

Kraków, 30 stycznia 2020

Prof. dr hab. Jan Stochel
Instytut Matematyki
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński

Ocena osiągnięcia naukowego dr. Tomasza Kochanka pt.:

„Problem trzech przestrzeni i metody pozaskończone w geometrii przestrzeni Banacha”

Pan dr Tomasz Kochanek jest autorem lub współautorem dwudziestu czterech prac (łącznie z jedną korektą) w tym sześciu napisanych samodzielnie. Według bazy danych Web of Science jego prace były cytowane 54 razy w tym bez samocytowań 46. Z kolei baza danych MathSciNet podaje, że prace dr Kochanka były cytowane 59 razy przez 58 autorów co jak sądzę jest dobrym wynikiem na tym etapie rozwoju naukowego. Większość jego prac została opublikowana w dobrych lub bardzo dobrych czasopismach o zasięgu międzynarodowym, w tym takich jak *Journal of Functional Analysis* (w tym jedna samodzielna), *Transactions of the American Mathematical Society*, *Proceedings of the American Mathematical Society*, *Bulletin of the London Mathematical Society*, *Journal of Operator Theory*, *Studia Mathematica* oraz *Journal of Mathematical Analysis and Applications*.

Wyżej wymienione osiągnięcie naukowe dr. Tomasza Kochanka składa się z siedmiu artykułów naukowych opublikowanych w latach 2013 - 2019. Z wyjątkiem jednej wszystkie pozostałe prace zostały napisane wspólnie z innymi autorami: T. Kanią, K.P. Hart'em, S. Dragą oraz R.M. Causey'em. W załączonych materiałach znalazłem stosowne oświadczenia dotyczące wkładu poszczególnych autorów we wspólne dzieło. W każdym przypadku wkład dr Tomasza Kochanka jest uznany przez współautorów jako istotny.

Sumaryczna liczba stron prac wchodzących w zakres jego osiągnięcia naukowego wynosi 190. Zatem jest niemożliwe dokładne omówienie

ich zawartości w ramach tej krótkiej oceny. Dr Kochanek dołączył obszerny dobrze napisany autoreferat (ponad czterdzieści stron). Zawiera on w szczególności subiektywną ocenę autora jego własnego dorobku naukowego. W poniższym omówieniu zachowuję numerację zgodną z tą podaną w „Autoreferacie”.

Przedstawione mi do oceny osiągnięcie naukowe dotyczy takich zagadnień jak (podział pochodzący od samego autora): problem trzech przestrzeni, wektorowe wersje twierdzenia Kaltona-Robertsza, metody pozaskończone a ideały w algebrach operatorów, zbiory odseparowane na sferze, indeks Szlenka i kwestia jego sumowalności i typu potęgowego, stabilność względem sum prostych i iloczynów tensorowych. Tematyka jego prac jest zdeterminowana zainteresowaniami samego autora oraz w dużym stopniu współautorów wymienionych wyżej.

Zacznę od samodzielnej 41-stronicowej pracy opublikowanej w prestiżowym czasopiśmie *Journal of Functional Analysis* w której pojawiają się główne wątki tematyczne wchodzące w zakres jego osiągnięcia:

T. Kochanek, Stability of vector measures and twisted sums of Banach spaces, *J. Funct. Anal.* 264 (2013), 2416-2456.

Praca ta wpisuje się w powszechnie znany fakt, że istnieje silna zależność pomiędzy teorią miar wektorowych a teorią przestrzeni Banacha. Autor zajmuje się w niej problemem stabilności dla miar wektorowych (skończenie addytywnych) i jego związku z teorią skreślonych sum przestrzeni Banacha. Idąc za autorem, mówimy, że przestrzeń Banacha X ma własność SVM (stability of vector measures), jeśli istnieje stała $v < \infty$ taka, że dla dowolnej algebry zbiorów $\mathcal{F}$ i dowolnej funkcji $\nu: \mathcal{F} \rightarrow X$ spełniającej warunek

