Prof. dr hab. Jerzy Kąkol
Wydział Matematyki i Informatyki UAM

Poznań 3. 12. 2019

Recenzja rozprawy habilitacyjnej doktora Tomasza Kochanka

1. **Ocena osiągnięcia naukowego**

Dr Tomasz Kochanek jako osiągnięcie habilitacyjne przedstawił cykl 7 publikacji naukowych pod wspólnym tytułem **Problem trzech przestrzeni i metody pozaskończone w geometrii przestrzeni Banacha**.

Są to publikacje:

[Koc13] **T. Kochanek**, Stability of vector measures and twisted sums of Banach spaces, Journal of Functional Analysis 264 (2013), 2416-2456.

[KK14] T. Kania, **T. Kochanek,** The ideal of weakly compactly generated operators acting on a Banach space, Journal of Operator Theory 71 (2014), 455-477.

[HKK14] K. P. Hart, T. Kania, **T. Kochanek**, A chain condition for operators from C(K) spaces, Quarterly Journal of Mathematics 65 (2014), 703-715.

[KK16] T. Kania, **T. Kochanek**, Uncountable sets of unit vectors that are separated by more than 1, Studia Mathematica 232 (2016), 19-44.

[DK16] S. Draga, **T.Kochanek**, Direct sums and summability of the Szlenk index, Journal of Functional Analysis 271 (2016), 642-671.

[DK17] S. Draga, **T. Kochanek**, The Szlenk power type and tensor products of Banach spaces, Proceedings of the American Mathematical Society 145 (2017), 1685- 1698.

[CDK19] R. M. Causey, S. Draga, **T. Kochanek**, Operator ideals and three-space properties of asymptotic ideal seminorms, Transactions of the American Mathematical Society 371 (2019), 8173-8215.

Do wniosku zostały dołączone oświadczenia współautorów, z których wynika, że w przypadku prac: [KK14], [KK16], [DK16] i [DK17] wkład każdego ze współautorów został oceniony na około 50 procentowy. Wkład autora rozprawy w prace [HKK14] i [CDK19] został ustalony to około 40 procent. Należy wyraźnie podkreślić, że wszystkie wyżej wymienione czasopisma, w których opublikowane zostały rezultaty stanowiące osiągnięcie naukowe, należą do tych, które w środowisku matematycznym uważane są za dobre i bardzo dobre.

Do wniosku dr Kochanek dołączył autoreferat, doskonale przygotowany i opracowany dokument, będący bardzo dobrze przemyślanym "przewodnikiem" po uprawianej tematyce badawczej. Niewątpliwie (w mojej opinii) ten opracowany materiał podkreśla szeroką i głęboką orientację dra Kochanka na uprawianą tematykę.

Tematem rozprawy (jak trafnie dr Kochanek sygnalizuje w początkowych akapitach autoreferatu) są wybrane zagadnienia z geometrii przestrzeni Banacha i ich własności strukturalnych, gdzie szczególnie wykorzystuje się badania rozszerzeń przez krótkie ciągi dokładne i związki z miarami wektorowymi. Przede wszystkim chodzi tu o publikacje [Koc13] oraz [DK16], [DK17], [CDK19].

Praca [Koc13] w części strukturalnej sprowadza się do badania tzw. problemu trzech przestrzeni i stosowania metod pozaskończonych.

Tutaj, w [Koc13] autor zajmuje się wektorowymi wersjami twierdzenia Kaltona-Robertsa i uzyskuje szereg ciekawych i niebanalnych wyników pokazując zarazem relacje pomiędzy problemem stabilności dla miar wektorowych a własnościami trzech przestrzeni (poprzez badanie rozszerzeń przez krótkie ciągi dokładne). W pracach [DK16], [DK17], [CDK19], poświęconych geometrii, autorzy głównie korzystają z badań wokół indeksu Szlenka, jednego z najważniejszych indeksów w teorii przestrzeni Banacha.

