Skośny ruch Browna

Adam Bobrowski

Politechnika Lubelska

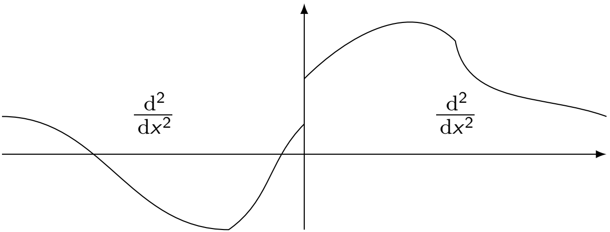
Minikonferencja PTM

Plan

- Modelowanie membran (współautor — E. Ratajczyk)
- Skośny ruch Browna
- Model kinetyczny (współautor — T. Komorowski)
- Dodatek: ortogonalność (E.R.)

Półprzepuszczalna membrana

Analiza w $L^1(\mathbb{R})$:

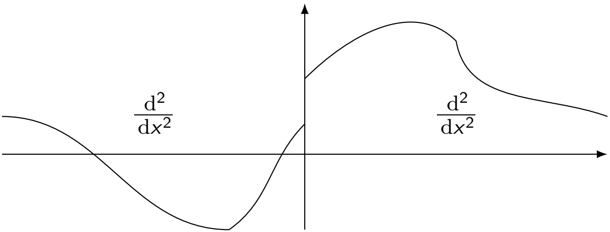


Warunki transmisji ($\mu, \nu \geqslant 0$ — wsp. przepuszczalności):

$$\phi'(0+) = \ \mu\phi(0+) - \ \nu\phi(0-), \qquad \phi'(0+) = \phi'(0-).$$

Półprzepuszczalna membrana

Analiza w $L^1(\mathbb{R})$:



Warunki transmisji ($\mu, \nu \geqslant 0$ — wsp. przepuszczalności):

$$\phi'(0+) = n\mu\phi(0+) - n\nu\phi(0-), \qquad \phi'(0+) = \phi'(0-).$$

Gdy $n \to \infty$, membrana „znika", a jednak pozostaje asymetria

$$\mu\phi(0+) = \nu\phi(0-), \qquad \phi'(0+) = \phi'(0-).$$

Technikalia

- Zbieżność półgrup
- W L^1 i C
- Zbieżność procesów
- Zbieżność funkcji kosinusowych (E.R.) — jednostajna względem czasu!
- Uogólnienia na grafy

Przepuszczalna czy nie?

$$\mu\phi(0+) = \nu\phi(0-), \qquad \phi'(0+) = \phi'(0-).$$

Orwell „Animal Farm”:

All animals are equal but some animals are more equal than others.

Jak wygląda graniczny proces?

- Procesy aproksymujące znane (snapping out BM)
- Opis probabilistyczny poprzez czas lokalny
- Opis granicznego?

Jak wygląda graniczny proces?

- Procesy aproksymujące znane (snapping out BM)
- Opis probabilistyczny poprzez czas lokalny
- Opis granicznego?

W L^1:

$$\mu\phi(0+) = \nu\phi(0-), \qquad \phi'(0+) = \phi'(0-).$$

W C (warunek dualny, bardziej znany):

$$f(0+) = f(0-), \qquad \nu f'(0+) = \mu f'(0-).$$

Jak wygląda graniczny proces?

- Procesy aproksymujące znane (snapping out BM)
- Opis probabilistyczny poprzez czas lokalny
- Opis granicznego?

W L^1:

$$\mu\phi(0+) = \nu\phi(0-), \qquad \phi'(0+) = \phi'(0-).$$

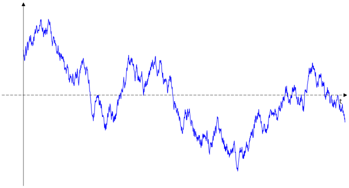
W C (warunek dualny, bardziej znany):

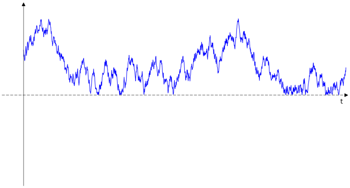
$$f(0+) = f(0-), \qquad \nu f'(0+) = \mu f'(0-).$$

