O reprezentacjach macierzowych operatorów liniowych na przestrzeni Hilberta

Yuri Tomilov

IM PAN, Warsaw

PTM, 3 czerwca, 2022

Niech H będzie nieskonczenie wymiarową ośrodkową przestrzenią Hilberta, i $B(H)$ będzie przestrzenią ograniczonych operatorow liniowych na H.

Niech H będzie nieskonczenie wymiarową ośrodkową przestrzenią Hilberta, i $B(H)$ będzie przestrzenią ograniczonych operatorow liniowych na H.

Problem

Dla danego $T \in B(H)$ znaleźć bazę ortonormalną (BON) $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ taką, że reprezentacja macierzowa

$$A_T := (\langle Tu_n, u_j \rangle)_{j,n=1}^{\infty}$$

operatora T względem $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ ma żądane własności.

Niech H będzie nieskonczenie wymiarową ośrodkową przestrzenią Hilberta, i $B(H)$ będzie przestrzenią ograniczonych operatorow liniowych na H.

Problem
Dla danego $T \in B(H)$ znaleźć bazę ortonormalną (BON) $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ taką, że reprezentacja macierzowa

$$A_T := (\langle Tu_n, u_j \rangle)_{j,n=1}^{\infty}$$

operatora T względem $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ ma żądane własności.

Innymi słowy:
dla *ustalonej* BON $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ badamy reprezentacje macierzowe orbity unitarnej $\{UTU^{-1} : U \text{ is unitary}\}$ w przestrzeni $B(H)$.

Takie podejście „współrzędowe” sięga von Neumanna, Schura and Weyla (i poprzedza Banacha).

Twierdzenie (Twierdzenie Weyla-von-Neumanna-Berga o diagonalizacji)

Dla kazdego normalnego $T \in B(H)$ istnieje BON $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ i operator Hilberta-Schmidta S takie, że $T + S$ ma postać przekątną względem $(u_n)_{n=1}^{\infty}$.

Takie podejście „współrzędowe” sięga von Neumanna, Schura and Weyla (i poprzedza Banacha).

Twierdzenie (Twierdzenie Weyla-von-Neumanna-Berga o diagonalizacji)

Dla kazdego normalnego $T \in B(H)$ istnieje BON $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ i operator Hilberta-Schmidta S takie, że $T + S$ ma postać przekątną względem $(u_n)_{n=1}^{\infty}$.

Opinia powszechna: na ogół, *nie istnieje żadnej struktury* w reprezentacjach macierzowych (poza operatorami normalnymi i/lub klasami Schattena), zatem badania w tym kierunku zostały *zaniechane.*

Takie podejście „współrzędowe” sięga von Neumanna, Schura and Weyla (i poprzedza Banacha).

Twierdzenie (Twierdzenie Weyla-von-Neumanna-Berga o diagonalizacji)

Dla kazdego normalnego $T \in B(H)$ istnieje BON $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ i operator Hilberta-Schmidta S takie, że $T + S$ ma postać przekątną względem $(u_n)_{n=1}^{\infty}$.

Opinia powszechna: na ogół, *nie istnieje żadnej struktury* w reprezentacjach macierzowych (poza operatorami normalnymi i/lub klasami Schattena), zatem badania w tym kierunku zostały *zaniechane.*

Uwaga: Problem jest wysoce niebanalny nawet dla $z \to zf(z)$ na $H^2(\mathbb{D})$ lub $t \to t \cdot f(t)$ on $L^2[0,1]$.

Przekątne macierzy operatorów

Dla $T \in B(H)$ zdefiniujmy zbiór wszystkich przekątnych T :

$$\mathcal{D}(T) := \{\langle Tu_n, u_n\rangle_{n=1}^{\infty}\} \subset \ell_\infty(\mathbb{N})$$

gdzie $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ jest dowolną BON w H

Przekątne macierzy operatorów

Dla $T \in B(H)$ zdefiniujmy zbiór wszystkich przekątnych T :

$$\mathcal{D}(T) := \{\langle Tu_n, u_n\rangle_{n=1}^{\infty}\} \subset \ell_\infty(\mathbb{N})$$

gdzie $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ jest dowolną BON w H
W badaniach $\mathcal{D}(T)$ przeważałi dwa kierunki:

(1) badanie $\mathcal{D}(T)$ dla klas operatorów T (“latwiejszy”)

and

(2) badanie $\mathcal{D}(T)$ dla ustalonego operatora T (“trudniejszy”)

Zaskakujący wniosek:
„Przekątna operatora niesie o wiele więcej informacji o operatorze niż jej stosunkowo niewielki rozmiar może sugerować”

Dla $T \in B(H)$ jego *istotny obraz liczbowy* $W_e(T)$ może być zdefiniowany jako

$$W_e(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \langle Tu_n, u_n\rangle \to \lambda,\ n \to \infty,\ \text{dla ciagu ortonorm. } (u_n)_{n=1}^{\infty}\}.$$

Znaczenie $W_e(T)$:

$$W_e(T) = \text{zbiór punktów granicznych } \mathcal{D}(T).$$

Ciąg ortonormalny $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ może być zastąpiony przez *bazę* ortonormalną.