Przejdźmy obecnie do dokładniejszego opisu wyników z publikacji [Koc13]: Punktem wyjścia do dalszych rozważań może być obserwacja (wyraźnie sygnalizowana w autoreferacie dra Kochanka), że pytanie stawiane przez Kaltona, czy przestrzeń Banacha ℓ_∞ należy do klasy $\mathcal{K}$ redukuje się do problemu stabilności dla prawie addytywnych rzeczywistych funkcji zbioru. Przypomnijmy, że przestrzeń quasi-Banacha X jest $\mathcal{K}$-przestrzenią jeżeli para $(X, \mathbb{R})$ rozszczepia się, tzn. dla dowolnej przestrzeni quasi-Banacha Z, krótki ciąg dokładny $0 \to \mathbb{R} \to Z \to X \to 0$ rozszczepia się, co oznacza, że X nie da się przedstawić jako topologiczny iloraz przez prostą $\mathbb{R}$ nielokalnie wypukłej przestrzeni quasi-Banacha. Warto wspomnieć w tym miejscu, że sławny wynik Kaltona-Ribe-Pecka (1977-78) orzeka, że ℓ_1 nie jest $\mathcal{K}$-przestrzenią, tzn. dla krótkiego ciągu dokładnego $0 \to \mathbb{R} \to Z \to \ell_1 \to 0$, przestrzeń Z nie musi być lokalnie wypukła.

Jak już wspomnieliśmy, problem trzech przestrzeni mocno wiąże się z problemem stabilności dla prawie addytywnych rzeczywistych funkcji zbioru. W pracy [Koc13] dr Kochanek wprowadza następujące pojęcie mocno inspirowane wynikiem Kaltona- Robertsa o stabilności dla prawie addytywnych funkcji zbioru.

Definition 1 (T. Kochanek)**.** *Przestrzeń Banacha X ma własność SVM (stability of vector measures), jeżeli istnieje stała $v(X) < \infty$ (zależna tylko od przestrzeni X), że dla dowolnego ciała zbiorów $\mathcal{F}$ oraz każdej funkcji $\nu : \mathcal{F} \to X$ spełniającej nierówność*

$\|\nu(A \cap B) - \nu(A) - \nu(B)\| \leq 1$ dla $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset$ istnieje miara wektorowa $\mu : \mathcal{F} \to X$ taka, że $\|\nu(A) - \mu(A)\| \leq \upsilon(X)$ dla $A \in \mathcal{F}$.

To pojęcie generuje następujący użyteczny koncept SVM-charakteru przestrzeni Banacha X bez własności SVM (wprowadzony przez dra Kochanka w omawianej publikacji) jako najmniejszą liczbę kardynalną κ, dla której X nie ma własności κ-SVM. Tę liczbę oznacza się symbolem $\tau(X)$, zob. Definicja 4.17, autoreferat. Jak autor zauważa, zawsze mamy $\tau(X) \geq \omega$, a dla każdej $\mathcal{L}_\infty$-przestrzeni X nawet zachodzi związek $\tau(X) > \omega$. Ponadto (jak dr Kochanek udawadnia), dla dowolnej liczby $1 \leq p < \infty$ i każdej nieskończenie wymiarowej $\mathcal{L}_p$-przestrzeni zachodzi równość $\tau(X) = \omega$. Wiele klasycznych przestrzeni Banacha X ma własność SVM tylko w najprostszej formie, tzn. SVM-charakter wynosi ω.

Dr Kochanek pokazuje, że w przypadku gdy $\tau(X) > \omega$ i X jest dopełnialna w swoim bidualu, to X ma własność SVM. Nawet (więcej) okazuje się, że:

Jeżeli istnieje projekcja z X^{**} na X o normie $\leq \lambda$, to $\upsilon(X) \leq \lambda\upsilon(\omega, X)$. Ponadto wnioskuje się, że $\tau(c_0) > \omega$ i $\tau(C[0,1]) > \omega$.

Omawiane przez autora konkretne przykłady motywują nastepujący kluczowy i naturalny problem postawiony i rozważany w [Koc13].

Problem 2. *Czy każda liczba kardynalna jest równa SVM-charakterowi jakiejś przestrzeni Banacha?*

Autor uzyskuje odpowiedź pozytywną dla szeregu klas przestrzeni Banacha. Badanie problemu stabilności dla prawie addytywnych funkcji zbioru dla przypadku wektorowego prowadzi dra Tomasza Kochanka do uzyskania ciekawych Twierdzeń 4.1 i 4.3, które dostarczają warunków koniecznych dla własności SVM i κ-SVM.