$$\|\nu(A \cup B) - \nu(A) - \nu(B)\| \leq 1, \quad A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset,$$

istnieje miara wektorowa $\mu: \mathcal{F} \rightarrow X$ taka, że $\|\nu(A) - \mu(A)\| \leq v$ dla wszystkich $A \in \mathcal{F}$. Jeśli powyższy warunek jest spełniony dla algebr $\mathcal{F}$ o liczności mniejszej niż ustalona liczba kardynalna κ , to mówimy że X ma własność κ -SVM. Najmniejsza liczba kardynalna κ dla której X nie ma własności κ -SVM (jeśli taka istnieje) nazywa się SVM-charakterem X . Powyższa definicja niewątpliwie jest inspirowana własnością stabilności w sensie Hyersa-Ulama oraz w głównej mierze twierdzeniem Kaltona-Robertsza z roku 1983 (mówiącego, że $\mathbb{R}$ ma własność SVM). Jak sam autor pisze, stosując maszynериę sum skreślonych i odwzorowań quasi-liniowych charakteryzuje wyżej wprowadzone pojęcia i wyznacza SVM-charaktery dla wielu klasycznych przestrzeni Banacha oraz podaje związki pomiędzy własnością κ -SVM, κ -injektywnością i problemem trzech przestrzeni (patrz Twierdzenia 2.4, 4.1, 4.2, 5.3, 7.1, 8.2). Warto

tutaj wyjaśnić na czym ten problem polega: mając dany ciąg dokładny $0 \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X \rightarrow 0$ przestrzeni Banacha X, Y, Z (lub ogólniej F -przestrzeni), powstaje pytanie które własności przestrzeni środkowej Z wynikają z analogicznych własności przestrzeni skrajnych X i Y . Wyniki uzyskane przez autora w tej pracy są interesujące, dowody nietrywialne wymagające bardzo dobrego rozeznania w tej tematyce (wśród wielkich nazwisk pracujących w tym obszarze wspomnę o takich jak Enflo, Lindenstrauss and Pisier). Świadczą one o jego dużej samodzielności matematycznej. Te dwa ostatnie zdania mogą powtórzyć prawie bez mian w przypadku kolejnych publikacji wchodzących w skład osiągnięcia naukowego dr. Tomasza Kochanka.

Kolejna 30-stronicowa praca, wspólna z S. Dragą, opublikowana trzy lata później w *Journal of Functional Analysis* to:

S. Draga, T. Kochanek, Direct sums and summability of the Szlenk index, *Journal of Functional Analysis* 271 (2016), 642-671.

Omawiana praca zawiera trzy główne wyniki, mianowicie Twierdzenia 3.2, 4.3 oraz 5.9, nie wspominając o wielu wnioskach i dobrze dobranych przykładach. Zaczniemy od definicji „ E -sumy prostej”: jeśli E jest przestrzenią Banacha z unormowaną 1-bezwarunkową bazą $(e_n)_{n=1}^\infty$, to przez E -sumę prostą $\left(\bigoplus_{n=1}^\infty X_n\right)_E$ ciągu $(X_n)_{n=1}^\infty$ przestrzeni Banacha rozumie się przestrzeń Banacha złożoną ze wszystkich ciągów $(x_n)_{n=1}^\infty \in \prod_{n=1}^\infty X_n$ dla których szereg $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|e_n$ jest zbieżny w E , wyposażoną we operacje liniowe określone po współrzędnych oraz w normę

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\| = \left\| \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|e_n \right\|.$$