Twierdzenie

Dla każdego $T \in B(H)$ zbiór $W_e(T)$ jest niepusty, zwarty i wypukły.

Dla $T \in B(H)$ *widmo istotne* $\sigma_e(\mathcal{T})$ może być zdef. jako zbiór $\lambda \in \mathbb{C}$ takich, że $\|Tu_n - \lambda u_n\| \to 0$ lub $\|T^* u_n - \overline{\lambda_n} u_n\| \to 0$, $n \to \infty$, dla ortonorm. $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$,
W sposób oczywisty,

$$\sigma_e(T) \subset \text{otoczka wypukła}\, (\sigma_e(T)) \subset W_e(T).$$

Przekątne dla ustalonych operatorów

Punkt wyjściowy:

Twierdzenie (Herrero, 1991)

Niech $T \in B(H)$ *oraz niech* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset W_e(T)$. *Jeśli*

$$\overline{\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}} \subset \operatorname{Int} W_e(T),$$

to $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}(T)$, *tzn. istnieje BON* $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$:

$$\langle Tu_n, u_n \rangle = \lambda_n.$$

W przeciwnym przypadku, $\exists$ *operator zwarty* K *taki, że* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}(T+K)$.

Twierdzenie (Stout, małe przekątne, 1981)

Jeśli $T \in B(H)$, $0 \in W_e(T)$, *to dla* $\forall\ (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \notin \ell_1\ \exists$ *BON* $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$:

$$|\langle Tu_n, u_n\rangle| \le \alpha_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Istotne w badan. norm macierzowych na $B(H)$ (Radjavi, Rosenthal,...)

Twierdzenie (Stout, małe przekątne, 1981)

Jeśli $T \in B(H)$, $0 \in W_e(T)$, *to dla* $\forall\ (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \notin \ell_1\ \exists$ *BON* $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$:

$$|\langle Tu_n, u_n\rangle| \le \alpha_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Istotne w badan. norm macierzowych na $B(H)$ (Radjavi, Rosenthal,...)

Twierdzenie (Fan, 1984)

Jeśli $T \in B(H)$, *to* $\mathcal{D}(T)$ *zawiera ciąg zer (zerową przekątną) wtedy i tylko wtedy, gdy* $\exists$ *BON* $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ *oraz* $\{n_m : m \ge 1\} \subset \mathbb{N}$:

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{m=1}^{n_m} \langle Tu_m, u_m\rangle = 0.$$

Twierdzenie (Stout, małe przekątne, 1981)

Jeśli $T \in B(H)$, $0 \in W_e(T)$, *to dla* $\forall\ (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \notin \ell_1\ \exists$ *BON* $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$:

$$|\langle Tu_n, u_n\rangle| \le \alpha_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Istotne w badan. norm macierzowych na $B(H)$ (Radjavi, Rosenthal,...)

Twierdzenie (Fan, 1984)

Jeśli $T \in B(H)$, *to* $\mathcal{D}(T)$ *zawiera ciąg zer (zerową przekątną) wtedy i tylko wtedy, gdy* $\exists$ *BON* $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ *oraz* $\{n_m : m \ge 1\} \subset \mathbb{N}$:

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{m=1}^{n_m} \langle Tu_m, u_m\rangle = 0.$$

Dla $T = T^*$, Neumann (1999): bardzo skomplikowany opis $\overline{\mathcal{D}(T)}$ w l^∞.

Przekątne dla klas operatorów.

Przekątne dla klas operatorów.

Twierdzenie (Kadison, 2002„,źródło inspiracji ...")

Ciąg $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest przekatną pewnego rzutu ortogonalnego wtedy i tylko wtedy, kiedy* $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset [0,1]$ *i dla*

$$a := \sum_{\lambda_j < 1/2} \lambda_j, \qquad b := \sum_{\lambda_j \geq 1/2} (1 - \lambda_j),$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} \textit{mamy} \quad a + b &= \infty \quad \textit{lub} \\ a + b &< \infty \quad \textit{and} \quad a - b \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Przekątne dla klas operatorów.

Twierdzenie (Kadison, 2002„,źródło inspiracji ...”)

Ciąg $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ jest przekatną pewnego rzutu ortogonalnego wtedy i tylko wtedy, kiedy $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset [0,1]$ i dla

$$a := \sum_{\lambda_j < 1/2} \lambda_j, \qquad b := \sum_{\lambda_j \geq 1/2} (1 - \lambda_j),$$

$\Longrightarrow$

$$\textit{mamy} \quad \begin{array}{lll} a + b = \infty & \textit{lub} & \\ a + b < \infty & \textit{and} & a - b \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Arveson (2006, 2007):

- badanie przekątnych dla normalnych T z $\sigma(T) = X$, gdzie X jest zbiorem wierzcholków wypukłego wielokątu.
- znalazł związki z teorią operatorów Fredholma i ich indeksem.

Długi ciąg dalszych badań:

Długi ciąg dalszych badań:

Argerami, Dykema, Kennedy, Massey, Skoufranis, Bownik, Jasper, Kaftal, Loreaux, Weiss, ...

