Zagadnienie najmniejszego gradientu

Wojciech Górny

Uniwersytet Wiedeński, Uniwersytet Warszawski

Warszawa, 2 czerwca 2022

Równanie p-Laplace'a

Zacznijmy od równania

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0 & \text{w } \Omega \\ u = f & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Równanie p-Laplace'a

Zacznijmy od równania

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0 & \text{w } \Omega \\ u = f & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Rozwiązań szukamy w przestrzeni Sobolewa $W^{1,p}(\Omega)$, gdzie

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow u \in L^p(\Omega) \text{ oraz słaba pochodna } \nabla u \in L^p(\Omega).$$

Równanie p-Laplace'a

Zacznijmy od równania

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0 & \text{w } \Omega \\ u = f & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Rozwiązań szukamy w przestrzeni Sobolewa $W^{1,p}(\Omega)$, gdzie

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow u \in L^p(\Omega) \text{ oraz słaba pochodna } \nabla u \in L^p(\Omega).$$

Aby je rozwiązać, rozważmy powiązane z nim zagadnienie wariacyjne

$$\min\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p, \quad u \in W^{1,p}(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = f\right\}.$$

Równanie p-Laplace'a

Zacznijmy od równania

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = 0 & \text{w } \Omega \\ u = f & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Rozwiązań szukamy w przestrzeni Sobolewa $W^{1,p}(\Omega)$, gdzie

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow u \in L^p(\Omega) \text{ oraz słaba pochodna } \nabla u \in L^p(\Omega).$$

Aby je rozwiązać, rozważmy powiązane z nim zagadnienie wariacyjne

$$\min\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p, \quad u \in W^{1,p}(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = f\right\}.$$

Stosujemy metodę bezpośrednią rachunku wariacyjnego. Podprzestrzeń

$$\left\{u \in W^{1,p}(\Omega) : \quad u|_{\partial\Omega} = f\right\}$$

jest słabo domknięta, więc każdy ciąg minimalizujący ma podciąg słabo zbieżny i warunek brzegowy jest spełniony.

Co robić dla $p = 1$?

Weźmy $f \in L^1(\partial\Omega)$ i rozważmy następujące zagadnienie minimalizacyjne:

$$\min \left\{ \int_\Omega |\nabla u|, \quad u \in W^{1,1}(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = f \right\}.$$

Co robić dla $p = 1$?

Weźmy $f \in L^1(\partial\Omega)$ i rozważmy następujące zagadnienie minimalizacyjne:

$$\min \left\{ \int_\Omega |\nabla u|, \quad u \in W^{1,1}(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = f \right\}.$$

Jest ono źle sformułowane, ponieważ podprzestrzeń

$$\left\{ u \in W^{1,1}(\Omega) : \quad u|_{\partial\Omega} = f \right\}$$

nie jest słabo* domknięta i mamy dwa problemy: ciąg minimalizujący może nie być zbieżny; oraz funkcja graniczna może nie spełniać warunku brzegowego.

Zagadnienie najmniejszego gradientu

Dla $f \in L^1(\partial\Omega)$, właściwe sformułowanie to

$$\min\left\{ \int_\Omega |Du|, \quad u \in BV(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = f \right\},$$

gdzie

$$u \in BV(\Omega) \Leftrightarrow u \in L^1(\Omega) \text{ oraz } Du \text{ jest miarą skończoną.}$$

Podprzestrzeń

$$\left\{ u \in BV(\Omega) : \quad u|_{\partial\Omega} = f \right\}$$

wciąż nie jest słabo* domknięta, ale jedynym naszym problemem jest warunek brzegowy.

