawie przytoczonego wyżej twierdzenia [14, Thm. 2] otrzymana przestrzeń jest lokalnie wypukła, o ile F jest zero-liniowe. Nie jest to jednak prawdą, bowiem dla wektorów e_n bazy kanonicznej ℓ_1 mamy $F(\mathrm{e}_n) = 0$ oraz $F(\mathrm{e}_1 + \ldots + \mathrm{e}_n) = -n \log n$ ($n \in \mathbb{N}$), a zatem zero-liniowość odwzorowania F wymuszałaby, że $n \log n \leqslant cn$ dla $n \in \mathbb{N}$ z pewną stałą $c < \infty$, co jest absurdem.

Wiele z klasycznych nietrywialnych sum skrętnych przestrzeni Banacha konstruowanych jest w oparciu o podobny schemat. Wspomniany we wstępie kontrprzykład z pracy [37] oparty jest oryginalnie na konstrukcji ciągu odwzorowań $f_n \in \Xi(\ell_2^n, \ell_2^{n^2})$ ze stałymi zero-liniowości spełniającymi oszacowanie typu $Z(f_n) \geqslant C(\log n)^{1/2}$ ($n \in \mathbb{N}$) z pewną stałą $C > 0$.

Twierdzenie 4.11 (Enflo, Lindenstrauss, Pisier)**.** $\mathrm{Ext}(\ell_2, \ell_2) \neq 0$.

Stosując ogólniejszą konstrukcję, Kalton i Peck [56] otrzymali następujący wynik:

Twierdzenie 4.12 (Kalton, Peck)**.** *Dla każdego $0 < p < \infty$ para (ℓ_p, ℓ_p) nie rozszczepia się. W przypadku lokalnie wypukłym, tj. dla $1 \leqslant p < \infty$, mamy $\mathrm{Ext}(\ell_p, \ell_p) \neq 0$.*

Zaznaczmy, że o ile lokalna wypukłość nie jest własnością 3SP w kategorii q-Ban, o tyle dla takich przestrzeni jak ℓ_p ($1 < p < \infty$) każda suma skrętna musi być lokalnie wypukła. Wynika to z faktu, że przestrzenie te mają pewną silniejszą własność – są mianowicie *B-wypukłe.* W konsekwencji np. każda quasi-unormowana suma skrętna przestrzeni ℓ_p i ℓ_q ($1 < p, q < \infty$) musi być automatycznie reprezentantem jednego z elementów $\mathrm{Ext}(\ell_q, \ell_p)$.

Definicja 4.13. Dla przestrzeni Banacha X określamy

$$b_n = b_n(X) = \sup_{(x_j)_{j=1}^n \subset B_X} \min_{\varepsilon_j = \pm 1} \Big\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j \Big\|.$$

Przestrzeń X nazywamy *B-wypukłą*, jeżeli $b_n < n$ dla choć jednego $n \in \mathbb{N}$.[5]

Jest to jedna z możliwych definicji. Okazuje się, że przestrzeń X jest B-wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń ℓ_1 nie jest skończenie reprezentowalna w X (zob. [31, Ch. 13]). Z kolei klasyczne twierdzenie Maureya-Pisiera [77] mówi, że ten ostatni warunek jest równoważny temu, że X ma nietrywialny typ.[6] W pracy [40] Giesy wykazał, że B-wypukłość jest własnością 3SP w kategorii Ban, a wynik ten rozszerzył Kalton [53] pokazując, że lokalna wypukłość sumy skrętnej przestrzeni Y i X jest konsekwencją lokalnej wypukłości i B-wypukłości tych dwóch przestrzeni.

Twierdzenie 4.14 (Kalton, Giesy)**.** *Bycie przestrzenią izomorficzną z B-wypukłą przestrzenią Banacha jest własnością* 3SP *w kategorii* q-Ban. *Innymi słowy, jeżeli X jest przestrzenią quasi-unormowaną, która zawiera domkniętą podprzestrzeń Y o tej własności, że zarówno Y jak i X/Y są izomorficzne z B-wypukłą przestrzenią Banacha, to X jest także izomorficzna z B-wypukłą przestrzenią Banacha.*

[5] Można pokazać, że ciąg $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jest *podmultiplikatywny*, tzn. $b_{mn} \leqslant b_m b_n$ dla $m, n \in \mathbb{N}$. Z założenia, że $b_n < n$ dla pewnego $n \geqslant 2$ (zauważmy, że $b_1 = 1$ oraz $b_n \leqslant n$ dla $n \geqslant 2$) wynika więc, że ciąg ten zachowuje się potęgowo w tym sensie, że istnieją takie stałe $p > 1$ oraz $c > 0$, że $b_n \leqslant cn^{1/p}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Używając tego faktu, można pokazać, że B-wypukłość jest równoważna warunkowi $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$.

[6] Więcej na temat typu, kotypu, a także asymptotycznych wersji twierdzenia Maureya-Pisiera będziemy mówili w sekcji 4.c.8.

W następnym podrozdziale omówimy pracę [Koc13], dla której główną inspiracją było twierdzenie Kaltona-Robertsa [58] o stabilności dla prawie addytywnych (rzeczywistych) funkcji zbioru. Twierdzenie to jest ściśle związane ze stabilnością odwzorowań quasi-liniowych i pojęciem $\mathcal{K}$-przestrzeni, a dokładniej – pytaniem o to, czy do klasy tej należą przestrzenie c_0 i ℓ_∞. Podsumujmy tu kilka najważniejszych faktów dotyczących $\mathcal{K}$-przestrzeni:

- ℓ_1 nie jest $\mathcal{K}$-przestrzenią (twierdzenie 4.3);
- dla $0 < p < \infty$ przestrzenie ℓ_p oraz $L_p(0,1)$ są $\mathcal{K}$-przestrzeniami wtedy i tylko wtedy, gdy $p \neq 1$ ([53, Thm. 4.9]);
- przestrzeń $\left(\bigoplus_{n=1}^\infty \ell_1^n\right)_2$ nie jest $\mathcal{K}$-przestrzenią ([53]), a zatem nie każda przestrzeń refleksywna jest $\mathcal{K}$-przestrzenią;
- każda przestrzeń B-wypukła (czyli mająca nietrywialny typ) jest $\mathcal{K}$-przestrzenią ([53, Thm. 4.3])[7];
- przestrzenie c_0 i ℓ_∞ są $\mathcal{K}$-przestrzeniami; ogólniej: każdy iloraz $\mathscr{L}_\infty$-przestrzeni jest $\mathcal{K}$-przestrzenią ([58, Thm. 6.5]).

Najważniejszym otwartym problemem w tym kontekście pozostaje następująca hipoteza.

Hipoteza (Kalton [54])**.** Przestrzeń Banacha X jest $\mathcal{K}$-przestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy X^* ma nietrywialny kotyp.

4.c.3. Wektorowe wersje twierdzenia Kaltona-Robertsa

Postawione przez Kaltona [53] pytanie o to, czy ℓ_∞ jest $\mathcal{K}$-przestrzenią, dość szybko redukuje się do problemu stabilności dla prawie addytywnych funkcji zbioru. Rzeczywiście, na mocy twierdzenia 4.5 należy wykazać, że istnieje taka stała $B < \infty$, że dla każdego odwzorowania $f \in \Lambda(\ell_\infty, \mathbb{R})$ istnieje odwzorowanie liniowe $h\colon \ell_\infty \to \mathbb{R}$ spełniające $|f(x) - h(x)| \leqslant B\Delta(f)\|x\|_\infty$ dla każdego $x \in \ell_\infty$. Jeżeli więc f jest jak wyżej, to określając funkcję ν na σ-algebrze $2^{\mathbb{N}}$ wszystkich podzbiorów $\mathbb{N}$ wzorem $\nu(A) = f(\mathbb{1}_A)$, widzimy, że dla zbiorów rozłącznych A i B mamy $|\nu(A \cup B) - \nu(A) - \nu(B)| \leqslant 2\Delta(f)$. Gdyby ν leżała blisko addytywnej funkcji zbioru $\mu\colon 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, powiedzmy $|\nu(A) - \mu(A)| \leqslant 2K\Delta(f)$ ($A \subseteq \mathbb{N}$) z pewną uniwersalną stałą $K < \infty$, to określając $h\colon \ell_\infty \to \mathbb{R}$ jako jedyne odwzorowanie liniowe spełniające $h(\mathbb{1}_A) = \mu(A)$ ($A \subseteq \mathbb{N}$), otrzymalibyśmy odwzorowanie quasi-liniowe $g := f - h$ spełniające $|g(\mathbb{1}_A)| \leqslant 2K\Delta(f)$. Z tego warunku i quasi-liniowości można już wyprowadzić globalne oszacowanie typu $|g(x)| \leqslant K'\|x\|_\infty$ ($x \in \ell_\infty$) z odpowiednią stałą K' (zob. [58, Prop. 6.2]). Podobnej redukcji można też dokonać dla dowolnej $\mathscr{L}_\infty$-przestrzeni[8], w szczególności dla przestrzeni c_0 (zob. [58, Thm. 6.3]).

[7] Bezpośredni dowód tego faktu dla przestrzeni superrefleksywnych podał Cabello Sánchez [13].

[8] Przypomnijmy, że przestrzeń Banacha X nazywamy $\mathscr{L}_\infty$-przestrzenią, jeżeli istnieje taka stała $c \geqslant 1$, że każda skończenie wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni X zawiera się w innej skończenie wymiarowej podprzestrzeni $F \subset X$ spełniającej $d_{\mathsf{BM}}(F, \ell_\infty^m) \leqslant c$, gdzie $m = \dim F$, a d_{BM} oznacza *odległość Banacha-Mazura* zdefiniowaną dla przestrzeni $X \sim Y$ wzorem

$$d_{\mathsf{BM}}(X,Y) = \inf\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \colon T \text{ jest izomorfizmem } X \to Y\}.$$

Twierdzenie 4.15 (Kalton, Roberts)**.** *Istnieje uniwersalna stała $K < 45$ o następującej własności: jeżeli $\mathcal{F}$ jest ciałem zbiorów*[9]*, a funkcja $\nu\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ spełnia warunek*

$$|\nu(A \cup B) - \nu(A) - \nu(B)| \leqslant 1 \quad \textit{dla } A, B \in \mathcal{F},\ A \cap B = \varnothing,$$

to istnieje taka addytywna funkcja zbioru $\mu\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, że $|\nu(A) - \mu(A)| \leqslant K$ dla $A \in \mathcal{F}$.

W pracy [Koc13] wprowadzamy następujące definicje:

Definicja 4.16. Mówimy, że przestrzeń Banacha X ma *własność* SVM (ang. *stability of vector measures*), jeżeli istnieje taka stała $v(X) < \infty$ (zależna tylko od X), że dla dowolnego ciała zbiorów $\mathcal{F}$ oraz każdej funkcji $\nu\colon \mathcal{F} \to X$ spełniającej

$$\|\nu(A \cup B) - \nu(A) - \nu(B)\| \leqslant 1 \quad \text{dla } A, B \in \mathcal{F},\ A \cap B = \varnothing \tag{4.3}$$

istnieje miara wektorowa[10] $\mu\colon \mathcal{F} \to X$ spełniająca

$$\|\nu(A) - \mu(A)\| \leqslant v(X) \quad \text{dla } A \in \mathcal{F}.$$

Definicja 4.17. Niech κ będzie liczbą kardynalną. Mówimy, że przestrzeń Banacha X ma *własność* κ-SVM, jeżeli istnieje taka stała $v(\kappa, X) < \infty$ (zależna tylko od κ i X), że dla dowolnego ciała zbiorów $\mathcal{F}$ mocy mniejszej od κ oraz każdej funkcji $\nu\colon \mathcal{F} \to X$ spełniającej (4.3) istnieje miara wektorowa $\mu\colon \mathcal{F} \to X$ spełniająca

$$\|\nu(A) - \mu(A)\| \leqslant v(\kappa, X) \quad \text{dla } A \in \mathcal{F}.$$

Jeżeli X jest przestrzenią Banacha bez własności SVM, to jej SVM-*charakter* definiujemy jako najmniejszą liczbę kardynalną κ, dla której X nie ma własności κ-SVM, i oznaczamy go symbolem $\tau(X)$.

Łatwo pokazujemy indukcyjnie, że każda przestrzeń Banacha X ma własność n-SVM dla każdego $n \in \mathbb{N}$, mamy więc $\tau(X) \geqslant \omega$. Równość $\tau(X) = \omega$ oznaczałaby dokładnie tyle, że $\sup_n v(n, X) = \infty$. Jak zobaczymy poniżej, nawet jeśli stałe stabilnościowe $(v(n, X))_{n=1}^{\infty}$ odpowiadające ciałom skończonym są wspólnie ograniczone, stabilność nie musi automatycznie przenosić się na ciała przeliczalne – innymi słowy, przestrzeń X nie musi mieć właności ω_1-SVM. Możliwe jest zatem, że $\tau(X) = \omega_1$. Jak też w dalszym ciągu wyjaśnimy, każda liczba kardynalna będąca podwójnym następnikiem regularnej liczby kardynalnej[11] jest SVM-charakterem pewnej przestrzeni Banacha. Odnotujmy najpierw fakt, który można pokazać metodami bezpośrednimi.

Stwierdzenie 4.18 ([Koc13, Proposition 2.1])**.** *Dla dowolnego niepustego zbioru Γ oraz zwartej przestrzeni metrycznej Ω mamy:*

(i) $\tau(c_0(\Gamma)) > \omega$;
(ii) $\tau(C(\Omega)) > \omega$.

[9]Przez *ciało* rozumiemy niepustą rodzinę podzbiorów pewnego zbioru zamkniętą na branie dopełnienia i skończonych sum mnogościowych.
[10]Przez *miarę wektorową* rozumiemy skończenie addytywną funkcję zbioru o wartościach w przestrzeni Banacha.
[11]Liczbę kardynalną κ nazywamy *regularną*, jeżeli jest równa swojej kofinalności: $\kappa = \mathrm{cf}(\kappa)$.

Przeniesienie stabilności wynikającej z własności ω-SVM na dowolne ciała zbiorów jest rzeczą dość prostą w przypadku, gdy dana przestrzeń Banacha jest komplementarna w swoim biduału. Mówiąc dokładniej, jeżeli X jest λ-komplementarna w swoim biduału[12] oraz ma własność ω-SVM, to ma własność SVM, przy czym $v(X) \leqslant \lambda v(\omega, X)$ (zob. [Koc13, Prop. 2.2]). Ponieważ jednak ani $c_0(\Gamma)$ dla zbioru nieskończonego Γ, ani $C(\Omega)$ dla nieskończonej zwartej przestrzeni metrycznej nie jest komplementarna w swoim biduału (a zatem w żadnej dualnej przestrzeni Banacha), nie mamy do dyspozycji żadnej *-słabej topologii pozwalającej użyć standardowych argumentów opartych na zwartości. Wyznaczenie wartości $\tau(c_0(\Gamma))$ oraz $\tau(C(\Omega))$ wymaga delikatniejszych metod. Odnotujmy w tym miejscu, że używając technik lokalizacyjnych można wyprowadzić silniejszą wersję stwierdzenia 4.18: dla każdej $\mathscr{L}_\infty$-przestrzeni X mamy $\tau(X) > \omega$ ([Koc13, Corollary 2.6]).

Naszkicowana na początku metoda sprowadzenia problemu stabilności dla odwzorowań quasi-liniowych do analogicznego problemu dla prawie addytywnych funkcji zbioru, w ujęciu wektorowym, prowadzi do kilku warunków koniecznych na własności SVM oraz κ-SVM.

Twierdzenie 4.19 ([Koc13, Theorems 4.1 i 4.2])**.** *Niech X będzie przestrzenią Banacha, a Γ liczbą kardynalną. Wówczas:*

(i) *Jeżeli X jest komplementarna w X^{**} oraz ma własność ω-SVM, to para (Y, X) rozszczepia się dla każdej $\mathscr{L}_\infty$-przestrzeni Y.*

(ii) *Jeżeli X ma własność $(2^\Gamma)^+$-SVM, to para $(\ell_\infty(\Gamma), X)$ rozszczepia się.*

(iii) *Jeżeli X ma własność Γ^+-SVM, to para $(c_0(\Gamma), X)$ rozszczepia się.*

Wymienione warunki konieczne, w połączeniu ze znanymi faktami na temat funktora Ext, pozwalają od razu stwierdzić, że wiele klasycznych przestrzeni Banacha ma własność SVM jedynie w najsłabszej możliwej formie, tj. ich SVM-charakter wynosi ω. Ważną rolę odgrywa tu następujące twierdzenie pochodzące z [8].

Twierdzenie 4.20 (Avilés, Cabello Sánchez, Castillo, González & Moreno)**.** *Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha, przy czym X jest ośrodkowa. Załóżmy, że X ma ograniczoną własność aproksymacji lub Y ma jednostajną własność aproksymacji. Wówczas $\mathrm{Ext}(X, Y) = 0$ implikuje, że $\mathrm{Ext}(Y^*, X^*) = 0$. W szczególności,*

$$\mathrm{Ext}(X^*, \ell_1) \neq 0 \quad \textit{implikuje} \quad \mathrm{Ext}(c_0, X) \neq 0. \tag{4.4}$$

Jak pokazali Cabello Sánchez i Castillo [17, Ex. 4.3], mamy $\mathrm{Ext}(c_0, \ell_1) \neq 0$, a więc twierdzenie 4.19 implikuje, że $\tau(\ell_1) \leqslant \omega_1$. W tej samej pracy (zob. [17, Ex. 4.1]) pokazano, że $\mathrm{Ext}(\ell_2, \ell_1) \neq 0$, a ponieważ dla każdego $1 < p < \infty$ przestrzeń ℓ_p zawiera $\{\ell_2^n\}_{n=1}^\infty$ jednostajnie komplementarnie, wynika stąd, że $\mathrm{Ext}(\ell_p, \ell_1) \neq 0$. Na mocy twierdzenia 4.20 mamy więc $\mathrm{Ext}(c_0, \ell_p) \neq 0$, a z twierdzenia 4.19 wnosimy, że $\tau(\ell_p) \leqslant \omega_1$ for $1 < p < \infty$. Prosty argument zwartościowy (zob. [Koc13, Proposition 2.2]) pokazuje, że jeżeli X jest komplementarna w X^{**} i spełnia $\tau(X) > \omega$, to X ma własność SVM. Mamy więc $\tau(\ell_p) = \omega$ dla każdego $1 \leqslant p < \infty$. Proste argumenty lokalizacyjne oraz znany fakt, że każda nieskończenie wymiarowa $\mathscr{L}_p$-przestrzeń zawiera komplementarną kopię ℓ_p, pozwalają wyprowadzić stąd następujący wniosek.

[12] Oznacza to, że istnieje rzut z X^{**} na X o normie niewiększej od λ.

Wniosek 4.21 ([Koc13, Corollary 4.4])**.** *Jeżeli X jest przestrzenią Banacha zawierającą $\{\ell_p^n\}_{n=1}^\infty$ jednostajnie komplementarnie*[13] *dla pewnego $1 \leqslant p < \infty$, to $\tau(X) = \omega$. W konsekwencji, dla każdej nieskończenie wymiarowej $\mathscr{L}_p$-przestrzeni X, gdzie $1 \leqslant p < \infty$, mamy $\tau(X) = \omega$.*

Podane warunki konieczne pozwalają też rozstrzygnąć, jak dokładnie wygląda sytuacja w tezie (ii) stwierdzenia 4.18. Przypomnijmy, że zgodnie z klasycznymi twierdzeniami Miljutina oraz Bessagi-Pełczyńskiego (zob. np. [1, §4.4 i 4.5] oraz [90]), wszystkie izomorficzne klasy przestrzeni Banacha $C(\Omega)$, dla przestrzeni zwartych metrycznych Ω, to te dane przez przestrzenie skończenie wymiarowe, a także: c_0 – gdy Ω jest przeliczalna i ma skończony indeks Cantora-Bendixsona, $C[0, \omega^{\omega^\alpha}]$ dla przeliczalnych liczb porządkowych $\alpha \geqslant 1$ – gdy Ω jest przeliczalna i ma nieskończony indeks Cantora-Bendixsona, oraz $C[0, 1]$ – gdy Ω jest nieprzeliczalna.

Wniosek 4.22 ([Koc13, Corollary 4.6])**.** *Dla każdej zwartej przestrzeni metrycznej Ω, z wyjątkiem przypadku, gdy $C(\Omega) \sim c_0$ lub gdy $C(\Omega)$ jest skończenie wymiarowa, mamy $\tau(C(\Omega)) = \omega_1$.*

W świetle stwierdzenia 4.18, należy tu dowieść, że przestrzeń $C(\Omega)$ spełniająca powyższe warunki nie ma własności ω_1-SVM. Kluczowe tutaj są następujące fakty, pierwszy wykazany przez Cabello Sáncheza, Castillo, Kaltona i Yosta, drugi to twierdzenie Foiaşa-Singera:

- $\mathrm{Ext}(c_0, C[0, \omega^\omega]) \neq 0$ ([18, Theorems 4.1 & 3.5]);
- $\mathrm{Ext}(c_0, C[0, 1]) \neq 0$ ([39]).

Z pierwszego wynika poprzez twierdzenie 4.19, że $C[0, \omega^\omega]$ nie ma własności ω_1-SVM, a zatem nie ma jej też żadna z przestrzeni $C[0, \omega^{\omega^\alpha}]$ (dla przeliczalnej $\alpha \geqslant 1$), jako że każda taka przestrzeń zawiera $C[0, \omega^\omega]$ jako komplementarną podprzestrzeń (przedział porządkowy $[0, \omega^\omega]$ jest domknięto-otwartym podzbiorem $[0, \omega^{\omega^\alpha}]$ dla $\alpha \geqslant 1$). Drugi z wymienionych faktów, w połączeniu z twierdzeniem 4.19, implikuje, że $C[0, 1]$ nie ma własności ω_1-SVM.

Satysfakcjonujące warunki wystarczające otrzymujemy dla przestrzeni komplementarnych w swoim biduale. W tym przypadku własność SVM jest całkowicie scharakteryzowana przez odpowiednie własności funktora rozszerzeń.

Twierdzenie 4.23 ([Koc13, Theorem 8.2])**.** *Niech X będzie przestrzenią Banacha komplementarną w swoim biduale. Wówczas następujące warunki są parami równoważne:*

(i) *X ma własność SVM;*
(ii) $\mathrm{Ext}(X^*, \ell_1) = 0$*;*
(iii) $\mathrm{Ext}(\ell_\infty, X^{**}) = 0$*;*
(iv) $\mathrm{Ext}(c_0, X) = 0$.