Kierunki:
operatory samosprzężone (normalne) ze skończonym widmem; dodatnie operatory zwarte, ... normalne operatory (czesciowe wyniki)

Długi ciąg dalszych badań:

Argerami, Dykema, Kennedy, Massey, Skoufranis, Bownik, Jasper, Kaftal, Loreaux, Weiss, ...

Kierunki:
operatory samosprzężone (normalne) ze skończonym widmem; dodatnie operatory zwarte, ... normalne operatory (czesciowe wyniki)

Twierdzenie (Jasper-Loreaux-Weiss, 2018)

Ciąg $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest przekątna pewnego operatora unitarnego na* H *wtedy i tylko wtedy, kiedy* $\sup_{n\geq 1} |\lambda_n| \leq 1$ *oraz*

$$2(1 - \inf_{n\geq 1} |\lambda_n|) \leq \sum_{n=1}^{\infty}(1 - |\lambda_n|).$$

Długi ciąg dalszych badań:

Argerami, Dykema, Kennedy, Massey, Skoufranis, Bownik, Jasper, Kaftal, Loreaux, Weiss, ...

Kierunki:
operatory samosprzężone (normalne) ze skończonym widmem; dodatnie operatory zwarte, ... normalne operatory (czesciowe wyniki)

Twierdzenie (Jasper-Loreaux-Weiss, 2018)

Ciąg $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest przekątna pewnego operatora unitarnego na* H *wtedy i tylko wtedy, kiedy* $\sup_{n\geq 1} |\lambda_n| \leq 1$ *oraz*

$$2(1 - \inf_{n\geq 1} |\lambda_n|) \leq \sum_{n=1}^{\infty}(1 - |\lambda_n|).$$

Glówny problem: brak podejścia/idei, jeżeli widmo jest duże ...

Sytuacja ogólna (w ramach „trudniejszego” kierunku w badaniu $\mathcal{D}(T)$):

Twierdzenie (Muller-T, 2019, przykładowe)

Niech $T \in B(H)$. Załóżmy, że $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{Int}\, W_{\mathrm{e}}(T)$ spełnia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{dist}\,\{\lambda_n, \partial W_e(T)\} = \infty. \quad \text{(„warunek typu Blaschkego”)}$$

Wówczas $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}(T)$.

Sytuacja ogólna (w ramach „trudniejszego” kierunku w badaniu $\mathcal{D}(T)$):

Twierdzenie (Muller-T, 2019, przykładowe)

Niech $T \in B(H)$. Załóżmy, że $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{Int}\, W_{\mathrm{e}}(T)$ spełnia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{dist}\,\{\lambda_n, \partial W_e(T)\} = \infty. \quad \textit{(„warunek typu Blaschkego”)}$$

Wówczas $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}(T)$.

Ilustracja[Herrero]
Jeśli T jest przesunięciem jednostronnym na $\ell^2(\mathbb{N})$, to $W_{\mathrm{e}}(T) = \overline{\mathbb{D}}$ (domkn. kolo jednostkowe), oraz

$$(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}(T) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}(1 - |\lambda_n|) = \infty,$$

i.e. dokładnie kiedy $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ NIE spełnia war. „Blaschke” !

Twierdzenie (Muller-T, 2019, uogólnienie Herrero-Stouta)

Niech $T \in B(H)$. Dla każdych $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset W_e(T)$ i $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \notin \ell_1$ istnieje $\exists$ BON $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ taka, że

$$\big|\langle Tu_n, u_n\rangle - \lambda_n\big| \le |\alpha_n|, \qquad n \in \mathbb{N},$$

tzn. $\exists (d_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(T) : |d_n - \lambda_n| \le |\alpha_n|, \qquad n \in \mathbb{N}.$

Twierdzenie (Muller-T, 2019, uogólnienie Herrero-Stouta)

Niech $T \in B(H)$. *Dla każdych* $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset W_e(T)$ *i* $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \notin \ell_1$ *istnieje* $\exists$ *BON* $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ *taka, że*

$$\big|\langle Tu_n, u_n\rangle - \lambda_n\big| \le |\alpha_n|, \qquad n \in \mathbb{N},$$

tzn. $\exists (d_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(T) : |d_n - \lambda_n| \le |\alpha_n|, \qquad n \in \mathbb{N}.$

Twierdzenie (Ḿuller-T, 2019)

Niech $T \in B(H)$ *oraz* $p > 1$. *Załóżmy, że* $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ *spełnia*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{dist}^p\{\lambda_n, W_e(T)\} < \infty.$$

Wówczas $\exists K \in S_p(H)$ *taki, że* $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}(T+K)$.

Twierdzenie (Muller-T, 2019, uogólnienie Herrero-Stouta)

Niech $T \in B(H)$. Dla każdych $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset W_e(T)$ i $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \notin \ell_1$ istnieje $\exists$ BON $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ taka, że

$$\big|\langle Tu_n, u_n\rangle - \lambda_n\big| \le |\alpha_n|, \qquad n \in \mathbb{N},$$

tzn. $\exists (d_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(T) : |d_n - \lambda_n| \le |\alpha_n|, \qquad n \in \mathbb{N}.$

Twierdzenie (Ḿuller-T, 2019)

Niech $T \in B(H)$ oraz $p > 1$. Załóżmy, że $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ spełnia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{dist}^p\{\lambda_n, W_e(T)\} < \infty.$$

Wówczas $\exists$ $K \in S_p(H)$ taki, że $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}(T+K)$.