Dygresja

Ogólniej, rozważmy minimalizację funkcjonału o liniowym wzroście, tzn.

$$\min \left\{ \int_\Omega g(x, Du), \quad u \in BV(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = f \right\},$$

gdzie

$$|g(x,\xi)| \leqslant M(1 + |\xi|).$$

Dygresja

Ogólniej, rozważmy minimalizację funkcjonału o liniowym wzroście, tzn.

$$\min \left\{ \int_\Omega g(x, Du), \quad u \in BV(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = f \right\},$$

gdzie

$$|g(x,\xi)| \leqslant M(1 + |\xi|).$$

Równanie Eulera-Lagrange'a dla takiego problemu to

$$-\mathrm{div}(\nabla_\xi g(x, Du)) = 0.$$

Dygresja

Ogólniej, rozważmy minimalizację funkcjonału o liniowym wzroście, tzn.

$$\min \left\{ \int_\Omega g(x, Du), \quad u \in BV(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = f \right\},$$

gdzie

$$|g(x, \xi)| \leqslant M(1 + |\xi|).$$

Równanie Eulera-Lagrange'a dla takiego problemu to

$$-\mathrm{div}(\nabla_\xi g(x, Du)) = 0.$$

Również w tym przypadku naturalną przestrzenią dla rozwiązań jest $BV(\Omega)$ i wciąż naszym głównym problemem jest warunek brzegowy. Klasyczny przykład to $g(x, \xi) = \sqrt{1 + |\xi|^2}$ (funkcjonał powierzchni).

Zagadnienie najmniejszego gradientu

Równanie Eulera-Lagrange'a odpowiadające temu problemowi to (formalnie) równanie 1-Laplace'a

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(\dfrac{Du}{|Du|}\right) = 0 & \text{w } \Omega \\ u = f & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zagadnienie najmniejszego gradientu

Równanie Eulera-Lagrange'a odpowiadające temu problemowi to (formalnie) równanie 1-Laplace'a

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(\frac{Du}{|Du|}\right) = 0 & \text{w } \Omega \\ u = f & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Jeśli u jest rozwiązaniem, to $\chi_{\{u>t\}}$ także (dla innego f).

Zagadnienie najmniejszego gradientu

Równanie Eulera-Lagrange'a odpowiadające temu problemowi to (formalnie) równanie 1-Laplace'a

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(\frac{Du}{|Du|}\right) = 0 & \text{w } \Omega \\ u = f & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Jeśli u jest rozwiązaniem, to $\chi_{\{u>t\}}$ także (dla innego f).

Dla $u = \chi_E$, ∂E gładki, lewa strona to średnia krzywizna ∂E. W 2D oznacza to, że "poziomice są odcinkami".

Zagadnienie najmniejszego gradientu

Równanie Eulera-Lagrange'a odpowiadające temu problemowi to (formalnie) równanie 1-Laplace'a

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(\frac{Du}{|Du|}\right) = 0 & \text{w } \Omega \\ u = f & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Jeśli u jest rozwiązaniem, to $\chi_{\{u>t\}}$ także (dla innego f).

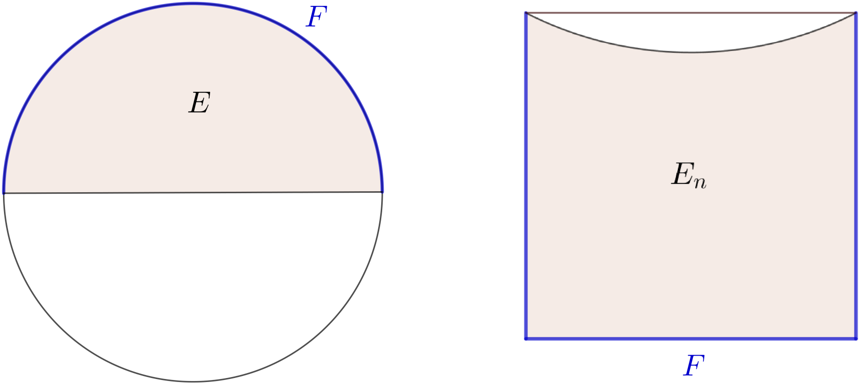
Dla $u = \chi_E$, ∂E gładki, lewa strona to średnia krzywizna ∂E. W 2D oznacza to, że "poziomice są odcinkami".

Równanie 1-Laplace'a jest związane z badaniem powierzchni minimalnych, ale także z przetwarzaniem obrazów oraz optymalnym transportem.

Wpływ kształtu dziedziny na zagadnienie

$$\min \left\{ \int_\Omega |Du|, \quad u \in BV(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = f \right\}$$

Jeśli $u = \chi_E$ oraz $f = \chi_F$, to zagadnienie ma prosty sens geometryczny:



Istnienie i właściwości rozwiązań bardzo zależą od kształtu dziedziny!

