Recenzja

dorobku oraz osiągnięcia naukowego dr. Wojciecha Kryńskiego

Rodziny foliacji i ich związki z geometryczną teorią równań różniczkowych

Pana Wojciecha Kryńskiego znam osobiście i śledzę jego karierę naukową zaczynając od czasu przed obroną przez niego rozprawy doktorskiej pt. „Problemy równoważności dystrybucji stycznych oraz równań różniczkowych zwyczajnych" napisanej pod kierunkiem prof. B. Jakubczyka. Powodem jest bliskość jego zainteresowań naukowych moim własnym. Niejednokrotnie miałem okazje wysłuchać referatów p. Kryńskiego na seminarium „Geometria i równania różniczkowe" w IMPAN, którego inicjatorem i organizatorem był prof. B. Jakubczyk, i którego współorganizatorem w chwili obecnej jest sam p. Kryński. Moim zdaniem, od czasów obrony pracy doktorskiej jego rozwój naukowy jest imponujący tak pod względem ilości publikacji (15 prac od 2010 r. – prace [Hab1]–[Hab7], [Pub1]–[Pub6][1] oraz niedawne artykuły [Kr1], [Kr2], które nie weszły do rozprawy habilitacyjnej, czyli średnio dwie prace rocznie) jak i różnorodności zagadnień, którymi on się zajmuje. Istotnie, o ile wspomniana praca doktorska obejmowała z grubsza dwa tematy – teorię niezmienników lokalnych dystrybucji stycznych oraz geometryczną teorię równań różniczkowych zwyczajnych, o tyle późniejsze prace dotyczą również takich dziedzin jak teoria rodzin foliacji (tkanin), geometryczna teoria równań różniczkowych cząstkowych oraz całego szeregu struktur geometrycznych na rozmaitościach (struktury Einsteina–Weyla, Segre, para-konforemne, rzutowe, hiper-para-zespolone, sub-pseudo-riemannowskie). Niedawno miałem przyjemność być na odczycie dr. Kryńskiego, na którym on zaprezentował własne bardzo ciekawe wyniki dotyczące rozwiązań równania Camassy–Holma, przy czym metoda uzyskania tych wyników nie pokrywa się z żadną z metod z jego wcześniejszych prac.

Przejdę teraz do omawiania najistotniejszych z mojego punktu widzenia wyników rozprawy habilitacyjnej dr. Kryńskiego. Duża ich część dotyczy teorii tkanin, czyli rodzin foliacji tego samego rzędu w ogólnym położeniu. Warto wspomnieć, że teoria tkanin jest klasyczną dziedziną, podstawy której były założone w pierwszej połowie XX wieku przez szkołę W. Blaschkego (z której wywodzi się S.-S. Chern). Ze względu na swoje związki z równaniami różniczkowymi oraz geometrią algebraiczną teoria ta była rozwijana przez wielu matematyków w różnych krajach. Absolutnie nowy kontekst zaproponowali dla teorii tkanin w latach dziewięćdziesiątych I. Gelfand i I. Zakharevich powiązawszy ją z teorią par kompatybilnych nawiasów Poissona (struktur bihamiltonowskich). Ostatnie przedstawiają jedno z najważniejszych narzędzi badania tzw. całkowalnych układów hamiltonowskich (zwyczajnych oraz cząstkowych). Podstawowym pytaniem teorii tkanin jest następujące: czy dana rodzina foliacji jest lokalnie równoważna rodzinie foliacji w $\mathbb{R}^n$ składających się z płaszczyzn równoległych? W ogólności odpowiedź na to pytanie jest negatywna: istnieją lokalne niezmienniki typu krzywizn będące przeszkodami do „wyprostowania" tkaniny (można „wyprostować" tylko wtedy, gdy one znikają – przypadek „płaski"). Gelfand i Zakharevich związali z każdą strukturą bihamiltonowską określonego typu tzw. tkaninę Kroneckera i pokazali, że jej „niepłaskość" skutkuje w nieprawdziwości lokalnego twierdzenia typu Darboux, czyli w nieistnieniu lokalnych współrzędnych, w których obydwa nawiasy Poissona mają stałe współczynniki. Później F. J. Turiel pokazał, że tkanina Kroneckera stanowi zupełny niezmiennik lokalny, czyli wyjściowa struktura bihamiltonowska może być lokalnie odtworzona ze swojej tkaniny z dokładnością do dyfeomorfizmu. Inny aspekt tej teorii został odkryty przez Zakharevicha w r. 2000: pokazał on istnienie nawzajem jednoznacznej odpowiedniości pomiędzy generycznymi tkaninami Kroneckera (tzw. tkaninami Veronese) w $\mathbb{R}^3$ a rozwiązaniami pewnego nieliniowego równania cząstkowego drugiego rzędu, które otrzymało później w literaturze miano bezdyspersyjnego równania Hiroty. Odkrycie to pozwała stosować podejście twistorowe do badania tego równania, konstruować jawne rozwiązania, badać transformacje Bäcklunda i t.p.

