Operatory Dunkla–Schrödingera z potencjałem z rewersyjnej klasy Höldera

Agnieszka Hejna

Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

Mini-Konferencja PTM, 2.06.2022

Plan referatu

1. Motywacje

2. Klasyczne operatory Schrödingera z potencjałem z rewersyjnej klasy Höldera

3. Nierówność Feffermana–Phonga w kontekście dunklowskim

4. Zastosowania
   - Przestrzenie Hardy'ego
   - Wartości własne

Klasyczny oscylator harmoniczny

$$L = -\Delta + \|\mathbf{x}\|^2, \ \ \Delta = \sum_{j=1}^{N} \partial_j^2, \ \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N.$$

Klasyczny oscylator harmoniczny

$$L = -\Delta + \|\mathbf{x}\|^2, \ \ \Delta = \sum_{j=1}^{N} \partial_j^2, \ \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N.$$

Z punktu widzenia **analizy harmonicznej** można badań

powiązane transformaty Riesza

$$R_j = \partial_j L^{-1/2}, \ \ 1 \leq j \leq N,$$

będące wariantami klasycznych transformat Riesza $\mathscr{R}_j = \partial_j (-\Delta)^{-1/2}$.

Uniwersytet Wrocławski

Dunklowski oscylator harmoniczny

$$-\Delta_k + \|\mathbf{x}\|^2, \;\; \Delta_k = \sum_{j=1}^{N} T_{e_j}^2.$$

Dunklowski oscylator harmoniczny

Dunklowski oscylator harmoniczny

$$-\Delta_k + \|\mathbf{x}\|^2, \quad \Delta_k = \sum_{j=1}^{N} T_{e_j}^2.$$

M. Rösler, *Generalized Hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators*, Comm. Math. Phys. 192 (1998), no. 3, 519–542.

Wyniki dotyczące dunklowskiego oscylatora harmonicznego

Teoria transformat Riesza.

A. Nowak, K. Stempak, *Riesz transforms for the Dunkl harmonic oscillator*, Math. Z. 262 (2009), no. 3, 539–556.

Wyniki dotyczące dunklowskiego oscylatora harmonicznego

Teoria transformat Riesza.

A. Nowak, K. Stempak, *Riesz transforms for the Dunkl harmonic oscillator*, Math. Z. 262 (2009), no. 3, 539–556.

Transformaty Riesza są ograniczone na $L^p(dw)$, $1 < p < \infty$.

B. Amri, *Riesz transforms for Dunkl Hermite expansions*, J. Math. Anal. Appl. 423 (2015), no. 1, 646–659.

Wyniki dotyczące dunklowskiego oscylatora harmonicznego

Teoria transformat Riesza.

A. Nowak, K. Stempak, *Riesz transforms for the Dunkl harmonic oscillator*, Math. Z. 262 (2009), no. 3, 539–556.

Transformaty Riesza są ograniczone na $L^p(dw)$, $1 < p < \infty$.

B. Amri, *Riesz transforms for Dunkl Hermite expansions*, J. Math. Anal. Appl. 423 (2015), no. 1, 646–659.

Dalsze wyniki.

P. Boggarapu, S. Thangavelu, *Mixed norm estimates for the Riesz transforms associated to Dunkl harmonic oscillators*, Ann. Math. Blaise Pascal 22 (2015), no. 1, 89–120.

W. Nefzi, *Higher order Riesz transforms for the Dunkl harmonic oscillator*, Taiwanese J. Math. 19 (2015), no. 2, 567–583.

Możliwe kierunki dalszych badań

Uniwersytet Wrocławski

1. Zastąpić $\|\mathbf{x}\|^2$ przez potencjał $V(\mathbf{x})$, który w pewnym sensie „zachowuje własności” $\|\mathbf{x}\|^2$.

$$-\Delta_k + \|\mathbf{x}\|^2 \longrightarrow -\Delta_k + V(\mathbf{x}).$$

Możliwe kierunki dalszych badań

1. Zastąpić $\|\mathbf{x}\|^2$ przez potencjał $V(\mathbf{x})$, który w pewnym sensie „zachowuje własności" $\|\mathbf{x}\|^2$.

$$-\Delta_k + \|\mathbf{x}\|^2 \longrightarrow -\Delta_k + V(\mathbf{x}).$$

2. Zbadać własności:
   1. ograniczoność na L^p różnych wariantów transformat Riesza,

Możliwe kierunki dalszych badań

Uniwersytet Wrocławski

1. Zastąpić $\|\mathbf{x}\|^2$ przez potencjał $V(\mathbf{x})$, który w pewnym sensie „zachowuje własności” $\|\mathbf{x}\|^2$.