Klasyczne wyniki

$$\min \left\{ \int_\Omega |Du|, \quad u \in BV(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = f \right\}$$

Dowody polegają na bezpośrednim oszacowaniu wartości u przy brzegu za pomocą metod geometrycznej teorii miary.

Klasyczne wyniki

$$\min \left\{ \int_\Omega |Du|, \quad u \in BV(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = f \right\}$$

Dowody polegają na bezpośrednim oszacowaniu wartości u przy brzegu za pomocą metod geometrycznej teorii miary.

W [Sternberg et al. 1992] pokazano, że jeśli Ω jest ściśle wypukły, to:

- $f \in C(\partial\Omega) \Rightarrow$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie;

Klasyczne wyniki

$$\min\left\{\int_\Omega |Du|, \quad u \in BV(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = f\right\}$$

Dowody polegają na bezpośrednim oszacowaniu wartości u przy brzegu za pomocą metod geometrycznej teorii miary.

W [Sternberg et al. 1992] pokazano, że jeśli Ω jest ściśle wypukły, to:

- $f \in C(\partial\Omega) \Rightarrow$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie;
- $f \in C(\partial\Omega) \Rightarrow u \in C(\overline{\Omega})$;

Klasyczne wyniki

$$\min \left\{ \int_\Omega |Du|, \quad u \in BV(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = f \right\}$$

Dowody polegają na bezpośrednim oszacowaniu wartości u przy brzegu za pomocą metod geometrycznej teorii miary.

W [Sternberg et al. 1992] pokazano, że jeśli Ω jest ściśle wypukły, to:

- $f \in C(\partial\Omega) \Rightarrow$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie;
- $f \in C(\partial\Omega) \Rightarrow u \in C(\overline{\Omega})$;

Jeśli Ω jest jednostajnie wypukły, to

- $f \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega) \Rightarrow u \in C^{0,\alpha/2}(\overline{\Omega})$.

Współczesne kierunki rozwoju badań

Anizotropowe zagadnienie najmniejszego gradientu:

$$\min \left\{ \int_\Omega \phi(x, Du), \quad u \in BV(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = f \right\}.$$

Jakie są minimalne założenia na ϕ dla istnienia, jednoznaczności i regularności rozwiązań? Jak są powiązane z kształtem Ω?

Współczesne kierunki rozwoju badań

Anizotropowe zagadnienie najmniejszego gradientu:

$$\min \left\{ \int_\Omega \phi(x, Du), \quad u \in BV(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = f \right\}.$$

Jakie są minimalne założenia na ϕ dla istnienia, jednoznaczności i regularności rozwiązań? Jak są powiązane z kształtem Ω?

Nieciągłe dane brzegowe: istnienie i struktura rozwiązań.

Współczesne kierunki rozwoju badań

Anizotropowe zagadnienie najmniejszego gradientu:

$$\min \left\{ \int_\Omega \phi(x, Du), \quad u \in BV(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = f \right\}.$$

Jakie są minimalne założenia na ϕ dla istnienia, jednoznaczności i regularności rozwiązań? Jak są powiązane z kształtem Ω?

Nieciągłe dane brzegowe: istnienie i struktura rozwiązań.

Regularność rozwiązań: $C^{0,\alpha}$, L^p, $W^{1,p}$.

Współczesne kierunki rozwoju badań

Anizotropowe zagadnienie najmniejszego gradientu:

$$\min \left\{ \int_\Omega \phi(x, Du), \quad u \in BV(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = f \right\}.$$

Jakie są minimalne założenia na ϕ dla istnienia, jednoznaczności i regularności rozwiązań? Jak są powiązane z kształtem Ω?

Nieciągłe dane brzegowe: istnienie i struktura rozwiązań.

Regularność rozwiązań: $C^{0,\alpha}$, L^p, $W^{1,p}$.

Nietypowe kształty dziedziny: wielokąty, pierścienie, zbiory nieograniczone.