[1] Tu i dalej odwołania te odnoszą się do autoreferatu oraz listy publikacji habilitanta.

W powyższym kontekście za najważniejsze uważam następujące dwa wyniki dr. Kryńskiego.

- Zbudowanie w pracy [Hab6] teorii kanonicznych koneksji dla tkanin Veronese (Twierdzenie 11.1). Taka teoria właściwie od początku była jakby w tle rozważań Gelfanda i Zakharevicha na temat związków pomiędzy tkaninami i strukturami bihamiltonowskimi, ale dotychczas w sposób jawny nie pojawiła się w literaturze (choć należy tu wspomnieć o pewnej próbie zbudowania takiej teorii w [Rig], która była oparta na innym podejściu i raczej nie znalazła zastosowań). Istotność tej teorii wynika też z istnienia w literaturze szeregu prób znalezienia efektywnych kryteriów płaskości struktury bihamiltonowskiej bez konieczności jawnego przejścia do tkaniny [Iz1], [Iz2], [Tur3]. Uważam, iż perspektywicznym kierunkiem badań może być rozszerzenie teorii koneksji z tkanin Veronese do odpowiednich struktur bihamiltonowskich (teoria taka pozwoliłaby rozróżniać nie tylko płaski i niepłaski przypadek, ale również niepłaskie przypadki między sobą).

- Wykazanie w pracy [Hab3] (Twierdzenie 2.1) wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości pomiędzy trójwymiarowymi tkaninami Veronese oraz tzw. strukturami Einsteina–Weyla typu hiper-CR, wprowadzonymi w 2004 r. przez M. Dunajskiego. Pozwoliło to na włączenie równania Hiroty do teorii takich struktur (ważnych m.in. w teorii względności), wcześniej opisywanych za pomocą tzw. równania hiper-CR, nieliniowego równania cząstkowego drugiego rzędu, które było badane przez wielu autorów. W szczególności w [Hab3] otrzymane zostały jawne wzory na strukturę Weyla w oparciu na rozwiązanie równania Hiroty.

  Zaznaczę, iż powyższa tematyka została rozwinięta w pracy [KP], w której otrzymano cztery serie kontaktowo nierównoważnych nieliniowych równań cząstkowych związanych z trójwymiarowymi tkaninami Veronese, zbudowano struktury Einsteina–Weyla według ich rozwiązań, zbadano transformacje Bäcklunda i t.p. Zauważę, że równanie Hiroty jest przedstawicielem jednej z serii, a równanie hiper-CR z kolei nie poddało się objęciu schematem [KP]. Pięknym uzupełnieniem całej teorii jest niedawni artykuł dr. Kryńskiego [Kr2] (który nie wszedł do rozprawy habilitacyjnej ani do dorobku), obejmujący wszystkie równania z wspomnianych serii oraz równanie hiper-CR w ramach podejścia twistorowego.

W dalszej kolejności wymienię następujące ważne wyniki z rozprawy habilitacyjnej dr. Kryńskiego.