[13] Niech $\mathcal{E}$ będzie pewną rodziną przestrzeni Banacha. Mówimy, że przestrzeń Banacha X *zawiera $\mathcal{E}$ (c, d)-jednostajnie komplementarnie* (dla pewnych $c \geqslant 1$, $d > 1$), jeżeli dla każdego $E \in \mathcal{E}$ istnieje c-komplementarna podprzestrzeń $F \subseteq X$ spełniająca $\dim E = \dim F$ oraz $d_{\mathsf{BM}}(E, F) < d$. Mówimy, że *$X$ zawiera $\mathcal{E}$ jednostajnie komplementarnie*, jeżeli powyższy warunek zachodzi z pewnymi stałymi $c \geqslant 1$ i $d > 1$.

Korzystając z twierdzenia Jebreena, Jamjooma i Yosta [50] mówiącego, że dla dowolnych przestrzeni Banacha Y i Z mamy $\mathrm{Ext}(Z, Y^*) \sim \mathrm{Ext}(Y, Z^*)$ (jako przestrzenie liniowe), możemy twierdzenie 4.23 wysłowić w następujący sposób: X^{**} ma własność SVM wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Ext}(X^*, \ell_1) = 0$ ([Koc13, Corollary 8.3]). Istotnie, zacytowane twierdzenie gwarantuje, że warunek $\mathrm{Ext}(X^*, \ell_1) = 0$ jest równoważny z $\mathrm{Ext}(c_0, X^{**}) = 0$, a ten z kolei – wobec twierdzenia 4.23 – jest równoważny temu, że X^{**} ma własność SVM.

W tym kontekście naturalnym pytaniem jest, jakie przestrzenie Banacha Y spełniają warunek

$$\mathrm{Ext}(Y, \ell_1) = 0. \tag{4.5}$$

Na mocy twierdzenia Lindenstraussa o podniesieniu (zob. [57, Prop. 2.1]), warunek ten jest spełniony przez każdą $\mathscr{L}_1$-przestrzeń Y. Zgodnie z wiedzą autora, nie jest jednak znany przykład przestrzeni Y niebędącej $\mathscr{L}_1$-przestrzenią i spełniającej (4.5). Możemy natomiast stwierdzić, że jeżeli taki przykład nie istnieje, to:

- każda przestrzeń Banacha X z własnością ω_1-SVM byłaby $\mathscr{L}_\infty$-przestrzenią, co jest równoważne temu, że X^* jest $\mathscr{L}_1$-przestrzenią, a także temu, że X^{**} jest przestrzenią injektywną (zob. [74, Chapter 5]);
- każda przestrzeń bidualna X^{**} z własnością SVM byłaby przestrzenią injektywną.

W pracy [Koc13] dowodzimy twierdzenia, które daje częściowo pozytywne rozstrzygnięcie hipotezy o tym, że tylko $\mathscr{L}_1$-przestrzenie mogą spełniać (4.5).

Definicja 4.24. Niech Y będzie przestrzenią Banacha. Każdy ciąg dokładny postaci

$$0 \longrightarrow \ker(q) \xrightarrow{\ j\ } P \xrightarrow{\ q\ } Y \longrightarrow 0, \tag{4.6}$$

gdzie P jest *projektywną* przestrzenią Banacha (czyli $P \sim \ell_1(\Gamma)$ dla pewnego zbioru indeksów Γ), nazywamy *projektywną reprezentacją* przestrzeni Y.

We wspomnianym twierdzeniu zakładamy, że jądro projektywnej reprezentacji jest $\mathscr{L}_1$-przestrzenią. Jest to założenie naturalne w świetle faktu, że jądro każdej projektywnej reprezentacji dowolnej $\mathscr{L}_1$-przestrzeni musi być też $\mathscr{L}_1$-przestrzenią (zob. [74, Proposition II.5.13]).

Twierdzenie 4.25 ([Koc13, Theorem 8.5]). *Niech Y będzie przestrzenią Banacha spełniającą warunek* (4.5) *i załóżmy, że istnieje projektywna reprezentacja* (4.6), *przy czym* $\ker(q)$ *jest $\mathscr{L}_1$-przestrzenią. Wówczas Y jest również $\mathscr{L}_1$-przestrzenią.*

Jak wspomnieliśmy wcześniej, „sporo" liczb kardynalnych jest SVM-charakterami pewnych przestrzeni Banacha. Uzasadnienie tego faktu wymaga twierdzenia łączącego własność κ-SVM z κ-injektywnością, a także konstrukcji specjalnego ciągu dokładnego związanego z uogólnioną przestrzenią Johnsona-Lindenstraussa. Pojęcie *κ-injektywności* w formie podanej poniżej zostało wprowadzone i dogłębnie zbadane w pracy [8].

Definicja 4.26. Niech κ będzie liczbą kardynalną. Przestrzeń Banacha X nazywamy *κ-injektywną*, jeżeli dla każdej przestrzeni Banacha E o gęstości mniejszej niż κ, i dowolnej podprzestrzeni $F \subset E$, każdy operator $t\colon F \to X$ przedłuża się do operatora $T\colon E \to X$. Jeżeli dla pewnego $\lambda \geqslant 1$ możemy zawsze znaleźć przedłużenie spełniające $\|T\| \leqslant \lambda\|t\|$, to przestrzeń X nazywamy *(λ, κ)-injektywną*.

W przypadku $\kappa = \omega_1$ przestrzeń X nazywamy *ośrodkowo injektywną*.

Prosty argument oparty na rozważeniu ℓ_1-sumy pokazuje, że jeżeli $\mathrm{cf}(\kappa)$ jest nieprzeliczalna, to każda κ-injektywna przestrzeń Banacha jest (λ,κ)-injektywna z pewnym parametrem $\lambda \geqslant 1$. Następujące twierdzenie podsumowuje najważniejsze własności przestrzeni κ-injektywnych.

Twierdzenie 4.27 (Avilés, Cabello Sánchez, Castillo, González, Moreno)**.** *Niech κ będzie liczbą kardynalną, a X przestrzenią Banacha. Następujące warunki są parami równoważne:*

(a) *X jest κ-injektywna;*

(b) *dla każdego zbioru Γ spełniającego $|\Gamma| < \kappa$, każdy operator określony na dowolnej podprzestrzeni $\ell_1(\Gamma)$ o wartościach w X ma przedłużenie do operatora określonego na $\ell_1(\Gamma)$;*

(c) *dla każdej przestrzeni Banach E i dowolnej takiej jej podprzestrzeni F, że gęstość E/F jest mniejsza od κ, każdy operator $t\colon F \to X$ ma przedłużenie do operatora $T\colon E \to X$;*

(d) *jeżeli Z jest przestrzenią Banacha zawierającą X, a gęstość Z/X jest mniejsza od κ, to X jest komplementarna w Z;*

(e) $\mathrm{Ext}(Z,X)=0$ *dla każdej przestrzeni Banacha Z o gęstości mniejszej od κ.*

Co więcej, jeżeli X jest (λ,κ)-injektywna dla pewnego $\lambda \geqslant 1$, to teza (c) *zachodzi z dodatkowym warunkiem $\|T\| \leqslant 3\lambda\|t\|$, podczas gdy teza* (d) *zachodzi z dodatkowym warunkiem, że X jest 3λ-komplementarna.*

Główną trudnością w dowodzie zapowiedzianego twierdzenia, łączącego κ-injektywność z własnością κ-SVM, jest wygenerowanie odpowiedniego odwzorowania quasi-liniowego z danej prawie addytywnej funkcji zbioru, tj. funkcji $\nu\colon \mathcal{F} \to X$ spełniającej (4.3). Proces odwrotny jest oczywisty i opisywaliśmy go na początku tej sekcji. W naszej sytuacji kluczową rolę odgrywa pewna specjalna przestrzeń Banacha $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ powiązana z danym nieskończonym ciałem zbiorów $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ mocy mniejszej od κ. Definiujemy ją nastepująco: niech $X_{\mathcal{F}}$ będzie liniową podprzestrzenią przestrzeni funkcji rzeczywistych na Ω, generowaną przez zbiór $\{\mathbb{1}_A : A \in \mathcal{F}\}$. Określamy normę na $X_{\mathcal{F}}$ wzorem

$$\|x\|_{\mathcal{F}} = \inf\left\{\sum_{i=1}^{k}|\alpha_i| :\, k \geqslant 0,\, \alpha_i \in \mathbb{R},\, A_i \in \mathcal{F} \text{ oraz } x = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i \mathbb{1}_{A_i}\right\}.$$

(Łatwo sprawdzamy, że $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ jest faktycznie normą na $X_{\mathcal{F}}$.) Definiujemy $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ jako uzupełnienie przestrzeni $(X_{\mathcal{F}}, \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$. Gęstość otrzymanej przestrzeni wynosi oczywiście $|\mathcal{F}|$, wystarczy bowiem rozważyć skończone kombinacje liniowe funkcji $\mathbb{1}_A$, dla $A \in \mathcal{F}$, o wymiernych współczynnikach.

Strategia dowodu opiera się na konstrukcji odwzorowania $f_0 \in \Xi(X_{\mathcal{F}}, X)$ spełniającego warunki $f_0(\mathbb{1}_A) = \nu(A)$ dla każdego $A \in \mathcal{F}$ oraz $Z(f_0) \leqslant 2(1+\varepsilon)K$, gdzie $\varepsilon > 0$ jest dowolnie ustalone, a K oznacza *stałą Kaltona-Robertsa*, tj. najmniejszą stałą, z jaką zachodzi twierdzenie 4.15.[14] Sprawdzając zero-liniowość odpowiednio określonego odwzorowania $f_0\colon X_{\mathcal{F}} \to X$ w dość niespodziewany sposób korzystamy z twierdzenia 4.15 o stabilności w przypadku skalarnym, stąd stała K w powyższej nierówności.

[14]Wiadomo, że $\frac{3}{2} \leqslant K \leqslant \frac{89}{2}$. Pierwsza nierówność wynika z przykładu Pawlika [83]; druga z oszacowań w dowodzie twierdzenia 4.15. Żadne dokładniejsze oszacowania na K nie są dotąd znane.

Następnie, kierując się ideą zawartą w twierdzeniach 4.7 i 4.8, rozważamy sumę skrętną $\mathscr{Z}_0 = X \oplus_{f_0} X_{\mathcal{F}}$ oraz jej uzupełnienie $(\mathscr{Z}, \|\cdot\|_{\mathscr{Z}})$, które okazuje się być sumą skrętną przestrzeni X i $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$. Weźmy liczbę $\lambda \geqslant 1$, dla której X jest (λ, κ)-injektywna. Ponieważ gęstość przestrzeni $X_{\mathcal{F}}$ wynosi $|\mathcal{F}| < \kappa$, możemy użyć tezy (d) twierdzenia 4.27, która daje nam rzut $(\mathscr{Z}, \|\cdot\|'_{\mathscr{Z}})$ na kopię przestrzeni X. To pozwala, dla dowolnie małego $\delta > 0$, określić odwzorowanie liniowe $g\colon X_{\mathcal{F}} \to X$ spełniające

$$\operatorname{dist}(f_0 - g) \leqslant (12\lambda + \delta) Z(f_0) \leqslant 2(12\lambda + \delta)(1 + \varepsilon)K.$$

Definiując $\mu\colon \mathcal{F} \to X$ wzorem $\mu(A) = g(\mathbb{1}_A)$, otrzymujemy żądaną miarę wektorową przybliżającą funkcję ν. Naszkicowaliśmy tutaj główne kroki w dowodzie następującego twierdzenia.

Twierdzenie 4.28 ([Koc13, Theorem 5.3])**.** *Niech κ będzie liczbą kardynalną o nieprzeliczalnej kofinalności. Wówczas każda κ-injektywna przestrzeń Banacha X ma własność κ-*SVM*, czyli $\tau(X) > \kappa$. Ponadto, jeżeli X jest (λ, κ)-injektywna (wtedy kofinalność κ może być dowolna), to*

$$v(\kappa, X) \leqslant 24\lambda K. \tag{4.7}$$

Podamy teraz definicję rodziny przestrzeni Banacha, która realizuje dowolnie duże liczby kardynalne jako SVM-charaktery. Istotną rolę odgrywa tu klasyczne twierdzenie Sobczyka [94] (zob. też [1, §2.5]), które mówi, że c_0 jest 2-komplementarna w każdej ośrodkowej nadprzestrzeni Banacha. Hasanov [48] uogólnił ten wynik w następujący sposób.

Dla danej liczby kardynalnej Γ oraz filtru $\mathscr{G}$ podziorów zbioru Γ definiujemy podprzestrzeń $c_0(\Gamma, \mathscr{G})$ przestrzeni $\ell_\infty(\Gamma)$ jako

$$c_0(\Gamma, \mathscr{G}) = \Big\{ x \in \ell_\infty(\Gamma)\colon \lim_{\mathscr{G}} x = 0 \Big\}.$$

Filtr $\mathscr{G}$ nazwiemy *κ-filtrem*, jeżeli dla dowolnej rodziny $\{A_i : i \in I\} \subset \mathscr{G}$ mocy $|I| < \kappa$ zachodzi $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathscr{G}$.

Twierdzenie 4.29 (Sobczyk, Hasanov)**.** *Niech Γ i κ będą liczbami kardynalnymi i niech $\mathscr{G}$ będzie κ-filtrem podzbiorów zbioru Γ. Wówczas przestrzeń $c_0(\Gamma, \mathscr{G})$ jest 2-komplementarna w każdej przestrzeni Banacha Z, która ją izometrycznie zawiera i dla której gęstość przestrzeni ilorazowej $Z/c_0(\Gamma, \mathscr{G})$ jest niewiększa od κ.*

Definiujemy $m_0(\Gamma)$ jako przestrzeń $c_0(\Gamma, \mathscr{G}_\Gamma)$, gdzie $\mathscr{G}_\Gamma = \{A \subset \Gamma\colon |\Gamma \setminus A| < \Gamma\}$ (w szczególności, $m_0(\omega) = c_0$). Następujący wynik otrzymuje się jako wniosek z twierdzeń 4.28 i 4.29.

Wniosek 4.30 ([Koc13, Corollary 5.8])**.** *Niech Γ będzie nieskończoną liczbą kardynalną. Wówczas przestrzeń $m_0(\Gamma)$ ma własność* $\mathrm{cf}(\Gamma)^+$-SVM*. Innymi słowy, $\tau(m_0(\Gamma)) > \mathrm{cf}(\Gamma)^+$, a ponadto zachodzi nierówność*

$$v(\mathrm{cf}(\Gamma)^+, m_0(\Gamma)) \leqslant 16K.$$

Aby otrzymać górne oszacowanie na $\tau(m_0(\Gamma))$, rozważamy uogólnienie przestrzeni Johnsona-Lindenstraussa zdefiniowanej w [52][15]. Zamiast standardowej nieprzeliczalnej

[15] Jest to fundamentalna praca w teorii przestrzeni WCG zawierająca pierwszy przykład na to, że słaba zwarta generowalność nie jest własnością 3SP, jak i na to, że X^* może być przestrzenią WCG, podczas gdy sama X taką przestrzenią nie jest.

rodziny prawie rozłącznej, jak w oryginalnej definicji Johnsona i Lindenstraussa, używamy ogólniejszej konstrukcji pochodzącej od Rosenthala [89].

Twierdzenie 4.31 (Rosenthal)**.** *Niech Γ będzie nieskończoną liczbą kardynalną. Istnieje rodzina $\mathcal{R}$ podzbiorów zbioru Γ spełniająca następujące warunki:*

(i) $|\mathcal{R}| > \Gamma$*;*
(ii) $|A| = \Gamma$ *dla każdego* $A \in \mathcal{R}$*;*
(iii) *dla wszelkich* $A, B \in \mathcal{R}$, $A \neq B$*, istnieje taka liczba porządkowa* $\gamma < \Gamma$*, że dla każdego* $\alpha \in A \cap B$ *mamy* $\alpha \leqslant \gamma$*.*

Zmniejszając ewentualnie rodzinę $\mathcal{R}$, możemy założyć, że $|\mathcal{R}| = \Gamma^+$. Niech $(A_\alpha)_{\alpha \in \Gamma^+}$ będzie pozaskończonym, różnowartościowym ciągiem wszystkich elementów $\mathcal{R}$. Definiujemy *uogólnioną przestrzeń Johhnsona-Lindenstraussa*, oznaczaną symbolem $\mathrm{JL}_\infty(\Gamma)$, jako uzupełnienie (według normy w $\ell_\infty(\Gamma)$) podprzestrzeni

$$\operatorname{span}\Big(m_0(\Gamma) \cup \Big\{\mathbb{1}_{A_\alpha} \colon \alpha \in \Gamma^+\Big\}\Big).$$

Najistotniejszą własnością tej przestrzeni jest istnienie nierozszczepiającego się ciągu dokładnego postaci

$$0 \to m_0(\Gamma) \to \mathrm{JL}_\infty(\Gamma) \to c_0(\Gamma^+) \to 0.$$

Mamy więc $\mathrm{Ext}(c_0(\Gamma^+), m_0(\Gamma)) \neq 0$, a zatem twierdzenie 4.19 implikuje, że $m_0(\Gamma)$ nie ma własności Γ^{++}-SVM, co w połączeniu z wnioskiem 4.30 daje następujący rezultat.

Twierdzenie 4.32 ([Koc13, Theorem 6.2])**.** *Dla każdej nieskończonej liczby kardynalnej* Γ *mamy*

$$\mathrm{cf}(\Gamma)^{++} \leqslant \tau(m_0(\Gamma)) \leqslant \Gamma^{++}.$$

Otrzymujemy stąd, że dla regularnej Γ mamy $\tau(m_0(\Gamma)) \leqslant \Gamma^{++}$, np. $\tau(c_0) = \omega_2$.

Wspomnijmy o jeszcze jednym wyniku z pracy [Koc13], którego dowód oparty jest na pewnej homologicznej własności, mianowicie – na istnieniu długiego ciągu dokładnego w kategorii przestrzeni liniowych:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathscr{B}(\mathfrak{X}, Y) \xrightarrow{j_*} \mathscr{B}(\mathfrak{X}, Z) \xrightarrow{q_*} \mathscr{B}(\mathfrak{X}, X) \xrightarrow{\theta} \\ \xrightarrow{\theta} \mathrm{Ext}(\mathfrak{X}, Y) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ext}(\mathfrak{X}, Z) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Ext}(\mathfrak{X}, X) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

indukowanego przez dowolny krótki ciąg dokładny przestrzeni Banacha X, Y, Z

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{q} X \longrightarrow 0. \tag{4.8}$$

Symbol j_* oznacza operator składania z lewej z j, q_* to składanie z lewej z q, $\theta(T)$ jest dolnym rzędem operacji *pull-back* zastosowanej do (4.8) i dowolnego operatora $T \in \mathscr{B}(\mathfrak{X}, X)$, natomiast α to *push-out* danego elementu $\mathrm{Ext}(\mathfrak{X}, Y)$ i operatora j, a β to *push-out* danego elementu $\mathrm{Ext}(\mathfrak{X}, Z)$ i operatora q (zob. [16]). Z istnienia takiego ciągu wynika, że przy dowolnie ustalonej przestrzeni Banacha $\mathfrak{X}$ własność '$\mathrm{Ext}(\mathfrak{X}, \cdot) = 0$' jest własnością $\mathsf{3SP}$. Dowodzimy pewnej ilościowej wersji twierdzeń 4.19(ii) oraz (iii), gdzie w roli $\ell_\infty(\Gamma)$ i $c_0(\Gamma)$ występuje wprowadzona wcześniej przestrzeń $\mathcal{X}_\mathcal{F}$. Pełni ona rolę przestrzeni „testowej" $\mathfrak{X}$, do której stosujemy zacytowany wynik na temat własności $\mathsf{3SP}$.

Twierdzenie 4.33 ([Koc13, Theorem 7.1])**.** *Jeżeli κ jest liczbą kardynalną o nieprzeliczalnej kofinalności, to własność κ-*SVM *jest własnością* $\mathsf{3SP}$*. W konsekwencji, własność* SVM *jest własnością* $\mathsf{3SP}$*.*

4.c.4. Metody pozaskończone a ideały w algebrach operatorów

Jak wiadomo, zbiór $\mathscr{B}(X)$ wszystkich operatorów[16] z przestrzeni Banacha X w siebie ma naturalną strukturę algebry Banacha. Ważnym zagadnieniem jest badanie domkniętych, dwustronnych (a także jednostronnych) ideałów tej algebry, w szczególności – badanie struktury kraty, którą one tworzą. Symbolami $\mathscr{K}(X)$, $\mathscr{W}(X)$, $\mathscr{X}(X)$ oraz $\mathscr{S}(X)$ oznaczamy następujące ideały algebry $\mathscr{B}(X)$: ideał operatorów zwartych, słabo zwartych, operatorów o ośrodkowym obrazie oraz operatorów *ściśle singularnych* (tzn. niedziałających jak izomorfizm na żadnej nieskończenie wymiarowej podprzestrzeni X). Pod pojęciem *ideał* będziemy rozumieli ideał domknięty i dwustronny w algebrze $\mathscr{B}(X)$.