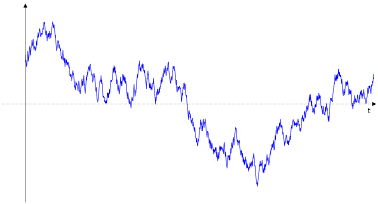
Kluczowy parametr

$$\alpha := \frac{\nu}{\nu + \mu}.$$

Konstrukcja skośnego z odbitego

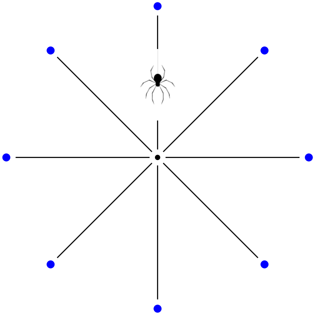






$$\alpha := \frac{\nu}{\nu + \mu}$$ — p-stwo nieodbijania wycieczki w dół

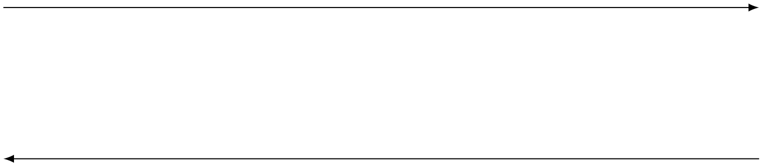
Wiele uogólnień



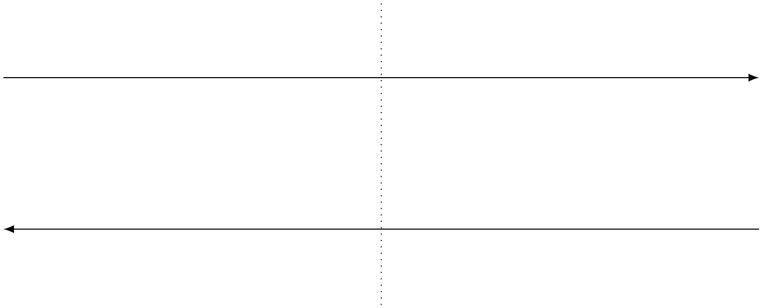
$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i'(0) = 0$

Pająk Walsha, zob. też Portenko, Lejay.

