Niedodatnia krzywizna w teorii grup

Damian Osajda (Wrocław)

3 czerwca 2022

Dzisiaj: nieskończone grupy skończenie generowalne i przestrzenie metryczne (głównie kompleksy, np. symplicjalne)

Geometryczna Teoria Grup

Geometryczna Teoria Grup zajmuje się badaniem grup (nieskończonych) za pomocą badania działań tych grup na przestrzeniach.

Naturalny problem

Naturalny problem: Znaleźć lokalne warunki na ściągalność nakrycia uniwersalnego (asferyczność).

Naturalny problem

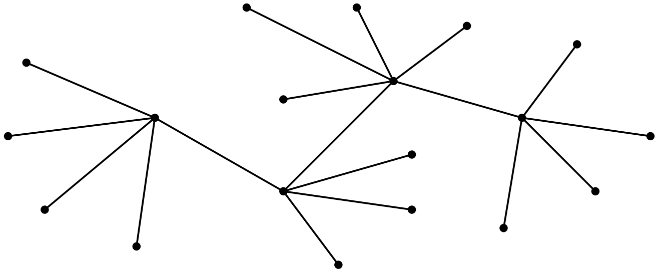
Naturalny problem: Znaleźć lokalne warunki na ściągalność nakrycia uniwersalnego (asferyczność).

Przykład. Jednowymiarowość $\rightsquigarrow$ drzewa

Naturalny problem

Naturalny problem: Znaleźć lokalne warunki na ściągalność nakrycia uniwersalnego (asferyczność).

Przykład. Jednowymiarowość $\rightsquigarrow$ drzewa



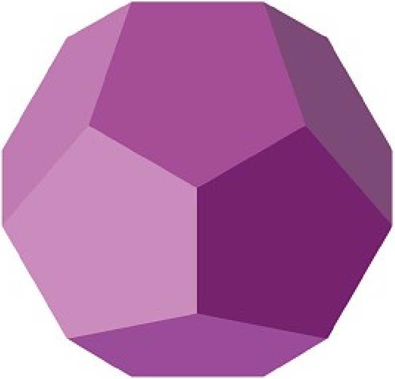
Małe skreślenia

Warunek *małych skreśleń* na kompleks wielokątny: używam tylko k-kątów, dla $k \geqslant 6$.

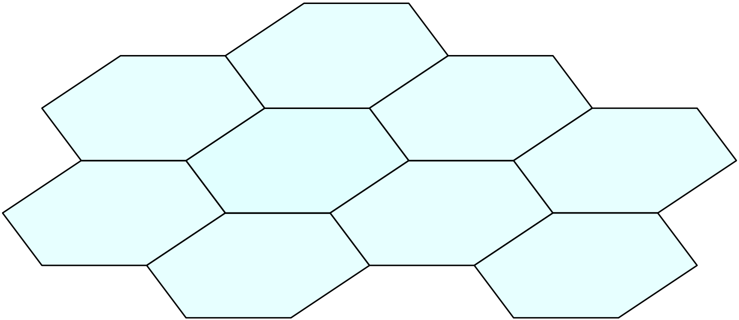
Małe skreślenia

Warunek *małych skreśleń* na kompleks wielokątny: używam tylko k-kątów, dla $k \geqslant 6$.

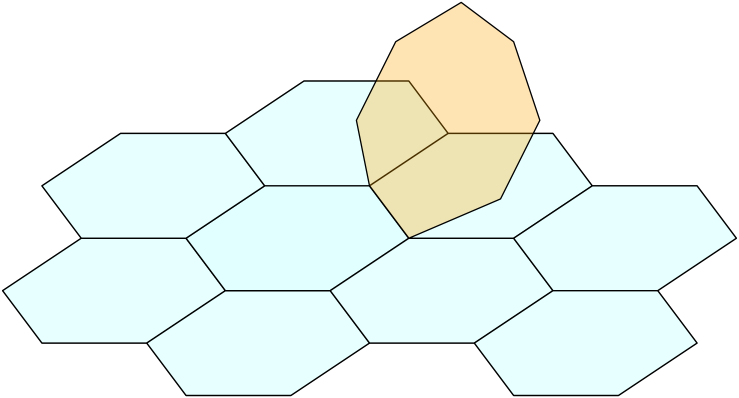
Kontrprzykład:



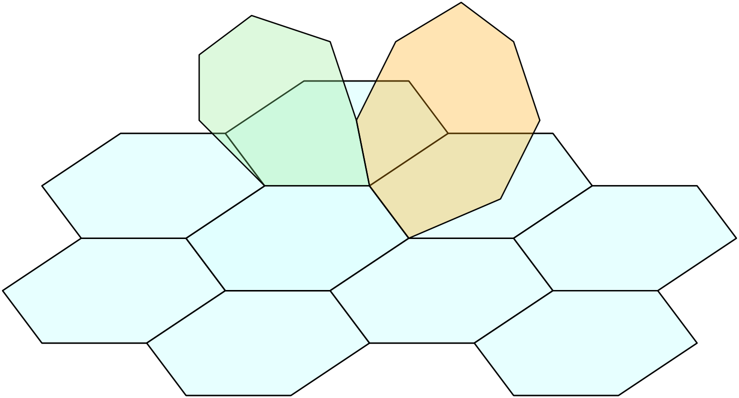
Małe skreślenia



Małe skreślenia

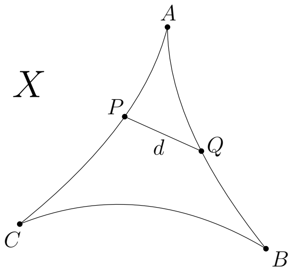


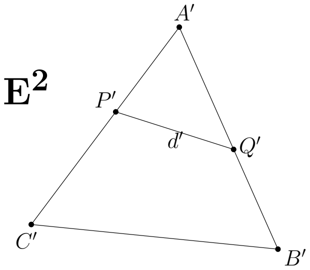
Małe skreślenia



Przestrzenie CAT(0)

Geodezyjna przestrzeń X spełnia warunek CAT(0) jeśli dla każdego trójkąta geodezyjnego ABC i każdych punktów P, Q na bokach, zachodzi $d \leqslant d'$.





Przestrzenie CAT(0)

Przykłady przestrzeni CAT(0):

- prosta;

Przestrzenie CAT(0)

Przykłady przestrzeni CAT(0):

- prosta;
- drzewo;

Przestrzenie CAT(0)

Przykłady przestrzeni CAT(0):

- prosta;
- drzewo;
- $\mathbb{E}^n$;

Przestrzenie CAT(0)

Przykłady przestrzeni CAT(0):

- prosta;
- drzewo;
- $\mathbb{E}^n$;
- $\mathbb{H}^n$;

Przestrzenie CAT(0)

Przykłady przestrzeni CAT(0):

- prosta;
- drzewo;
- $\mathbb{E}^n$;
- $\mathbb{H}^n$;
- $X \times Y$, dla CAT(0) X, Y;

Przestrzenie CAT(0)

Przykłady przestrzeni CAT(0):

- prosta;
- drzewo;
- $\mathbb{E}^n$;
- $\mathbb{H}^n$;
- $X \times Y$, dla CAT(0) X, Y;
- przestrzeń Hilberta.

Przestrzenie CAT(0)

Własności przestrzeni CAT(0):

- ściągalność;

Przestrzenie CAT(0)

Własności przestrzeni CAT(0):

- ściągalność;
- charakteryzacja lokalno-globalna: lokalnie CAT(0) przestrzeń jednospójna jest CAT(0) (globalnie);

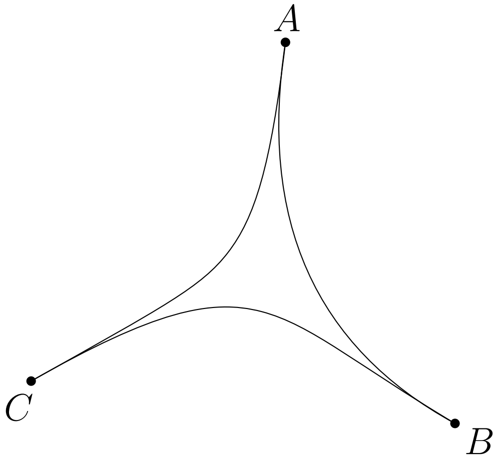
Przestrzenie CAT(0)

Własności przestrzeni CAT(0):

- ściągalność;
- charakteryzacja lokalno-globalna: lokalnie CAT(0) przestrzeń jednospójna jest CAT(0) (globalnie);
- własności punktu stałego.