Całkowita charakteryzacja kraty ideałów w $\mathscr{B}(X)$ jest problemem trudnym i dalekim od pełnego rozwiązania poza jedynie kilkoma przypadkami, do których zaliczamy następujące wyniki:

- $\mathscr{K}(\ell_2)$ jest jedynym właściwym ideałem $\mathscr{B}(\ell_2)$ (Calkin [19]);
- $\mathscr{K}(X)$ jest jedynym właściwym ideałem $\mathscr{B}(X)$ dla $X = \ell_p$ ($1 \leqslant p < \infty$) lub $X = c_0$ (Gohberg, Markus i Feldman [43]);
- dla dowolnej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ o gęstości κ krata ideałów $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym
$$\{0\} \subsetneq \mathscr{K}(\mathcal{H}) \subsetneq \mathscr{K}^{\aleph_1}(\mathcal{H}) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathscr{K}^{\kappa}(\mathcal{H}) \subsetneq \mathscr{K}^{\kappa^+}(\mathcal{H}) = \mathscr{B}(\mathcal{H}),$$
gdzie $\mathscr{K}^{\lambda}(\mathcal{H})$ jest ideałem operatorów λ-*zwartych*, tj. tych, dla których obraz kuli jednostkowej, przy dowolnym $\varepsilon > 0$, zawiera ε-sieć mocy mniejszej niż λ (Gramsch [45] i Luft [76]);
- podobnie, dla przestrzeni $X = \ell_p(\Gamma)$ ($1 \leqslant p < \infty$) lub $X = c_0(\Gamma)$, gdzie Γ jest dowolnym zbiorem nieskończonym, krata ideałów $\mathscr{B}(X)$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym
$$\{0\} \subsetneq \mathscr{K}(X) \subsetneq \mathscr{K}^{\aleph_1}(X) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathscr{K}^{|\Gamma|}(X) \subsetneq \mathscr{K}^{|\Gamma|^+}(X) = \mathscr{B}(X)$$
(Daws [29]);
- dla $X = \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \ell_2^n\right)_{c_0}$ istnieją dokładnie dwa właściwe ideały $\mathscr{B}(X)$ i mamy
$$\{0\} \subsetneq \mathscr{K}(X) \subsetneq \overline{\mathscr{G}_{c_0}(X)} \subsetneq \mathscr{B}(X),$$
gdzie $\overline{\mathscr{G}_{c_0}(X)}$ to normowe domknięcie zbioru ideałów faktoryzujących się przez przestrzeń c_0 (Laustsen, Loy i Read [70]);
- dla $X = \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \ell_2^n\right)_{\ell_1}$ istnieją dokładnie dwa właściwe ideały $\mathscr{B}(X)$ i mamy
$$\{0\} \subsetneq \mathscr{K}(X) \subsetneq \overline{\mathscr{G}_{\ell_1}(X)} \subsetneq \mathscr{B}(X)$$
(Laustsen, Schlumprecht i Zsák [72]);

[16] Przypominamy, że przez *operator* rozumiemy operator liniowy i ograniczony.

- dla przestrzeni $C(K)$, gdzie K jest przestrzenią Mrówki skonstruowaną przez Koszmidera [62] (przy założeniu Hipotezy Continuum), istnieją dokładnie dwa właściwe ideały $\mathscr{B}(C(K))$ i mamy

$$\{0\} \subsetneq \mathscr{K}(C(K)) \subsetneq \mathscr{X}(C(K)) = \mathscr{G}_{c_0}(C(K)) = \mathscr{WCG}(C(K)) \subsetneq \mathscr{B}(C(K)),$$

gdzie $\mathscr{WCG}(C(K))$ to ideał operatorów słabo zwarcie generowalnych (zdefiniowany poniżej) – jest to wynik ze wspólnej pracy z Kanią ([KK14, Theorem 5.5]), otrzymany niezależnie, lecz nieopublikowany, przez Brookera.

Struktura kraty ideałów w $\mathscr{B}(X)$ jest także znana w niektórych przypadkach, gdy X jest przestrzenią o *małej* (czy też *bardzo małej*) liczbie operatorów[17]. Przede wszystkim dla przestrzeni Argyrosa-Haydona X_{AH} skonstruowanej w [7], dla której każdy operator $T \in \mathscr{B}(X_{\mathsf{AH}})$ jest postaci $T = \lambda I + K$, gdzie I jest operatorem identycznościowym, a $K \in \mathscr{K}(X_{\mathsf{AH}})$. Poza jednak takimi „egzotycznymi” i niezwykle skomplikowanymi konstrukcjami, powyższa lista wyczerpuje wszystkie przestrzenie Banacha, dla których krata ideałów algebry operatorów jest całkowicie opisana. Tym niemniej, sam problem istnienia i charakteryzacji ideałów maksymalnych w $\mathscr{B}(X)$ jest interesujący. Wiadomo np. że algebra $\mathscr{B}(\ell_p \oplus \ell_q)$ dla $1 \leqslant p, q < \infty$, $p \neq q$, zawiera dokładnie dwa właściwe ideały maksymalne – operatorów faktoryzujących się przez ℓ_p oraz tych faktoryzujących się przez ℓ_q. Okazuje się również, że krata ideałów nie tworzy zbioru liniowo uporządkowanego (zob. [91] i [92]). W przypadku przestrzeni $X = (\bigoplus_{n=1}^{\infty} \ell_1^n)_{c_0}$ wiadomo, że $\mathscr{B}(X)$ zawiera dokładnie jeden ideał maksymalny ([71]).

Główną inspiracją dla pracy [KK14] były wyniki Loya-Willisa [75] o ideałach algebry operatorów na przestrzeni Jamesa $\mathcal{J}_2$ (zob. [1, §3.4]), wzmocnione później przez Laustsena [69] i sformułowane dla $\mathcal{J}_p$ przy dowolnym $1 < p < \infty$. Przypomnijmy, że dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb zespolonych określamy jego *p-te wahanie* wzorem

$$\|x\|_{\mathcal{J}_p} = \sup \Big\{ \Big(\sum_{m=1}^{n-1} |x_{k_m} - x_{k_{m+1}}|^p \Big)^{1/p} : n \geqslant 2,\ 1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_n \Big\}.$$

Definiujemy *p-tą przestrzeń Jamesa* $\mathcal{J}_p$ nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ jako

$$\mathcal{J}_p = \Big\{ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \colon \|x\|_{\mathcal{J}_p} < \infty \text{ oraz } \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Big\};$$

wówczas $(\mathcal{J}_p, \|\cdot\|_{\mathcal{J}_p})$ jest przestrzenią Banacha.

Twierdzenie 4.34 (Loy, Willis, Laustsen)**.** *Dla dowolnego* $1 < p < \infty$ *mamy*

$$\mathscr{K}(\mathcal{J}_p) = \mathscr{S}(\mathcal{J}_p) \subsetneq \mathscr{G}_{\ell_p}(\mathcal{J}_p) \subsetneq \mathscr{W}(\mathcal{J}_p).$$

Ponadto ideał operatorów słabo zwartych $\mathscr{W}(\mathcal{J}_p)$ *jest jedynym właściwym ideałem maksymalnym w* $\mathscr{B}(\mathcal{J}_p)$.

[17] Słynna przestrzeń Gowersa-Maureya X_{GM} skonstruowana w [44] była pierwszym przykładem przestrzeni *dziedzicznie nierozkładalnej* (w skrócie HI, ang. *hereditarily indecomposable*), tj. takiej, która nie zawiera żadnej podprzestrzeni dającej się rozłożyć na sumę prostą dwóch nieskończenie wymiarowych przestrzeni. Gowers i Maurey wykazali, że jeżeli X jest zespoloną przestrzenią HI, to każdy operator $T \in \mathscr{B}(X)$ jest postaci $\lambda I + S$, gdzie I oznacza operator identycznościowy, $\lambda \in \mathbb{C}$ oraz $S \in \mathscr{S}(X)$. Mówimy, że przestrzenie te mają *mało operatorów*. Struktura kraty ideałów w $\mathscr{B}(X_{\mathsf{GM}})$ nie jest jednak znana – jak wykazali Androulakis i Schlumprecht, istnieją operatory ściśle singularne na X_{GM}, które nie są zwarte. Mamy więc sytuację następującą: $\{0\} \subsetneq \mathscr{K}(X_{\mathsf{GM}}) \subsetneq \ldots \subsetneq \mathscr{S}(X_{\mathsf{GM}}) \subsetneq \mathscr{B}(X_{\mathsf{GM}})$. Efekt podobnej natury był po raz pierwszy uzyskany przez Shelaha i Stepransa [93], którzy skonstruowali taką przestrzeń X o gęstości ω_1, że każdy operator $T \in \mathscr{B}(X)$ ma postać $T = \lambda I + U$ dla pewnego $U \in \mathscr{X}(X)$.

Naszym celem było uzyskanie podobnego rezultatu dla tzw. *długiej przestrzeni Jamesa* $\mathcal{J}_p(\omega_1)$ zdefiniowanej przez Edgara [35], która stanowi kontrprzykład do kilku interesujących pytań nieośrodkowej teorii przestrzeni Banacha. Przykładowo, $\mathcal{J}_p$ jest drugą przestrzenią sprzężoną z własnością Radona-Nikodyma, ale nie jest przestrzenią WCG.

Definicja 4.35. Dla $1 < p < \infty$ i dowolnej funkcji $x\colon [0,\omega_1) \to \mathbb{K}$ niech

$$\|x\|_{p,0} = \sup\Big\{ \Big(\sum_{j=1}^{n} |x(\alpha_j) - x(\alpha_{j-1})|^p \Big)^{1/p} : n \in \mathbb{N} \text{ oraz } 0 \leqslant \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n < \eta \Big\}.$$

Długą przestrzeń Jamesa $\mathcal{J}_p^{(0)}(\omega_1)$ definiujemy jako

$$\mathcal{J}_p^{(0)}(\omega_1) = \Big\{ x\colon [0,\omega_1) \to \mathbb{K} \,|\, x \text{ jest ciągła}, x(0) = 0 \text{ oraz } \|x\|_{p,0} < \infty \Big\}.$$

Definiujemy także

$$\widetilde{\mathcal{J}_p}(\omega_1) = \Big\{ x\colon [0,\eta) \to \mathbb{K} \,|\, \lim_{\alpha\to\omega_1} x(\alpha) = 0 \text{ oraz } \|x\|_{p,0} < \infty \Big\},$$

oraz

$$\mathcal{J}_p(\omega_1) = \{ x \in \widetilde{\mathcal{J}_p}(\omega_1) \colon x \text{ jest ciągła} \}.$$

Definicja przestrzeni $\mathcal{J}_p^{(0)}(\omega_1)$ to oryginalna definicja Edgara. Pozostałe dwie modyfikacje są nieco wygodniejsze dla naszych potrzeb. Okazuje się jednak, że wszystkie trzy wprowadzone wyżej przestrzenie są parami izomorficzne i możemy je rozważać z równoważną normą

$$\|x\|_{\mathcal{J}_p} = 2^{-1/p} \sup\Big\{ \Big(|x(\alpha_n) - x(\alpha_0)|^p + \sum_{j=1}^{n} |x(\alpha_j) - x(\alpha_{j-1})|^p \Big)^{1/p} : n \in \mathbb{N} \text{ oraz } 0 \leqslant \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n < \omega_1 \Big\},$$

która jest bardziej naturalna niż $\|\cdot\|_{p,0}$ w tym sensie, że $\|\mathrm{e}_\alpha\|_{\mathcal{J}_p} = 1$ dla każdego $\alpha < \omega_1$, gdzie $\mathrm{e}_\alpha = \mathbb{1}_{\{\alpha\}}$.

W przypadku długiej przestrzeni Jamesa jedynym właściwym ideałem maksymalnym okazuje się ideał operatorów o obrazie leżącym w pewnej WCG podprzestrzeni swojej przeciwdziedziny. W [KK14] wprowadzamy więc następującą definicję.

Definicja 4.36. Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha. Operator $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ nazwiemy *słabo zwarcie generowalnym* (w skrócie WCG), jeżeli istnieje taka WCG podprzestrzeń[18] Z przestrzeni Y, że $T(X) \subseteq Z$.

Tak zdefiniowana klasa $\mathscr{WCG}$ operatorów słabo zwarcie generowalnych tworzy domknięty ideał w sensie Pietscha (zob. [85]), podobnie jak klasy $\mathscr{K}$, $\mathscr{W}$, $\mathscr{X}$, $\mathscr{S}$. Oznacza to, że:

- każdej parze (X,Y) przestrzeni Banacha przyporządkowuje liniową podprzestrzeń $\mathscr{WCG}(X,Y)$ przestrzeni $\mathscr{B}(X,Y)$ wszystkich operatorów WCG pomiędzy X i Y;
- dla dowolnych przestrzeni Banacha X, Y, E, F i dowolnych operatorów $T \in \mathscr{B}(X,E)$, $S \in \mathscr{J}(E,F)$ oraz $R \in \mathscr{B}(F,Y)$ mamy $RST \in \mathscr{J}(X,Y)$;

[18] Przestrzeń Banacha Z jest przestrzenią WCG, jeżeli istnieje taki słabo zwarty zbiór $K \subset Z$, że $\overline{\mathrm{span}}(K) = Z$.

- dla dowolnych przestrzeni Banacha X i Y ideał $\mathscr{WCG}(X,Y)$ jest domknięty w $\mathscr{B}(X,Y)$ ([KK14, Theorem 2.1]).

Klasa ta ma też następujące własności ideałowe rozważane w teorii ideałów Pietscha.

Stwierdzenie 4.37 ([KK14, Propositions 2.3, 2.4]). *Ideał $\mathscr{WCG}$ jest surjektywnym, ale nie injektywnym ideałem operatorów*[19]. *Nie jest też ideałem symetrycznym, tzn. operator sprzężony do operatora* WCG *nie musi być* WCG, *a z założenia, że T^* jest operatorem* WCG *również nie wynika, że T jest* WCG.

Kluczową rolę w badaniu operatorów na długiej przestrzeni Jamesa odgrywa następujący lemat, który jest analogonem uzyskanych wcześniej wyników dla operatorów na przestrzeni $C_0[0,\omega_1]$ funkcji ciągłych na $[0,\omega_1]$ znikających w punkcie ω_1 (zob. [59, Thm. 1.5] i [2, Prop. 3]). Wyniki te mówią intuicyjnie tyle, że przestrzeń $[0,\omega_1]$ jest na tyle „długa", że każdy operator na $C_0[0,\omega_1]$ musi działać jak mnożenie przez stałą na sporym (domkniętym i kofinalnym) zbiorze liczb porządkowych z ω_1. Podobny efekt zachodzi dla operatorów na $\mathcal{J}_p(\omega_1)$.

Twierdzenie 4.38 ([KK14, Theorem 3.1]). *Dla każdego $p\in(1,\infty)$ i dowolnego operatora $T\in\mathscr{B}(\mathcal{J}_p(\omega_1))$ istnieje taka liczba $\lambda\in\mathbb{K}$, że na pewnym domkniętym i kofinalnym zbiorze $D\subseteq\omega_1$ zachodzi*

$$\langle T(x),\mathrm{e}_\alpha^*\rangle=\lambda\langle x,e_\alpha^*\rangle\quad \textit{dla } x\in\mathcal{J}_p(\omega_1) \textit{ oraz } \alpha\in D. \tag{4.9}$$

W dowodzie ważną rolę odgrywa twierdzenie Haglera-Johnsona, które wobec faktu, że $\mathcal{J}_p(\omega_1)^*$ ma własność Radona-Nikodyma, gwarantuje, że kula jednostkowa $\mathcal{J}_p(\omega_1)^*$ jest *-słabo ciągowo zwarta. Korzystamy także z klasycznego narzędzia kombinatorycznego, tj. Δ-*lematu*, który mówi, że dowolna nieprzeliczalna rodzina $\mathcal{F}$ skończonych podzbiorów zbioru ω_1 ma *korzeń*, czyli taki zbiór Δ, że $A\cap B=\Delta$ dla wszelkich A,B, $A\neq B$, z pewnej nieprzeliczalnej podrodziny $\mathcal{F}$. Warto też podkreślić, że choć dowód twierdzenia 4.38 opiera się na metodach stosowanych w dowodach wspomnianych wyżej twierdzeń z [59] i [2], pewne istotne zmiany były niezbędne z tego powodu, że oryginalne rozumowania były mocno oparte na izometrycznym izomorfizmie $C[0,\alpha]^*\cong\ell_1([0,\alpha])$ (dla dowolnej liczby porządkowej α).

Podobnie jak w [59] rozważamy odwzorowanie $\Lambda_p\colon\mathscr{B}(\mathcal{J}_p(\omega_1))\to\mathbb{K}$ dane jako $\Lambda_p(T)=\lambda$, gdzie $\lambda\in\mathbb{K}$ jest liczbą, dla której zachodzi (4.9) (taka liczba jest wyznaczona jednoznacznie, bowiem przecięcie dwóch domkniętych zbiorów kofinalnych jest dalej zbiorem kofinalnym). Tak określone Λ_p jest niezerowym funkcjonałem liniowo-multiplikatywnym, a zatem $\ker\Lambda_p$ jest maksymalnym ideałem w $\mathscr{B}(\mathcal{J}_p(\omega_1))$ kowymiaru 1.

Ideał ten opisujemy na kilka sposobów. Niech $L(\omega_1)$ oznacza zbiór wszystkich niezerowych liczb granicznych mniejszych od ω_1. Dla każdego $\alpha\in(0,\omega_1)$ określamy podprzestrzeń przestrzeni $\mathcal{J}_p(\omega_1)$ jako

$$\mathcal{J}_p(\alpha)=\overline{\operatorname{span}}\Big\{\mathbb{1}_{[0,\beta]}\colon 0\leqslant\beta<\alpha\Big\}$$

i definiujemy

$$\mathfrak{G}_p=\Bigg(\bigoplus_{\alpha\in L(\omega_1)}\mathcal{J}_p(\alpha)\Bigg)_{\ell_p}.$$

[19] Charakteryzację ideałów surjektywnych i injektywnych można znaleźć w [85, Thm. 4.6.9, 4.7.9].

Jako ℓ_p-suma przestrzeni WCG (a nawet przestrzeni ośrodkowych), gdzie $p \in (1,\infty)$, przestrzeń $\mathfrak{G}_p$ jest przestrzenią WCG ([73, Proposition 2.4]). Okazuje się, że operatory z $\mathscr{WCG}(\mathcal{J}_p(\omega_1))$ faktoryzują się przez tę właśnie przestrzeń, podobnie jak operatory słabo zwarte na $\mathcal{J}_p$ faktoryzują się przez przestrzeń refleksywną $\big(\bigoplus_{n=1}^\infty \mathcal{J}_p(n)\big)_{\ell_p}$ ([69, Prop. 4.18]).

Twierdzenie 4.39 ([KK14, Theorem 3.7])**.** *Dla każdego $p \in (1,\infty)$ mamy*

$$\ker \Lambda_p = \mathscr{WCG}(\mathcal{J}_p(\omega_1)) = \mathscr{G}_{\mathfrak{G}_p}(\mathcal{J}_p(\omega_1))$$

i każda z tych rodzin jest jedynym właściwym ideałem maksymalnym w $\mathscr{B}(\mathcal{J}_p(\omega_1))$. Co więcej, operator $T \in \mathscr{B}(\mathcal{J}_p(\omega_1))$ leży w tym ideale wtedy i tylko wtedy, gdy jest operatorem $\mathcal{J}_p(\omega_1)$-singularnym, tzn. nie działa jak izomorfizm na żadnej izomorficznej kopii $\mathcal{J}_p(\omega_1)$.

W istocie opis ideału $\mathscr{WCG}(\mathcal{J}_p(\omega_1))$ uzyskany w pracy [KK14] jest pełniejszy. Charakteryzujemy ten ideał jako ideał operatorów *kompresowalnych* w sensie Loya-Willisa [75], a także pokazujemy, że pokrywa się on ze zbiorem $\mathscr{M}_{\mathcal{J}_p(\omega_1)}$ zdefiniowanym przez Doseva i Johnsona [33] dla każdej przestrzeni Banacha X następująco:

$$\mathscr{M}_X = \Big\{T \in \mathscr{B}(X) \colon I \neq ATB \ \text{ dla wszelkich } A, B \in \mathscr{B}(X)\Big\}.$$

Pokazali oni, że jeżeli $\mathscr{M}_X$ jest zamknięty na dodawanie (na ogół być nie musi), to jest jedynym ideałem maksymalnym w $\mathscr{B}(X)$. Jako wartość dodaną uzyskujemy też następujące wyniki, naturalne z punktu widzenia teorii algebr Banacha.

Twierdzenie 4.40 ([KK14, Theorem 3.11, 3.12])**.** (a) *Każdy operator z $\mathscr{WCG}(\mathcal{J}_p(\omega_1))$ jest sumą trzech komutatorów algebry $\mathscr{B}(\mathcal{J}_p(\omega_1))$.*
(b) *Każdy homomorfizm określony na algebrze $\mathscr{B}(\mathcal{J}_p(\omega_1))$ jest automatycznie ciągły.*

W pracy [KK14] zajmujemy się też charakteryzacją operatorów WCG na przestrzeniach typu $C(K)$ w duchu wektorowego twierdzenia Riesza o reprezentacji. Wiadomo, że dla każdego operatora $T\colon C(K) \to X$ istnieje *-słabo σ-addytywna miara $\mu\colon \Sigma \to X^{**}$ określona na σ-ciele Σ podzbiorów borelowskich K, spełniająca następujące warunki:

(i) dla każdego $x^* \in X^*$ odwzorowanie $\Sigma \ni A \to \mu(A)x^*$ jest regularną, σ-addytywną miarą skalarną (oznaczaną przez $x^* \circ \mu$);
(ii) $x^*T(f) = \int_K f d(x^* \circ \mu)$ dla każdego $x^* \in X^*$ oraz $f \in C(K)$;
(iii) $\|T\| = \|\mu\|(K)$.

Twierdzenie 4.41 ([KK14, Theorem 4.1])**.** *Niech K będzie zwartą przestrzenią Hausdorffa, X przestrzenią Banacha, a $T\colon C(K) \to X$ operatorem, i niech $\mu\colon \Sigma \to X^{**}$ będzie miarą reprezentującą operator T. Jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje rozkład $K = K_E^\varepsilon \cup L^\varepsilon$, gdzie K_E^ε jest przestrzenią Eberleina*[20]*, a semiwariacja $\|\mu\|(L^\varepsilon) < \varepsilon$, to obraz operatora T jest zawarty w przestrzeni* WCG.

Niestety powyższego twierdzenia nie da się odwrócić, na co wskazuje [KK14, Example 4.3]. Podany tu warunek jest jednak na tyle delikatny, że nie można żądać istnienia odpowiedniego rozkładu z $\varepsilon = 0$.

[20] *Przestrzenią Eberleina* nazywamy przestrzeń topologiczną, która jest homeomorficzna z pewnym słabo zwartym podzbiorem przestrzeni Banacha.

Przykład 4.42 ([KK14, Example 4.4])**.** Określmy operator $T\colon C(\beta\mathbb{N}) \cong \ell_\infty \to c_0$ wzorem $T(\xi) = (\frac{1}{n}\xi_n)_{n=1}^\infty$. Wówczas dla każdego $x^* = (\eta_n)_{n=1}^\infty \in \ell_1$ miara reprezentująca μ_{x^*} złożenie x^*T ma nośnik zawarty w $\mathbb{N}$ i dla każdego singletonu $\{n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ przyjmuje wartość $\frac{1}{n}\eta_n$. Nietrudno sprawdzić, że wariacja $|x^* \circ \mu|(A) = \sum_{n\in A\cap\mathbb{N}} \frac{1}{n}|\eta_n|$ dla każdego zbioru borelowskiego $A \subset \beta\mathbb{N}$. Mamy zatem

$$\|\mu\|(A) = \frac{1}{\min(A\cap\mathbb{N})}$$

(przy czym $\frac{1}{\infty} := 0$). Aby więc zachodził rozkład $\beta\mathbb{N} = K_E^\varepsilon \cup L^\varepsilon$, gdzie $\|\mu\|(L^\varepsilon) < \varepsilon$, musiałoby zachodzić $\min(L^\varepsilon \cap \mathbb{N}) > \varepsilon^{-1}$. Aby zaś mieć $\beta\mathbb{N} = K \cup L$, gdzie K jest przestrzenią Eberleina, a $\|\mu\|(L) = 0$, K musiałby zawierać $\mathbb{N}$. Wtedy jednak $K = \beta\mathbb{N}$, co nie jest przestrzenią Eberleina.