$$-\Delta_k + \|\mathbf{x}\|^2 \longrightarrow -\Delta_k + V(\mathbf{x}).$$

2. Zbadać własności:
   1. ograniczoność na L^p różnych wariantów transformat Riesza,
   2. endpoint $p = 1$

Możliwe kierunki dalszych badań

Uniwersytet Wrocławski

1. Zastąpić $\|\mathbf{x}\|^2$ przez potencjał $V(\mathbf{x})$, który w pewnym sensie „zachowuje własności" $\|\mathbf{x}\|^2$.

$$-\Delta_k + \|\mathbf{x}\|^2 \longrightarrow -\Delta_k + V(\mathbf{x}).$$

2. Zbadać własności:
    1. ograniczoność na L^p różnych wariantów transformat Riesza,
    2. endpoint $p = 1$ - powiązane przestrzenie Hardy'ego,

Możliwe kierunki dalszych badań

1. Zastąpić $\|\mathbf{x}\|^2$ przez potencjał $V(\mathbf{x})$, który w pewnym sensie „zachowuje własności” $\|\mathbf{x}\|^2$.

$$-\Delta_k + \|\mathbf{x}\|^2 \longrightarrow -\Delta_k + V(\mathbf{x}).$$

2. Zbadać własności:
   1. ograniczoność na L^p różnych wariantów transformat Riesza,
   2. endpoint $p = 1$ - powiązane przestrzenie Hardy'ego,
   3. własności spektralne (np. rozkład wartości własnych).

1. Motywacje

2. Klasyczne operatory Schrödingera z potencjałem z rewersyjnej klasy Höldera

3. Nierówność Feffermana–Phonga w kontekście dunklowskim

4. Zastosowania
- Przestrzenie Hardy'ego
- Wartości własne

Operatory Schrödingera

Na $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ rozważamy operator Schrödingera

$$\mathscr{L} = -\Delta + V(\mathbf{x}) = -\sum_{j=1}^{N} \partial_j^2 + V(\mathbf{x})$$

gdzie $V \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N, d\mathbf{x})$ jest nieujemnym potencjałem.

Możliwe założenia na V

1. $V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$,

Możliwe założenia na V

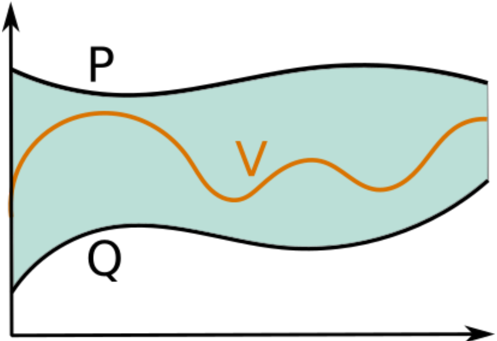
1. $V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$,
2. $V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{2m}$,

Możliwe założenia na V

1. $V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$,
2. $V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{2m}$,
3. nieujemny wielomian (w pracy Ch. Feffermana),

Możliwe założenia na V

1. $V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$,
2. $V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{2m}$,
3. nieujemny wielomian (w pracy Ch. Feffermana),
4. funkcja o wzroście wielomianowym (np. leżąca pomiędzy wykresami dwóch wielomianów)



Uniwersytet Wrocławski

Rewersyjna klasa Höldera

Niech $q > 1$. Mówimy, że V należy do rewersyjnej klasy Höldera $\mathrm{RH}^q(d\mathbf{x})$ jeśli istnieje stała $C > 0$ taka, że nierówność

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B V(\mathbf{x})^q\,d\mathbf{x}\right)^{1/q} \leq C\frac{1}{|B|}\int_B V(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

zachodzi dla każdej kuli B w $\mathbb{R}^N$.

Rewersyjna klasa Höldera

Niech $q > 1$. Mówimy, że V należy do rewersyjnej klasy Höldera $\mathrm{RH}^q(d\mathbf{x})$ jeśli istnieje stała $C > 0$ taka, że nierówność

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B V(\mathbf{x})^q\,d\mathbf{x}\right)^{1/q} \leq C\frac{1}{|B|}\int_B V(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

zachodzi dla każdej kuli B w $\mathbb{R}^N$.