Pierwszy z wyżej wymienionych wyników, mianowicie Twierdzenie 3.2 mówi o tym, że c_0 -suma prosta ośrodkowych przestrzeni Banacha posiadających jednostajnie sumowalny indeks Szlenka ma sumowalny indeks Szlenka. Jak autorzy pokazali w Przykładzie 4.1 wynik ten przestaje być prawdziwy, gdy przestrzeń Banacha c_0 jest zastąpiona przez ogólną przestrzeń Banacha z sumowalnym indeksem Szlenka, w tym przypadku przestrzeń Tsirelsona. Twierdzenie 4.3 modyfikuje Twierdzenie 3.2 w następujący sposób: jeśli E jest przestrzenią Banacha posiadającą bezwarunkową bazę oraz sumowalny indeks Szlenka, to E -suma prosta $\left(\bigoplus_{n=1}^\infty X_n\right)_E$ ciągu $(X_n)_{n=1}^\infty$ skończenie wymiarowych przestrzeni Banacha ma sumowalny indeks Szlenka. Twierdzenie 5.9 podaje jawną formułę na typ potęgowy Szlenka E -sumy prostej $\left(\bigoplus_{n=1}^\infty X_n\right)_E$ przy pewnych ograniczeniach nałożonych zarówno na samą przestrzeń E jak i na ciąg $(X_n)_{n=1}^\infty$ ośrodkowych przestrzeni Banacha.

Trzecia z omawianych przeze mnie 43-stronicowa praca dr. Tomasza Kochanka, napisana wspólnie z S. Dragą oraz R. M. Causey'em oraz opublikowana w równie prestiżowym czasopiśmie *Transactions of the American Mathematical Society* to:

R.M. Causey, S. Draga, T. Kochanek, Operator ideals and three-space properties of asymptotic ideal seminorms, *Trans. Amer. Math. Soc.* 371 (2019), 8173-8215.

W tej pracy autorzy wprowadzają asymptotyczne odpowiedniki klasycznych pojęć takich jak typ i kotyp dla przestrzeni Banacha oraz operatorów na nich. Tak naprawdę tych odpowiedników jest więcej. Ze względu na stopień skomplikowania nie przytaczam tych definicji. Twierdzenie 1.2, które jest jednym z głównych wyników stwierdza między innymi, że operator $A: X \rightarrow Y$ idący z przestrzeni Banacha X do przestrzeni Banacha Y ma asymptotyczny podtyp podstawowy wtedy i tylko wtedy gdy jego indeks Szlenka $Sz(A)$ spełnia nierówność $Sz(A) \leq \omega$. Co więcej albo A ma asymptotyczny podtyp, albo identyczność na ℓ_1 jest prosto asymptotycznie skończenie reprezentowalna w A (logicznie rozłączna alternatywa). Ponadto klasa operatorów z asymptotycznym podtypem jest domkniętym ideałem operatorowym. Podobnie, albo A ma asymptotyczny podkotyp, albo identyczność na c_0 jest prosto asymptotycznie skończenie reprezentowalna w A (ponownie logicznie rozłączna alternatywa). Jak w poprzednim przypadku, klasa operatorów z asymptotycznym podkotypem jest domkniętym ideałem operatorowym. Kolejne twierdzenie o numerze 1.3 charakteryzuje asymptotyczny podtyp podstawowy przestrzeni Banacha za pomocą jej asymptotycznego typu podstawowego p z pewnym $p \in (1, \infty)$ zależnym od przestrzeni X (występują tutaj również inne wersje typu i kotypu). Analogiczny wynik (patrz Wniosek 6.10) sformułowany dla operatorów pomiędzy przestrzeniami Banacha oraz ich sprzężeń znajduje się w Twierdzeniu 1.4. Następnie autorzy udowodnili w Twierdzeniu 1.5 następujące własności związane z problemem trzech przestrzeni (wersja dla typu potęgowego Szlenka jest w Twierdzeniu 7.5): jeśli $q(X)$ oznacza supremum tych p dla których przestrzeń Banacha X ma asymptotyczny typ podstawowy p , a $t(X)$ supremum tych p dla których X ma asymptotyczny kotyp p , to dla każdej domkniętej podprzestrzeni Y przestrzeni X zachodzą tożsamości

$$\begin{aligned} q(X) &= \min\{q(Y), q(X/Y)\}, \\ t(X) &= \min\{t(Y), t(X/Y)\}. \end{aligned}$$

Ta praca jest najbardziej techniczna z wyżej omawianych, w związku z czym dowody są stosunkowo długie i wymagają użycia wielu trików

i pomysłów pozwalających na skuteczne konstruowanie skomplikowanych obiektów matematycznych niezbędnych w dowodach.