$\exists$ pewna struktura w $\mathcal{D}(T) \Rightarrow$ (??) to samo dla calej $(\langle Tu_n, u_j\rangle)_{j,n=1}^{\infty}$

Macierze o strukturze pasmowej

Przypomnijmy, że dla ustalonego $k \in \mathbb{N}$ macierz $(a_{j,n})_{j,n=1}^{m}$, $1 \leq m \leq \infty$, nazywa się $(2k+1)$-*przekątną* jeśli

$$a_{jn} = 0, \qquad |j - n| > k.$$

Macierze o strukturze pasmowej

Przypomnijmy, że dla ustalonego $k \in \mathbb{N}$ macierz $(a_{j,n})_{j,n=1}^{m}$, $1 \leq m \leq \infty$, nazywa się $(2k+1)$-*przekątną* jeśli

$$a_{jn} = 0, \qquad |j-n| > k.$$

Operator z $B(H)$ nazywamy $(2k+1)$-*przekątnym* jeżeli posiada on reprezentację macierzową w postaci (skończonej bądź nie) *sumy prostej* (skończonych bądź nie) $(2k+1)$-przekątnych macierzy względem pewnej BON w H.

Macierze o strukturze pasmowej

Przypomnijmy, że dla ustalonego $k \in \mathbb{N}$ macierz $(a_{j,n})_{j,n=1}^{m}$, $1 \leq m \leq \infty$, nazywa się *$(2k+1)$-przekątną* jeśli

$$a_{jn} = 0, \qquad |j-n| > k.$$

Operator z $B(H)$ nazywamy *$(2k+1)$-przekątnym* jeżeli posiada on reprezentację macierzową w postaci (skończonej bądź nie) *sumy prostej* (skończonych bądź nie) $(2k+1)$-przekątnych macierzy względem pewnej BON w H.

Twierdzenie

i *Operatory samosprzężone są 3-przekątne (reprezentacja Jacobi'ego)*

ii *Operatory unitarne są 5-przekątne (CMV-reprezentacja)*

Macierze o strukturze pasmowej

Przypomnijmy, że dla ustalonego $k \in \mathbb{N}$ macierz $(a_{j,n})_{j,n=1}^{m}$, $1 \leq m \leq \infty$, nazywa się *$(2k+1)$-przekątną* jeśli

$$a_{jn} = 0, \qquad |j - n| > k.$$

Operator z $B(H)$ nazywamy *$(2k+1)$-przekątnym* jeżeli posiada on reprezentację macierzową w postaci (skończonej bądź nie) *sumy prostej* (skończonych bądź nie) $(2k+1)$-przekątnych macierzy względem pewnej BON w H.

Twierdzenie

i *Operatory samosprzężone są* 3*-przekątne (reprezentacja Jacobi'ego)*

ii *Operatory unitarne są* 5*-przekątne (CMV-reprezentacja)*

Reprezentacje pasmowe są dość rzadkim zjawiskiem:

- Każdy operator normalny $T \in B(H)$ z
$$\mathrm{meas}_2(\sigma(T)) > 0$$
 nie posiada reprezentacji pasmowej (V. Shul'man).
 Np takim operatorem jest $(Mf)(z) = zf(z)$ na $L^2(\mathbb{D})$ ($\mathbb{D}$ jest kolem jednostkowym)
- Istnieją operatory w $\bigcap_{p>2} S_p(H)$ nie posiadające reprezentacji pasmowej
- Zbior operatorów nie posiadających reprezentację pasmową jest gęsty w $B(H)$.

(Wydaje się) Nie wiadomo czy istnieje operator bez reprezentacji pasmowej w $S_p(H)$ z $1 \le p \le 2$.
(Prawdopodobnie, tak)

„Rozrzedzone” macierzy

Twierdzenie (Gary Weiss, lata 80-e)

Każdy $T \in B(H)$ posiada uniwersalną „3-przekątną” reprezentację blokową z ograniczeniami wykładniczymi na rozmiar (skończenie wymiarowych) bloków:

$$T = \begin{pmatrix} D_1 & U_1 & 0 & \dots \\ L_1 & D_2 & U_2 & \ddots \\ 0 & L_2 & D_3 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

„Rozrzedzone” macierzy

Twierdzenie (Gary Weiss, lata 80-e)

Każdy $T \in B(H)$ posiada uniwersalną „3-przekątną” reprezentację blokową z ograniczeniami wykładniczymi na rozmiar (skończenie wymiarowych) bloków:

$$T = \begin{pmatrix} D_1 & U_1 & 0 & \dots \\ L_1 & D_2 & U_2 & \ddots \\ 0 & L_2 & D_3 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Wynik ten był użyteczny m.in w badaniu
-komutatorów
- problemu Olsena o podnoszeniu ($\|p(T)\|_{B(H)/K(H)} = (?)\|p(T - K_0)\|$ dla pewnego $K_0 \in K(H)$),
- reprezentowalności $T \in B(H)$ jako komb. liniowej “prostych” operatorów

„Małe macierzy”

Dla danej bazy $U = (u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ oraz operatorów $T = (t_{jn})_{j,n\geq 1}^{\infty}$, $S = (s_{jn})_{j,n\geq 1}^{\infty}$ z $B(H)$, zdefiniujmy ich iloczyn Schura jako

$$A_T *_U A_S = (t_{jn}s_{jn}), \qquad j, n \geq 1.$$

Zauważmy, że

$\exists R \in B(H) : A_R = A_{T*_U}A_S$ oraz $\|R\| \leq \|T\|\|S\|$ (Twierdz. Schura).