Współczesne kierunki rozwoju badań

Anizotropowe zagadnienie najmniejszego gradientu:

$$\min \left\{ \int_\Omega \phi(x, Du), \quad u \in BV(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = f \right\}.$$

Jakie są minimalne założenia na ϕ dla istnienia, jednoznaczności i regularności rozwiązań? Jak są powiązane z kształtem Ω?

Nieciągłe dane brzegowe: istnienie i struktura rozwiązań.

Regularność rozwiązań: $C^{0,\alpha}$, L^p, $W^{1,p}$.

Nietypowe kształty dziedziny: wielokąty, pierścienie, zbiory nieograniczone.

Przestrzenie metryczne: modelowe zagadnienie o liniowym wzroście.

Współczesne kierunki rozwoju badań

Anizotropowe zagadnienie najmniejszego gradientu:

$$\min \left\{ \int_\Omega \phi(x, Du), \quad u \in BV(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = f \right\}.$$

Jakie są minimalne założenia na ϕ dla istnienia, jednoznaczności i regularności rozwiązań? Jak są powiązane z kształtem Ω?

Nieciągłe dane brzegowe: istnienie i struktura rozwiązań.

Regularność rozwiązań: $C^{0,\alpha}$, L^p, $W^{1,p}$.

Nietypowe kształty dziedziny: wielokąty, pierścienie, zbiory nieograniczone.

Przestrzenie metryczne: modelowe zagadnienie o liniowym wzroście.

Nieciągłe dane brzegowe

Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ jest ściśle wypukły. Wtedy zagadnienie

$$\min \left\{ \int_\Omega |Du|, \quad u \in BV(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = f \right\}$$

ma rozwiązanie dla ciągłych danych brzegowych.

Nieciągłe dane brzegowe

Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ jest ściśle wypukły. Wtedy zagadnienie

$$\min \left\{ \int_\Omega |Du|, \quad u \in BV(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = f \right\}$$

ma rozwiązanie dla ciągłych danych brzegowych.

Pomysł: jeśli f jest nieciągła, przybliżamy ją za pomocą $f_n \in C(\partial\Omega)$ w taki sposób, aby przybliżone rozwiązania u_n zbiegały do funkcji u, która ma właściwe zachowanie na brzegu.

Nieciągłe dane brzegowe

Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ jest ściśle wypukły. Wtedy zagadnienie

$$\min \left\{ \int_\Omega |Du|, \quad u \in BV(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = f \right\}$$

ma rozwiązanie dla ciągłych danych brzegowych.

Pomysł: jeśli f jest nieciągła, przybliżamy ją za pomocą $f_n \in C(\partial\Omega)$ w taki sposób, aby przybliżone rozwiązania u_n zbiegały do funkcji u, która ma właściwe zachowanie na brzegu.

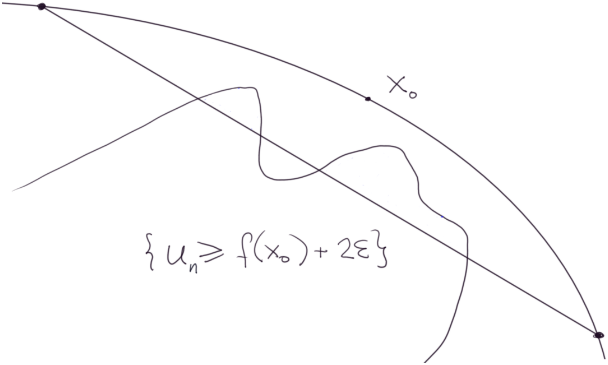
(Nie jest to zawsze możliwe; przykład to funkcja charakterystyczna zbioru Cantora o dodatniej mierze.)

Nieciągłe dane brzegowe

Konstruujemy f_n w taki sposób, aby dla każdego punktu ciągłości x_0 funkcji f

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant f_n(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$$

w pewnym (zależnym od n) otoczeniu x_0 w $\partial\Omega$.