- Udowodnienie w pracy [Hab5] (Stwierdzenie 2.2 oraz Wniosek 2.3) faktu, że klasyczna koneksja Cherna dla 3-tkaniny $\mathcal{F}_{t_1}, \mathcal{F}_{t_2}, \mathcal{F}_{t_3}$, gdzie $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{P}^1}$ jest tkaniną Veronese na płaszczyźnie, a $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{P}^1$ są parami różne, nie zależy od wyboru punktów t_i. Jest to wynik wpisujący się w ogólną koncepcję Gelfanda–Zakharevicha i naturalną jest kwestia jego uogólnienia w przyszłości na $(n+1)$-tkaniny w $\mathbb{R}^n$ oraz powiązanie z wyżej wspomnianą teorią koneksji z pracy [Hab6].

- Uzyskanie w [Hab7] (Twierdzenie 3.2) w oparciu na wyniki pracy [Hab2] układu równań cząstkowych uogólniającego tzw. drugie równanie Plebańskiego. Ten układ równań jest w naturalny sposób związany z szeregiem struktur geometrycznych, wśród których są tkaniny Kroneckera szczególnego typu. Perspektywicznym wydaje się użycie wspomnianych struktur do zbadania tego układu pod kątem transformacji Bäcklunda, zbudowania rozwiązań jawnych i t.p.

W osobną grupę wyodrębnię najważniejsze wyniki omawianej rozprawy habilitacyjnej dotyczące charakteryzacji rozmaitych struktur geometrycznych w terminach równań różniczkowych zwyczajnych.

- Charakteryzacja w pracy [Hab4] (Twierdzenie 1.1) struktur Einsteina–Weyla typu hiper-CR na przestrzeni rozwiązań równania zwyczajnego trzeciego rzędu w terminach niezmienników tego równania (był to problem otwarty postawiony przez Dunajskiego w r. 2008).

- Charakteryzacja w [Hab2] (Twierdzenie 5.3) tzw. izotypowych tkanin Kroneckera w terminach układów równań zwyczajnych.

- Charakteryzacja w [Hab6] (Twierdzenie 3.2) w oparciu na wyniki pracy [Hab1] tzw. k-całkowalnych $GL(2,\mathbb{R})$-struktur na $\mathbb{R}^{n+1}$ w terminach równań różniczkowych rzędu $k+1$ oraz całkowicie geodezyjnych $GL(2,\mathbb{R})$-struktur na przestrzeni rozwiązań równań zwyczajnych rzędu $k+1$ (Twierdzenia 8.1, 9.1, [Hab6]).

- Charakteryzacja w [Hab5] (Rozdział 3) struktur rzutowych na płaszczyźnie powstających z tkanin Veronese w terminach równania drugiego rzędu.

W następnej kolejności omówię wkrótce prace [Pub1]–[Pub6] oraz pracę [Kr1] (cytowaną w autoreferacie jako [Pub7]) spoza rozprawy habilitacyjnej. Artykuły [Pub1]–[Pub4] są w pewnym sensie kontynuacją tematyki pracy doktorskiej habilitanta i dotyczą geometrii dystrybucji niecałkowalnych ([Pub1], [Pub2]) oraz niezmienników układów sterowania i równań różniczkowych ([Pub3], [Pub4]). Prace [Pub5], [Pub6] napisane we współpracy z M. Grochowskim (i pewnie pod wpływem osobistych zainteresowań ostatniego) poświęcone są strukturom sub-pseudo-riemannowskim na dystrybucjach kontaktowych. Artykuł [Kr1] jest rozwinięciem tematyki rozprawy habilitacyjnej (poświęcony relacjom pomiędzy $GL(2,\mathbb{R})$-strukturami na rozmaitościach 4-wymiarowych i równaniami cząstkowymi) i chyba nie wszedł do niej z powodów formalnych, gdyż jeszcze nie jest opublikowany.