Zagadnienie opisu typu potęgowego Szlenka dla injektywnego iloczynu tensorowego przestrzeni Banacha oraz badanie jego sumowalności było głównym tematem pracy dr. Tomasza Kochanka i Szymona Dragi:

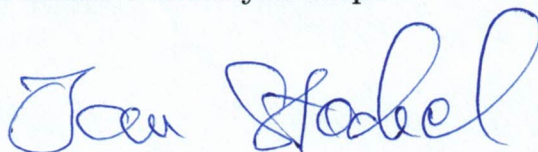
S. Draga, T. Kochanek, The Szlenk power type and tensor products of Banach spaces, *Proceedings of the American Mathematical Society* 145 (2017), 1685-1698.

Trzy pozostałe prace wchodzące w osiągnięcie naukowe dr. Tomasza Kochanka były napisane w latach 2014/16 wspólnie z T. Kanią (dwie) oraz z T. Kanią i K.P. Hart'em (jedna). Dwie z tych prac [KK14] oraz [HKK14] (numeracja jak w autoreferacie) odwołują się do pojęcia słabej zwartości i dotyczą struktury kraty domkniętych dwustronnych ideałów w algebrze operatorów ograniczonych na przestrzeni Banacha (pojawia się tutaj ideał operatorów słabo zwarcie generowalnych oraz tzw. „chain condition”). Praca [KK16] dotyczy geometrii sfery jednostkowej nieośrodkowej przestrzeni Banacha; autorzy stosują w niej między innymi metody klasycznej indukcji pozaskończonej połączenie z metodami kombinatoryki nieskończonościowej w tym techniki ramseyowskie.

Pozostały dorobek dr. Kochanka nie wchodzący w zakres wyżej omówionego osiągnięcia naukowego składa się z siedemnastu publikacji (w tym jednej korekty). Prace te poza tematyką zbliżoną do tej omawianej powyżej dotyczą również kwestii równań funkcyjnych oraz problemu stabilności dla pewnych klas funkcji (w tym funkcji arytmetycznych); ta ostatnia tematyka jest związana z jego rozprawami magisterską i doktorską. Dorobek dr. Tomasza Kochanka nie wchodzący w zakres osiągnięcia „habilitacyjnego” oceniam jako dobry i taki bez którego rzeczne osiągnięcie nie mogłoby być zrealizowane.

Zmierzając do konkluzji, stwierdzam, że omawiane osiągnięcia naukowe zawiera solidną porcję matematyki osadzoną w jednym z ważnych nurtów współczesnej analizy funkcjonalnej, wnoszącą znaczący i znaczny wkład w rozwój omawianej dziedziny. Pozostały dorobek naukowy jest również dobrej jakości, a całość świadczy dobitnie o dużej dojrzałości matematycznej dr. Tomasza Kochanka. Doskonale radzi sobie z trudną technicznie materią swojej dziedziny.

Podsumowując uważam, że przedstawione mi do oceny osiągnięcie naukowe dr. Tomasza Kochanka stanowi znaczny wkład w rozwój matematyki oraz spełnia wymagania określone w art. 16 ustawy z dn. 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz w rozporządzeniu Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego z dn. 18 stycznia 2018 r. i dlatego wnoszę o dopuszczenie dr. Tomasza Kochanka do dalszych etapów postępowania habilitacyjnego.



Prof. dr hab. Jan Stochel