Z. Shen, *L^p estimates for Schrödinger operators with certain potentials,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 45 (1995), no. 2, 513–546.

Rewersyjna klasa Höldera

Niech $q > 1$. Mówimy, że V należy do rewersyjnej klasy Höldera $\mathrm{RH}^q(d\mathbf{x})$ jeśli istnieje stała $C > 0$ taka, że nierówność

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B V(\mathbf{x})^q\,d\mathbf{x}\right)^{1/q} \leq C\frac{1}{|B|}\int_B V(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

zachodzi dla każdej kuli B w $\mathbb{R}^N$.

Z. Shen, *L^p estimates for Schrödinger operators with certain potentials,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 45 (1995), no. 2, 513–546.

Przykład

Każdy nieujemny wielomian należy do $\mathrm{RH}^q(d\mathbf{x})$ ponieważ każde dwie normy na przestrzeni wielomianów stopnia $\leq d$ są równoważne.

Funkcja pomocnicza $\mathbf{m}$

$$\frac{1}{\mathbf{m}(\mathbf{x})} = \sup\left\{ r > 0 : \frac{1}{r^{N-2}} \int_{B(\mathbf{x},r)} V(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \leq 1 \right\}.$$

Funkcja pomocnicza $\mathbf{m}$

$$\frac{1}{\mathbf{m}(\mathbf{x})} = \sup\left\{ r > 0 : \frac{1}{r^{N-2}} \int_{B(\mathbf{x},r)} V(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \le 1 \right\}.$$

- Ch. Fefferman, *The uncertainty principle*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 9 (1983), no. 2, 129–206.
- Z. Shen, *On the Neumann problem for Schrödinger operators in Lipschitz domains*, Indiana Univ. Math. J. 43 (1994), no. 1, 143–176.
- Z. Shen, *L^p estimates for Schrödinger operators with certain potentials*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 45 (1995), no. 2, 513–546.

Funkcja pomocnicza $\mathbf{m}$

Uniwersytet Wrocławski

$$\frac{1}{\mathbf{m}(\mathbf{x})} = \sup\left\{ r > 0 : \frac{1}{r^{N-2}} \int_{B(\mathbf{x},r)} V(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \le 1 \right\}.$$

- Ch. Fefferman, *The uncertainty principle*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 9 (1983), no. 2, 129–206.
- Z. Shen, *On the Neumann problem for Schrödinger operators in Lipschitz domains*, Indiana Univ. Math. J. 43 (1994), no. 1, 143–176.
- Z. Shen, *L^p estimates for Schrödinger operators with certain potentials*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 45 (1995), no. 2, 513–546.

Przykład

Jeśli $V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$, to $\mathbf{m}(\mathbf{x}) \sim (1 + \|\mathbf{x}\|)^{-1}$.

Uniwersytet Wrocławski

Nierówność Feffermana–Phonga

Załóżmy, że V należy do rewersyjnej klasy Höldera $\mathrm{RH}^q(d\mathbf{x})$, gdzie $q > \frac{N}{2}$. Istnieje stała $C > 0$ taka, że dla wszystkich $f \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ mamy

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{m}(\mathbf{x})^2 |f(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \leq C \left(\sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_j f(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^N} V(\mathbf{x}) |f(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \right).$$

Zastosowania

Uniwersytet Wrocławski

1. Badanie wartości własnych $\mathscr{L}$ - wzór pudełkowy (Ch. Fefferman).

1. Badanie wartości własnych $\mathscr{L}$ - wzór pudełkowy (Ch. Fefferman).
2. Szacowanie rozwiązania fundamentalnego $\mathscr{L}$ i badanie ograniczoności na L^p operatorów $\nabla\mathscr{L}^{i\gamma}$, $\nabla\mathscr{L}^{-1/2}$, $\nabla\mathscr{L}^{-1}\nabla$, $\nabla^2\mathscr{L}^{-1}$ (Z. Shen).

Zastosowania

1. Badanie wartości własnych $\mathscr{L}$ - wzór pudełkowy (Ch. Fefferman).
2. Szacowanie rozwiązania fundamentalnego $\mathscr{L}$ i badanie ograniczoności na L^p operatorów $\nabla\mathscr{L}^{i\gamma}, \nabla\mathscr{L}^{-1/2}, \nabla\mathscr{L}^{-1}\nabla, \nabla^2\mathscr{L}^{-1}$ (Z. Shen).
3. Badanie zachowania się jądra całkowego $k_t(x,y)$ półgrupy Schrödingera $e^{-t\mathscr{L}}$.
4. Przestrzenie Hardy'ego związane z $\mathscr{L}$ i lokalny charakter atomów (J. Dziubański, J. Zienkiewicz).

