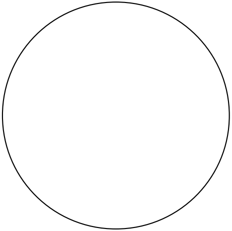
Centralne twierdzenie graniczne dla losowych obrotów okręgu

Klaudiusz Czudek

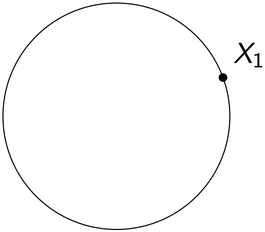
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

2.06.2022

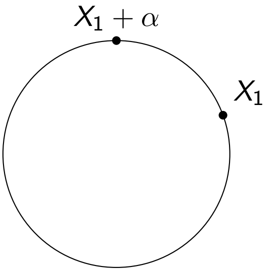
Wstęp



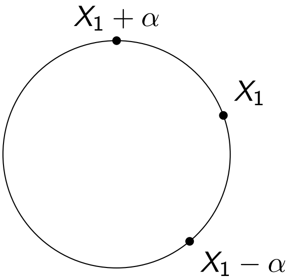
Wstęp



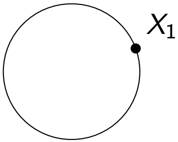
Wstęp



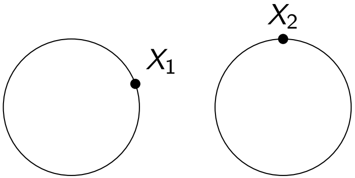
Wstęp



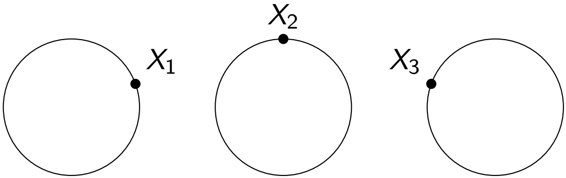
Wstęp



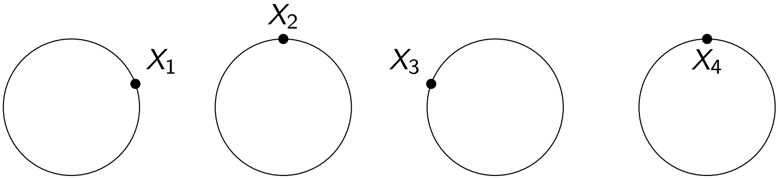
Wstęp



Wstęp



Wstęp



Wstęp

Jest to przykład spaceru losowego na grupie (Bourgain, Varju, Lindenstrauss, Einsiedler,...).

Wstęp

Jest to przykład spaceru losowego na grupie (Bourgain, Varju, Lindenstrauss, Einsiedler,...).

$\mathbb{P}(X_n \in [a, b]) =$

Wstęp

Jest to przykład spaceru losowego na grupie (Bourgain, Varju, Lindenstrauss, Einsiedler,...).

$\mathbb{P}(X_n \in [a, b]) = Leb([a, b])$ (nie zależy od n).

Wstęp

Jest to przykład spaceru losowego na grupie (Bourgain, Varju, Lindenstrauss, Einsiedler,...).

$\mathbb{P}(X_n \in [a, b]) = Leb([a, b])$ (nie zależy od n). Proces jest stacjonarny i ergodyczny.

Wstęp

Jest to przykład spaceru losowego na grupie (Bourgain, Varju, Lindenstrauss, Einsiedler,...).

$\mathbb{P}(X_n \in [a,b]) = Leb([a,b])$ (nie zależy od n). Proces jest stacjonarny i ergodyczny.

Twierdzenie ergodyczne Birkhoffa implikuje, że jeśli $\varphi \in L^1(\mathbb{S}^1)$, to

Wstęp

Jest to przykład spaceru losowego na grupie (Bourgain, Varju, Lindenstrauss, Einsiedler,...).

$\mathbb{P}(X_n \in [a, b]) = Leb([a, b])$ (nie zależy od n). Proces jest stacjonarny i ergodyczny.

Twierdzenie ergodyczne Birkhoffa implikuje, że jeśli $\varphi \in L^1(\mathbb{S}^1)$, to

$$\frac{\varphi(X_1) + \cdots + \varphi(X_n)}{n} \to \int \varphi(x)dx \quad \text{p.n.}$$

Wstęp

Jest to przykład spaceru losowego na grupie (Bourgain, Varju, Lindenstrauss, Einsiedler,...).

$\mathbb{P}(X_n \in [a,b]) = Leb([a,b])$ (nie zależy od n). Proces jest stacjonarny i ergodyczny.

Twierdzenie ergodyczne Birkhoffa implikuje, że jeśli $\varphi \in L^1(\mathbb{S}^1)$, to

$$\frac{\varphi(X_1) + \cdots + \varphi(X_n)}{n} \to \int \varphi(x)dx \quad \text{p.n.}$$

Tempo zbieżności?