Celem pracy [HKK14] było wprowadzenie możliwie prostego warunku na „odseparowywanie" łańcuchów funkcji, który wiązałby się ze słabą zwartą generowalnością operatorów na przestrzeniach $C(K)$ w duchu twierdzenia Pełczyńskiego [84]. Twierdzenie to mówi, że jeżeli $T\colon C(K) \to X$ nie jest słabo zwarty, to działa jak izomorfizm na pewnej kopii przestrzeni c_0, a mówiąc nieco inaczej – istnieje ciąg $(O_n)_{n=1}^\infty$ parami rozłącznych podzbiorów otwartych K oraz jednostajnie ograniczony ciąg $(f_n)_{n=1}^\infty \subset C(K)$ o tej własności, że nośnik $\mathrm{supp}(f_n) \subset O_n$ $(n \in \mathbb{N})$ oraz $\inf_n \|Tf_n\| > 0$.

Definicja 4.43. Niech K będzie zwartą przestrzenią Hausdorffa. Wprowadzamy na $C(K)$ porządek $\prec$ następująco: $f \prec g$, jeżeli $f \neq g$ oraz $f(x) = g(x)$ dla każdego $x \in \mathrm{supp}(f)$. Jeżeli X jest przestrzenią Banacha, a $T\colon C(K) \to X$ operatorem, to mówimy, że T spełnia *warunek* (♗), jeżeli

(♗) dla każdego nieprzeliczalnego $\prec$-łańcucha $F \subset C(K)$ spełniającego $\sup_{f\in F}\|f\| < \infty$ mamy

$$\inf\{\|Tf - Tg\|\colon f, g \in F, f \neq g\} = 0.$$

Każdy jednostajnie ograniczony $\prec$-łańcuch $\{f_i\}_{i\in I}$ spełniający $\|f_i - f_j\| \geqslant \delta$ dla $i, j \in I$, $i \neq j$ i pewnej dodatniej liczby δ, będziemy nazywać *δ-$\prec$-łańcuchem*. Mówimy także, że K spełnia warunek (♗), jeżeli operator identyczności na $C(K)$ spełnia (♗), co oznacza, że dla żadnego $\delta > 0$ nie istnieją nieprzeliczalne δ-$\prec$-łańcuchy w $C(K)$.

Idea wprowadzenia warunku (♗) wzięła się z następującego przeformułowania twierdzenia Pełczyńskiego: operator $T\colon C(K) \to X$ jest słabo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego nieskończonego $\prec$-łańcucha $F \subset C(K)$ mamy $\inf\{\|Tf - Tg\|\colon f, g \in F, f \neq g\} = 0$ ([HKK14, Prop. 2.1). Oznacza to, że każdy słabo zwarty operator spełnia warunek (♗). W pewnych sytuacjach warunek ten okazuje się równoważny słabej zwartości.

Twierdzenie 4.44 ([HKK14, Proposition 2.3])**.** *Niech K będzie ekstremalnie niespójną zwartą przestrzenią Hausdorffa, a X przestrzenią Banacha. Wówczas każdy operator z $C(K)$ do X spełniający (♗) jest słabo zwarty.*

Dowód oparty jest na pewnej topologicznej modyfikacji znanego kombinatorycznego lematu Rosenthala [89, Lemma 1.1] (zob. też [32, Lemma I.4.1]). Podobne kombinatoryczne rozumowanie prowadzi do odpowiednika powyższego twierdzenia dla reprezentującej miary wektorowej. Niech mianowicie Σ będzie σ-ciałem, X przestrzenią Banacha, a $\mu\colon \Sigma \to X$ miarą wektorową. Rozważamy warunek:

(♖) dla każdego nieprzeliczalnego łańcucha zbiorów $\{E_i\}_{i\in I}\subset\Sigma$ zachodzi

$$\inf\{\|\mu(E_i)-\mu(E_j)\|\colon i,j\in I, i\neq j\}=0.$$

Przypomnijmy, że miarę μ nazywamy *silnie addytywną*, jeżeli dla każdego ciągu $(E_n)_{n=1}^{\infty}\subset\Sigma$ zbiorów parami rozłącznych szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$ jest bezwarunkowo zbieżny w X.

Twierdzenie 4.45 ([HKK14, Proposition 2.4])**.** *Niech Σ będzie σ-ciałem, a X przestrzenią Banacha. Ograniczona miara wektorowa $\mu\colon\Sigma\to X$ spełnia warunek (♖) wtedy i tylko wtedy, gdy jest silnie addytywna.*

Łącząc twierdzenia 4.44 i 4.45, otrzymujemy uzupełnienie klasycznego twierdzenia Bartle'a-Dunforda-Schwartza (zob. [32, Theorem VI.2.5]) dla przestrzeni ekstremalnie niespójnych.

Twierdzenie 4.46. *Niech K będzie ekstremalnie niespójną zwartą przestrzenią Hausdorffa, X przestrzenią Banacha, a $T\colon C(K)\to X$ operatorem z miarą reprezentującą $\mu\colon\Sigma\to X^{**}$ określoną na σ-ciele zbiorów borelowskich w K. Wówczas następujące warunki są parami równoważne:*

(i) *T jest słabo zwarty;*
(ii) *μ jest silnie addytywna;*
(iii) *T spełnia (♗);*
(iv) *μ spełnia (♖).*

Warunek (♗) w ogólności leży, mówiąc mało precyzyjnie, gdzieś pomiędzy słabą zwartością a słabą zwartą generowalnością. Okazuje się bowiem, że nie każdy operator WCG spełnia (♗).

Przykład 4.47 ([HKK14, Remark 2.7])**.** Rozważmy zwartą przestrzeń $K=[0,\omega_1]$ z topologią porządkową i niech $D=\{0\}\cup\{\alpha+1\colon \alpha<\omega_1\}$. Określmy $\varphi\colon[0,\omega_1]\to[0,\omega_1]$ wzorem

$$\varphi(\alpha)=\begin{cases}\alpha+1 & \text{dla } \alpha\in D,\\ \alpha & \text{dla } \alpha\in[0,\omega_1]\setminus D.\end{cases}$$

Jest to oczywiście odwzorowanie ciągłe, a więc operator $C_\varphi\colon C[0,\omega_1]\to C[0,\omega_1]$ dany jako $C_\varphi f=f\circ\varphi$ jest ograniczony. Zauważmy, że $T=I_{C[0,\omega_1]}-C_\varphi$ przeprowadza długą bazę Schaudera $\{\mathbb{1}_{[0,\alpha]}\}_{0\leqslant\alpha\leqslant\omega_1}$ przestrzeni $C[0,\omega_1]$ na zbiór $\{\mathbf{1}_{\{\alpha\}}\}_{\alpha\in D}\cup\{0\}$. Obraz operatora T jest zatem izomorficzny z $c_0(\omega_1)$, która jest przestrzenią WCG, a więc $T\in\mathscr{WCG}(C[0,\omega_1])$. Z drugiej strony, T przekształca 1-$\prec$-łańcuch $\{\mathbb{1}_{[0,\alpha]}\}_{\alpha\in D}$ na $\{\mathbb{1}_{\{\alpha\}}\}_{\alpha\in D}$, skąd wynika, że T nie spełnia warunku (♗).

W pracy [HKK14] badaliśmy także klasę zwartych przestrzeni Hausdorffa spełniających warunek (♗). Pokazaliśmy, że do klasy tej należą:

- przestrzenie lokalnie spójne spełniające warunek c.c.c. ([HKK14, Corollary 3.5]),
- jednopunktowe uzwarcenie *przestrzeni drabinkowej* (ang. *ladder system space*)[21] na ω_1 ([HKK14, Theorem 3.8]).

[21] Jest to ω_1 wyposażona w całkowicie niespójną topologię w sposób następujący: (1) punkt 0 oraz każda przeliczalna liczba następnikowa to punkt izolowany; (2) dla każdej niezerowej liczby granicznej $\lambda<\omega_1$ wybieramy (co można oczywiście zrobić na wiele sposobów) zbiór $\{\alpha_{n,\lambda}\colon n<\omega\}\subseteq\lambda$ typu porządkowego ω złożony z liczb następnikowych i kofinalny w λ (*drabinka*); (3) definiujemy wówczas bazowe otoczenia punktu λ jako zbiory postaci $U_{\lambda,m}=\{\lambda\}\cup\{\alpha_{n,\lambda}\colon n\geqslant m\}$ $(m<\omega)$.

Postawiliśmy pytanie o to, czy każda przestrzeń Eberleina spełnia warunek (♗), na której pozytywnej odpowiedzi udzielił Krupski [65] w swojej rozprawie doktorskiej. Kania i Smith [60] znacznie rozszerzyli klasę takich przestrzeni, np. na przestrzenie Corsona i Gruenhagego. Pokazali także, że ani $\beta\mathbb{R}$, ani narost $\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ nie spełnia (♗).

Ciekawym efektem jest to, że warunek (♗) naturalnie indukuje lewostronny domknięty ideał.

Twierdzenie 4.48. *Dla każdej zwartej przestrzeni Hausdorffa K zbiór wszystkich operatorów $T \in \mathscr{B}(C(K))$ spełniających warunek (♗) tworzy domknięty lewostronny ideał w algebrze $\mathscr{B}(C(K))$.*

Jedyną trudną częścią dowodu jest wykazanie, że zbiór operatorów spełniających (♗) jest zamknięty na dodawanie. Wymaga to użycia twierdzenia typu ramseyowskiego, które podali Dushnik i Miller [34]: jeżeli $c\colon [\omega_1]^2 \to \{0, 1\}$ jest kolorowaniem wszystkich dwuelementowych podzbiorów ω_1 na jeden z dwóch kolorów, to zachodzi przynajmniej jeden z warunków:

- istnieje nieprzeliczalny zbiór $A \subset \omega_1$ spełniający $[A]^2 \subset c^{-1}\{0\}$,
- dla każdego zbioru nieprzeliczalnego $A \subset \omega_1$ istnieje $a \in A$ oraz taki nieprzeliczalny zbiór $B \subset A$, że $\{a, b\} \in c^{-1}\{1\}$ dla każdego $b \in B$.

Kania i Smith wykazali później, że rozważany ideał nie jest na ogół ideałem prawostronnym (zob. [60, Ex. 4.2]).

4.c.5. Zbiory odseparowane na sferze

Niewątpliwie najbardziej klasycznym i najstarszym wynikiem dotyczącym zbiorów odseparowanych na sferze przestrzeni unormowanej jest lemat Riesza, który implikuje, że dla każdej nieskończenie wymiarowej przestrzeni unormowanej i dowolnej liczby $\delta > 0$ istnieje taki ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset S_X$, że $\|x_m - x_n\| \geqslant 1 - \delta$, jeśli tylko $m \neq n$. Wzmocnienie tego wyniku uzyskał Kottman [64] pokazując, że sfera S_X musi zawierać nieskończony ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ (1+)-*odseparowany*, tj. spełniający warunek $\|x_m - x_n\| > 1$ dla $m \neq n$. Znacznie głębszych technik, związanych z twierdzeniem Ramseya dla zbiorów nieskończonych, wymagało silniejsze twierdzenie Eltona-Odella [36], które mówi, że dla każdej nieskończenie wymiarowej przestrzeni X istnieje $\varepsilon > 0$ oraz $(1 + \varepsilon)$-*odseparowany* ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset S_X$, tj. spełniający $\|x_m - x_n\| \geqslant 1 + \varepsilon$ dla $m \neq n$. W tej samej pracy Elton i Odell zauważyli, że ich twierdzenie nie przenosi się w ogólności na przypadek nieośrodkowy. Przykładowo, stosując Δ-lemat dla nieprzeliczalnych rodzin skończonych podzbiorów ω_1, pokazali, że kula jednostkowa przestrzeni $c_0(\omega_1)$ nie zawiera żadnego nieprzeliczalnego zbioru $(1 + \varepsilon)$-odseparowanego, przy żadnym $\varepsilon > 0$. Celem wspólnej pracy z Kanią [KK16] było uzyskanie nieośrodkowych analogonów twierdzeń Kottmana i Eltona-Odella dla możliwie szerokiej klasy przestrzeni nieośrodkowych.

Praca zasadniczo podzielona jest na dwie części. W pierwszej stosujemy rozmaite techniki pozaskończone i kombinatoryczne w celu uzyskania żądanych analogonów dwóch wymienionych wyżej twierdzeń dla dość szerokiej klasy nieośrodkowych przestrzeni Banacha. W drugiej zajmujemy się przestrzeniami $C(K)$ odpowiadając na pytanie postawione przez Mercourakisa i Vassiliadis [78] o to, czy sfera jednostkowa przestrzeni $C(K)$, gdzie K jest niemetryzowalną zwartą przestrzenią Hausdorffa, musi zawierać nieprzeliczalny (1+)-odseparowany podzbiór. Dowodzimy w istocie silniejszego twierdzenia ([KK16, Theorem B]), które mówi, że dla K niebędącej przestrzenią doskonale normalną możemy znaleźć nieprzeliczalny podzbiór sfery, którego dowolne dwa elementy odległe są od siebie o 2, zaś dla doskonale normalnej K zawsze można znaleźć $(1+)$-odseparowany podzbiór sfery o mocy równej gęstości przestrzeni $C(K)$.

Wyniki pierwszej części pracy podsumowuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.49 ([KK16, Theorem A])**.** *Niech X będzie nieośrodkową przestrzenią Banacha. Wówczas:*

(i) *jeżeli X jest quasi-refleksywna, to sfera jednostkowa S_X zawiera nieprzeliczalny $(1+)$-odseparowany podzbiór;*
(ii) *jeżeli X jest superrefleksywna, to dla każdej regularnej liczby kardynalnej κ nieprzekraczającej gęstości X istnieje $\varepsilon > 0$ oraz $(1+\varepsilon)$-odseparowany podzbiór S_X mocy κ. (W szczególności, sfera jednostkowa nieośrodkowej przestrzeni superrefleksywnej zawiera nieprzeliczalny $(1+\varepsilon)$-odseparowany podzbiór, dla pewnego $\varepsilon > 0$.)*
(iii) *jeżeli X jest przestrzenią WLD gęstości większej niż $\mathfrak{c}$, to sfera jednostkowa przestrzeni X^* zawiera nieprzeliczalny $(1+)$-odseparowany podzbiór.*

Przypomnijmy, że przestrzeń X nazywa się *quasi-refleksywną*, jeżeli $\dim X^{**}/X < \infty$. Nazywamy ją zaś *przestrzenią WLD* (od ang. *weakly Lindelöf determined*), jeżeli dla pewnego zbioru Γ kula dualna (B_{X^*}, w^*) jest homeomorficzna z podzbiorem przestrzeni

$$\{x \in \mathbb{R}^\Gamma \colon \text{the set } \{\gamma \in \Gamma \colon x(\gamma) \neq 0\} \text{ is countable}\},$$

który jest zwarty w topologii zbieżności punktowej. Wiadomo np. że klasa przestrzeni WLD zawiera wszystkie przestrzenie słabo zwarcie generowalne.

Omówimy teraz dokładniej techniki dowodowe użyte w twierdzeniu 4.49. Odnotujmy najpierw, że na mocy twierdzenia Civina-Yooda [25, Thm. 4.6] każda nieośrodkowa przestrzeń quasi-refleksywna zawiera nieośrodkową przestrzeń refleksywną. Sformułowanie tezy (i) twierdzenia 4.49 może więc wydawać się nieco dziwne, bo przecież z przytoczonego faktu wynika od razu, że wystarczy ograniczyć się do przestrzeni refleksywnych. Sformułowanie to jest jednak zasadne, bowiem kluczowym narzędziem w dowodzie jest *normowalność* dowolnej podprzestrzeni $M \subseteq X^*$, która rozdziela punkty. Mówimy, że M jest *normująca*, jeżeli istnieje takie $c > 0$, że

$$\sup\Big\{|\langle x^*, x\rangle| \colon x^* \in M \cap B_{X^*}\Big\} \geqslant c\|x\| \qquad (x \in X).$$

(Jak pokazali Davis i Lindenstrauss [28], taka własność charakteryzuje przestrzenie quasi-refleksywne.)

Dowód tezy (i) w jakimś stopniu naśladuje elegancki argument podany przez Starbirda (zob. [30, pp. 7–8]) w celu wykazania oryginalnego twierdzenia Kottmana. Potrzebujemy jednak przeniesienia na przypadek nieskończony pewnego znanego z algebry liniowej lematu. Mówi on mianowicie, że jeśli y^*, $x_1^*, \ldots, x_N^*$ są funkcjonałami na danej przestrzeni liniowej nad $\mathbb{K}$ oraz y^* zeruje się, jeśli zerują się wszystkie x_i^*, to y^* jest liniową kombinacją funkcjonałów $x_1^*, \ldots, x_n^*$. Wprowadzamy następującą definicję, gdzie symbolem $\mathsf{ba}(\mathbb{N}) \cong \ell_\infty^*$ oznaczamy przestrzeń skalarnych, skończenie addytywnych miar o ograniczonej wariacji, określonych na σ-ciele wszystkich podzbiorów $\mathbb{N}$.

Definicja 4.50. Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią Banacha, $y^* \in X^*$ i niech $(x_n^*)_{n=1}^\infty \subset X^*$ będzie ciągiem ograniczonym. Oznaczmy przez $\mathrm{span}_\mathbb{Q}\{x_n^* \colon n \in \mathbb{N}\}$ przestrzeń liniowych kombinacji wektorów x_n^* o wymiernych współczynnikach. Powiemy, że y^*

jest *uogólnioną kombinacją* wektorów x_n^*, jeżeli dla pewnego ponumerowania $\{z_1^*, z_2^*, \ldots\}$ zbioru $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{x_n^* \colon n \in \mathbb{N}\} \cap B_{X^*}$ istnieje taka miara $\mu \in \mathsf{ba}(\mathbb{N})$, że

$$\langle y^*, x\rangle = \int_{\mathbb{N}} \langle z_n^*, x\rangle \, \mu(\mathrm{d}n) \qquad (x \in X).$$

Kluczowym narzędziem w dowodzie jest następujące uogólnienie zacytowanego wyżej lematu.

Lemat 4.51 ([KK16, Lemma 3.2])**.** *Niech X będzie rzeczywistą quasi-refleksywną przestrzenią Banacha. Załóżmy, że $y^* \in X^*$ i $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ jest takim ograniczonym ciągiem w X^*, że*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \ker(x_n^*) \subseteq \ker(y^*).$$

Wówczas y^* jest uogólnioną kombinacją funkcjonałów x_n^*'s ($n \in \mathbb{N}$).

Przejdźmy teraz do tezy (ii) twierdzenia 4.49. Ustalmy nieośrodkową przestrzeń Banacha i niech $\lambda = \mathsf{d}(X)$ będzie jej gęstością. Przypomnijmy, że rodzinę $(P_\alpha)_{\omega \leqslant \alpha \leqslant \lambda}$ liniowych rzutów na X nazywamy *projekcyjnym rozkładem jedności* (PRI, ang. *projectional resolution of identity*, jeżeli:

- $\|P_\alpha\| = 1$ dla $\omega < \alpha \leqslant \lambda$,
- $P_\omega = 0$ oraz $P_\lambda = I_X$,
- $\mathsf{d}(P_\alpha(X)) \leqslant |\alpha|$ dla każdego $\alpha < \lambda$,
- $P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = P_{\min\{\alpha,\beta\}}$ dla wszelkich $\omega \leqslant \alpha < \beta \leqslant \lambda$,
- dla każdego $x \in X$ odwzorowanie $\alpha \mapsto P_\alpha x$ jest ciągłe względem topologii porządkowej i normowej.

Idea dowodu opiera się na obserwacji Benyaminiego i Starbirda ([10, p. 139]), którzy dowiedli, że jeżeli X jest superrefleksywna, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $p \in (1, \infty)$, że operator

$$T \colon X \longrightarrow \Big(\bigoplus_{\omega \leqslant \alpha < \lambda} (P_{\alpha+1} - P_\alpha)(X)\Big)_{\ell_p}, \quad Tx = \Big(P_{\alpha+1}x - P_\alpha x\Big)_{\omega \leqslant \alpha < \lambda} \tag{4.10}$$

ma normę co najwyżej równą $2 + \varepsilon$. Wynika to z twierdzenia Jamesa (zob. [49, Thm. 4]), które mówi, że dla dowolnej przestrzeni superrefleksywnej X i dowolnych stałych $0 < c < 1/(2K)$, $C > 1$ istnieją wykładniki $1 < q < p < \infty$ takie, że dla każdego znormalizowanego ciągu bazowego $(e_n)_{n=1}^\infty \subset X$ ze stałą bazową K i dowolnych skalarów $(a_n)_{n=1}^N$ zachodzą nierówności

$$c \cdot \Big(\sum_{n=1}^N |a_n|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big\|\sum_{n=1}^N a_n e_n\Big\| \leqslant C \cdot \Big(\sum_{n=1}^N |a_n|^q\Big)^{1/q}.$$

Mając tego typu „ℓ_p-ℓ_q-zachowanie", potrafimy przez indukcję pozaskończoną skonstruować żądany zbiór odseparowany, o ile tylko operator T dany przez (4.10) jest odpowiednio ograniczony. Mówiąc dokładniej, powiemy, że T jest *ograniczony przez parę* (γ, δ), jeżeli $\|T\| \leqslant \delta$ oraz $\gamma \leqslant \|T|_Y\|$ dla każdej podprzestrzeni $Y \subseteq X$, dla której $\mathsf{d}(X/Y) < \lambda$. Pokazujemy, jak skonstruować żądany zbiór w przypadku, gdy istnieje taka para (γ, δ) spełniająca $\gamma/\delta > 2^{-1/p}$, że T jest ograniczony przez (γ, δ).