Z takim iloczynem, nazywanym *mnożeniem Schura*, $B(H)$ staje się przemienną algebrą Banacha $B_U(H)$, nazywana odp. *algebrą Schura* (wdłędem U).

„Małe macierzy"

Dla danej bazy $U = (u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ oraz operatorów $T = (t_{jn})_{j,n \geq 1}^{\infty}$, $S = (s_{jn})_{j,n \geq 1}^{\infty}$ z $B(H)$, zdefiniujmy ich iloczyn Schura jako

$$A_T *_U A_S = (t_{jn} s_{jn}), \qquad j, n \geq 1.$$

Zauważmy, że

$\exists R \in B(H) : A_R = A_{T *_U} A_S$ oraz $\|R\| \leq \|T\| \|S\|$ (Twierdz. Schura).

Z takim iloczynem, nazywanym *mnożeniem Schura*, $B(H)$ staje się przemienną algebrą Banacha $B_U(H)$, nazywana odp. *algebrą Schura* (wdłędem U).
Za pomocą $W_e(T)$, Stout (lata 1980'e) badał związki pomiędzy własnościami B_U a odp. wyborem U. Na tej drodze:

Twierdzenie (Stout, 1981)

Let $T \in B(H)$. Następ. twierdzenia są równoważne:

(i) $0 \in W_e(T)$;

(ii) *Dla każdego* $\epsilon > 0$ *istnieje BON* $(u_n)_{n=1}^{\infty}$: $|\langle Tu_n, u_j\rangle| < \epsilon$ *dla wszystkich* $n, j \in \mathbb{N}$; *("własność małych wyrazow")*

(iii) *Dla każdego* $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$, $(a_n)_{n=1}^{\infty} \notin \ell^1(\mathbb{N})$, *istnieje BON* $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ *in* H :

$$|\langle Tu_n, u_n\rangle| \leq a_n \qquad \text{dla wszystkich} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Twierdzenie (Stout, 1981)

Let $T \in B(H)$. Następ. twierdzenia są równoważne:

(i) $0 \in W_e(T)$;

(ii) *Dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje BON $(u_n)_{n=1}^{\infty}$: $|\langle Tu_n, u_j\rangle| < \epsilon$ dla wszystkich $n, j \in \mathbb{N}$; ("własność małych wyrazow")*

(iii) *Dla każdego $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$, $(a_n)_{n=1}^{\infty} \notin \ell^1(\mathbb{N})$, istnieje BON $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ in H :*

$$|\langle Tu_n, u_n\rangle| \le a_n \qquad \text{dla wszystkich} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Przykład zastosowań:

Dla każdego $T \in B(H)$, $0 \in W_e(T)$, istnieje BON $U = (u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$:

$$A_X \mapsto A_T *_U A_X$$

odwzorowuje $B(H)$ w $S_2(H)$ (operatory Hilbert-Schmidta).

[Wyrazy $A_T *_U A_X$ są wówczas ℓ^2-sumowalne !]

„Duże macierzy”

Twierdzenie (de Leeuw, Kahane, Katznelson, 1975)

Dla każdego $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ *istnieje (okresowa)* $f \in C([0, 2\pi])$ *taka, że* $|\hat{f}(n)| \geq |a_n|, n \in \mathbb{Z}$.

„Duże macierzy"

Twierdzenie (de Leeuw, Kahane, Katznelson, 1975)

Dla każdego $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ *istnieje (okresowa)* $f \in C([0,2\pi])$ *taka, że* $|\hat{f}(n)| \geq |a_n|, n \in \mathbb{Z}$.

Wersja nieprzemienna (używana np w badaniu mnożników Schura):

Twierdzenie (Lust-Piquard, 1997)

Dla każdej $A = (a_{jn})_{j,n=1}^{\infty}$:

$$\|A\|_{\ell_\infty(\ell_2)} := \sup_{j\geq 1} \left(\sum_{n\geq 1} |a_{jn}|^2 \right)^{1/2} < \infty \quad i \quad \|A^*\|_{\ell_\infty(\ell_2)} < \infty,$$

istnieją $K > 0$, $T \in B(H)$, *i BON* $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$:

$$\|T\| \leq K \max\{\|A\|_{\ell_\infty(\ell_2)}, \|A^*\|_{\ell_\infty(\ell_2)}\} \quad i \quad |\langle Tu_n, u_j\rangle| \geq |a_{jn}|, \quad n, j \geq 1.$$

Problem Halmosa (wciąż otwarty !)