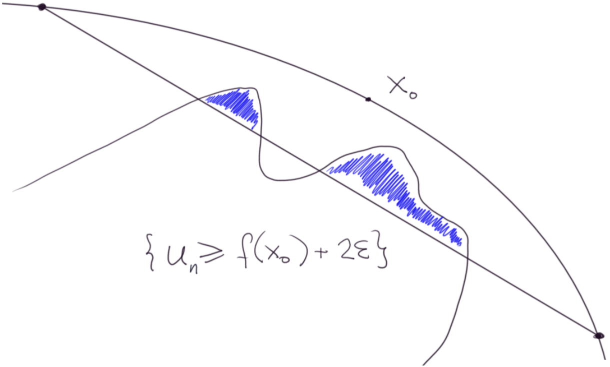


Nieciągłe dane brzegowe

Konstruujemy f_n w taki sposób, aby dla każdego punktu ciągłości x_0 funkcji f

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant f_n(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$$

w pewnym (zależnym od n) otoczeniu x_0 w $\partial\Omega$.

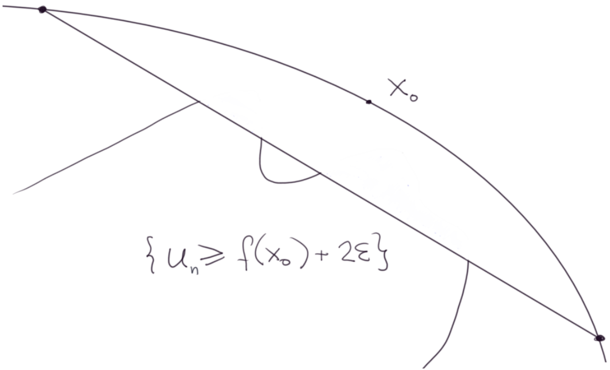


Nieciągłe dane brzegowe

Konstruujemy f_n w taki sposób, aby dla każdego punktu ciągłości x_0 funkcji f

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant f_n(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$$

w pewnym (zależnym od n) otoczeniu x_0 w $\partial\Omega$.



Nieciągłe dane brzegowe

Otrzymaliśmy, że dla każdego punktu ciągłości x_0 funkcji f

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant u_n(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$$

w pewnym (zależnym od n) otoczeniu x_0 w Ω.

Nieciągłe dane brzegowe

Otrzymaliśmy, że dla każdego punktu ciągłości x_0 funkcji f

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant u_n(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$$

w pewnym (zależnym od n) otoczeniu x_0 w Ω.

Twierdzenie 1

Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ jest ściśle wypukły oraz $f \in L^1(\partial\Omega)$ jest ciągła $\mathcal{H}^{N-1}$-p.w. Wówczas istnieje rozwiązanie $u \in BV(\Omega)$ oraz

$$\lim_{r \to 0} \operatorname{esssup}_{y \in B(x_0,r)\cap\Omega} |u(y) - f(x_0)| = 0$$

dla każdego punktu ciągłości f.

Nieciągłe dane brzegowe

Otrzymaliśmy, że dla każdego punktu ciągłości x_0 funkcji f

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant u_n(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$$

w pewnym (zależnym od n) otoczeniu x_0 w Ω.

Twierdzenie 1

Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ jest ściśle wypukły oraz $f \in L^1(\partial\Omega)$ jest ciągła $\mathcal{H}^{N-1}$-p.w. Wówczas istnieje rozwiązanie $u \in BV(\Omega)$ oraz

$$\lim_{r \to 0} \operatorname{esssup}_{y \in B(x_0,r) \cap \Omega} |u(y) - f(x_0)| = 0$$

dla każdego punktu ciągłości f.

Jeśli X to przestrzeń możliwych danych brzegowych, to w 2D mamy

$$C(\partial\Omega) \cup BV(\partial\Omega) \subsetneq X \subsetneq L^1(\partial\Omega).$$

Nieciągłe dane brzegowe

Uwagi:

Nieciągłe dane brzegowe

Uwagi:

- Mamy bezpośrednie założenie na Ω;

Nieciągłe dane brzegowe

Uwagi:

- Mamy bezpośrednie założenie na Ω;
- Dowód uogólnia się na przypadek anizotropowy $\phi(x, Du)$ (przy dostatecznie silnych założeniach na ϕ);

Nieciągłe dane brzegowe

Uwagi:

- Mamy bezpośrednie założenie na Ω;
- Dowód uogólnia się na przypadek anizotropowy $\phi(x, Du)$ (przy dostatecznie silnych założeniach na ϕ);
- W dowodzie mamy "bezpośrednią" konstrukcję rozwiązania;