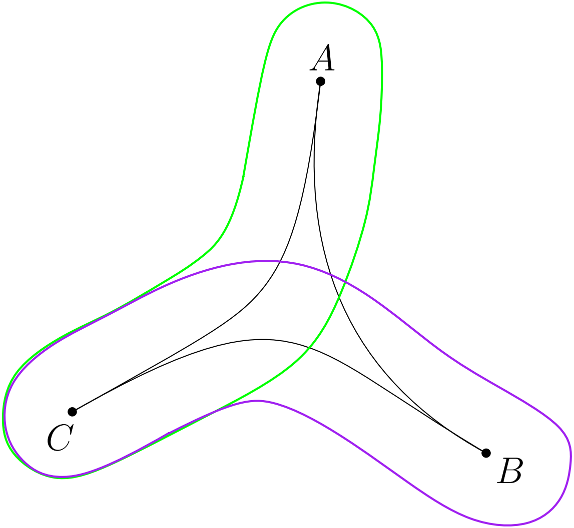
Hiperboliczność wg Gromowa

Geodezyjny trójkąt ABC jest δ-*cienki* jeśli każdy bok leży w δ-otoczeniu sumy (mnogościowej) pozostałych boków.



Hiperboliczność wg Gromowa

Geodezyjny trójkąt ABC jest δ-*cienki* jeśli każdy bok jest leży w δ-otoczeniu sumy (mnogościowej) pozostałych boków.



Przestrzenie hiperboliczne

Geodezyjna przestrzeń jest *hiperboliczna* (*hiperboliczna wg Gromowa*) jeśli dla pewnego $\delta > 0$ wszystkie trójkąty geodezyjne są δ-cienkie.

Przestrzenie hiperboliczne

Geodezyjna przestrzeń jest *hiperboliczna* (*hiperboliczna wg Gromowa*) jeśli dla pewnego $\delta > 0$ wszystkie trójkąty geodezyjne są δ-cienkie.

Przykłady przestrzeni hiperbolicznych:

- przestrzeń ograniczona;

Przestrzenie hiperboliczne

Geodezyjna przestrzeń jest *hiperboliczna* (*hiperboliczna wg Gromowa*) jeśli dla pewnego $\delta > 0$ wszystkie trójkąty geodezyjne są δ-cienkie.

Przykłady przestrzeni hiperbolicznych:

- przestrzeń ograniczona;
- prosta;

Przestrzenie hiperboliczne

Geodezyjna przestrzeń jest *hiperboliczna* (*hiperboliczna wg Gromowa*) jeśli dla pewnego $\delta > 0$ wszystkie trójkąty geodezyjne są δ-cienkie.

Przykłady przestrzeni hiperbolicznych:

- przestrzeń ograniczona;
- prosta;
- drzewo;

Przestrzenie hiperboliczne

Geodezyjna przestrzeń jest *hiperboliczna* (*hiperboliczna wg Gromowa*) jeśli dla pewnego $\delta > 0$ wszystkie trójkąty geodezyjne są δ-cienkie.

Przykłady przestrzeni hiperbolicznych:

- przestrzeń ograniczona;
- prosta;
- drzewo;
- $\mathbb{H}^n$;

Przestrzenie hiperboliczne

Geodezyjna przestrzeń jest *hiperboliczna* (*hiperboliczna wg Gromowa*) jeśli dla pewnego $\delta > 0$ wszystkie trójkąty geodezyjne są δ-cienkie.

Przykłady przestrzeni hiperbolicznych:

- przestrzeń ograniczona;
- prosta;
- drzewo;
- $\mathbb{H}^n$;
- $X \times Y$, dla hiperbolicznej X i ograniczonej Y.

Przestrzenie hiperboliczne

Geodezyjna przestrzeń jest *hiperboliczna* (*hiperboliczna wg Gromowa*) jeśli dla pewnego $\delta > 0$ wszystkie trójkąty geodezyjne są δ-cienkie.

Przykłady przestrzeni hiperbolicznych:

- przestrzeń ograniczona;
- prosta;
- drzewo;
- $\mathbb{H}^n$;
- $X \times Y$, dla hiperbolicznej X i ograniczonej Y.

Przykład. $\mathbb{E}^2$ nie jest hiperboliczna.

Niedodatnia krzywizna

Drzewa, kompleksy małych skreśleń, przestrzenie CAT(0), przestrzenie hiperboliczne są *niedodatnio zakrzywione*.