Theorem 3. *Jeżeli Γ jest liczbą kardynalną i jeśli $\tau(X) > (2^\Gamma)^+$, to para $(\ell_\infty(\Gamma), X)$ rozszczepia się. Jeżeli natomiast $\tau(X) > \Gamma^+$, to wówczas para $(c_0(\Gamma), X)$ rozszczepia się.*

Szczególnie dobrze opisuje się przypadek dla przestrzeni Banacha X, które są dopełnialne w swoim bidualu X^{**}.

Istotnie, dr. Kochanek w Twierdzeniu 8.2 pokazuje, że dla przestrzeni Banacha X dopełnialnej w swoim bidualu X^{**} następujące warunki są równoważe:

(i) *X ma własność SVM.*

(ii) $Ext(X^*, \ell_1) = 0$.

(iii) $Ext(\ell_\infty, X^{**}) = 0$.

(iv) $Ext(c_0, X) = 0$.

Stąd uzyskuje się wzmocnienie wyżej wspomnianych nierówności poprzez następujący wniosek: $\tau(C[0,1]) = \tau(C[0,\omega^\omega]) = \omega_1$.

Uzyskane wyniki i wypracowane nowe techniki ostatecznie doprowadzają autora do zasadniczej konkluzji, która spina całość badań w ramach omawianej publikacji. Chodzi tu o wynik zawarty w Twierdzeniu 7.1 pracy [Koc13].

Theorem 4. *Dla liczby kardynalnej κ o nieprzeliczalnej kofinalności własność κ-SVM jest własnością trzech przestrzeni. Stąd własność SVM jest własnością trzech przestrzeni.*

Przejdę obecnie do krótkiego omówienia głównych wyników kolenych publikacji [DK16], [DK17], [CDK19].

Przypomnijmy tutaj, że głęboki wynik Namioki-Phelpsa orzeka, że przestrzeń Banacha X jest przestrzenią Asplunda wtedy i tylko wtedy gdy każdy niepusty *-słabo zwarty zbiór w dualu X^* zawiera niepuste *-słabo relatywnie otwarte podzbiory o dowolnie małej średnicy, tzn. dla $\epsilon > 0$ istnieje *-słabo otwarty zbiór $U \subset X^*$ taki, że $diam(U \cap B_{X^*}) < \epsilon$. Stąd wynika, że indeks Szlenka $Sz(X) = sup_{\epsilon>0} Sz(X, \epsilon)$ dla ośrodkowej przestrzeni Banacha X jest poprawnie określony (tzn. ciąg derywacji kuli B_{X^*} wypełnia B_{X^*} po pewnej liczbie kroków) wtedy i tylko wtedy gdy X^* jest ośrodkowa. To pojęcie, indeks przyporządkowany każdej przestrzeni Asplunda, wprowadzone przez Szlenka w 1968 roku posłużyło Szlenkowi w pokazaniu że nie istnieje przestrzeń uniwersalna w klasie ośrodkowych i refleksywnych przestrzeni Banacha. Z biegien lat pojęcie indeksu Szlenka przechodziło szereg modyfikacji.

W pracach [DK16], [DK17] autorzy badają typ potęgowy i sumowalność indeksu Szlenka dla nieskończonych sum prostych i injektywnych iloczynów tensorowych. Twierdzenie 3.2 z pracy [DK16] orzeka, że dla ciągu (X_n) ośrodkowych przestrzeni Banacha z jednostajnie sumowalnym indeksem Szlenka suma prosta $(\bigoplus_n X_n)_{c_0}$ ma sumowalny indeks Szlenka. Założenia wprowadzone w tym twierdzeniu są istotne, jak autorzy trafnie zauważają.

Bardzo ciekawym i ważkim osiągnięciem pracy [DK16] jest Twierdzenie 5.9, gdzie się opisuje typ potęgowy Szlenka p dla sumy prostej $(\bigoplus_n X_n)_E$ w sensie przestrzeni Banacha E ze znormalizowaną zwężającą, 1-bazwarunkową bazą z pewnym warunkiem ℓ_p-asymptotyczności. Ostatni wspomniany wynik pozwolił autorom uzyskać prawdopodobnie pierwszy przykład (Wniosek 5.11) przestrzeni Banacha X (jest to tsirelsonowska suma prosta) o typie potęgowym 1 lecz o niesumowalnym indeksie Szlenka.