Niech φ będzie funkcją całkowalną o wartości oczekiwanej $\int \varphi = 0$.
Powiemy, że zachodzi **CTG**

Tempo zbieżności?

Niech φ będzie funkcją całkowalną o wartości oczekiwanej $\int \varphi = 0$.
Powiemy, że zachodzi **CTG** jeśli istnieje $\sigma > 0$ takie, że dla każdego $a \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\left(\frac{-a}{\sqrt{n}} < \frac{\varphi(X_1) + \ldots + \varphi(X_n)}{n} < \frac{a}{\sqrt{n}}\right) \to \int_{-a}^{a} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2\sigma^2} du.$$

Aproksymacja α liczbami wymiernymi

Z zasady szufladkowej Dirichleta wnioskujemy, że dla każdego α niewymiernego istnieje nieskończenie wiele par $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, takich że

$$|\alpha - p/q| \leqslant 1/q^2.$$

Aproksymacja α liczbami wymiernymi

Z zasady szufladkowej Dirichleta wnioskujemy, że dla każdego α niewymiernego istnieje nieskończenie wiele par $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, takich że

$$|\alpha - p/q| \leqslant 1/q^2.$$

Na przykład

$$\pi \approx \frac{22}{7}, \frac{355}{113},$$

Aproksymacja α liczbami wymiernymi

Z zasady szufladkowej Dirichleta wnioskujemy, że dla każdego α niewymiernego istnieje nieskończenie wiele par $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, takich że

$$|\alpha - p/q| \leqslant 1/q^2.$$

Na przykład

$$\pi \approx \frac{22}{7}, \frac{355}{113},$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \dots$$

Aproksymacja α liczbami wymiernymi

Dla prawie każdego α niewymiernego można to poprawić: istnieje $\gamma > 2$ i $c > 0$ takie że

$$|\alpha - p/q| \leqslant c/q^\gamma$$

dla nieskończenie wielu par $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.

Aproksymacja α liczbami wymiernymi

Dla prawie każdego α niewymiernego można to poprawić: istnieje $\gamma > 2$ i $c > 0$ takie że

$$|\alpha - p/q| \leqslant c/q^\gamma$$

dla nieskończenie wielu par $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.

Liczba niewymierna α jest **diofantyczna typu** (c, γ), $c > 0$, $\gamma \geqslant 2$, jeśli

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{c}{q^\gamma} \quad \text{dla każdego } p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0.$$

Aproksymacja α liczbami wymiernymi

Dla prawie każdego α niewymiernego można to poprawić: istnieje $\gamma > 2$ i $c > 0$ takie że

$$|\alpha - p/q| \leqslant c/q^\gamma$$

dla nieskończenie wielu par $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.

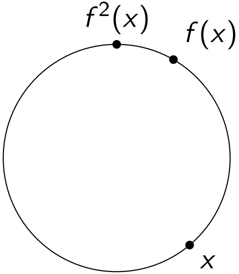
Liczba niewymierna α jest **diofantyczna typu** (c, γ), $c > 0$, $\gamma \geqslant 2$, jeśli

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{c}{q^\gamma} \quad \text{dla każdego } p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0.$$

Kąt α jest **Liouville'a** nie jest diofantyczny typu (c, γ) jakiegokolwiek wyboru $c > 0$, $\gamma \geqslant 2$.

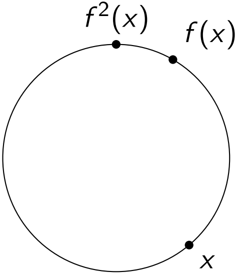
Aproksymacja w układach dynamicznych

Niech $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ będzie zachowującym orientację homeomorfizmem okręgu.



Aproksymacja w układach dynamicznych

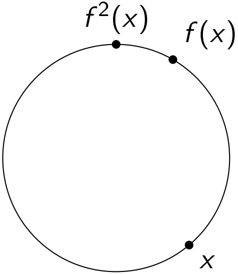
Niech $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ będzie zachowującym orientację homeomorfizmem okręgu.



Możemy zdefniować liczbę obrotu tego homeomorfizmu $\alpha(f)$.

Aproksymacja w układach dynamicznych

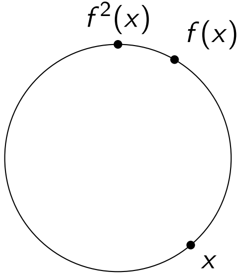
Niech $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ będzie zachowującym orientację homeomorfizmem okręgu.



Możemy zdefniować liczbę obrotu tego homeomorfizmu $\alpha(f)$.

Twierdzenie Denjoy mówi, że

Niech $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ będzie zachowującym orientację homeomorfizmem okręgu.

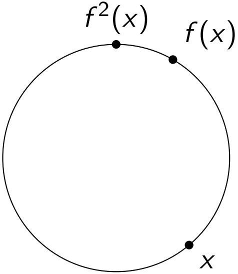


Możemy zdefniować liczbę obrotu tego homeomorfizmu $\alpha(f)$.