Niedodatnia krzywizna

Drzewa, kompleksy małych skreśleń, przestrzenie CAT(0), przestrzenie hiperboliczne są *niedodatnio zakrzywione*.

„niedodatnia krzywizna” = (geodezyjna) „wypukłość” kul

Niedodatnia krzywizna

Drzewa, kompleksy małych skreśleń, przestrzenie CAT(0), przestrzenie hiperboliczne są *niedodatnio zakrzywione*.

„niedodatnia krzywizna” = (geodezyjna) „wypukłość” kul

Motto: Przestrzenie o niedodatniej krzywiźnie można dobrze zrozumieć (w zakresie ich geometrii).

Działania grup

Działanie grupy G na przestrzeni X, to homomorfizm $G \to \mathrm{Aut(X)}$.

Działania grup

Działanie grupy G na przestrzeni X, to homomorfizm $G \to \mathrm{Aut(X)}$.

Przykład. Działanie $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{R}$ przez przesunięcia (translacje): $g \mapsto g+$, gdzie $g+ : x \mapsto g + x$.

Działania geometryczne

Działanie G na X jest *kozwarte* jeśli iloraz jest zwarty.

Działania geometryczne

Działanie G na X jest *kozwarte* jeśli iloraz jest zwarty.
Działanie jest *właściwe* jeśli, dla każdego zwartego $K \subseteq X$, zbiór $\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ jest skończony.

Działania geometryczne

Działanie G na X jest *kozwarte* jeśli iloraz jest zwarty.
Działanie jest *właściwe* jeśli, dla każdego zwartego $K \subseteq X$, zbiór $\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ jest skończony. Innymi słowy odwzorowanie „orbita" $G \to X : g \mapsto gx$ jest właściwe.

Działania geometryczne

Działanie G na X jest *kozwarte* jeśli iloraz jest zwarty.
Działanie jest *właściwe* jeśli, dla każdego zwartego $K \subseteq X$, zbiór $\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ jest skończony. Innymi słowy odwzorowanie „orbita" $G \to X : g \mapsto gx$ jest właściwe.
Działanie jest *geometryczne* jeśli jest kozwarte i właściwe.

Działania geometryczne

Działanie G na X jest *kozwarte* jeśli iloraz jest zwarty.
Działanie jest *właściwe* jeśli, dla każdego zwartego $K \subseteq X$, zbiór $\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ jest skończony. Innymi słowy odwzorowanie „orbita” $G \to X : g \mapsto gx$ jest właściwe.
Działanie jest *geometryczne* jeśli jest kozwarte i właściwe.

Przykład. Działanie $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{R}$ przez przesunięcia jest geometryczne, a nawet wolne (stabilizatory punktów są trywialne).

Działania geometryczne

Działanie G na X jest *kozwarte* jeśli iloraz jest zwarty.
Działanie jest *właściwe* jeśli, dla każdego zwartego $K \subseteq X$, zbiór $\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ jest skończony. Innymi słowy odwzorowanie „orbita" $G \to X : g \mapsto gx$ jest właściwe.
Działanie jest *geometryczne* jeśli jest kozwarte i właściwe.

Przykład. Działanie $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{R}$ przez przesunięcia jest geometryczne, a nawet wolne (stabilizatory punktów są trywialne).

Przykład. Działanie $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{R}^2$ przez przesunięcia wzdłuż jednej współrzędnej, jest właściwe (nawet wolne), ale nie kozwarte.

Działania geometryczne

Działanie G na X jest *kozwarte* jeśli iloraz jest zwarty.
Działanie jest *właściwe* jeśli, dla każdego zwartego $K \subseteq X$, zbiór $\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ jest skończony. Innymi słowy odwzorowanie „orbita" $G \to X : g \mapsto gx$ jest właściwe.
Działanie jest *geometryczne* jeśli jest kozwarte i właściwe.

Przykład. Działanie $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{R}$ przez przesunięcia jest geometryczne, a nawet wolne (stabilizatory punktów są trywialne).

Przykład. Działanie $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{R}^2$ przez przesunięcia wzdłuż jednej współrzędnej, jest właściwe (nawet wolne), ale nie kozwarte.

Przykład. Działanie $\mathbb{Z}^2$ na $\mathbb{R}$ przez przesunięcia wzdłuż jednej współrzędnej: $(g, h)x = g + x$ nie jest właściwe, ale jest kozwarte.