1. Motywacje

2. Klasyczne operatory Schrödingera z potencjałem z rewersyjnej klasy Höldera

3. Nierówność Feffermana–Phonga w kontekście dunklowskim

4. Zastosowania
- Przestrzenie Hardy'ego
- Wartości własne

- Motywacja: badanie funkcji specjalnych na riemannowskich przestrzeniach symetrycznych.

- Motywacja: badanie funkcji specjalnych na riemannowskich przestrzeniach symetrycznych.
- **Operatory Dunkla** zostały wprowadzone przez Ch. Dunkla w 1989:

- Motywacja: badanie funkcji specjalnych na riemannowskich przestrzeniach symetrycznych.
- **Operatory Dunkla** zostały wprowadzone przez Ch. Dunkla w 1989:

Operatory Dunkla T_j=pochodna+operator różnicowy

- użyteczne narzędzie w badaniu funkcji specjalnych;
- powiązania z różnymi dziedzinami matematyki, np. teoria prawdopodobieństwa, fizyka matematyczna, algebra;

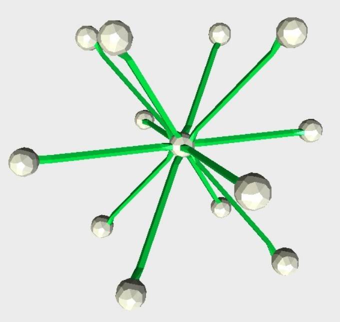
- Motywacja: badanie funkcji specjalnych na riemannowskich przestrzeniach symetrycznych.
- **Operatory Dunkla** zostały wprowadzone przez Ch. Dunkla w 1989:

Operatory Dunkla T_j=pochodna+operator różnicowy

- użyteczne narzędzie w badaniu funkcji specjalnych;
- powiązania z różnymi dziedzinami matematyki, np. teoria prawdopodobieństwa, fizyka matematyczna, algebra;
- **pozwoliły na zbudowanie analizy matematycznej i teorii transformat całkowych związanych z grupami symetrii.**

Notacja

- Pracujemy w $\mathbb{R}^N$, system pierwiastków R i funkcja krotności k są ustalone,
- powiązana miara z wagą $dw(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, gdzie $w(\mathbf{x}) = \Pi_{\alpha \in R} |\langle \mathbf{x}, \alpha \rangle|^{k(\alpha)}$,
- $w(B(\mathbf{x}, r))$ - miara kuli euklidesowej o środku w $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ i promieniu $r > 0$.



Operatory Dunkla

Dla danego systemu pierwiastków R i funkcji krotności $k(\alpha)$ *operator Dunkla* T_ξ jest następującym k-zaburzeniem pochodnej kierunkowej ∂_ξ przez operator różnicowy:

$$T_\xi f(x) = \partial_\xi f(x)$$

Uniwersytet Wrocławski

Operatory Dunkla

Dla danego systemu pierwiastków R i funkcji krotności $k(\alpha)$ *operator Dunkla* T_ξ jest następującym k-zaburzeniem pochodnej kierunkowej ∂_ξ przez operator różnicowy:

$$T_\xi f(x) = \partial_\xi f(x) + \sum_{\alpha \in R} \frac{k(\alpha)}{2} \langle \alpha, \xi \rangle \frac{f(x) - f(\sigma_\alpha x)}{\langle \alpha, x \rangle}.$$

Uniwersytet Wrocławski

Operator Dunkla–Schrödingera

Będziemy badać

$$L = -\Delta_k + V(\mathbf{x}),$$

gdzie Δ_k to dunklowski laplasjan.