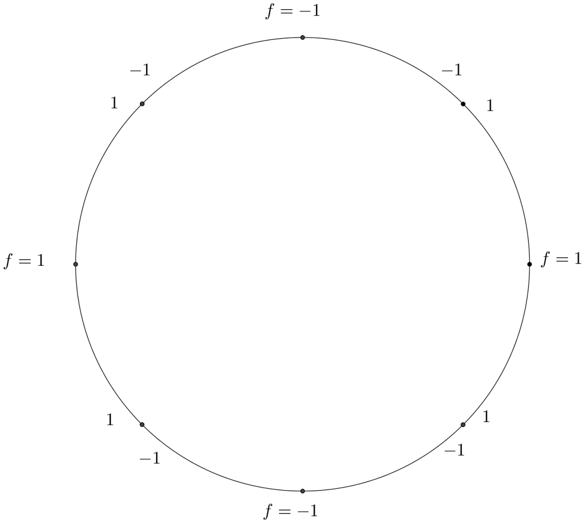
Nieciągłe dane brzegowe

Uwagi:

- Mamy bezpośrednie założenie na Ω;
- Dowód uogólnia się na przypadek anizotropowy $\phi(x, Du)$ (przy dostatecznie silnych założeniach na ϕ);
- W dowodzie mamy "bezpośrednią" konstrukcję rozwiązania;
- Nie da się w ten sposób uzyskać jednoznaczności ani regularności.

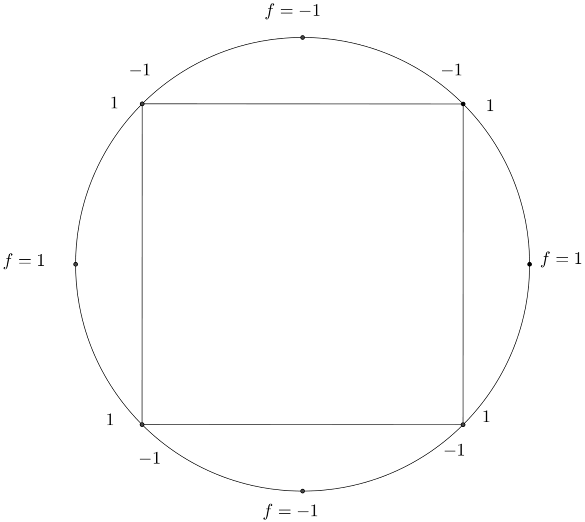
(Nie)jednoznaczność rozwiązań

Dla ciągłych danych brzegowych mamy jednoznaczne rozwiązanie.
Rozważmy następujący przykład [Marcellini 1983]:



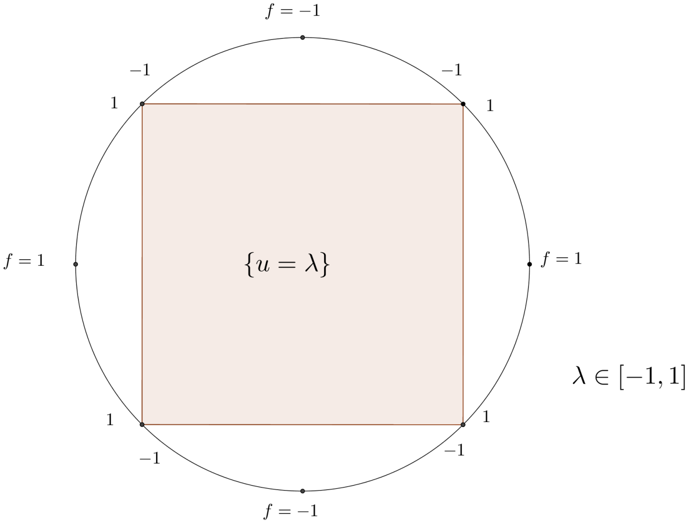
(Nie)jednoznaczność rozwiązań

Dla ciągłych danych brzegowych mamy jednoznaczne rozwiązanie.
Rozważmy następujący przykład [Marcellini 1983]:



(Nie)jednoznaczność rozwiązań

Dla ciągłych danych brzegowych mamy jednoznaczne rozwiązanie.
Rozważmy następujący przykład [Marcellini 1983]:



(Nie)jednoznaczność rozwiązań

Okazuje się, że jeśli rozwiązania nie są jednoznaczne, to niejednoznaczność jest "tego samego typu" co w przykładzie Marcelliniego.