Działania geometryczne

Motto: jeśli grupa G działa geometrycznie na (ładnej) przestrzeni X, to geometrie G i X są bardzo podobne.

Działania geometryczne

Motto: jeśli grupa G działa geometrycznie na (ładnej) przestrzeni X, to geometrie G i X są bardzo podobne.

Cel: badanie działań grup na przestrzeniach o niedodatniej krzywiźnie.

Działania geometryczne

Przykład. Działanie skończenie generowanej grupy G na swoim *grafie Cayleya* $\mathrm{Cay}(G, S)$ jest geometryczne, a nawet wolne.

Działania geometryczne

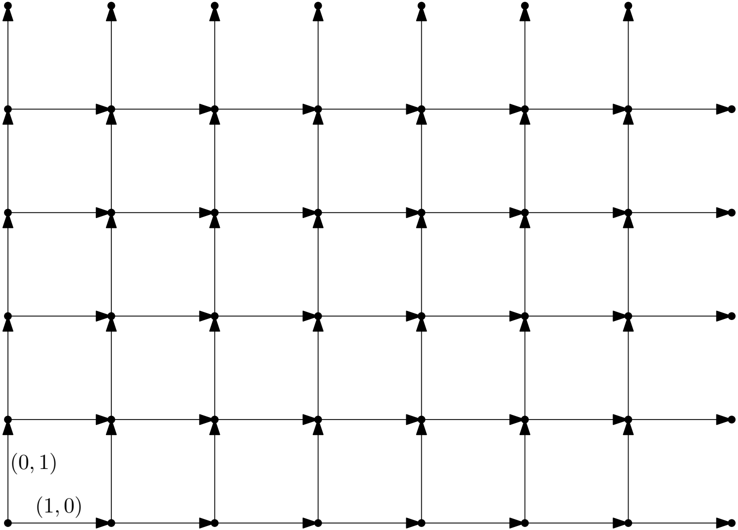
Przykład. Działanie skończenie generowanej grupy G na swoim *grafie Cayleya* $\mathrm{Cay}(G, S)$ jest geometryczne, a nawet wolne.

Przykład. Graf Cayleya grupy $\mathbb{Z}$:

$$\bullet \xrightarrow{1} \bullet \xrightarrow{1} \bullet \xrightarrow{1} \bullet \xrightarrow{1} \bullet \xrightarrow{1} \bullet \xrightarrow{1} \bullet \xrightarrow{1} \bullet$$

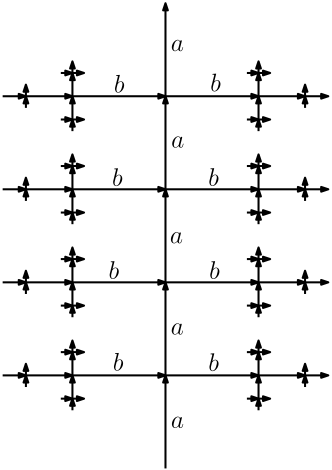
Działania geometryczne

Przykład. Graf Cayleya grupy $\mathbb{Z}^2$:



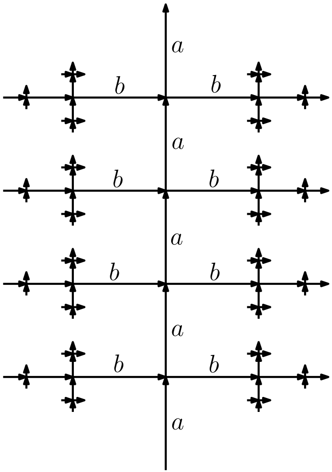
Działania geometryczne

Przykład. Graf Cayleya grupy wolnej:



Działania geometryczne

Przykład. Dla skończonej grupy H, grupa $H \times G$ działa geometrycznie na grafie Cayleya grupy G



Ogólne cele

I) Badanie klasycznych grup

II) Konstrukcja nowych grup i przestrzeni

Grupy Artina

Graf Γ z etykietami $\{2, 3, 4, \ldots\}$ na krawędziach definiuje *grupę Artina* A_Γ:

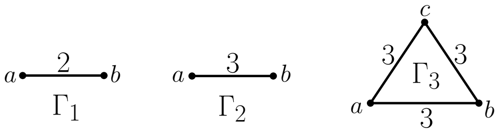
$$A_\Gamma = \langle a \in V(\Gamma) \mid \underbrace{aba\cdots}_{m} = \underbrace{bab\cdots}_{m} \text{ dla krawędzi } ab \text{ z etykietą } m \rangle$$

Grupy Artina

Graf Γ z etykietami $\{2, 3, 4, \ldots\}$ na krawędziach definiuje *grupę Artina* A_Γ:

$$A_\Gamma = \langle a \in V(\Gamma) \mid \underbrace{aba\cdots}_{m} = \underbrace{bab\cdots}_{m} \text{ dla krawędzi } ab \text{ z etykietą } m \rangle$$

Przykład.