Rewersyjna klasa Höldera i funkcja m

Rewersyjna klasa Höldera

Niech $q > \max(1, \frac{\mathbf{N}}{2})$. $V \geq 0$ należy do rewersyjnej klasy Höldera $\mathrm{RH}^q(dw)$ jeśli istnieje $C_{\mathrm{RH}} > 0$ taka, że

$$\left(\frac{1}{w(B)}\int_B V(\mathbf{x})^q \, dw(\mathbf{x})\right)^{1/q} \leq C_{\mathrm{RH}} \frac{1}{w(B)}\int_B V(\mathbf{x}) \, dw(\mathbf{x}) \text{ dla każdej kuli } B.$$

Uniwersytet Wrocławski

Rewersyjna klasa Höldera

Niech $q > \max(1, \frac{\mathbf{N}}{2})$. $V \geq 0$ należy do rewersyjnej klasy Höldera $\mathrm{RH}^q(dw)$ jeśli istnieje $C_{\mathrm{RH}} > 0$ taka, że

$$\left(\frac{1}{w(B)}\int_B V(\mathbf{x})^q\, dw(\mathbf{x})\right)^{1/q} \leq C_{\mathrm{RH}}\frac{1}{w(B)}\int_B V(\mathbf{x})\, dw(\mathbf{x}) \text{ dla każdej kuli } B.$$

Pomocnicza funkcja $m(\mathbf{x})$

Dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ definiujemy

$$\frac{1}{m(\mathbf{x})} = \sup\left\{r > 0 : \frac{r^2}{w(B(\mathbf{x}, r))}\int_{B(\mathbf{x},r)} V(\mathbf{y})\, dw(\mathbf{y}) \leq 1\right\}.$$

Nierówność Feffermana–Phonga w kontekście dunklowskim

Nierówność typu Feffermana–Phonga, A.H.

Załóżmy, że V należy do rewersyjnej klasy Höldera $\mathrm{RH}^q(dw)$, gdzie $q > \frac{\mathbf{N}}{2}$. Istnieje stała $C > 0$ taka, że dla wszystkich $f \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ mamy

$$\int_{\mathbb{R}^N} m(\mathbf{x})^2 |f(\mathbf{x})|^2 \, dw(\mathbf{x}) \leq C \left(\sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} |T_j f(\mathbf{x})|^2 \, dw(\mathbf{x}) + \int_{\mathbb{R}^N} V(\mathbf{x}) |f(\mathbf{x})|^2 \, dw(\mathbf{x}) \right).$$

1. Motywacje

2. Klasyczne operatory Schrödingera z potencjałem z rewersyjnej klasy Höldera

3. Nierówność Feffermana–Phonga w kontekście dunklowskim

4. Zastosowania
- Przestrzenie Hardy'ego
- Wartości własne

Przestrzenie Hardy'ego związane z operatorem Dunkla–Schrödingera

Zastosowanie jest inspirowane

J. Dziubański, J. Zienkiewicz, *Hardy space H^1 associated to Schrödinger operator with potential satisfying reverse Hölder's inequality*, Rev. Mat. Iberoamericana 15 (1999), no. 2, 279–296.

Zastosowanie jest inspirowane

J. Dziubański, J. Zienkiewicz, *Hardy space H^1 associated to Schrödinger operator with potential satisfying reverse Hölder's inequality*, Rev. Mat. Iberoamericana 15 (1999), no. 2, 279–296.

Niech $\{K_t\}_{t \geq 0}$ - półgrupa generowana przez operator Dunkla–Schrödingera.

Zastosowanie jest inspirowane

J. Dziubański, J. Zienkiewicz, *Hardy space H^1 associated to Schrödinger operator with potential satisfying reverse Hölder's inequality*, Rev. Mat. Iberoamericana 15 (1999), no. 2, 279–296.

Niech $\{K_t\}_{t\geq 0}$ - półgrupa generowana przez operator Dunkla–Schrödingera.

Przestrzeń Hardy'ego - definicja przez funkcję maksymalną

Niech $f \in L^1(dw)$. Mówimy, że f należy do *przestrzeni Hardy'ego* H^1_L związanej z operatorem L wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f^*(\mathbf{x}) = \sup_{t>0} |K_t f(\mathbf{x})|$$

należy do $L^1(dw)$.

Definiujemy zbiór kostek diadycznych $\mathcal{Q}$ związanych z potencjałem V poprzez następujący warunek typu **stopping-time**:

$$Q \in \mathcal{Q} \iff Q \text{ jest maksymalną kostką taką, że } \frac{d(Q)^2}{w(Q)} \int_Q V(\mathbf{y})\, dw(\mathbf{y}) \leq 1.$$

Definiujemy zbiór kostek diadycznych $\mathcal{Q}$ związanych z potencjałem V poprzez następujący warunek typu **stopping-time**:

$$Q \in \mathcal{Q} \iff Q \text{ jest maksymalną kostką taką, że } \frac{d(Q)^2}{w(Q)} \int_Q V(\mathbf{y})\, dw(\mathbf{y}) \leq 1.$$