Twierdzenie Denjoy mówi, że jeśli f jest dyfeomorfizmem okręgu klasy C^2 bez punktów okresowych,

Aproksymacja w układach dynamicznych

Niech $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ będzie zachowującym orientację homeomorfizmem okręgu.

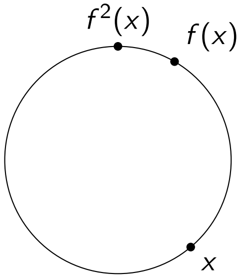


Możemy zdefniować liczbę obrotu tego homeomorfizmu $\alpha(f)$.

Twierdzenie Denjoy mówi, że jeśli f jest dyfeomorfizmem okręgu klasy C^2 bez punktów okresowych, to można tak zmienić współrzędne na okręgu, że f staje się obrotem o kąt $\alpha(f) \in (0, 1)$.

Aproksymacja w układach dynamicznych

Niech $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ będzie zachowującym orientację homeomorfizmem okręgu.



Możemy zdefniować liczbę obrotu tego homeomorfizmu $\alpha(f)$.

Twierdzenie Denjoy mówi, że jeśli f jest dyfeomorfizmem okręgu klasy C^2 bez punktów okresowych, to można tak zmienić współrzędne na okręgu, że f staje się obrotem o kąt $\alpha(f) \in (0, 1)$.

Czy ta zamiana współrzędnych jest różniczkowalna?

Czy ta zamiana współrzędnych jest różniczkowalna? Arnold pokazał (1961), że w ogólności nie jest absolutnie ciągła, nawet jeśli f jest analityczny.

Aproksymacja w układach dynamicznych

Czy ta zamiana współrzędnych jest różniczkowalna? Arnold pokazał (1961), że w ogólności nie jest absolutnie ciągła, nawet jeśli f jest analityczny. Liczba obrotu $\alpha(f)$ tego dyfeomorfizmu jest Liouville'a.

Rezultaty Arnolda (1961), Hermana (1979), Yoccoza (1984), Katznelsona-Ornsteina (1989):

Aproksymacja w układach dynamicznych

Czy ta zamiana współrzędnych jest różniczkowalna? Arnold pokazał (1961), że w ogólności nie jest absolutnie ciągła, nawet jeśli f jest analityczny. Liczba obrotu $\alpha(f)$ tego dyfeomorfizmu jest Liouville'a.

Rezultaty Arnolda (1961), Hermana (1979), Yoccoza (1984), Katznelsona-Ornsteina (1989): jeśli α jest diofantyczna, $f \in C^r$, a jego liczba obrotu to α, to zamiana współrzędnych jest $C^{r'}$, $r' < r$.

Czy ta zamiana współrzędnych jest różniczkowalna? Arnold pokazał (1961), że w ogólności nie jest absolutnie ciągła, nawet jeśli f jest analityczny. Liczba obrotu $\alpha(f)$ tego dyfeomorfizmu jest Liouville'a.

Rezultaty Arnolda (1961), Hermana (1979), Yoccoza (1984), Katznelsona-Ornsteina (1989): jeśli α jest diofantyczna, $f \in C^r$, a jego liczba obrotu to α, to zamiana współrzędnych jest $C^{r'}$, $r' < r$.

Słowa klucze: spektrum operatora Schrödingera, dysk Siegela, twierdzenie KAM i stabilność układu słonecznego.

Stwierdzenie (Derriennic-Lin, Weber, Zdunik, Borda)

Niech α będzie diofantyczna typu (c, γ). Jeśli $\varphi \in C^{\gamma-1/2}$ jest taka, że $\int \varphi(x)dx = 0$ i $\int \varphi^2(x)dx > 0$ to istnieje $\sigma > 0$ taka że

$$\frac{\varphi(X_1) + \cdots + \varphi(X_n)}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma).$$

Stwierdzenie (Derriennic-Lin, Weber, Zdunik, Borda)

Niech α będzie diofantyczna typu (c, γ). Jeśli $\varphi \in C^{\gamma-1/2}$ jest taka, że $\int \varphi(x)dx = 0$ i $\int \varphi^2(x)dx > 0$ to istnieje $\sigma > 0$ taka że

$$\frac{\varphi(X_1) + \cdots + \varphi(X_n)}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma).$$

Wniosek: jeśli α jest diofantyczna, φ gładka, to zachodzi **CTG**.

Główne twierdzenie

Twierdzenie

Jeśli α jest Liouville'a, to istnieje $\varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$, taka że ***CTG*** *nie zachodzi.*

Główne twiedzenie

Twierdzenie

*Jeśli α jest Liouville'a, to istnieje $\varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$, taka że **CTG** nie zachodzi.*

Twierdzenie

*Istnieje α (Liouville'a) i $\varphi \in C^\omega(\mathbb{S}^1)$, takie że **CTG** nie zachodzi.*

Dziękuję!