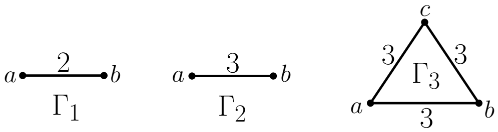


Grupy Artina

Graf Γ z etykietami $\{2, 3, 4, \ldots\}$ na krawędziach definiuje *grupę Artina* A_Γ:

$$A_\Gamma = \langle a \in V(\Gamma) \mid \underbrace{aba\cdots}_{m} = \underbrace{bab\cdots}_{m} \text{ dla krawędzi } ab \text{ z etykietą } m \rangle$$

Przykład.



$$A_{\Gamma_1} = \langle a, b \mid ab = ba \rangle \cong \mathbb{Z}^2; \; A_{\Gamma_2} = \langle a, b \mid aba = bab \rangle$$
$$A_{\Gamma_3} = \langle a, b, c \mid aba = bab, bcb = cbc, cac = aca \rangle$$

Otwarte pytania

Hipoteza o $K(\pi, 1)$ dla grup Artina: Czy kompleks Salvettiego grupy Artina jest ściągalny?

Otwarte pytania

Hipoteza o $K(\pi, 1)$ dla grup Artina: Czy kompleks Salvettiego grupy Artina jest ściągalny?

Uwaga. Równoważnie: czy kompleksyfikacja dopełnienia odpowiadającego układu hiperpłaszczyzn jest asferyczna?

Otwarte pytania

Hipoteza o $K(\pi, 1)$ dla grup Artina: Czy kompleks Salvettiego grupy Artina jest ściągalny?

Uwaga. Równoważnie: czy kompleksyfikacja dopełnienia odpowiadającego układu hiperpłaszczyzn jest asferyczna?

Otwarte pytanie: Czy istnieją skończenie prezentowalne nieskończone grupy Burnside'a (grupy o ograniczonej torsji)?

Hipoteza o $K(\pi, 1)$

Popularne podejście: wyposażyć kompleks Salvettiego w strukturę przestrzeni z niedodatnią krzywizną.

Hipoteza o $K(\pi, 1)$

Popularne podejście: wyposażyć kompleks Salvettiego w strukturę przestrzeni z niedodatnią krzywizną.

- CAT(0);

Hipoteza o $K(\pi, 1)$

Popularne podejście: wyposażyć kompleks Salvettiego w strukturę przestrzeni z niedodatnią krzywizną.

- CAT(0);
- struktura Garside'a (typ skończony);

Hipoteza o $K(\pi, 1)$

Popularne podejście: wyposażyć kompleks Salvettiego w strukturę przestrzeni z niedodatnią krzywizną.

- CAT(0);
- struktura Garside'a (typ skończony);
- kompleks kostkowy CAT(0) (RAAG);

Hipoteza o $K(\pi, 1)$

Popularne podejście: wyposażyć kompleks Salvettiego w strukturę przestrzeni z niedodatnią krzywizną.

- CAT(0);
- struktura Garside'a (typ skończony);
- kompleks kostkowy CAT(0) (RAAG);
- kompleks systoliczny (duży typ);

Hipoteza o $K(\pi, 1)$

Popularne podejście: wyposażyć kompleks Salvettiego w strukturę przestrzeni z niedodatnią krzywizną.

- CAT(0);
- struktura Garside'a (typ skończony);
- kompleks kostkowy CAT(0) (RAAG);
- kompleks systoliczny (duży typ);
- kompleks Helly'ego (typ FC).

Grupy Burnside'a

Hipotetyczny atak: konstrukcja nieskończonej skończenie prezentowalnej grupy Burnside'a poprzez znalezienie prezentacji o „niedodatniej krzywiźnie".

Dziękuję za uwagę!