Z drugiej strony, prosty lemat ([KK16, Lemma 3.4]) trzymający ustalone dodatnie dolne oszacowanie dla restrykcji $T|_Y$, po wszystkich podprzestrzeniach spełniających $\mathsf{d}(X/Y) < \mathsf{d}(X)$, gwarantuje, że indukcyjny proces wyboru kolejnych podprzestrzeni musi doprowadzić do znalezienia odpowiedniej pary (γ, δ) ograniczającej operator T i spełniającej warunek $\gamma/\delta > 2^{-1/p}$.

Odnotowujemy w pracy, że technika ta nie może być przeniesiona na nieośrodkowe przestrzenie refleksywne z uwagi na konstrukcję Hájka [46] nieośrodkowej, refleksywnej przestrzeni typu Tsirelsona X, której żadna nieośrodkowa podprzestrzeń nie dopuszcza injektywnego operatora w $\ell_p(\lambda)$ dla nieprzeliczalnej λ. Niemniej jednak, twierdzenie 4.49 doczekało się wzmocnienia w niedawnej pracy Hájka, Kani i Russo [47], którzy pokazali, że sfera jednostkowa każdej nieośrodkowej przestrzeni refleksywnej musi zawierać nieprzeliczalny $(1+\varepsilon)$-odseparowany podbiór, z pewnym $\varepsilon > 0$.

Tezy (iii) twierdzenia 4.49 dowodzimy używając tzw. 1-*projekcyjnych szkieletów* (ang. 1-*projectional skeleton*) wprowadzonych przez Kubisia [67], a także kombinatorycznego twierdzenia Erdősa-Rado o kolorowaniu $\mathfrak{c}^+ \to (\omega_1)^2_2$. Przedstawiony w pracy [KK16] dowód miał jednak pewną lukę (w części dotyczącej konstrukcji układu Auerbacha), którą uzupełniono dopiero we wspomnianej pracy Hájka, Kani i Russo [47].

Ważnym i nierozwiązanym dotąd problemem pozostaje pytanie o to, czy sfera jednostkowa każdej nieośrodkowej przestrzeni Banacha zawiera nieprzeliczalny podzbiór (1+)-odseparowany. Odpowiedź na to pytanie może okazać się nierozstrzygalna w ZFC tak, jak analogiczny problem dotyczący zbiorów elementów równoodległych w nieośrodkowych przestrzeniach $C(K)$. Koszmider [63] udowodnił, że pod założeniem aksjomatu Martina i negacji hipotezy continuum każda nieośrodkowa przestrzeń $C(K)$ zawiera nieprzeliczalny zbiór elementów równoodległych, jednocześnie nie można dowieść takiego twierdzenia w samej aksjomatyce ZFC.

4.c.6. Indeks Szlenka – sumowalność i typ potęgowy

Omówimy tutaj pewne definicje i fakty z teorii indeksu Szlenka, które będą niezbędne do przedstawienia wyników pochodzących z prac [DK16], [DK17] i [CDK19]. Zaczniemy oczywiście od samej definicji indeksu Szlenka wprowadzonej w pracy [95]. Opiera się ona na ciągu derywacji stanowiących daleko idące uogólnienie pochodnej zbioru służącej do określenia indeksu Cantora-Bendixsona. Podane niżej określenie owych derywacji nie jest całkowicie zgodne z oryginalną definicją Szlenka, ale jest obecnie powszechnie używane w literaturze i prowadzi do tego samego indeksu porządkowego. Szerokie omówienie teorii indeksu Szlenka można znaleźć w artykule przeglądowym Lanciena [68].

Definicja 4.52. Niech X będzie przestrzenią Banacha, K *-słabo zwartym podzbiorem X^* i niech $\varepsilon > 0$. Określamy ε-*derywację Szlenka* zbioru K wzorem

$$\iota_\varepsilon K = \Big\{x^* \in K \colon \mathrm{diam}(K \cap U) > \varepsilon \text{ dla każdego } ^*\text{-słabo otwartego otoczenia } x^*\Big\}$$

oraz jej iteracje wzorami $\iota_\varepsilon^0 K = K$, $\iota_\varepsilon^{\alpha+1} K = \iota_\varepsilon(\iota_\varepsilon^\alpha K)$ dla każdej liczby porządkowej α oraz $\iota_\varepsilon^\alpha K = \bigcap_{\beta<\alpha} \iota_\varepsilon^\beta K$ dla każdej granicznej liczby porządkowej α. Definiujemy ε-*indeks Szlenka* przestrzeni X, oznaczany symbolem $\mathrm{Sz}(X, \varepsilon)$, jako najmniejszą liczbę porządkową α (o ile taka istnieje), dla której $\iota_\varepsilon^\alpha B_{X^*} = \varnothing$. *Indeks Szlenka* przestrzeni X określamy wówczas jako $\mathrm{Sz}(X) = \sup_{\varepsilon>0} \mathrm{Sz}(X, \varepsilon)$.

Będziemy także rozważać wprowadzony przez Godefroy, Kaltona i Lanciena [42] *wypukły indeks Szlenka* $\mathrm{Cz}(X)$ zdefiniowany jak wyżej, ale dla derywacji

$$\hat{\iota}_\varepsilon K = \overline{\mathrm{conv}}^{w*} \iota_\varepsilon K \quad (\varepsilon > 0)$$

będącej *-słabym domknięciem otoczki wypukłej $\iota_\varepsilon K$ (indeksy $\mathrm{Cz}(X,\varepsilon)$ określamy oczywiście też analogicznie).

Wiadomo, że indeks Szlenka $\mathrm{Sz}(X)$ jest poprawnie określony (co oznacza, że ciąg derywacji jednostkowej kuli dualnej wyczerpię całą kulę po pewnej liczbie kroków) wtedy i tylko wtedy, gdy X jest przestrzenią Asplunda[22] i w takim przypadku jest on liczbą porządkową postaci ω^α (zob. [68, Prop. 2 i Thm. 2]). W przypadku ośrodkowej przestrzeni X jest więc sens mówić o indeksie $\mathrm{Sz}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy X^* jest również ośrodkowa.

Zajmijmy się teraz przypadkiem, gdy $\mathrm{Sz}(X) = \omega$. (Jeżeli $\mathrm{Sz}(X) < \omega$, to musi być $\mathrm{Sz}(X) = 1$ i wówczas $\dim X < \infty$.) Prosty argument zwartościowy pokazuje, że dla żadnego $\varepsilon > 0$ indeks $\mathrm{Sz}(X,\varepsilon)$ nie może być liczbą graniczną, a zatem $\mathrm{Sz}(X) = \omega$ implikuje, że $\mathrm{Sz}(X,\varepsilon) < \omega$, czyli jest liczbą naturalną, dla każdego $\varepsilon > 0$. Jak pokazał Lancien ([68, Prop.4]), funkcja $(0,1) \ni \varepsilon \mapsto \mathrm{Sz}(X,\varepsilon)$ jest podmultiplikatywna, a zatem funkcja $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(t) = \log \mathrm{Sz}(X, e^{-t})$$

jest podaddytywna. Znany lemat Feketego mówi, że istnieje wówczas skończona granica

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \inf_{x>a} \frac{f(x)}{x} \quad (\text{dla } a > 0).$$

Usprawiedliwia to następującą, kluczową dla naszych celów, definicję.

Definicja 4.53. Dla dowolnej przestrzeni Banacha X spełniającej $\mathrm{Sz}(X) \leqslant \omega$ definiujemy *typ potęgowy Szlenka* wzorem

$$\mathsf{p}(X) \coloneqq \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\log \mathrm{Sz}(X,\varepsilon)}{|\log\varepsilon|}.$$

Równoważnie:

$$\mathsf{p}(X) = \inf\Big\{q \geqslant 1\colon \sup_{0<\varepsilon<1} \varepsilon^q\, \mathrm{Sz}(X,\varepsilon) < \infty\Big\}. \tag{4.11}$$

Zauważmy, że o ile tylko $\mathrm{Sz}(X) \leqslant \omega$, mamy $1 \leqslant \mathsf{p}(X) < \infty$. Na ogół infimum we wzorze (4.11) nie musi być przyjęte, dla każdego $\delta > 0$ istnieje jednak taka stała $C > 0$, że

$$\mathrm{Sz}(X,\varepsilon) \leqslant C\varepsilon^{-\mathsf{p}(X)-\delta}. \tag{4.12}$$

Odnotujmy też, że typ potęgowy jest niezmiennikiem izomorfizmów. Istotnie, elementarny rachunek pokazuje, że $\mathrm{Sz}(X, d\varepsilon) \leqslant \mathrm{Sz}(Y,\varepsilon)$, gdzie $d = d_{\mathsf{BM}}(X,Y)$ (zob. [42, Lemma 2.3]), skąd

$$\mathsf{p}(Y) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\log \mathrm{Sz}(Y,\varepsilon)}{|\log\varepsilon|} \geqslant \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\log \mathrm{Sz}(X,d\varepsilon)}{|\log\varepsilon|} = \mathsf{p}(X).$$

[22] Indeks Szlenka może być jednak dowolnie dużą liczbą przeliczalną nawet dla przestrzeni ośrodkowych. Na tym zresztą polegał oryginalny pomysł Szlenka, który skonstruował ciąg ośrodkowych przestrzeni refleksywnych, których indeksy tworzyły zbiór kofinalny w ω_1. Nie ma jednak ośrodkowej przestrzeni Asplunda X, dla której $\mathrm{Sz}(X) \geqslant \omega_1$. Wynika to z głębokiego twierdzenia Namioki-Phelpsa [81] o wycinaniu *-słabych plastrów (ang. *slices*) o dowolnie małej średnicy (zob. też [68, Thm. 1]).

Ze wzoru (4.12) widzimy, że najszybsze wycinanie kuli B_{X^*} ma miejsce dla $\mathsf{p}(X) = 1$. Rozważa się jednak jeszcze silniejszą (na razie – przynajmniej formalnie) własność *sumowalności*, dogłębnie zbadaną przez Godefroy, Kaltona i Lanciena, którzy m.in. wykazali, że jest ona niezmiennikiem jednostajnych homeomorfizmów (zob. [42, Thm. 4.10 i 5.5]).

Definicja 4.54. Przestrzeń Banacha X ma *sumowalny indeks Szlenka*, jeżeli istnieje taka stała M, że dla wszlekich $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ mamy

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \leqslant M \quad \text{o ile} \quad \iota_{\varepsilon_1} \ldots \iota_{\varepsilon_n} B_{X^*} \neq \varnothing.$$

Mówimy też wówczas, że X ma sumowalny indeks Szlenka *ze stałą* M. Mówimy, że dana rodzina przestrzeni Banacha ma *jednostajnie sumowalny indeks Szlenka*, jeżeli wszystkie elementy tej rodziny mają sumowalny indeks Szlenka z tą samą stałą.

W dowodach twierdzeń o zachowaniu się sumowalności i typu potęgowego względem sum prostych, które będziemy omawiać w sekcji 4.c.7, intensywnie korzystamy z kombinatorycznego opisu derywacji w języku drzew. Mówiąc dokładniej, używamy tzw. odwzorowań drzewowych (ang. *tree-maps*) o wartościach w przestrzeni Banacha w formie zaproponowanej w [42]. Niech $\mathcal{F}\mathbb{N}$ będzie rodziną wszystkich skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$, zapisywanych w porządku rosnącym, wyposażoną w porządek przedziału początkowego, tj. dla $a = \{m_1, \ldots, m_j\}$ oraz $b = \{n_1, \ldots, n_k\}$, gdzie $m_1 < \ldots < m_j$ oraz $n_1 < \ldots < n_k$, piszemy $a \leqslant b$, jeżeli $j \leqslant k$ oraz $m_i = n_i$ dla każdego $1 \leqslant i \leqslant j$. Dla $a \in \mathcal{F}\mathbb{N}$ symbolem $|a|$ oznaczamy liczbę elementów zbioru a; $b \in \mathcal{F}\mathbb{N}$ nazywamy *następnikiem* a, jeżeli $|b| = |a| + 1$ oraz $a \leqslant b$, czyli $b = a^\frown n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, gdzie $^\frown$ to operacja konkatenacji. Element b nazywamy *poprzednikiem* a, jeżeli $b \leqslant a$ oraz $|b| = |a| - 1$. Powiemy, że podzbiór $S \subseteq \mathcal{F}\mathbb{N}$ jest *pełnym poddrzewem*, jeżeli spełnione są następujące warunki:

- $\varnothing \in S$;
- każdy $a \in S$ ma nieskończenie wiele następników w S;
- jeżeli $a \in S$, $a \neq \varnothing$, to poprzednik a też należy do S.

Dla uproszczenia będziemy od tej pory oznaczać $\mathcal{F}\mathbb{N}$ literą S. Jeżeli $T \subseteq S$ jest pełnym poddrzewem, to każdy ciąg $\beta = (a_n)_{n=0}^{N}$ taki, że $a_0 = \varnothing$ oraz a_{n+1} jest następnikiem a_n dla $0 \leqslant n < N$ nazywamy *gałęzią*, gdy $N = \infty$, oraz *częściową gałęzią*, gdy $N < \infty$.

Niech V będzie przestrzenią liniową, a $T \subseteq S$ pełnym poddrzewem. Przez *odwzorowanie drzewowe* rozumiemy dowolną taką funkcję $a \mapsto x_a \in V$ określoną na T, że $x_\varnothing = 0$ oraz zbiór $\{a \in \beta \colon x_a \neq 0\}$ jest skończony dla każdej gałęzi $\beta \subset T$. Odwzorowania takie oznaczamy przez $(x_a)_{a \in T}$ i czasem dla uproszczenia nazywamy *drzewami na* V. Mając daną topologię τ na V, powiemy, że $(x_a)_{a\in T}$ jest *τ-zerowe*, jeżeli dla każdego $a \in T$ ciąg $(x_{a^\frown n} \colon n \in \mathbb{N}, a^\frown n \in T)$ jest τ-zbieżny do zera. Interesujące będą dla nas szczególnie słabo zerowe i *-słabo zerowe odwzorowania drzewowe o wartościach w (dualnej) przestrzeni Banacha. Oczywiście możemy też rozważać (τ-zerowe) odwzorowania na drzewach S_n rzędu (wysokości) n, złożonych z podzbiorów $\mathbb{N}$ mocy niewiększej od n – są to po prostu funkcje postaci $(x_a)_{a\in S_n} \subset V$ takie, że $x_\varnothing = 0$.

Poniższy lemat ([42, Prop. 3.4]) dowodzi się dość prosto przez indukcję, ale jest on niezwykle użyteczny.

Lemat 4.55 (Godefroy, Kalton, Lancien). *Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Banacha i niech $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$. Warunkiem koniecznym na to, by $\iota_{\varepsilon_1} \ldots \iota_{\varepsilon_n} B_{X^*} \neq \varnothing$ jest istnienie takiego *-słabo zerowego odwzorowania drzewowego $(x_a^*)_{a \in S}$ w X^*, że $\|x_a^*\| \geqslant \frac{1}{4}\varepsilon_{|a|}$ dla $1 \leqslant |a| \leqslant n$ oraz $\left\|\sum_{a \in \beta} x_a^*\right\| \leqslant 1$ dla każdej gałęzi $\beta \subset S$. Warunkiem wystarczającym jest zaś istnienie takiego *-słabo zerowego odwzorowania drzewowego $(x_a^*)_{a \in S}$ w X^*, że $\|x_a^*\| \geqslant \varepsilon_{|a|}$ dla $1 \leqslant |a| \leqslant n$ oraz $\left\|\sum_{a \in \beta} x_a^*\right\| \leqslant 1$ dla każdej gałęzi $\beta \subset S$.*

Niepustość derywacji Szlenka pozwala dobierać ciągi *-słabo zbieżne o elementach odległych od granicy o pewną ustaloną liczbę dodatnią. Przez odpowiednią indukcję, konstruuje się więc *-słabo zerowe odwzorowanie drzewowe w X^*. Znacznie trudniej jest zbudować odwzorowanie słabo zerowe w X. Jest to możliwe dzięki związkom z tzw. słabym ℓ_1^+-indeksem (zob. [3, Prop. 4.3 i 4.10]).

Definicja 4.56. Niech X będzie przestrzenią Banacha. Ciąg $(x_j)_{j=1}^n \subset S_X$ nazywamy *ℓ_1^+-ϱ-ciągiem*, dla pewnego $\varrho \in (0,1]$, jeżeli

$$\left\|\sum_{j=1}^n a_j x_j\right\| \geqslant \varrho \sum_{j=1}^n a_j \quad \text{dla każdego } (a_j)_{j=1}^n \subset [0,\infty).$$

Jeżeli $(x_a)_{a \in T}$ jest drzewem na X, to mówimy, że jest to *ℓ_1^+-ϱ-słabo zerowe drzewo*, jeżeli jest słabo zerowe i dla każdego węzła $a = \{n_1 < \ldots < n_k\} \in T$ ciąg $(x_{\{n_1,\ldots,n_j\}})_{j=1}^k$ jest ℓ_1^+-ϱ-ciągiem.

Zacytowane poniżej twierdzenie zachodzi również w wersji pozaskończonej, gdzie rozważa się drzewa o wysokościach będących przeliczalnymi liczbami porządkowymi. Nam jednak będzie potrzebne tylko w przypadku, gdy $\mathrm{Sz}(X) \leqslant \omega$.

Twierdzenie 4.57 (Alspach, Judd, Odell). *Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Banacha spełniającą $\mathrm{Sz}(X) \leqslant \omega$. Wówczas dla wszelkich $n \in \mathbb{N}$ oraz $\varepsilon, \varrho \in (0,1)$ mamy:*

(i) *jeżeli $\iota_\varepsilon^n B_{X^*} \neq \varnothing$, to istnieje ℓ_1^+-$\frac{1}{16}\varepsilon$-słabo zerowe drzewo na S_X rzędu n;*
(ii) *na odwrót, jeżeli isnieje ℓ_1^+-ϱ-słabo zerowe drzewo na S_X rzędu n, to $\iota_\delta^n B_{X^*} \neq \varnothing$ dla każdego $0 < \delta < \varrho$.*

4.c.7. Stabilność względem sum prostych i iloczynów tensorowych

W pracy [DK16] zajmujemy się przede wszystkim problemem zachowania się sumowalności i typu potęgowego Szlenka ze względu na nieskończone sumy proste. Stosujemy przy tym kombinacje pewnych technik przenormowywania, narzędzia kombinatoryczne związane z drzewami, jak i metody związane z przestrzeniami ℓ_p-asymptotycznymi. Otrzymujemy m.in. pierwszy przykład przestrzeni Banacha o typie potęgowym 1 lecz niesumowalnym indeksie Szlenka, co pokazuje, że infimum we wzorze (4.11) faktycznie nie musi być przyjęte.

Kanonicznym przykładem przestrzeni z sumowalnym indeksem Szlenka jest c_0, co we wzmocnionej formie było użyte przez Godefroy, Kaltona i Lanciena [42]. Pokazali oni, że w istocie każda przestrzeń jednostajnie homeomorficzna z podprzestrzenią c_0 ma sumowalny indeks Szlenka ([42, Thm. 5.6]). Postawili też hipotezę mówiącą, że każdy predual ℓ_1 z sumowalnym indeksem Szlenka jest izomorficzny z c_0, co skutkowałoby tym, że każda przestrzeń jednostajnie homeomorficzna z c_0 byłaby już liniowo izomorficzna z c_0. Hipoteza ta została dopiero obalona dzięki konstrukcji Argyrosa, Gasparisa i Motakisa ([6, Prop. 5.7]), co zauważył Causey [24] dowodząc, że nieskończenie wymiarowa przestrzeń Banacha ma sumowalny indeks Szlenka wtedy i tylko wtedy, gdy jest c_0-asymptotyczna.

Pierwszy główny wynik pracy [DK16] jest następujący.

Twierdzenie 4.58 ([DK16, Theorem 3.2])**.** *Dla dowolnego ciągu $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ ośrodkowych przestrzeni Banacha z jednostajnie sumowalnym indeksem Szlenka suma prosta $X = (\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n)_{c_0}$ ma sumowalny indeks Szlenka.*

W pierwszym kroku, przez pewne rozważania geometryczne, dowodzimy jednostajnej sumowalności indeksu Szlenka dla wszystkich skończonych sum prostych. Jeżeli mianowicie $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ mają indeksy sumowalne ze stałą M, to dla każdego $N \in \mathbb{N}$ przestrzeń $(\bigoplus_{n=1}^{N} X_n)_{c_0}$ ma sumowalny indeks Szlenka ze stałą $4M$. Aby jednak przejść na nieskończone sumy proste, potrzebujemy pewnych modyfikacji technik przenormowania z [42].

Stwierdzenie 4.59 ([DK16, Proposition 2.2])**.** *Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Banacha o sumowalnym indeksie Szlenka ze stałą M. Istnieje wówczas takie $c = c(M) \in (0,1)$, że dla każdego $\tau \in (0,1)$ istnieje norma $|\cdot|$ na X spełniająca następujące warunki (symbolu $|\cdot|$ używamy też na oznaczenie odpowiedniej normy dualnej):*

(i) $\frac{1}{2}\|x\| \leqslant |x| \leqslant \|x\|$ *dla każdego* $x \in X$*;*

(ii) *jeżeli* $x^* \in X^*$, $|x^*| = 1$ *oraz* $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ *jest ciągiem* **-słabo zbieżnym do zera spełniającym* $|x_n^*| \geqslant \xi \geqslant \tau$ *dla* $n \in \mathbb{N}$*, to*

$$\liminf_{n\to\infty} |x^* + x_n^*| \geqslant 1 + c\xi.$$

Zakładając, że jesteśmy w sytuacji z twierdzenia 4.58 i że $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ spełniają $\iota_{\varepsilon_1} \ldots \iota_{\varepsilon_n} B_{X^*} \neq \varnothing$, z lematu 4.55 wnosimy, że istnieje *-słabo zerowe drzewo $(x_a^*)_{a\in S}$ w X^* spełniające warunki: $\|x_a^*\| \geqslant \frac{1}{4}\varepsilon_{|a|}$ dla każdego $a \in S$, $1 \leqslant |a| \leqslant n$ oraz $\left\|\sum_{a\in\beta} x_a^*\right\| \leqslant 1$ dla każdej gałęzi $\beta \subset S$. Dowód polega na idukcyjnym określeniu ciągu $(x^*_{(\nu_1,\ldots,\nu_k)})_{k=0}^{n}$ przypisanemu S wzdłuż częściowej gałęzi wyznaczonej przez pewien węzeł $(\nu_1, \ldots, \nu_n) \in S$. Robimy to w każdym kroku rozważając skończoną sumę prostą, o której wiemy, że ma $4M$-sumowalny indeks Szlenka, i korzystając ze stwierdzenia 4.59 w ten sposób, że norma sumy $\sum_{a\in\beta}^*$ jest szacowana z dołu przez pewną wielokrotność sumy norm. To daje górne oszacowanie na $\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j$, które oznacza, że X ma sumowalny indeks Szlenka.