Pozwolę sobie dodać kilka uwag krytycznych dotyczących rozprawy habilitacyjnej dr. Kryńskiego, w szczególności autoreferatu. W kontekście opisu wyników artykułu [Hab2] należałoby odnieść się do prac Turiela [Tur1], [Tur2], których tematyka w dużej mierze pokrywa się z [Hab2] (w samym artykule praca [Tur1] jest cytowana, ale [Tur2] juz nie). Przy opisie wyniku [Hab6, Wniosek 11.4] (Twierdzenie 7 autoreferatu) pominięta została ważna praca Bouetou–Dufoura (na szczęcie jest cytowana w samej pracy [Hab6] pod num. [38]). Nie podzielam zdania habilitanta o ważności Twierdzenia 6 autoreferatu (jak i odpowiednich twierdzeń [Hab3, 4.1] oraz [Hab6, 11.5]) podającego jawny wzór na strukturę bihamiltonowską odpowiadającą rozwiązaniom równania Hiroty, czyli de facto tkaninie Veronese, gdyż taki wzór jest oczywistym wnioskiem z teorii Gelfanda–Zakharevicha i nie zasługuje na wyodrębnienie w osobne twierdzenie.

Pomimo tych nielicznych uwag krytycznych uważam, że przedstawiony przez dr. Kryńskiego autoreferat jest dobrze napisany a jego dorobek i rozprawa habilitacyjna sprawia bardzo solidne wrażenie. Habilitant wykazał się tak umiejętnością samodzielnego prowadzenia badań naukowych, jak i zdolnością do nawiązania współpracy, w tym z badaczami z bardzo renomowanych zagranicznych ośrodków (prace samodzielne i we współautorstwie rozkładają się mniej więcej pół na pół). Oświadczenia M. Dunajskiego, jedynego współautora dwóch z siedmiu artykułów włączonych do rozprawy habilitacyjnej, pokazują, że wkład dr. Kryńskiego do tych publikacji jest decydujący. Publikuje w dobrych lub bardzo dobrych czasopismach, ma wysokie wskaźniki cytowań, przedstawiał swoje wyniki na wielu międzynarodowych konferencjach, był współorganizatorem kilku z nich, ma wprawę w zdobywaniu krajowych i międzynarodowych grantów. Doświadczenie dydaktyczne dr. Kryńskiego jest stosunkowo nieduże, gdyż pracował w większości na stanowiskach badawczych. Jednak z pewnością ma talent dydaktyczny, o czym świadczą jego referaty oraz prace. Mogę rekomendować np. Rozdział 2 artykułu [Hab7] jako przewodnik po rozmaitych strukturach geometrycznych (3-tkaniny, tkaniny Kroneckera, struktury Segre, struktury hiper-para-zespolone), w których autor umiejętnie rozpoznaje wspólne cechy.

Podsumowując, wyrażam opinię, że dr. Kryński jest młodym ale uznanym specjalistą w dziedzinie geometrii różniczkowej z bardzo dobrymi szansami na stabilny rozwój naukowy w przyszłości. Wnoszę o dopuszczenie kandydata do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.

Literatura

[Iz1] A. Izosimov, *Curvature of Poisson pencils in dimension three*, Diff. Geom. and Appl., 31 (2013), 557–567.

[Iz2] A. Izosimov, *Flat bi-Hamiltonian structures and invariant densities*, arXiv:1302.2931 [math.DG], 10 pp.

[KP] B. Kruglikov, A. Panasyuk, *Veronese webs and nonlinear PDEs*, J. Geom. Phys., 115 (2017) 45–60.

[Kr1] W. Kryński, T. Mettler, GL(2)*-structures in dimension four, H-flatness and integrability*, arXiv:1611.08228 [math.DG], (2016), 12 pp.

[Kr2] W. Kryński, *On deformations of the dispersionless Hirota equation*, arXiv:1704.05666 [math.DG], (2017), 13 pp.

[Rig] M. H. Rigal, *Geometrie globaledes systemes bihamiltoniens en dimension impaire*, Rozprawa doktorska, l'Université Montpellier II, 1996.

[Tur1] F. J. Turiel, C^∞*-classification des germes de tissus de Veronese*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 329 (1999), 425–428.

[Tur2] ———, *On the local theory of Veronese webs*, arXiv:1001.3098 [math.DG], (2010), 52 pp.

[Tur3] ———, *Flatness of generic Poisson pairs in odd dimension*, arXiv:1501.03932 [math.DG], (2015), 39 pp.

A. Panasyuk

Andriy Panasyuk
Dr hab., prof. UWM
Olsztyn, dn. 31.05.2017