Jeżeli chodzi o publikację [DK17], to główny wynik w niej zawarty (Main Theorem, rozszerzający wyniki Causeya) jest bardzo elegancki i orzeka, że dla niezerowych przestrzeni Banacha X i Y takich że $Sz(X) \leq \omega$ i $Sz(Y) \leq \omega$ zachodzi następujący związek $p(X \hat{\otimes}_\epsilon Y) = max\{p(X), p(Y)\}$.

Ostatnia praca z powyższej serii [CDK19] rozwija elementy teorii asymptotycznych i operatorowych odpowiedników zarówno typu i kotypu Rademachera i martyngałowego; w tym celu autorzy rozważają pewne stałe dla ogólnych struktur blokowych.

Te rozważania doprowadzają do interesującego wzmocnienia twierdzenia Brookera-Lanciena (z pracy *Three space property for assymptotically uniformly smooth renormings*, JMAA 398).

Autorzy pokazują następujące twierdzenie (chodzi o wynik typu o trzech przestrzeniach, Theorem 7.5 z pracy [CDK19]).

Theorem 5. *Dla przestrzeni Banacha X i jej podprzestrzeni Y zachodzi związek $p(X) = max\{p(Y), p(X/Y)\}$. Stąd, dla dowolnego $q \geq 1$ własność $p(.) \leq q$ jest własnością trzech przestrzeni.*

Kolejne dwie prace [KK14] i [HKK14] są powiązane tematycznie badaniem struktury kraty domkniętych ideałów w algebrze operatorów ograniczonych $\mathcal{B}(X)$ na przestrzeni Banacha X. Problem podania charakteryzacji kraty domkniętych ideałów w ogólnym przypadku jest technicznie bardzo trudny i do tej pory jest nierozstrzygniętym poza kilku konkretnymi przypadkami.

Autorzy pracy [KK14] będąc inspirowanymi wynikami Loya-Willisa-Laustena, którzy scharakteryzowali ideały algebry na przestrzeni Jamesa $\mathcal{J}_p(\omega_1)$ $(1 < p < \infty)$, postawili sobie zadanie opisania ideałów w algebrze operatorów tzw. długiej przestrzeni Jamesa $\mathcal{J}_p(\omega_1)$ $(1 < p < \infty)$ wprowadzonej i badanej przez Edgara w 1980 roku. W tym celu autorzy pracy [KK14] wprowadzili (wyróżnili) pojęcie ideału operatorów WCG (tj. *słabo zwarcie generowanych*).

Główne wyniki tej pracy widzę w Twierdzeniu 3.1 oraz Twierdzeniu 3.7. Pierwsze z nich ustala pewną własność operatorów na przestrzeni $\mathcal{J}_p(\omega_1)$ orzekającą, że każdy operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{J}_p(\omega_1))$ działa jak mnożenie przez stałą na dużym zbiorze liczb porządkowych w ω_1. Ta obserwacja pozwoliła autorom wyróżnić pewien funkcjonał liniowo-multiplikatywny Λ_p na $\mathcal{B}(\mathcal{J}_p(\omega_1))$. Okazuje się (Twiedzenie 3.7 z [KK14]), że jądro tego funkcjonału określa jedyny właściwy ideał maksymalny $\mathcal{D}$ w $\mathcal{B}(\mathcal{J}_p(\omega_1))$ (= ideał operatorów WCG).

Ponadto (jak autorzy pokazują w tej publikacji) operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{J}_p(\omega_1))$ należy do ideału $\mathcal{D}$ wtedy i tylko wtedy gdy T nie jest izomorfizmem na żadnej izomorficznej kopii przestrzeni $\mathcal{J}_p(\omega_1)$.

Kolejna (i ostatnia) praca [KK16] w ramach osiągnięcia naukowego dotyczy uzyskania analogonów dwóch twierdzeń Kottmana (1975) i Eltona-Odella (1981) dla nieośrodkowych przestrzeni Banacha, a dotyczących zbiorów odseparowanych na sferze przestrzeni Banacha.