Powiemy, że $T \in B(H)$ jest *bezwzględnie ograniczony* jeśli $|A_T| := (|\langle Tu_n, u_j\rangle|)_{j,n=1}^{\infty}$ definiuje operator ogran. na $\ell^2(\mathbb{N})$ dla *pewnej* BON $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$, oraz *totalnie bezwzględnie* ograniczony jeśli $|A_T| \in B(\ell^2(\mathbb{N}))$ dla *każdej* BON $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$.

Problem Halmosa (wciąż otwarty !)

Powiemy, że $T \in B(H)$ jest *bezwzględnie ograniczony* jeśli $|A_T| := (|\langle Tu_n, u_j\rangle|)_{j,n=1}^{\infty}$ definiuje operator ogran. na $\ell^2(\mathbb{N})$ dla *pewnej* BON $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$, oraz *totalnie bezwzględnie* ograniczony jeśli $|A_T| \in B(\ell^2(\mathbb{N}))$ dla *każdej* BON $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$.

Przykład Jeżeli T na $\ell^2(\mathbb{N})$ jest zadany przez macierz Hilberta $(a_{j,n})_{j,n=1}^{\infty}$, gdzie $a_{jn} = (j-n)^{-1}$ dla $n \neq j$, oraz $a_{nn} = 0$, to T nie jest totalnie bezwzględnie ograniczony.

Problem Halmosa (wciąż otwarty !)

Powiemy, że $T \in B(H)$ jest *bezwględnie ograniczony* jeśli $|A_T| := (|\langle Tu_n, u_j\rangle|)_{j,n=1}^{\infty}$ definiuje operator ogran. na $\ell^2(\mathbb{N})$ dla *pewnej* BON $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$, oraz *totalnie bezwględnie* ograniczony jeśli $|A_T| \in B(\ell^2(\mathbb{N}))$ dla *każdej* BON $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$.

Przykład Jeżeli T na $\ell^2(\mathbb{N})$ jest zadany przez macierz Hilberta $(a_{j,n})_{j,n=1}^{\infty}$, gdzie $a_{jn} = (j-n)^{-1}$ dla $n \neq j$, oraz $a_{nn} = 0$, to T nie jest totalnie bezwzględnie ograniczony.

Problem Halmosa: znaleźć charakteryzację bezwdgłędnie ograniczonych oraz totalnie bezwzgłęd. ograniczonych T.

Problem Halmosa (wciąż otwarty !)

Powiemy, że $T \in B(H)$ jest *bezwględnie ograniczony* jeśli $|A_T| := (|\langle Tu_n, u_j\rangle|)_{j,n=1}^{\infty}$ definuje operator ogran. na $\ell^2(\mathbb{N})$ dla *pewnej* BON $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$, oraz *totalnie bezwględnie* ograniczony jeśli $|A_T| \in B(\ell^2(\mathbb{N}))$ dla *każdej* BON $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$.

Przykład Jeżeli T na $\ell^2(\mathbb{N})$ jest zadany przez macierz Hilberta $(a_{j,n})_{j,n=1}^{\infty}$, gdzie $a_{jn} = (j-n)^{-1}$ dla $n \neq j$, oraz $a_{nn} = 0$, to T nie jest totalnie bezwzględnie ograniczony.

Problem Halmosa: znaleźć charakteryzację bezwdględnie ograniczonych oraz totalnie bezwzględ. ograniczonych T.

Twierdzenie (Sourour, Sunder; 78-79)

$T \in B(H)$ jest totalnie bezwdględnie ograniczony $\Leftrightarrow$ $T = \lambda + N$, dla pewnych $\lambda \in \mathbb{C}$ oraz $N \in S_2(H)$ (oper. Hilbert-Schmidta).

Problem Halmosa (wciąż otwarty !)

Powiemy, że $T \in B(H)$ jest *bezwględnie ograniczony* jeśli $|A_T| := (|\langle Tu_n, u_j\rangle|)_{j,n=1}^{\infty}$ definuje operator ogran. na $\ell^2(\mathbb{N})$ dla *pewnej* BON $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$, oraz *totalnie bezwględnie* ograniczony jeśli $|A_T| \in B(\ell^2(\mathbb{N}))$ dla *każdej* BON $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$.

Przykład Jeżeli T na $\ell^2(\mathbb{N})$ jest zadany przez macierz Hilberta $(a_{j,n})_{j,n=1}^{\infty}$, gdzie $a_{jn} = (j-n)^{-1}$ dla $n \neq j$, oraz $a_{nn} = 0$, to T nie jest totalnie bezwzględnie ograniczony.

Problem Halmosa: znaleźć charakteryzację bezwdględnie ograniczonych oraz totalnie bezwzgłęd. ograniczonych T.

Twierdzenie (Sourour, Sunder; 78-79)

$T \in B(H)$ jest totalnie bezwdględnie ograniczony $\Leftrightarrow$ $T = \lambda + N$, dla pewnych $\lambda \in \mathbb{C}$ oraz $N \in S_2(H)$ (oper. Hilbert-Schmidta).

Problem [Halmosa]: Czy istnieje $T \in B(H)$, który nie jest bezwdględnie ograniczony ?