Atom

Funkcja mierzalna $a(\mathbf{x})$ jest *atomem przestrzeni Hardy'ego* $H^{1,\mathrm{at}}_{\mathcal{Q}}$ związanym ze zbiorem $\mathcal{Q}$ jeśli:

- (A) $\operatorname{supp} a \subseteq B(\mathbf{x}_0, r) \subseteq Q$ dla pewnej $Q \in \mathcal{Q}$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ i $r > 0$,
- (B) $\sup_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N} |a(\mathbf{y})| \leq w(B(\mathbf{x}_0, r))^{-1}$,
- (C) jeśli $r < d(Q)/8$, to $\int_{\mathbb{R}^N} a(\mathbf{x})\, dw(\mathbf{x}) = 0$.

Uniwersytet Wrocławski

Atomowa przestrzeń Hardy'ego

Atomowa przestrzeń Hardy'ego $H^{1,\mathrm{at}}_{\mathcal{Q}}$ związana z $\mathcal{Q}$ to przestrzeń tych funkcji $f \in L^1(dw)$ które można przedstawić jako

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j a_j(\mathbf{x}),$$

gdzie $c_j \in \mathbb{C}$ i a_j są atomami przestrzeni Hardy'ego $H^{1,\mathrm{at}}_{\mathcal{Q}}$ takimi, że $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j| < \infty$.

Atomowa przestrzeń Hardy'ego

Atomowa przestrzeń Hardy'ego $H^{1,\mathrm{at}}_{\mathcal{Q}}$ związana z $\mathcal{Q}$ to przestrzeń tych funkcji $f \in L^1(dw)$ które można przedstawić jako

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j a_j(\mathbf{x}),$$

gdzie $c_j \in \mathbb{C}$ i a_j są atomami przestrzeni Hardy'ego $H^{1,\mathrm{at}}_{\mathcal{Q}}$ takimi, że $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j| < \infty$.

Twierdzenie, A.H.

Mamy $H^{1,\mathrm{at}}_{\mathcal{Q}} = H^1_L$ (wraz z równoważnością odpowiednich norm).

1. Motywacje

2. Klasyczne operatory Schrödingera z potencjałem z rewersyjnej klasy Höldera

3. Nierówność Feffermana–Phonga w kontekście dunklowskim

4. Zastosowania

- Przestrzenie Hardy'ego
- Wartości własne

Wartości własne 1/2

Zastosowanie inspirowane

- C. Fefferman, *The uncertainty principle*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 9 (1983), no. 2, 129–206.
- K. Kurata, S. Sugano, *Fundamental solution, eigenvalue asymptotics and eigenfunctions of degenerate elliptic operators with positive potentials*, Studia Math. 138 (2000), no. 2, 101–119.

Wartości własne 1/2

Zastosowanie inspirowane

C. Fefferman, *The uncertainty principle*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 9 (1983), no. 2, 129–206.

K. Kurata, S. Sugano, *Fundamental solution, eigenvalue asymptotics and eigenfunctions of degenerate elliptic operators with positive potentials*, Studia Math. 138 (2000), no. 2, 101–119.

Dla $a > 0$ definiujemy

$$(\mathrm{Grid})_a = \{[0,a]^N + a\mathbf{n} \,:\, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^N\}.$$

Wartości własne 2/2

$N(L,\lambda)$ - liczba wartości własnych operatora $L \le \lambda$

$N(L, \lambda)$ - liczba wartości własnych operatora $L \leq \lambda$

Twierdzenie, A.H.

Załóżmy, że $V \in \mathrm{RH}^q(dw)$, gdzie $q > \max(1, \frac{\mathbf{N}}{2})$ i $V \geq 0$. Dla $\lambda > 0$ określmy

$$E_\lambda = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \;:\; m(\mathbf{x}) \leq \sqrt{\lambda}\}.$$

Niech $M(\lambda)$ oznacza liczbę kostek K z $(\mathrm{Grid})_{\lambda^{-1/2}}$ takich, że $K \cap E_\lambda \neq \emptyset$.
Istnieją stałe $C_1, C_2, C_3 > 0$, takie, że dla wszystkich $\lambda > 0$ mamy

$$M(C_1^{-1}\lambda) \leq N(L, \lambda) \leq C_2 M(C_3^{-1}\lambda).$$

Dziękuję za uwagę.

Dziękuję za uwagę.