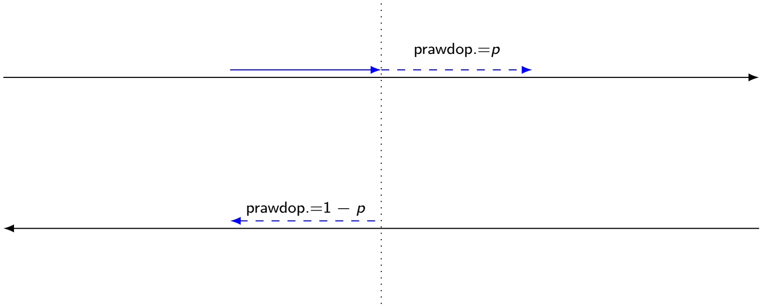
Model kinetyczny z interfejsem



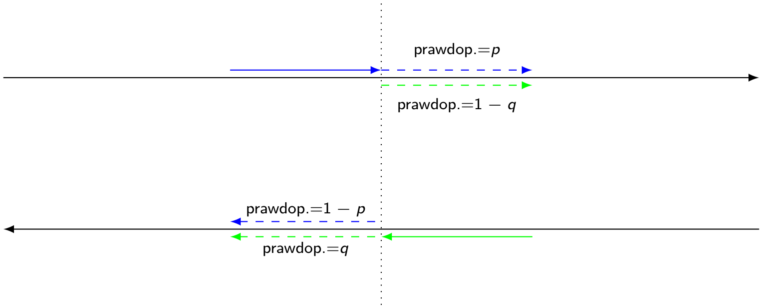
Model kinetyczny z interfejsem



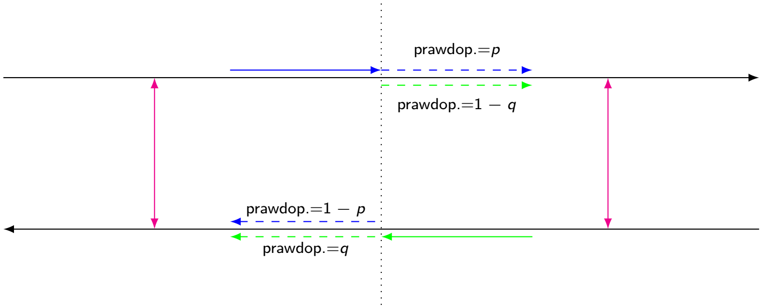
Model kinetyczny z interfejsem



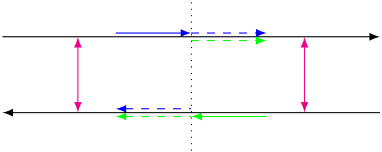
Model kinetyczny z interfejsem



Model kinetyczny z interfejsem



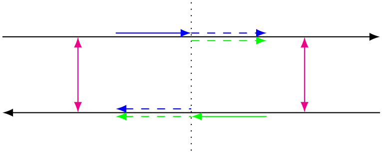
Model kinetyczny z interfejsem



Aproksymacja dyfuzyjna

- częstotliwość skoków — $\frac{1}{\epsilon^2}$
- prędkość poruszania się cząstki — $\frac{1}{\epsilon}$

Model kinetyczny z interfejsem

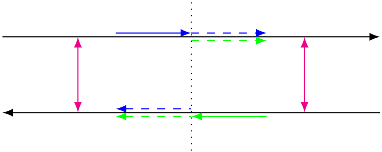


Aproksymacja dyfuzyjna

- częstotliwość skoków — $\frac{1}{\epsilon^2}$
- prędkość poruszania się cząstki — $\frac{1}{\epsilon}$

Bez interfejsu – klasyka (S. Goldstein, Kac, Griego–Hersh, Pinsky)
$\longrightarrow$ ruch Browna („mniejsza" przestrzeń stanów w granicy)

Model kinetyczny z interfejsem



Aproksymacja dyfuzyjna

- częstotliwość skoków — $\frac{1}{\epsilon^2}$
- prędkość poruszania się cząstki — $\frac{1}{\epsilon}$

Bez interfejsu – klasyka (S. Goldstein, Kac, Griego–Hersh, Pinsky)
$\longrightarrow$ ruch Browna („mniejsza" przestrzeń stanów w granicy)
Z interfejsem
$\longrightarrow$ skośny $p\phi(0-) = q\phi(0+) \longrightarrow \alpha = \frac{p}{p+q}$.

Model kinetyczny — podsumowanie

Interfejs modyfikuje graniczny ruch Browna:

zmienia go w ruch skośny z prawdopodobieństwem nieodbijania wycieczek

$$\alpha = \frac{p}{p+q}.$$

Wszyscy jesteśmy Ukraińcami

Dziękuję

Dodatek: ortogonalność

Para brzegowych warunków ortogonalnych:

$$f'(0) = \gamma f(0) \qquad \perp \qquad f''(0) = \gamma f'(0).$$

Dodatek: ortogonalność

Para brzegowych warunków ortogonalnych:

$$f'(0) = \gamma f(0) \qquad \perp \qquad f''(0) = \gamma f'(0).$$

Dla skośnego:

$$f(0+) = f(0-) \quad \text{oraz} \quad \nu f'(0+) = \mu f'(0-)$$

prostopadły jest

$$f(0+) = -f(0-) \quad \text{oraz} \quad \mu f'(0+) = -\nu f'(0+).$$

Podprzestrzenie niezmiennicze:

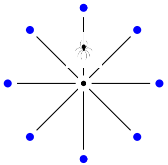
Podprzestrzenie niezmiennicze dla (różnych wcieleń)

$$C(t)f(x) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)], \qquad x, t \in \mathbb{R}.$$

Podprzestrzenie niezmiennicze:

Podprzestrzenie niezmiennicze dla (różnych wcieleń)

$$C(t)f(x) = \tfrac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)], \qquad x, t \in \mathbb{R}.$$



$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i'(0) = 0$

$$f_1^e = f_2^e = \cdots = f_n^e \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i^o = 0$$

prostopadłe do

$$\frac{f_1^o}{\alpha_1} = \frac{f_2^o}{\alpha_2} = \cdots = \frac{f_n^o}{\alpha_n} \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^n f_i^e = 0.$$