„Problem”: Jaki jest stopień arbitralności w reprez. macierzowej T?

Macierzy z małymi wyrazami

Problem: Jak małe mogą być wyrazy macierzy (ustalonego) T ?

Macierzy z małymi wyrazami

Problem: Jak małe mogą być wyrazy macierzy (ustalonego) T ?
Przypomnijmy: Twierdzenie Stouta zapewnia jednostajną ogran. wyrazów przez dowolnie małą stałą ("własność małych wyrazów").

Twierdzenie (o bardzo małych macierzach, Muller-T, 2021)

Let $T \in B(H)$. TFAE:

(i) $0 \in W_e(T)$;

(ii) *For any* $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$, $(a_n)_{n=1}^{\infty} \notin \ell^1(\mathbb{N})$, *istnieje BON* $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ *taka, że*

$$|\langle Tu_n, u_j \rangle| \le \sqrt{a_n a_j} \qquad \textit{dla wszystkich} \qquad n, j \in \mathbb{N}.$$

Macierzy z małymi wyrazami

Problem: Jak małe mogą być wyrazy macierzy (ustalonego) T ?
Przypomnijmy: Twierdzenie Stouta zapewnia jednostajną ogran. wyrazów przez dowolnie małą stałą ("własność małych wyrazów").

Twierdzenie (o bardzo małych macierzach, Muller-T, 2021)

Let $T \in B(H)$. TFAE:

(i) $0 \in W_e(T)$;

(ii) *For any $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$, $(a_n)_{n=1}^{\infty} \notin \ell^1(\mathbb{N})$, istnieje BON $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ taka, że*

$$|\langle Tu_n, u_j\rangle| \leq \sqrt{a_n a_j} \qquad \text{dla wszystkich} \qquad n, j \in \mathbb{N}.$$

Uwagi.

1. Dla $\langle Tu_n, u_n\rangle$ otrzymujemy $|\langle Tu_n, u_n\rangle| \leq a_n, n \in \mathbb{N}$, co jest dokładnie warunkiem Stouta na możliwą wielkość przekątnych.
2. (ii) jest istotnie mocniejsza niż wlasność „malych wyrazow" (Stouta).

Rozważając $T-\lambda$ dla $T \in B(H)$ i $\lambda \in W_e(T)$
i stosując poprzedni wynik do $T-\lambda$:

Twierdzenie (Muller-T, 21)

Niech $T \in B(H)$. *Wówczas dla każdego* $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset (0,\infty), (a_n)_{n=1}^{\infty} \notin \ell^1(\mathbb{N})$ *istnieje BON* $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$:

$$|\langle Tu_n, u_j\rangle| \le \sqrt{a_n a_j} \qquad \text{dla wszystkich} \quad n, j \in \mathbb{N}, \ n \neq j.$$

Rozważając $T - \lambda$ dla $T \in B(H)$ i $\lambda \in W_e(T)$
i stosując poprzedni wynik do $T - \lambda$:

Twierdzenie (Muller-T, 21)

Niech $T \in B(H)$. Wówczas dla każdego $(a_n)_{n=1}^\infty \subset (0, \infty), (a_n)_{n=1}^\infty \notin \ell^1(\mathbb{N})$ istnieje BON $(u_n)_{n=1}^\infty \subset H$:

$$|\langle Tu_n, u_j \rangle| \leq \sqrt{a_n a_j} \qquad \text{dla wszystkich} \quad n, j \in \mathbb{N}, \; n \neq j.$$

Wybierzmy $(a_n)_{n=1}^\infty \in \ell^2(\mathbb{N}) \setminus \ell^1(\mathbb{N})$:

Twierdzenie (Muller-T, 2021)

Niech $T \in B(H)$ oraz $\lambda \in W_e(T)$. Wówczas dla każdego $K \in \mathbb{N}$ istnieje BON $(u_n)_{n=1}^\infty \subset H$:

$$T = \lambda + W + S,$$

gdzie $W \in B(H) : \langle Wu_n, u_j \rangle = 0$, $|n - j| \leq K$, oraz S jest oper. Hilberta-Schmidta.

Macierzy z duzymi wyrazami

Twierdzenie (Jednostajne ogran. dolne (i gorne), Muller-T, 2021)

Let $T \in B(H)$, $T \neq \lambda + K$, *dla pewnych* $\lambda \in \mathbb{C}$ *oraz zwartego* $K \in B(H)$. *Wówczas* $\exists$ *BON* $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ *oraz* $c_1, c_2, d > 0$ *(zależące tylko od* $\mathrm{diam}\,(W_e(T))$:

$$|\langle Tu_n, u_n\rangle| \geq d, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad \textit{oraz}$$

$$\frac{c_1 \min\{n,j\}^{1/2}}{\max\{n,j\}^{3/2}} \leq |\langle Tu_n, u_j\rangle| \leq \frac{c_2}{\max\{n,j\}^{1/2}}, \quad \forall\, n,j \in \mathbb{N},\ n \neq j.$$

Macierzy z duzymi wyrazami

Twierdzenie (Jednostajne ogran. dolne (i gorne), Muller-T, 2021)