Jest interesujące, że nie da się twierdzenia 4.58 przenieść na sumy proste względem innych niż c_0 przestrzenie z bazą bezwarunkową[23] i sumowalnym indeksem Szlenka.

[23]Niech $\mathfrak{E}$ będzie przestrzenią Banacha ze znormalizowaną, 1-bezwarunkową bazą $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ i niech $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem przestrzeni Banacha. Wówczas $\mathfrak{E}$-sumę prostą ciągu $(X_n)_{n=1}^{\infty}$, oznaczaną symbolem $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n)_{\mathfrak{E}}$, określamy jako przestrzeń (Banacha) złożoną z ciągów $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$, dla których szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| e_n$ jest zbieżny, wyposażoną w działania po współrzędnych oraz normę

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| e_n\right\|.$$

Przykład 4.60 ([DK16, Example 4.1])**.** Niech $\mathfrak{T}$ oznacza oryginalną przestrzeń Tsirelsona, tzn. jej dual $\mathfrak{T}^*$ jest przestrzenią T rozważaną przez Figiela i Johnsona [38], zdefiniowaną jako uzupełnienie c_{00} względem normy $\|\cdot\|$ danej w sposób uwikłany:

$$\|x\| = \|x\|_{c_0} \vee \frac{1}{2}\sup\left\{\sum_{j=1}^{k}\|E_j x\|\colon \{k\} < E_1 < \ldots < E_k\right\} \quad \text{dla } x \in c_{00}$$

(ze standardową notacją $Ex = \mathbb{1}_E \cdot x$ oraz $E < F$, jeżeli $\max E < \min F$ lub jeżeli któryś z tych zbiorów jest pusty). Pomimo faktu, że $\mathfrak{T}$ ma sumowalny indeks Szlenka (zob. [61, Prop. 6.7]), $\mathfrak{T}$-suma prosta $\mathfrak{T}(c_0)$ przeliczalnie wielu kopii c_0 nie ma sumowalnego indeksu Szlenka.

Uzasadnienie dla tego przykładu to znów uzycie lematu 4.55. Okazuje się, że takie ogólne sumy proste względem przestrzeni $\mathfrak{E}$ z bazą bezwarunkową i sumowalnym indeksem Szlenka mają sumowalny indeks, jeżeli wszystkie składniki są skończonego wymiaru ([DK16, Theorem 4.3]).

Przypomnijmy, że typ potęgowy $\mathsf{p}(X)$ to infimum zbioru takich liczb $q \geqslant 1$, dla których zachodzi oszacowanie $\mathrm{Sz}(X,\varepsilon) \leqslant C\varepsilon^{-q}$ dla każdego $\varepsilon \in (0,1)$ i pewnego $C > 0$. Aby uzyskać sensowny wynik na temat zachowania się typu potęgowego względem nieskończonych sum prostych, nie wystarczy po prostu założyć, że wszystkie składniki mają sumowalny indeks Szlenka, bowiem odpowiednie stałe C, jeśli rosną do nieskończoności, mogą nawet spowodować wzrost całego indeksu Szlenka, czyli brak określoności typu potęgowego całej sumy prostej.

Przykład 4.61 ([DK16, Example 5.1])**.** Dla każdego $N \in \mathbb{N}$ przestrzeń $C([0,\omega^N])$ jest izomorficzna z c_0, a zatem ma typ potęgowy 1. Jednak suma prosta $(\bigoplus_{N=1}^{\infty} C([0,\omega^N]))_{c_0}$ jest izomorifczna z $C([0,\omega^\omega])$, o której wiadomo, że ma indeks Szlenka ω^2.

Wprowadzamy zatem następującą definicję.

Definicja 4.62. Dla przestrzeni Banacha X spełniającej $\mathrm{Sz}(X) \leqslant \omega$ określamy

$$C_p(X) = \inf\Big\{c > 0\colon \mathrm{Sz}(X,\varepsilon) \leqslant c\varepsilon^{-p} \text{ dla każdego } \varepsilon \in (0,1)\Big\}.$$

Mówimy, że ciąg $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ przestrzeni Banacha spełniających $\mathrm{Sz}(X_n) \leqslant \omega$ $(n \in \mathbb{N})$ jest *ograniczony w typie potęgowym*, jeżeli liczba

$$\mathfrak{p}(X_n)_{n=1}^{\infty} \coloneqq \inf\Big\{p \in [1,\infty)\colon \sup_n C_p(X_n) < \infty\Big\}$$

jest skończona.

Warunek ten będziemy zakładali na temat ciągu $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ w danej sumie prostej $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n)_{\mathfrak{E}}$. Kluczowym założeniem odnośnie przestrzeni $\mathfrak{E}$ jest natomiast jej zachowanie asymptotyczne. Przypomnijmy, że ciąg $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ przestrzeni skończenie wymiarowych nazywa się *skończenie wymiarowym rozkładem* (FDD, ang. *finite-dimensional decomposition*) przestrzeni Banacha X, jeżeli każdy $x \in X$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, gdzie $x_n \in X_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Przestrzeń X nazywamy *C-ℓ_p-asymptotyczną* (dla pewnych $C \geqslant 1$ i $1 \leqslant p \leqslant \infty$) *względem* FDD $(E_n)_{n=1}^\infty$, jeżeli dla każdego ciągu blokowego $(x_j)_{j=1}^n$ względem $(E_j)_{j=n}^\infty$ mamy

$$\frac{1}{C}\Bigg(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p\Bigg)^{1/p} \leqslant \Bigg\|\sum_{j=1}^n x_j\Bigg\| \leqslant C\Bigg(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p\Bigg)^{1/p} \tag{4.13}$$

(dla $p = \infty$ bierzemy c_0-normę $\max_{1\leqslant j\leqslant n}\|x_j\|$). Mówimy, że X jest *ℓ_p-asymptotyczna względem* $(E_n)_{n=1}^\infty$, jeżeli jest C-ℓ_p-asymptotyczna względem $(E_n)_{n=1}^\infty$ dla pewnego $C \geqslant 1$.

Związek między ℓ_1-asymptotycznością a sumowalnością pewnego indeksu porządkowego podali Knaust, Odell i Schlumprecht [61]. Wprowadzili oni tzw. *H-indeks*, podobny do indeksu Szlenka, a także rozważali jego sumowalność (zob. [61, §2 i §6]). W przypadku, gdy rozważane FDD jest dane po prostu przez bazę bezwarunkową, argumentując podobnie jak w dowodzie [DK16, Theorem 4.3], uzasadniamy, że sumowalność indeksu Szlenka dla X jest równoważna sumowalności H-indeksu dla for X^*, co z kolei jest równoważne temu, że $p(X) = 1$ w *silnym sensie*, tzn. infimum we wzorze (4.11) jest przyjęte (zob. [61, Prop. 6.9]). Poniższy wynik ([61, Prop. 6.7]) uzasadnia, że oryginalna przestrzeń Tsirelsona $\mathfrak{T}$ ma sumowalny indeks Szlenka, na co już powołaliśmy się wcześniej.

Twierdzenie 4.63 (Knaust, Odell, Schlumprecht)**.** *Niech $(E_k)_{k=1}^\infty$ będzie FDD przestrzeni Banacha X. Wówczas X ma sumowalny H-indeks względem $(E_k)_{k=1}^\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie FDD $(H_j)_{j=1}^\infty$ blokowe względem $(E_k)_{k=1}^\infty$, że dla pewnego $c > 0$ każdy blokowy z przeskokiem ciąg*[24] *względem $(H_j)_{j=n}^\infty$ spełnia*

$$\Bigg\|\sum_{j=1}^n x_j\Bigg\| \geqslant c\sum_{j=1}^n \|x_j\|.$$

Korzystając z lematu 4.55, nie jest trudno wykazać, że jeżeli $\mathfrak{E}$ ma znormalizowaną, zwężającą (ang. *shrinking*), bezwarunkową bazę $(e_n)_{n=1}^\infty$ taką, że dla pewnego $p \in [1,\infty)$ jej dual $\mathfrak{E}^*$ jest przestrzenią ℓ_p-asymptotyczną względem bazy dualnej $(e_n^*)_{n=1}^\infty$, to $\mathsf{p}(\mathfrak{E}) \geqslant p$ (zob. [DK16, Lemma 5.3]). Oznacza to, że każda $\mathfrak{E}$-suma prosta musi także mieć typo potęgowy równy co najmniej p. Oszacowanie z góry jest znacznie trudniejsze. Głównym rezultatem pracy [DK16] na temat typu potęgowego jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4.64 ([DK16, Theorem 5.9])**.** *Niech $\mathfrak{E}$ będzie przestrzenią Banacha ze znormalizowaną, zwężającą, 1-bezwarunkową bazą $(e_n)_{n=1}^\infty$ taką, że dla pewnego $p \in [1,\infty)$ przestrzeń sprzężona $\mathfrak{E}^*$ jest ℓ_p-asymptotyczna względem bazy $(e_n^*)_{n=1}^\infty$. Wówczas dla każdego ograniczonego w typie potęgowym ciągu $(X_n)_{n=1}^\infty$ ośrodkowych przestrzeni Banacha mamy*

$$p\Bigg(\Big(\bigoplus_{n=1}^\infty X_n\Big)_{\mathfrak{E}}\Bigg) = \max\Big\{p,\, \mathfrak{p}(X_n)_{n=1}^\infty\Big\}.$$

Ogólna strategia dowodu jest podobna jak dla twierdzenia 4.58, czyli budujemy drzewo z lematu 4.55 i konstruujemy odpowiednią gałąź. Musimy jednak użyć innego niż stwierdzenie 4.59 twierdzenia o przenormowaniu. Gwarantuje ono mianowicie, że przy oszacowaniu $\mathrm{Sz}(X,\varepsilon) \leqslant B\varepsilon^{-r}$ istnieje taka stała $\gamma > 0$ oraz norma $|\cdot|$ równoważna danej normie,

[24]Tłumaczenie z ang. *skipped block sequence*. Mówimy, że $(x_j)_{j=1}^n$ jest takim ciągiem względem FDD $(F_n)_{n=1}^\infty$, jeżeli istnieją takie liczby naturalne $r_1 \leqslant s_1 < s_1+1 < r_2 \leqslant s_2 < s_2+1 < r_3 \leqslant s_3 < \ldots$, że $x_j \in \mathrm{span}\bigcup_{n=r_j}^{s_j} F_n$ dla każdego $j \in \mathbb{N}$.

że spełniony jest warunek: jeżeli $x^*\in X^*$, a $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ jest ciągiem *-słabo zbieżnym do zera spełniającym $|x_n^*|\geqslant\tau$ dla pewnego $\tau>0$ i każdego $n\in\mathbb{N}$, to

$$\liminf_{n\to\infty}|x^*+x_n^*|\geqslant\Big(|x^*|^q+\gamma\tau^q\Big)^{1/q}.$$

Kluczowe jest tu oszacowanie wypukłego ε-indeksu Szlenka przez standardowe ε-indeksy Szlenka ([42, Thm. 4.5]):

$$\mathrm{Cz}(X,\varepsilon)\leqslant\sum_{\substack{k\geqslant 0\\ 2^k\varepsilon/D\leqslant 1}}2^k\cdot\mathrm{Sz}(X,2^kD^{-1}\varepsilon)\quad\text{dla każdego }\varepsilon\in(0,1],$$

gdzie $D<10^6$ jest stałą absolutną.

Rozważając na każdym kroku indukcji przenormowanie o wymienionej wyżej własności, chcemy skonstruować dla danego *-słabo zerowego drzewa $(x_a^*)_{a\in S}$ gałąź β w ten sposób, by norma sumy $\sum_{a\in\beta}x_a^*$ zachowywała się w przybliżeniu jak ℓ_p-suma norm. Przykładowo, dla $p=1$ i przestrzeni Tsirelsona $\mathfrak{T}$ zasadniczy problem polega na tym, by w normie przestrzeni $\mathfrak{T}^*$, czyli przestrzeni Figiela-Johnsona, kontrolować sumy dowolnych ciągów dodatnich (o niekoniecznie rozłącznych nośnikach).

Odnotujmy, że przestrzeń Banacha X z bazą 1-bezwarunkową $(e_n)_{n=1}^\infty$ ma naturalną strukturę kraty Banacha, przy czym element X jest dodatni, jeśli wszystkie jego współczynniki względem danej bazy są liczbami nieujemnymi. Dla $x,y\in X$ niech

$$x\star_p y=\sum_{n=1}^\infty\Big(|e_n^*(x)|^p+|e_n^*(y)|^p\Big)^{1/p}e_n\in X,$$

co definiuje działanie łączne $\star$ na X. Powyższe wyrażenie jest tym samym, co $(|x|^p+|y|^p)^{1/p}$ zdefiniowane zgodnie z rachunkiem funkcyjnym Yudina-Krivine'a.

Twierdzenie 4.65 ([DK16, Proposition 5.6])**.** *Niech X będzie przestrzenią Banacha z 1-bezwarunkową bazą $(e_n)_{n=1}^\infty$, względem której jest przestrzenią C-ℓ_p-asymptotyczną, gdzie $1\leqslant p\leqslant\infty$ oraz $C\geqslant 1$. Istnieje wówczas taka stała $B>0$ zależna tylko od C, że dla każdego $n\geqslant 2$ i dowolnych dodatnich wektorów $x_1,\dots,x_n\in X$*

$$\|x_1\star_p\ldots\star_p x_n\|\geqslant\frac{\Big(\|x_1\|^p+\ldots+\|x_n\|^p\Big)^{1/p}}{B(\log n)^2}.$$

Dla przestrzeni $\mathfrak{T}^*$ otrzymujemy stąd nierówność

$$\|x_1+\ldots+x_n\|\geqslant\frac{\|x_1\|+\ldots+\|x_n\|}{B\log n}$$

dla $n\geqslant 2$ oraz dowolnych dodatnich $x_1,\dots,x_n\in\mathfrak{T}^*$ (w przypadku $p=1$ nie musimy podnosić $\log n$ do kwadratu, co widać z dowodu twierdzenia 4.65).

Idea stojąca za tego typu nierównościami to porównywanie podprzestrzeni rozpiętych przez wektory o nośnikach leżących odpowiednio daleko ze standardowymi przestrzeniami ℓ_p^N. Przytoczony poniżej fakt pojawiał się już w literaturze w różnych postaciach, np. dla przestrzeni Tsirelsona odpowiada on twierdzeniom, które można znaleźć w [20, Ch. 4]). Ważnym narzędziem jest tutaj tzw. *szybko rosnąca hierarchia* czyli ciąg funkcji $g_k\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ określonych wzorami $g_0(n)=n+1$ oraz $g_{k+1}(n)=g_k^{(n)}(n)$ (n-krotne złożenie) dla $k\geqslant 0$. Mamy więc np.

$$g_1(n)=2n,\ \ g_2(n)=n\cdot 2^n\ \text{ and }\ g_3(n)\geqslant 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^n}}}}}\quad(n\text{ wystąpień }2).$$

Stwierdzenie 4.66 ([DK16, Proposition 5.4]). *Niech X będzie przestrzenią Banacha z bazą 1-bezwarunkową $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, względem której jest ona C-ℓ_p-asymptotyczna dla pewnych $1 \leqslant p \leqslant \infty$ oraz $C \geqslant 1$. Wówczas każda n-wymiarowa podprzestrzeń X rozpięta przez wektory o nośnikach rozłącznych z $[1,n]$ jest $3C^8$-izomorficzna (w sensie odległości Banacha-Mazura), przez pewien dodatni operator, z podprzestrzenią ℓ_p^N, gdzie $N \leqslant (4n^2)^n$.*

Z głównego twierdzenia 4.64 otrzymujemy zapowiedziany przykład przestrzeni z typem potęgowym 1, ale niesumowalnym indeksem Szlenka ([DK16, Corollary 5.11]). Jest to tsirelsonowska suma prosta $\mathfrak{T}(c_0)$.

W pracy [DK17] zajmowaliśmy się zachowaniem typu potęgowego Szlenka ze względu na injektywne iloczyny tensorowe, co – jak zobaczymy niżej – ma pewne znaczenie w geometrii przestrzeni operatorów. Wyprowadziliśmy też kilka twierdzeń o tym, że zarówno sumowalność, jak i typ potęgowy Szlenka są zdeterminowane przez podprzestrzenie ośrodkowe, co pozwoliło roszerzyć wyniki uzyskane wcześniej w [DK16].

Dla przestrzeni Banacha X i Y symbolem $X\hat{\otimes}_\varepsilon Y$ oznaczamy injektywny iloczyn tensorowy. Sens pytania o typ potęgowy tego iloczynu zasadza się na wynikach Causeya [22], który wykazał m.in., że $\mathrm{Sz}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y) \leqslant \omega$, o ile $\mathrm{Sz}(X) \leqslant \omega$, $\mathrm{Sz}(Y) \leqslant \omega$ oraz obie przestrzenie X i Y są ośrodkowe (znacznie ogólniejszy wynik Causeya to [22, Thm. 6.7]). Poniższy rezultat tyczy nie tylko przestrzeni ośrodkowych.

Twierdzenie 4.67 ([DK17, Main Theorem]). *Dla dowolnych niezerowych przestrzeni Banacha X i Y spełniających $\mathrm{Sz}(X) \leqslant \omega$ oraz $\mathrm{Sz}(Y) \leqslant \omega$*

$$\mathsf{p}(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y) = \max\{\mathsf{p}(X), \mathsf{p}(Y)\}.$$

Wspomnijmy tutaj o głównej geometrycznej motywacji dla studiowania typu potęgowego Szlenka. Ma on bowiem silne związki z *modułami asymptotycznej gładkości* i *wypukłości* zdefiniowanymi przez Milmana [79] następująco (symbolem $\mathsf{cof}(X)$ oznaczamy rodzinę wszystkich podprzestrzeni X skończonego kowymiaru):

$$\overline{\rho}(t) = \sup_{x\in S_X} \inf_{Y\in\mathsf{cof}(X)} \sup_{y\in S_Y} \|x+ty\| - 1,$$

$$\overline{\delta}(t) = \inf_{x\in S_X} \sup_{Y\in\mathsf{cof}(X)} \inf_{y\in S_Y} \|x+ty\| - 1.$$

Mówimy, że przestrzeń Banacha X jest:

- *asymptotycznie jednostajnie gładka*, jeżeli $\lim_{t\to 0} \frac{\overline{\rho}(t)}{t} = 0$,
- *asymptotycznie jednostajnie wypukła*, jeżeli $\overline{\delta}(t) > 0$ dla każdego $t > 0$.

Knaust, Odell and Schlumprecht [61] pokazali, że ośrodkowa przestrzeń Banacha X spełnia $\mathrm{Sz}(X) \leqslant \omega$ wtedy i tylko wtedy, gdy dopuszcza asymptotycznie jednostajnie gładkie przenormowanie, i wówczas można ją też przenormować tak, by moduł asymptotycznej gładkości był typu potęgowego, tzn. $\overline{\rho}(t) \leqslant Ct^p$ dla każdego $t > 0$ i pewnych stałych $C > 0$, $p > 1$. Równoważnie: X^* ma *-słabo asymptotycznie jednostajnie wypukłe przenormowanie; zob. [42, Prop. 2.8], z którego wynika, że $\overline{\rho}$ jest równoważny funkcji dualnej w sensie Younga do *-słabego modułu asymptotycznej wypukłości $\overline{\delta}^*$ (definiujemy go tak, jak $\overline{\delta}$, tyle że ograniczamy się do *-słabo domkniętych podprzestrzeni $Y \subset X^*$). Wspomniane wcześniej twierdzenia o przenormowaniach autorstwa Godefroy, Kaltona i Lanciena [42] dają precyzyjną ilościową wersję powyższego wyniku. Typ potęgowy Szlenka odpowiada mianowicie dokładnie typom potęgowym obu wymienionych przenormowań.

Twierdzenie 4.68 (Knaust, Odell, Schlumprecht, Godefroy, Kalton, Lancien)**.** *Załóżmy, że X jest ośrodkową przestrzenią Banacha i $\mathrm{Sz}(X)=\omega$. Wówczas X ma asymptotycznie jednostajnie gładkie przenormowanie, a także takie przenormowanie, którego norma dualna jest *-słabo asymptotycznie jednostajnie wypukła. Dokładniej:*

$$\mathsf{p}(X)=\inf\Big\{q>1\colon \textit{istnieje takie przenormowanie } |\cdot| \textit{ przestrzeni } X, \textit{ że} \\ \overline{\rho}(t)\leqslant Ct^p \textit{ dla każdego } t>0, \textit{gdzie } p^{-1}+q^{-1}=1\Big\}$$

oraz

$$\mathsf{p}(X)=\inf\Big\{p>1\colon \textit{istnieje takie przenormowanie } |\cdot| \textit{ przestrzeni } X, \textit{ że} \\ \overline{\delta}^*(t)\geqslant ct^p \textit{ dla każdego } t>0\Big\}$$

Nasze twierdzenie 4.67 daje więc informację na temat asymptotycznej geometrii przestrzeni $\mathscr{K}(X,Y)$ operatorów zwartych. Przypomnijmy, że jeżeli X^* lub Y ma własność aproksymacji, to $\mathscr{K}(X,Y)$ jest izometrycznie izomorficzna z $X^*\hat{\otimes}_\varepsilon Y$.

Wniosek 4.69 ([DK17, Corollary])**.** *Jeżeli X i Y są takimi niezerowymi przestrzeniami Banacha, że X^* lub Y ma własność aproksymacji oraz oba indeksy $\mathrm{Sz}(X^*)$ i $\mathrm{Sz}(Y)$ są niewiększe od ω, to*

$$\mathsf{p}(\mathscr{K}(X,Y))=\max\{\mathsf{p}(X^*),\mathsf{p}(Y)\}.$$

W szczególności, dla wszelkich $1<p,q<\infty$ mamy

$$\mathsf{p}(\mathscr{K}(\ell_p,\ell_q))=\max\Big\{p,\frac{q}{q-1}\Big\}.$$

4.c.8. Własność trzech przestrzeni dla modułu asymptotycznej gładkości

Omówimy tutaj wyniki pochodzące z pracy [CDK19], wspólnej z Causeyem i Dragą, która z jednej strony rozwija teorię asymptotycznych półnorm i typów, a z drugiej wiąże problem trzech przestrzeni z zagadnieniami związanymi z typem potęgowym Szlenka. Przytoczmy na początek twierdzenie Brookera-Lanciena ([12, Thm. 3.1]), które jest punktem wyjścia dla naszych rozważań. (Rozważając funkcję dualną w sensie Younga, można zamienić $\overline{\delta}^*$ na $\overline{\rho}$ zamieniając też zwroty nierówności i każdy z wykładników na wykładnik sprzężony.)