(Nie)jednoznaczność rozwiązań

Okazuje się, że jeśli rozwiązania nie są jednoznaczne, to niejednoznaczność jest "tego samego typu" co w przykładzie Marcelliniego.

Twierdzenie 2

Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *jest wypukły. Niech* $u, v \in BV(\Omega)$ *to rozwiązania dla danych brzegowych* $f \in L^1(\partial\Omega)$*. Wówczas* $u = v$ *na* $\Omega \backslash (\mathcal{C} \cup \mathcal{N})$*, gdzie* u *i* v *są lokalnie stałe na* $\mathcal{C}$ *oraz* $\mathcal{N}$ *ma wymiar Hausdorffa co najwyżej* 1*.*

(Nie)jednoznaczność rozwiązań

Okazuje się, że jeśli rozwiązania nie są jednoznaczne, to niejednoznaczność jest "tego samego typu" co w przykładzie Marcelliniego.

Twierdzenie 2

Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ jest wypukły. Niech $u, v \in BV(\Omega)$ to rozwiązania dla danych brzegowych $f \in L^1(\partial\Omega)$. Wówczas $u = v$ na $\Omega \backslash (\mathcal{C} \cup \mathcal{N})$, gdzie u i v są lokalnie stałe na $\mathcal{C}$ oraz $\mathcal{N}$ ma wymiar Hausdorffa co najwyżej 1.

Szkic dowodu: skoro poziomice rozwiązań są odcinkami, to

$$x \in \partial\{u \geqslant t\} \cap \partial\{v \geqslant s\} \Rightarrow u(x) = t = s = v(x)$$

poza następującym zbiorem wymiaru Hausdorffa 1:

$$\mathcal{N} = J_u \cup J_v \cup B_u \cup B_v,$$

gdzie J_u i J_v to zbiory skoków odpowiednio u i v, zaś B_u i B_v to brzegi poziomic u i v o dodatniej mierze, tzn.

$$B_u = \bigcup_{\{t \colon \mathcal{L}^2(\{u=t\})>0\}} (\partial\{u \geqslant t\} \cup \partial\{u \leqslant t\}).$$

(Nie)jednoznaczność rozwiązań

Uwagi:

(Nie)jednoznaczność rozwiązań

Uwagi:

- Dowód, z pewnymi modyfikacjami, działa dla $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, gdzie $2 \leqslant N \leqslant 7$;

(Nie)jednoznaczność rozwiązań

Uwagi:

- Dowód, z pewnymi modyfikacjami, działa dla $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, gdzie $2 \leqslant N \leqslant 7$;
- Dla $N = 1$ rozwiązaniem jest każda funkcja monotoniczna;

(Nie)jednoznaczność rozwiązań

Uwagi:

• Dowód, z pewnymi modyfikacjami, działa dla $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, gdzie $2 \leqslant N \leqslant 7$;

• Dla $N = 1$ rozwiązaniem jest każda funkcja monotoniczna;

• Dowód bazuje na zasadzie maksimum dla minimów funkcjonału powierzchni. Dlatego nie daje się uogólnić na przypadek anizotropowy poza prostymi przypadkami;

(Nie)jednoznaczność rozwiązań

Uwagi:

• Dowód, z pewnymi modyfikacjami, działa dla $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, gdzie $2 \leqslant N \leqslant 7$;

• Dla $N = 1$ rozwiązaniem jest każda funkcja monotoniczna;

• Dowód bazuje na zasadzie maksimum dla minimów funkcjonału powierzchni. Dlatego nie daje się uogólnić na przypadek anizotropowy poza prostymi przypadkami;

• Ograniczenie $N \leqslant 7$ wynika z tego, że w wymiarach 8 i wyżej minima funkcjonału powierzchni mogą mieć osobliwości.

Dziękuję za uwagę!