Tematyka ta jest w oczywisty sposób motywowana naturalnym poszukiwaniem wzmocnień klasycznego twierdzenia Riesza. I tak, Twierdzenie A pracy [KK16] orzeka, że dla przestrzeni quasi-refleksywnych X (odpowiednio, WLD o gęstości $>$ continuum) sfera jednoskowa $S \subset X$ przestrzeni (odpowiednio, sfera jednoskowa $S^* \subset X^*$ przestrzeni dualnej

X^*) zawiera nieprzeliczalny (1+)-odseparowany zbiór. Ponadto, dla nieośrodkowej superrefleksywnej przestrzeni Banacha X istnieje $\epsilon > 0$, że S zawiera $(1+\epsilon)$-odseparowany nieprzeliczalny podzbiór. Ciekawy komentarz autorski (zawarty w autoreferacie) wyjaśnia, że w ramach stosowanych technik w powyżej wspomnianym wyniku nie da się wzmocnić tego rezultatu pokazując go dla nieośrodkowych refleksywnych przestrzeni Banacha.

Część omawianej pracy poświęcona jest uzyskaniu odpowiedzi (pozytywnej) na pytanie Mercorakisa i Vassiliadisa (2015) czy dla nieośrodkowej przestrzeni Banacha $C(K)$ (funkcji ciągłych rzeczywistych określonych na zwartej przestrzeni K) sfera jednostkowa w $C(K)$ musi zawierać (1+)-odseparowany zbiór, tj. $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ taki, że $\|x_\alpha - x_\gamma\| > 1$ dla $\alpha \neq \beta$. Eleganckie Twierdzenie B omawianej pracy dostarcza następujący wynik:

(1) Jeżeli K jest doskonale normalna, to sfera S w $C(K)$ zawiera podzbiór o mocy gęstości $C(K)$, który jest (1+)-odseparowany.

(2) Jeżeli natomiast K nie jest doskonale normalna, to S zawiera nieprzeliczalny podzbiór A taki, że $\|x - y\| = 2$ dla dowolnych różnych $x, y \in A$.

Należy stwierdzić, że uzyskane wyniki wymagały wnikliwego przeanalizowania i rozbudowania szeregu technik dowodowych, włączając pojęcia wokół 1-projekcyjnych szkieletów i wyników Erdösa-Rado o kolorowaniu $c^+ \to (\omega_1)^2_2$. Świadczy to o bardzo dobrym przygotowaniu merytorycznym autorów pracy, szerokim zakresie wiedzy i intuicji wokół omawianego zagadnienia.

2. Ocena reszty dorobku

Poza wyżej wymienionymi i omówionymi pracami naukowymi dr Tomasz Kochanek jest autorem lub współautorem 17 artykułów naukowych znajdujących się na liście Journal Citation Report, prawie wszystkich ulokowanych w dobrych i bardzo dobrych czasopismach.

Ponadto, dr Kochanek jest również autorem 9 opublikowanych pozycji popularyzujących olimpiady matematyczne. Należy wspomnieć, że dr Tomasz Kochanek brał czynny udział w szeregu międzynarodowych konferencjach naukowych wygłaszając referaty. Pełna lista tych wystąpień (odczytów) jest dołączona do wniosku. Dr Kochanek brał udział w kilku projektach badawczych jako wykonawca. Uzyskiwał wielokrotnie nagrody w Konkursie im. Marka Kuczmy na najlepszą polską pracę z równań funkcyjnych i zagadnień pokrewnych; chodzi tu o nagrody z lat 2007, 2008, 2009, 2013.

3. Końcowa konkluzja

Podsumowując, w moim przekonaniu, osiągnięcie naukowe dra Tomasza Kochanka stanowi znaczny wkład w rozwój działu matematyki będącego jego specjalnością naukową i plasuje się w nurcie aktualnie prowadzonych badań w szeregu ośrodkach matematycznych. Dr Tomasz Kochanek wykazuje się istotną aktywnością naukową, a pozostałe osiągnięcia oceniam również bardzo wysoko. Jego dorobek naukowy jest znaczący i uznany przez środowisko matematyczne. W mojej opinii, określone ustawowo osiągnięcie naukowe i pozostały dorobek naukowy kandydata w pełni spełniają ustawowe i zwyczajowe kryteria stawiane kandydatom do otrzymania stopnia doktora habilitowanego.

W związku z powyższym gorąco popieram wniosek o nadanie stopnia doktora habilitowanego drowi Tomaszowi Kochankowi.