Twierdzenie 4.70 (Brooker, Lancien)**.** *Dopuszczanie asymptotycznie jednostajnie gładkiego przenormowania jest własnością $\mathsf{3SP}$. Dokładniej, jeżeli X jest przestrzenią Banacha, $Y\subseteq X$ domkniętą podprzestrzenią, a stałe $c>0$, $p,q\in(1,\infty)$ spełniają warunki*

$$\overline{\delta}^*_Y(t)\geqslant ct^p \quad \textit{oraz} \quad \overline{\delta}^*_{X/Y}(t)\geqslant ct^q \quad \textit{dla wszystkich } t>0,$$

to dla każdego $\delta>0$ istnieje takie przenormowanie $|\cdot|$ przestrzeni X oraz stała $\gamma>0$, że

$$\overline{\delta}^*_{|\cdot|}(t)\geqslant \gamma t^{p+q+\delta} \quad \textit{dla wszystkich } t>0.$$

W świetle twierdzenia 4.68 wynik Brookera-Lanciena można też wysłowić w ten sposób, że jeżeli $\mathrm{Sz}(Y)\leqslant\omega$ i $\mathrm{Sz}(X/Y)\leqslant\omega$, to także $\mathrm{Sz}(X)\leqslant\omega$ i zachodzi nierówność $\mathsf{p}(X)\leqslant\mathsf{p}(Y)+\mathsf{p}(X/Y)$. W pracy [CDK19] dowodzimy optymalnej wersji tego twierdzenia – mianowicie, że $\mathsf{p}(X)=\max\{\mathsf{p}(Y),\mathsf{p}(X/Y)\}$ (jest dość oczywiste, że $\mathsf{p}(X)$ musi być co najmniej równe prawej stronie, chodzi więc w istocie o udowodnienie oszacowania górnego). Strategię dowodu naszego twierdzenia można opisać w kilku głównych krokach:

(1) używamy struktur asymptotycznych oraz faktu, że elementy owej struktury asymptotycznej dla przestrzeni X spełniają górne ℓ_q-oszacowania dla dowolnego $q < \mathsf{p}(X)'$ (wykładnik sprzężony);
(2) daje nam to ciąg stałych typowych $(\alpha_{p,n}(X))_{n=1}^{\infty}$ analogicznych np. do stałych typowych dla typu Rademachera;
(3) inspirując się rozwiązaniem problemu Palais podanym przez Enflo, Lindenstraussa i Pisiera [37], kodujemy własność '$\mathsf{p}(X) \leqslant p$' w języku ograniczoności ciągu stałych typowych;
(4) wyprowadzamy nierówność, która daje górne oszacowanie na stałe typowe sumy skrętnej X w języku stałych $\alpha_{p,n}(Y)$ i $\alpha_{p,n}(X/Y)$.

Większość pracy poświęcona jest rozwinięciu teorii asymptotycznych i operatorowych odpowiedników typu/kotypu Rademachera oraz typu/kotypu martyngałowego (wprowadzonego przez Pisiera [86])[25], a także przeniesieniu pewnych klasycznych twierdzeń teorii lokalnej (automatyczny typ, dualność typ-kotyp, twierdzenie Maureya-Pisiera) na teorię asymptotyczną. Zdefiniujemy tutaj struktury asymptotyczne tak, jak były one wprowadzone w [80].

Dla ośrodkowej przestrzeni Banacha X rozważamy następującą grę między dwoma graczami:

Gracz I wybiera $Y_1 \in \mathsf{cof}(X)$
Gracz II wybiera $y_1 \in S_{Y_1}$
Gracz I wybiera $Y_2 \in \mathsf{cof}(X)$
Gracz II wybiera $y_2 \in S_{Y_2}$
...

Dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $\mathcal{A} \subseteq S_X^n$ powiemy, że *Gracz II ma strategię wygrywającą w $\mathcal{A}$-grze*, jeżeli jest w stanie zawsze doprowadzić do sytuacji, w której $(y_j)_{j=1}^n \in \mathcal{A}$ po n krokach, bez względu na to, jakie podprzestrzenie Y_j były wybrane przez Gracza I. Niech $\mathcal{M}_n$ będzie zbiorem wszystkich znormalizowanych ciągów bazowych długości n ze stałą bazową niewiększą od 2, przy czy, identyfikujemy ze sobą ciągi 1-równoważne. Wówczas $(\mathcal{M}_n, \log d_b)$ jest zwartą przestrzenią metryczną, gdzie d_b oznacza stałą równoważności między ciągami bazowymi, tj. $d_b((e_i)_{i=1}^n, (f_i)_{i=1}^n) = \|I\|\|I^{-1}\|$, gdzie $I\colon \mathrm{span}\{e_i\} \to \mathrm{span}\{f_i\}$ jest izomorfizmem spełniającym $I(e_i) = f_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$.

Definicja 4.71. Niech X będzie przestrzenią Banacha, $n \in \mathbb{N}$. Mówimy, że ciąg $(e_j)_{j=1}^n \in \mathcal{M}_n$ jest *elementem n-tej struktury asymptotycznej* przestrzeni X, i piszemy $(e_j)_{j=1}^n \in \{X\}_n$, jeżeli zachodzi warunek

$$\begin{aligned}\forall\,\varepsilon > 0\ \forall\, Y_1 \in \mathsf{cof}(X)\ \exists\, y_1 \in S_{Y_1}\ \ldots\ \forall\, Y_n \in \mathsf{cof}(X)\ \exists\, y_n \in S_{Y_n}\\ d_b((y_j)_{j=1}^n, (e_j)_{j=1}^n) < 1 + \varepsilon.\end{aligned}$$

Innymi słowy, $(e_j)_{j=1}^n \in \{X\}_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\delta > 0$ Gracz II ma strategię wygrywającą w $\mathcal{A}_\delta$-grze, gdzie $\mathcal{A}_\delta$ jest kulą w przestrzeni metrycznej $\mathcal{M}_n$ o środku $(e_j)_{j=1}^n$ i promieniu δ.

[25]Pisier [86] wprowadził to pojęcie w swojej pracy, w której podał ilościowe wzmocnienie klasycznego twierdzenia Enflo o jednostajnie wypukłym przenormowaniu dowolnej przestrzeni superrefleksywnej.

W celu określenia asymptotycznych odpowiedników typu/kotypu Rademachera i martyngałowego, rozważamy odpowiednie stałe typowe dla ogólnych struktur blokowych. Dla danych $a \geqslant 0$, $b \geqslant 1$ oraz $n \in \mathbb{N}$ definiujemy $\mathcal{B}_n^{a,b}$ jako zbiór par (r, ρ) półnorm na $\mathbb{K}^n$ o następujących własnościach:

(i) r jest normą;

(ii) $r(\mathrm{e}_i) = 1$ dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$;

(iii) dla wszelkich $1 \leqslant m \leqslant n$ i dowolnych skalarów $(a_i)_{i=1}^n$ mamy

$$r\Big(\sum_{i=1}^m a_i \mathrm{e}_i\Big) \leqslant br\Big(\sum_{i=1}^n a_i \mathrm{e}_i\Big) \quad \text{oraz} \quad \rho\Big(\sum_{i=1}^m a_i \mathrm{e}_i\Big) \leqslant b\rho\Big(\sum_{i=1}^n a_i \mathrm{e}_i\Big);$$

(iv) dla dowolnych skalarów $(a_i)_{i=1}^n$ mamy

$$\rho\Big(\sum_{i=1}^n a_i \mathrm{e}_i\Big) \leqslant ar\Big(\sum_{i=1}^n a_i \mathrm{e}_i\Big).$$

Takie ogólne pojęcie ma uchwycić możliwość badania asymptotycznych struktur dla operatorów, co było jednym z ideologicznych celów pracy. Jeżeli bowiem $A \in \mathscr{B}(X, Y)$ jest operatorem, to odpowiadające mu pary rodzin $\mathcal{B}_n^{a,b}$ mają, mówiąc z grubsza, postać (r, ρ), gdzie r to oryginalna norma na podprzestrzeni X, natomiast $\rho(x) = \|Ax\|$ (zob. uwagi po [CDK19, Definition 2.1]).

Pomijając przypadek operatorowy, pracujemy z *blokami identycznościowymi*, tj. takimi rodzinami $\mathcal{E} \subset \bigcup_{k=1}^\infty \mathcal{B}_k^{a,b}$, które na każdym poziomie $n \in \mathbb{N}$ są domknięte według naturalnej odległości między parami półnorm na $\mathbb{K}^n$, zamknięte ze względu na branie ciągów blokowych (dokładniej: par półnorm wyznaczonych przez ciągi blokowe – zob. [CDK19, Definition 2.1]), a także każdy ich element jest postaci (r, r) (czyli odpowiada to sytuacji, gdy A jest identycznością).

Definicja 4.72 (por. [CDK19, Definition 2.5])**.** Niech $a \geqslant 0$, $b \geqslant 1$ oraz $\mathcal{E} \subset \bigcup_{k=1}^\infty \mathcal{B}_k^{a,b}$ będzie blokiem identycznościowym. Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy $\alpha_{p,n}(\mathcal{E})$ (odpowiednio: $\tau_{p,n}(\mathcal{E})$) jako infimum takich stałych $T > 0$, że dla każdego $(r, r) \in \mathcal{E} \cap \mathcal{B}_n^{a,b}$ i dowolnych skalarów $(a_i)_{i=1}^n$ mamy

$$r\Big(\sum_{i=1}^n a_i \mathrm{e}_i\Big) \leqslant T\|(a_i)_{i=1}^n\|_{\ell_p^n};$$

$$\text{odp.} \quad \bigg\| r\Big(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i \mathrm{e}_i\Big)\bigg\|_{L_p} \leqslant T\|(a_i)_{i=1}^n\|_{\ell_p^n},$$

gdzie $(\varepsilon_i)_{i=1}^n$ to rademacherowski ciąg zmiennych losowych.

Stałe $\alpha_{p,n}(\mathcal{E})$ będą odpowiadać typowi martyngałowemu, natomiast $\tau_{p,n}(\mathcal{E})$ typowi Rademachera. Pomijamy tu analogiczne definicje kotypowych odpowiedników.

Definicja 4.73 (por. [CDK19, Definition 2.6])**.** Niech $a \geqslant 0$, $b \geqslant 1$. Dla dowolnych $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ mówimy, że blok identycznościowy $\mathcal{E} \subset \bigcup_{k=1}^\infty \mathcal{B}_k^{a,b}$ ma:

- *blokowy typ bazowy* p, jeżeli $\sup_n \alpha_{p,n}(\mathcal{E}) < \infty$,
- *blokowy typ* p, jeżeli $\sup_n \tau_{p,n}(\mathcal{E}) < \infty$,

- *blokowy podtyp bazowy* p, jeżeli $\alpha_{p,n}(\mathcal{E}) = \mathrm{o}(n^{1/p'})$, *i.e.* $\lim_n n^{1/p-1}\alpha_{p,n}(\mathcal{E}) = 0$,
- *blokowy podtyp* p, jeżeli $\tau_{p,n}(\mathcal{E}) = \mathrm{o}(n^{1/p'})$, *i.e.* $\lim_n n^{1/p-1}\tau_{p,n}(\mathcal{E}) = 0$.

Poniższy wynik na temat automatycznego typu jest istotnie wykorzystywany w zapowiedzianym wzmocnieniu twierdzenia Brookera-Lanciena.

Stwierdzenie 4.74 ([CDK19, Proposition 2.9(i)]). *Niech* $a \geqslant 0$, $b \geqslant 1$ *oraz niech* $\mathcal{E} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n^{a,b}$ *będzie blokiem identycznościowym. Jeżeli* $1 < N \in \mathbb{N}$ *oraz* $1 \leqslant p \leqslant r < \infty$ *spełniają*

$$\alpha_{r,N}(\mathcal{E}) \leqslant N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}},$$

to $\mathcal{E}$ *ma blokowy typ bazowy* s *dla każdego* $1 \leqslant s < p$.

Sekcję 3 pracy [CDK19] poświęcamy twierdzeniom typu Beauzamy'ego [9] dotyczącym pojęcia podtypu i podkotypu. Stwierdzenie 4.74 implikuje, że blokowy podtyp/podkotyp (bazowy) automatycznie gwarantuje nietrywialność blokowego typu/kotypu (bazowego); zob. [CDK19, Corollary 2.11]. Uzyskane wyniki typu Beauzamy'ego pozwalają dowieść odpowiednika klasycznego twierdzenia Maureya-Pisiera.

Twierdzenie 4.75 ([CDK19, Proposition 2.9(vi), (viii)]). *Niech* $a \geqslant 0$, $b \geqslant 1$ *oraz niech* $\mathcal{E} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n^{a,b}$ *będzie blokiem identycznościowym. Wówczas:*

(i) $\mathcal{E}$ *nie ma nietrywialnego blokowego typu wtedy i tylko wtedy, gdy kanoniczna baza* ℓ_1 *jest blokowo skończenie reprezentowalna na* $\mathcal{E}$*;*

(ii) $\mathcal{E}$ *nie ma nietrywialnego blokowego kotypu wtedy i tylko wtedy, gdy kanoniczna baza* c_0 *jest blokowo skończenie reprezentowalna na* $\mathcal{E}$.

Mając tak ogólny schemat, możemy zdefiniować asymptotyczne wersje typu/kotypu w wersji Rademachera i Pisiera. Standardowe rozumowania na temat struktur asymptotycznych pokazują, że dla dowolnej przestrzeni Banacha X rodzina

$$\mathcal{A}(X) \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X\}_n$$

jest blokiem identycznościowym (utożsamiamy tutaj w naturalny sposób ciągi bazowe z normami). Dla $1 \leqslant p \leqslant \infty$ i $n \in \mathbb{N}$ określamy więc

$$\alpha_{p,n}(X) = \alpha_{p,n}(\mathcal{A}(X)) \quad \text{oraz} \quad \tau_{p,n}(X) = \tau_{p,n}(\mathcal{A}(X)).$$

Definicja 4.73 ma swoje wersje asymptotyczne, jeśli w roli $\mathcal{E}$ weźmiemy właśnie $\mathcal{A}(X)$. W szczególności, powiemy, że X ma *asymptotyczny typ* p, jeżeli $\sup_n \tau_{p,n}(\mathcal{A}(X)) < \infty$.

Obok typu potęgowego Szlenka rozważamy także wielkość $\mathsf{t}(X)$ jako supremum tych $p \geqslant 1$, dla których X ma asymptotyczny typ p. Twierdzeń o własności $\mathsf{3SP}$ dla p i t dowodzimy niejako jednocześnie.

Twierdzenie 4.76 ([CDK19, Theorem 7.5]). *Niech* X *będzie przestrzenią Banacha, a* $Y \subseteq X$ *domkniętą podprzestrzenią. Wówczas*

$$\mathsf{p}(X) = \max\{\mathsf{p}(Y), \mathsf{p}(X/Y)\}$$

oraz

$$\mathsf{t}(X) = \min\{\mathsf{t}(Y), \mathsf{t}(X/Y)\}.$$

W konsekwencji, dla dowolnych $1 \leqslant p, t \leqslant \infty$*, własności '*$\mathsf{p}(\,\cdot\,) \leqslant p$*' oraz '*$\mathsf{t}(\,\cdot\,) \geqslant t$*' są własnościami* $\mathsf{3SP}$.

Pozostaje nam wyjaśnić bliżej związek między stałymi asymptotycznego typu martyngałowego $\alpha_{p,n}(X)$ a typem potęgowym Szlenka, a także sformułować nierówność, która realizuje krok (4) nakreślonej wcześniej strategii dowodu powyższego twierdzenia. Przytoczmy w tym celu część twierdzenia Odella-Schlumprechta [82, Thm. 3].

Twierdzenie 4.77 (Odell, Schlumprecht)**.** *Niech X będzie przestrzenią Banacha, której dual X^* jest ośrodkowy. Wówczas następujące warunki są parami równoważne:*

(i) $\mathrm{Sz}(X) \leqslant \omega$*;*

(ii) *istnieje $q > 1$ oraz stała $K < \infty$ takie, że dla wszelkich $n \in \mathbb{N}$, $(e_i)_{i=1}^n \in \{X\}_n$ oraz $(a_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ mamy*

$$\Big\|\sum_{i=1}^n a_i e_i\Big\| \leqslant K\Big(\sum_{i=1}^n |a_i|^q\Big)^{1/q};$$

(iii) *istnieje takie $\overline{q} > 1$, że X spełnia podciągowe górne $\ell_{\overline{q}}$-drzewowe oszacowania. W istocie, można wziąć dowolne $\overline{q} \in (1, q)$, gdzie q spełnia warunek* (ii)*.*

Równoważność między warunkami (ii) i (iii) bierze się z alternatywnego opisu struktur asymptotycznych w języku drzew. Przy ustalonym $1 \leqslant q \leqslant \infty$ oraz $n \in \mathbb{N}$ stałą asymptotycznego typu martyngałowego $\alpha_{q,n}(X)$ można równoważnie zdefiniować jako optymalną stałą K, dla której zachodzi warunek (ii). Wyprowadzając optymalną wersję ilościową pewnej dychotomii Johnsona [51] (o wyborze albo długich blokowych podciągów równoważnych bazie ℓ_1, albo takich, które spełniają podciągowe górne ℓ_q-oszacowanie), pokazaliśmy w pracy [DK17], że wykładnik q w warunku (ii) może być dowolnie bliski wykładnikowi sprzężonemu do $\mathsf{p}(X)$.

Twierdzenie 4.78 ([DK17, Lemma 13, 15])**.** *Dla każdej ośrodkowej przestrzeni Banacha X spełniającej $\mathrm{Sz}(X) \leqslant \omega$, każdy wykładnik $q < \mathsf{p}(X)'$ spełnia warunek* (ii) *z twierdzenia Odella-Schlumprechta.*

Jeżeli więc weźmiemy dowolne liczby $1 < r < p < \min\{\mathsf{p}(Y)', \mathsf{p}(X/Y)'\}$, to na mocy twierdzenia 4.78 mamy

$$C := \sup_n \max\{\alpha_{p,n}(Y), \alpha_{p,n}(X/Y)\} < \infty.$$

Ostatni krok naszej strategii realizujemy dowodząc następującego lematu.

Lemat 4.79 ([CDK19, Lemma 7.3])**.** *Niech X i Y będą jak wyżej. Dla wszelkich $1 \leqslant p \leqslant \infty$ oraz $m, n \in \mathbb{N}$ mamy*

$$\alpha_{p,mn}(X) \leqslant 2\alpha_{p,m}(X)\alpha_{p,n}(Y) + 5\alpha_{p,n}(X)\alpha_{p,m}(X/Y)$$

oraz

$$\tau_{p,mn}(X) \leqslant 2\tau_{p,m}(X)\tau_{p,n}(Y) + 5\tau_{p,n}(X)\tau_{p,m}(X/Y).$$

Nasz ciąg spełnia więc nierówność $\alpha_{p,n^2}(X) \leqslant 7C\alpha_{p,n}(X)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Stąd, i z monotoniczności tego ciągu, nietrudno uzyskać, że istnieje taka stała $C_1, \lambda > 0$, że $\alpha_{p,n}(X) \leqslant C_1(\log n)^\lambda$ dla $n \geqslant 2$ ([CDK19, Lemma 7.4]). Dla dostatecznie dużych $N \in \mathbb{N}$ mamy więc $\alpha_{p,N}(X) < N^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}$, co pozwala użyć naszego stwierdzenia 4.74 o automatycznym typie. Wnioskujemy, że X ma asymptotyczny typ bazowy r. Jeszcze raz powołując się na twierdzenie 4.78, otrzymujemy, że $\mathsf{p}(X) \leqslant r'$.

5 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

5.a. Lista prac niewchodzących w skład osiągnięcia naukowego

[KL07] T. Kochanek, M. Lewicki, *Stability problem for number-theoretically multiplicative functions*, Proceedings of the American Mathematical Society **135** (2007), 2591-2597.

[Koc08] T. Kochanek, *Stability aspects of arithmetic functions*, Acta Arithmetica **132** (2008), 87–98.

[GK08] R. Ger, T. Kochanek, *An inconsistency equation involving means*, Colloquium Mathematicum **115** (2009), 87–99.

[KW09] T. Kochanek, W. Wyrobek, *Measurable orthogonally additive functions modulo a discrete subgroup*, Acta Mathematica Hungarica **123** (2009), 239–248.

[KM09] T. Kochanek, J. Morawiec, *Probability distribution solutions of a general linear equation of infinite order*, Annales Polonici Mathematici **95** (2009), 103-114.

[Koc09] T. Kochanek, *Stability aspects of arithmetic functions II*, Acta Arithmetica **139** (2009), 131–146.

[Koc10] T. Kochanek, *On a composite functional equation fulfilled by modulus of an additive function*, Aequationes Mathematicae **80** (2010), 155-172.

[KM10] T. Kochanek, J. Morawiec, *Probability distribution solutions of a general linear equation of infinite order II*, Annales Polonici Mathematici **99** (2010), 215-224.

[Koc11] T. Kochanek, *Corrigendum to "Stability aspects of arithmetic functions II" (Acta Arith. 139 (2009), 131-146)*, Acta Arithmetica 149 (2011), 83-98.

[KL11] T. Kochanek, M. Lewicki, *On measurable solutions of a general functional equation on topological groups*, Publicationes Mathematicae Debrecen **78** (2011), 527-533.

[Koc12] T. Kochanek, *$\mathcal{F}$-bases with brackets and with individual brackets in Banach spaces*, Studia Mathematica **211** (2012), 259-268.

[KL13] T. Kochanek, M. Lewicki, *Characterisation of L_p-norms via Hölder's inequality*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **399** (2013), 403-410.

[KW13] T. Kochanek, W. Wyrobek-Kochanek, *Almost orthogonally additive functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **400** (2013), 1-14.

[DKK13] H.G. Dales, T. Kania, T. Kochanek, P. Koszmider, N.J. Laustsen, *Maximal left ideals of the Banach algebra of bounded operators on a Banach space*, Studia Mathematica **218** (2013) 245–286.

[KK17] T. Kania, T. Kochanek, *Steinhaus' lattice-point problem for Banach spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **446** (2017) 1219-1229.

[BKP18] R. Badora, T. Kochanek, B. Przebieracz, *Approximate homomorphisms on lattices*, Archiv der Mathematik (Basel) **111** (2018) 177-186.

[KP18] T. Kochanek, E. Pernecká, *Lipschitz-free spaces over compact subsets of superreflexive spaces are weakly sequentially complete*, Bulletin of the London Mathematical Society **50** (2018) 680-696.

5.b. Omówienie wybranych wyników

5.b.1. Bazy Schaudera względem filtrów

Connor, Ganichev i Kadets [26] rozważali następujące uogólnienie klasycznego pojęcia bazy Schaudera. Niech $\mathcal{F}$ będzie filtrem podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$, a X ośrodkową przestrzenią Banacha. Ciąg $(e_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ nazywamy *$\mathcal{F}$-bazą* dla X, jeżeli dla każdego $x \in X$ istnieje jednoznacznie wyznaczony ciąg skalarów $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że

$$x = \mathcal{F}\text{–}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

według normy, tzn. dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki zbiór $A \in \mathcal{F}$, że $\|x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\| < \varepsilon$ dla $n \in A$. Określamy wówczas *funkcjonały współrzędnościowe* $e_n^*(x) = a_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Oczywiście dla filtru zbiorów koskończonych mamy do czynienia ze zwykłą bazą Schaudera i z twierdzenia Banacha wiemy, że funkcjonały e_n^* są ciągłe.

V. Kadets podczas 4. konferencji pt. *Integration, Vector Measures and Related Topics* postawił pytanie, czy dla ogólnej $\mathcal{F}$-bazy funkcjonały współrzędnościowe muszą być automatycznie ciągłe tak, jak ma to miejsce dla bazy Schaudera. Szczególnie interesująca jest sytuacja dla filtru statystycznego

$$\mathcal{F}_{st} = \Big\{ A \subset \mathbb{N}\colon \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |A \cap \{1,\dots,n\}| = 1 \Big\}.$$

W artykule [Koc12] podajemy częściowe rozwiązanie problemu Kadetsa. Zanim sformułujemy główny wynik, przypomnijmy, że przez *charakter* filtru $\chi(\mathcal{F})$ rozumiemy minimalną moc podrodziny generującej $\mathcal{F}$ czyli

$$\chi(\mathcal{F}) = \min\Big\{ |\mathcal{B}| \colon \mathcal{B} \subset \mathcal{F},\ \forall_{A\in\mathcal{F}} \exists_{B\in\mathcal{B}}\ B \subseteq A \Big\}.$$

Niech także $\mathfrak{p}$ będzie klasycznym niezmiennikiem kardynalnym (*pseudointersection number*) zdefiniowanym jako najmniejsza moc, dla której zdanie $P(\mathfrak{p}^+)$ jest fałszywe, gdzie

$P(\kappa)$: Jeżeli $\mathscr{A}$ jest rodziną podzbiorów $\mathbb{N}$ taką, że $|\mathscr{A}| < \kappa$ oraz $A_1 \cap \ldots \cap A_k$ jest nieskończony dla wszelkich $A_1, \ldots, A_k \in \mathscr{A}$, to istnieje nieskończony zbiór $B \subset \mathbb{N}$ taki, że $B \setminus A$ jest skończony dla każdego $A \in \mathscr{A}$.

Główny wynik pracy jest następujący.

Twierdzenie 5.1 ([Koc12, Theorem 1]). *Jeżeli $\chi(\mathcal{F}) < \mathfrak{p}$, to każda $\mathcal{F}$-baza $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ jest M-bazą z nawiasami, tzn. istnieje taki ciąg $n_1 < n_2 < \ldots$ liczb naturalnych, że dla każdego $x \in X$ mamy*

$$x = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} e_j^*(x) e_j.$$

Wszystkie funkcjonały współrzędnościowe są ponadto ciągłe.

Kluczowy w dowodzie jest fakt, że twierdzenie Baire'a o kategorii jest prawdziwe dla mniej niż $\mathfrak{p}$ zbiorów I kategorii. Niestety, niezależnie od dodatkowych aksjomatów mnogościowych, mamy $\chi(\mathcal{F}_{st}) \geqslant \mathfrak{p}$, tak więc problem Kadets dla filtru statystycznego pozostaje otwarty.

5.b.2. Własności strukturalne wolnych przestrzeni Lipschitza

Jednym z najintensywniej w ostatnich latach badanych kierunków teorii przestrzeni Banacha jest teoria wolnych przestrzeni Lipschitza (ang. *Lipschitz-free space*), głównie dzięki fundamentalnej pracy Godefroy i Kaltona [41] (choć obiekty te były odkryte już dużo wcześniej przez Arensa i Eelsa). Wolne przestrzenie Lipschitza są efektywnym narzędziem do tłumaczenia problemów dotyczących przekształceń lipschitzowskich między przestrzeniami metrycznymi na problemy dotyczące operatorów liniowych między przestrzeniami Banacha. Jeżeli M jest przestrzenią metryczną z wyróżnionym punktem 0, to wolna przestrzeń Lipschitza nad M, oznacza symbolem $\mathcal{F}(M)$, jest naturalnym predualem przestrzeni $\mathrm{Lip}_0(M)$ rzeczywistych funkcji lipschitzowskich na M, znikających w 0. Poza wyjątkowymi przypadkami, badanie strukturalnych własności takich przestrzeni jest zadaniem trudnym. Nie wiadomo na przykład, czy $\mathcal{F}(\ell_2)$ jest przestrzenią uniwersalną dla ośrodkowych przestrzeni Banacha, prościej – czy zawiera izomorficzną kopię c_0.

Cúth, Doucha i Wojtaszczyk [27] pokazali, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ przestrzeń $\mathcal{F}([0,1]^n)$ jest słabo ciągowo zupełna, więc w szczególności nie może zawierać kopii c_0. Wynik ten został wywnioskowany z twierdzenia Bourgaina [11] o słabej ciągowej zupełności przestrzeni $(C^1[0,1])^*$. We wspólnej pracy [KP18] z E. Pernecką uogólniamy metodę Bourgaina i łączymy ją z pewnymi kobinatoryczno-geometrycznymi własnościami przestrzeni superrefleksywnych, dowodząc następującego twierdzenia.

Twierdzenie 5.2 ([KP18, Main Theorem]). *Jeżeli M jest zwartym podzbiorem superrefleksywnej przestrzeni Banacha, to $\mathcal{F}(M)$ jest słabo ciągowo zupełna.*

W istocie dowodzimy czegoś silniejszego, a mianowice, że przestrzenie $\mathcal{F}(M)$ jak wyżej mają tzw. własność Pełczyńskiego (V*). Interesujące, że jednym z istotnych elementów dowodu jest poniższy lemat, związany z martyngałowym podejściem Pisiera [86] do problemu jednostajnie wypukłych przenormowań.

Lemat 5.3 ([KP18, Lemma 7]). *Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie q-wypukłą przestrzenią Banacha, gdzie $q \in [2,\infty)$ i niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $x_1, \dots, x_n \in B_X$. Istnieją wówczas niepuste zbiory $A, B \subset \{1, \dots, n\}$ spełniające $\max A < \min B$ i takie, że*

$$\Bigg\| \frac{1}{|A|} \sum_{i \in A} x_i - \frac{1}{|B|} \sum_{j \in B} x_j \Bigg\| \leqslant \frac{\gamma}{(\log_2 n)^{1/q}},$$

gdzie $\gamma \geqslant 1$ jest stałą zależną tylko od X.

Istnieje kilka ciekawych przykładów zastosowań Twierdzenia 5.2 dla przestrzeni metrycznych M, dla których własności $\mathcal{F}(M)$ nie dałoby się wywnioskować ze znanych wcześniej wyników (np. dla kostek Hilberta). Założenie zwartości jest jednak bardzo mocno wykorzystywane, więc słaba ciągowa zupełność przestrzeni $\mathcal{F}(\ell_2)$ jest kwestią otwartą.

Literatura

[1] F. Albiac and N. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics 233, Springer, New York, 2006.

[2] D. Alspach and Y. Benyamini, *Primariness of spaces of continuous functions on ordinals*, Israel J. Math., 27 (1977), pp. 64–92.

[3] D. Alspach, R. Judd, and E. Odell, *The Szlenk index and local l_1-indices*, Positivity, 9 (2005), pp. 1–44.

[4] D. Amir and J. Lindenstrauss, *The structure of weakly compact sets in Banach spaces*, Ann. Math., 88 (1968), pp. 35–46.

[5] G. Androulakis and T. Schlumprecht, *Strictly singular non-compact operators exist on the space of Gowers-Maurey*, J. London Math. Soc., 64 (2001), pp. 655–674.

[6] S. Argyros, I. Gasparis, and P. Motakis, *On the structure of separable $\mathscr{L}_\infty$-spaces*, Mathematika, 62 (2016), pp. 685–700.

[7] S. Argyros and R. Haydon, *A hereditarily indecomposable $\mathscr{L}_\infty$-space that solves the scalar-plus-compact problem*, Acta Math., 206 (2011), pp. 1–54.

[8] A. Avilés, F. Cabello Sánchez, J. Castillo, M. González, and Y. Moreno, *On separably injective banach spaces*, Adv. Math., 234 (2013), pp. 192–216.

[9] B. Beauzamy, *Opérateurs de type Rademacher entre espaces de Banach*, Sém Maurey-Schwartz, Exposés 6 et 7, École Polytéchnique, Paris 1975/76.

[10] Y. Benyamini and T. Starbird, *Embedding weakly compact sets into Hilbert space*, Israel J. Math., 23 (1976), pp. 137–141.

[11] J. Bourgain, *On convergent sequences of continuous functions*, Bull. Soc. Math. Bel., 32 (1980), pp. 235–249.

[12] P. Brooker and G. Lancien, *Three-space property for asymptotically uniformly smooth renormings*, J. Math. Anal. Appl., 398.

[13] F. Cabello Sánchez, *A simple proof that super-reflexive spaces are K-spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 132 (2003), pp. 697–698.

[14] F. Cabello Sánchez and J. Castillo, *Duality and twisted sums of Banach spaces*, J. Funct. Anal., 175 (2000), pp. 1–16.

[15] ——, *Banach space techniques underpinning a theory for nearly additive mappings*, Dissertationes Math., 404 (2002), p. 73 pp.

[16] ——, *The long homology sequence for quasi-Banach spaces, with applications*, Positivity, 8 (2004), pp. 379–394.

[17] ——, *Uniform boundedness and twisted sums of Banach spaces*, Houston J. Math., 30 (2004), pp. 523–536.

[18] F. Cabello Sánchez, J. Castillo, N. Kalton, and D. Yost, *Twisted sums with $C(K)$ spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 355 (2003), pp. 4523–4541.

[19] J. Calkin, *Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space*, Ann. Math., 42 (1941), pp. 839–873.

[20] P. Casazza and T. Shura, *Tsirelson's space*, Lecture Notes in Mathematics 1363, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1989.

[21] J. Castillo and M. Gonzáles, *Three-space Problems in Banach Space Theory*, Lecture Notes in Mathematics 1667, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1997.

[22] R. Causey, *Estimation of the Szlenk index of Banach spaces via Schreier spaces*, Studia Math., 216 (2013), pp. 149–178.

[23] R. Causey, *The Szlenk index of injective tensor products and convex hulls*, J. Funct. Anal., 272 (2017), pp. 3375–3409.

[24] ——, *Concerning summable Szlenk index*, Glasgow Math. J. (to appear), (2018), pp. 1–15.

[25] P. Civin and B. Yood, *Quasi-reflexive spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), pp. 906–911.

[26] J. Connor, M. Ganichev, and V. Kadets, *A characterization of Banach spaces with separable duals via weak statistical convergence*, J. Math. Anal. Appl., 244 (2000), pp. 251–261.

[27] M. Cúth, M. Doucha, and P. Wojtaszczyk, *On the structure of Lipschitz-free spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 144 (2016), pp. 3833–3846.

[28] W. Davis and J. Lindenstrauss, *On total nonnorming subspaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 31 (1972), pp. 109–111.

[29] M. Daws, *Closed ideals in the Banach algebra of operators on classical non-separable spaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 140 (2006), pp. 317–332.

[30] J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces*, Graduate Texts in Mathematics 92, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1984.

[31] J. Diestel, H. Jarchow, and A. Tonge, *Absolutely summing operators*, Cambridge University Press, New York, 1995.

[32] J. Diestel and J. J. Uhl, *Vector measures*, Mathematical Surveys, no. 15, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977.

[33] D. Dosev and W. Johnson, *Commutators on ℓ_∞*, Bull. London Math. Soc., 42 (2010), pp. 155–169.

[34] B. Dushnik and E. Miller, *Partially ordered sets*, Amer. J. Math., 63 (1941), pp. 600–610.

[35] G. Edgar, *A long James space*, in: *Measure Theory*, Oberwolfach 1979, Lectures Notes in Math. 794, Springer-Verlag, 1980, pp. 31–37.

[36] J. Elton and E. Odell, *The unit ball of every infinite-dimensional normed linear space contains a* $(1+\varepsilon)$*-separated sequence*, Colloq. Math., 44 (1981), pp. 105–109.

[37] P. Enflo, J. Lindenstrauss, and G. Pisier, *On the "three space problem"*, Math. Scand., 36 (1975), pp. 199–210.

[38] T. Figiel and W. Johnson, *A uniformly convex Banach space which contains no* ℓ_p, Compos. Math., 29 (1974), pp. 179–190.

[39] C. Foiaş and I. Singer, *On bases in* $C([0,1])$ *and* $L^1([0,1])$, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 10 (1965), pp. 931–960.

[40] D. Giesy, *On a convexity condition in normed linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 125 (1966), pp. 114–146.

[41] G. Godefroy and N. Kalton, *Lipschitz-free Banach spaces*, Studia Math., 159 (2003), pp. 121–141.

[42] G. Godefroy, N. Kalton, and G. Lancien, *Szlenk indices and uniform homeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc., 353 (2001), pp. 3895–3918.

[43] I. Gohberg, A. Markus, and I. Feldman, *Normally solvable operators and ideals associated with them*, Amer. Math. Soc. Translat., 61 (1967), pp. 63–84; tłumaczenie z rosyjskiego: Bul. Akad. Štiince RSS Moldoven **10** (1960), 51–70.

[44] W. Gowers and B. Maurey, *The unconditional basic sequence problem*, J. Amer. Math. Soc., 6 (1993), pp. 851–874.

[45] B. Gramsch, *Eine Idealstruktur Banachscher Operatoralgebren*, J. Reine Angew. Math., 225 (1967), pp. 97–115.

[46] P. Hájek, *Polynomials and injections of Banach spaces into superreflexive spaces*, Arch. Math. (Basel), 63 (1994), pp. 39–44.

[47] P. Hájek, T. Kania, and T. Russo, *Separated sets and Auerbach systems in Banach spaces*, arXiv: 1803.11501v2, (2018).

[48] V. Hasanov, *Some universally complemented subspaces in* $m(\gamma)$, Math. Zametki, 27 (1980), pp. 105–108.

[49] R. James, *Super-reflexive spaces with bases*, Pacific J. Math., 41 (1972), pp. 409–419.

[50] H. Jebreen, F. Jamjoom, and D. Yost, *Colocality and twisted sums of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., 323 (2006), pp. 864–875.

[51] W. Johnson, *On finite dimensional subspaces of Banach spaces with local unconditional structure*, Studia Math., 51 (1974), pp. 225–240.

[52] W. Johnson and J. Lindenstrauss, *Some remarks on weakly compactly generated Banach spaces*, Israel J. Math., 17 (1974), pp. 219–230.

[53] N. Kalton, *The three space problem for locally bounded F-spaces*, Compositio Math., 37 (1978), pp. 243–276.

[54] ——, *Quasi-Banach spaces*, in: *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*, vol. 2, pp. 1099–1130. North-Holland, Amsterdam, 2003.

[55] N. Kalton and N. Peck, *Quotients of $L_p(0,1)$ for $0 \leqslant p < 1$*, Studia Math., 64 (1979), pp. 65–75.

[56] ——, *Twisted sums of sequence spaces and the three space problem*, Trans. Amer. Math. Soc., 255 (1979), pp. 1–30.

[57] N. Kalton and A. Pełczyński, *Kernels of surjections from $\mathscr{L}_1$-spaces with an application to Sidon sets*, Math. Ann., 309 (1997), pp. 135–158.

[58] N. Kalton and J. Roberts, *Uniformly exhaustive submeasures and nearly additive set functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 278 (1983), pp. 803–816.

[59] T. Kania, P. Koszmider, and N. Laustsen, *A weak*-topological dichotomy with applications in operator theory*, Trans. London Math. Soc., 1 (2014), pp. 1–28.

[60] T. Kania and R. Smith, *Chains of functions in $C(K)$-spaces*, J. Aust. Math. Soc., 99 (2015), pp. 350–363.

[61] H. Knaust, E. Odell, and T. Schlumprecht, *On asymptotic structure, the Szlenk index and UKK properties in Banach spaces*, Positivity, 3 (1999), pp. 173–199.

[62] P. Koszmider, *On decompositions of Banach spaces of continuous functions on Mrówka's spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 133 (2005), pp. 2137–2146.

[63] ——, *Uncountable equilateral sets in Banach spaces of the form $C(K)$*, Israel J. Math., 224 (2018), pp. 83–103.

[64] C. Kottman, *Subsets of the unit ball that are separated by more than one*, Studia Math., 53 (1975), pp. 15–27.

[65] M. Krupski, *Topologiczne i liniowe własności przestrzeni funkcji ciągłych*, Uniwersytet Wrocławski, Wrocław, 2014.

[66] A. Kryczka and S. Prus, *Separated sequences in nonreflexive Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 129 (2000), pp. 155–163.

[67] W. Kubiś, *Banach spaces with projectional skeletons*, J. Math. Anal. Appl., 350 (2009), pp. 758–776.

[68] G. Lancien, *A survey on the Szlenk index and some of its applications*, Rev. R. Acad. Cienc. Ser. A. Mat., 100 (2006), pp. 209–235.

[69] N. Laustsen, *Maximal ideals in the algebra of operators on certain Banach spaces*, Proc. Edinb. Math. Soc., 45 (2002), pp. 523–546.

[70] N. Laustsen, R. Loy, and C. Read, *The lattice of closed ideals in the Banach algebra of operators on certain Banach spaces*, J. Funct. Anal., 214 (2004), pp. 106–131.

[71] N. Laustsen, E. Odell, T. Schlumprecht, and A. Zsák, *Dichotomy theorems for random matrices and closed ideals of operators on* $(\oplus_{n=1}^{\infty}\ell_1^n)_{c_0}$, J. London Math. Soc., 86 (2012), pp. 235–258.

[72] N. Laustsen, T. Schlumprecht, and A. Zsák, *The lattice of closed ideals in the Banach algebra of operators on a certain dual Banach space*, J. Operator Th., 56 (2006), pp. 391–402.

[73] J. Lindenstrauss, *Weakly compact sets: their topological properties and the Banach spaces they generate*, R.D. Anderson (ed.), Symp. Infinite Dimensional Topol., Math. Studies 69, 1972, pp. 235–273.

[74] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces*, Lecture Notes in Mathematics 338, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1973.

[75] R. Loy and G. Willis, *Continuity of derivations on* $b(e)$ *for certain Banach spaces* E, J. London Math. Soc.

[76] E. Luft, *The two-sided closed ideals of the algebra of bounded linear operators of a Hilbert space*, Czechoslovak Math. J., 18 (1968), pp. 595–605.

[77] B. Maurey and G. Pisier, *Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et properiétés géométriques des espaces de Banach*, Studia Math., 58 (1976), pp. 49–90.

[78] S. Mercourakis and G. Vassiliadis, *Equilateral sets in Banach spaces of the form* $C(K)$, Studia Math., 231 (2015), pp. 241–255.

[79] V. Milman, *Geometric theory of Banach spaces II. Geometry of the unit ball*, Russian Math. Surveys, 26 (1971), pp. 79–163; tłumaczenie z rosyjskiego: Uspekhi Mat. Nauk **26** (1971), 73–149.

[80] V. Milman and N. Tomczak-Jaegermann, *Asymptotic* ℓ_p *spaces and bounded distortions*, Banach Spaces (Mérida, 1992; Bor-Luh Lin and W.B. Johnson, eds.), Contemp. Math. **144**, 1993, pp. 173–195.

[81] I. Namioka and R. Phelps, *Banach spaces which are Asplund spaces*, Duke Math. J., 42 (1975), pp. 735–750.

[82] E. Odell and T. Schlumprecht, *Embedding into banach spaces with finite dimensional decompositions*, Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat., 100 (2006), pp. 295–323.

[83] B. Pawlik, *Approximately additive set functions*, Colloq. Math., 54 (1987), pp. 163–164.

[84] A. Pełczyński, *Projections in certain banach spaces*, Studia Math., 19 (1960), pp. 209–228.

[85] A. PIETSCH, *Operator ideals*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam–New York–Oxford, 1980.

[86] G. PISIER, *Martingales with values in uniformly convex spaces*, Israel J. Math., 20 (1975), pp. 326–350.

[87] M. RIBE, *Examples for the nonlocally convex three space problem*, Proc. Amer. Math. Soc., 73 (1979), pp. 351–355.

[88] J. ROBERTS, *A nonlocally convex F-space with the Hahn–Banach approximation property*, Banach Spaces of Analytic Functions, Lecture Notes in Mathematics 604, pp. 76–81, Springer, Berlin, 1977.

[89] H. ROSENTHAL, *On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach space theory*, Studia Math., 37 (1970), pp. 13–36.

[90] ——, *The Banach spaces $C(K)$*, in: *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*, vol. 2, pp. 1547–1602. North-Holland, Amsterdam, 2003.

[91] B. SARI, T. SCHLUMPRECHT, N. TOMCZAK-JAEGERMANN, AND V. TROITSKY, *On norm closed ideals in $l(\ell_p, \ell_q)$*, Studia Math., 179 (2007), pp. 239–262.

[92] T. SCHLUMPRECHT, *On the closed subideals of $l(\ell_p \oplus \ell_q)$*, Oper. Matrices, 6 (2012), pp. 311–326.

[93] S. SHELAH AND J. STEPRANS, *A Banach space on which there are few operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 104 (1988), pp. 101–105.

[94] A. SOBCZYK, *Projection of the space m on its subspace c_0*, Bull. Amer. Math. Soc., 47 (1941), pp. 938–947.

[95] W. SZLENK, *The non-existence of a separable reflexive Banach space universal for all separable reflexive Banach spaces*, Studia Math., 30 (1968), pp. 53–61.