Let $T \in B(H)$, $T \neq \lambda + K$, *dla pewnych* $\lambda \in \mathbb{C}$ *oraz zwartego* $K \in B(H)$. *Wówczas* $\exists$ *BON* $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ *oraz* $c_1, c_2, d > 0$ *(zależące tylko od* $\operatorname{diam}(W_e(T))$:

$$|\langle Tu_n, u_n \rangle| \geq d, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad \textit{oraz}$$

$$\frac{c_1 \min\{n,j\}^{1/2}}{\max\{n,j\}^{3/2}} \leq |\langle Tu_n, u_j \rangle| \leq \frac{c_2}{\max\{n,j\}^{1/2}}, \quad \forall\, n,j \in \mathbb{N},\ n \neq j.$$

Uwagi.
1. Założenie o $T \iff T$ jest komutatorem (lub T jest podobny do operatora z nieskończenie wymiarową kompresją zerową).
2. Użyteczny w badaniu mnożnikow Schura, algebr Schura, i komutatorow

Problem:

Niech $T \in B(H)$, $B \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ i $\{a_{nj} : (n,j) \in B\} \subset \mathbb{C}$ jest ustalone. Jakie są naturalne założenia na T, B and (a_{nj}) aby zapewnić $\exists$ BON $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ takiej, że

$$\langle Tu_j, u_n \rangle = a_{nj}, \qquad (n,j) \in B.$$

Problem: Czy możemy okreslić wiekszy zbior wyrazów macierzy dla $T \in B(H)$ niż jego główna przekątna ?

NiechΔ oznaza główną przekątna $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tzn. $\Delta := \{(n, n) : n \in \mathbb{N}\}$.
Zbiór $B \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ będziemy nazywać *podprzekątnym* jeśli
$B \subset \big\{(n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n > j\big\}$.
Bedziemy mowić, ze zbiór $B \subset (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus \Delta$ jest *dopuszczalny* jeśli dla każdego $m \in \mathbb{N}$ istnieje $n \in \mathbb{N}$, $n > m$, takie, że $(j, n) \notin B$ oraz $(n, j) \notin B$ dla wszystkich $j = 1, \ldots, m$.
Uwaga: podprzekątny zbiór B jest *dopuszczalny* wtedy i tylko wtedy, kiedy dla każdego $m \in \mathbb{N}$ istnieje $n > m$ takie, że $(n, j) \notin B$ dla wszystkich $j = 1, \ldots, m$.

NiechΔ oznaza główną przekątna $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tzn. $\Delta := \{(n, n) : n \in \mathbb{N}\}$. Zbiór $B \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ będziemy nazywać *podprzekątnym* jeśli $B \subset \{(n, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n > j\}$.
Bedziemy mowić, ze zbiór $B \subset (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus \Delta$ jest *dopuszczalny* jeśli dla każdego $m \in \mathbb{N}$ istnieje $n \in \mathbb{N}$, $n > m$, takie, że $(j, n) \notin B$ oraz $(n, j) \notin B$ dla wszystkich $j = 1, \dots, m$.
Uwaga: podprzekątny zbiór B jest *dopuszczalny* wtedy i tylko wtedy, kiedy dla każdego $m \in \mathbb{N}$ istnieje $n > m$ takie, że $(n, j) \notin B$ dla wszystkich $j = 1, \dots, m$.
Dopuszczalny zbiór moze być bardzo duży !
Naprzykład, zbiór

$$\{(n, j) : n > j\} \setminus \{(2^k, j) : k \in \mathbb{N}, j \leq k\}$$

jest *dopuszczalnym* zbiorem podprzekątnym. Analogicznie,

$$\{(n, j) : n \neq j\} \setminus \{(2^k, n), (n, 2^k) : k \in \mathbb{N}, n \leq k\}$$

jest *dopuszczalny*.

„Prawie każdy operator jest zerem”

„Prawie każdy operator jest zerem”

Twierdzenie (Muller-Tomilov, 2022)

Niech $T \in B(H)$. Załóżmy, że $B \subset (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus \Delta$ jest dopuszczalny. Wówczas istnieje BON $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ taka, że

$$\langle Tu_j, u_n \rangle = 0, \qquad (n, j) \in B.$$

„Prawie każdy operator jest zerem"

Twierdzenie (Muller-Tomilov, 2022)

Niech $T \in B(H)$. Załóżmy, że $B \subset (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus \Delta$ jest dopuszczalny. Wówczas istnieje BON $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ taka, że

$$\langle Tu_j, u_n \rangle = 0, \qquad (n, j) \in B.$$

Twierdzenie (Muller-T, 2022)

Niech $T \in B(H)$, $0 \in \mathrm{Int}\, W_e(T)$. Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie dowolną funkcją, spełniającą $\lim_{m\to\infty} f(m) = \infty$. Wówczas istnieje BON $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ taka, że

$$\mathrm{card}\left\{(n, j) \in \times\mathbb{N} : n, j \leq m, \langle Tu_j, u_n \rangle \neq 0\right\} \leq f(m)$$

dla każdego $m \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie

Niech $T \in B(H)$ nie jest postaci $T = \lambda + K$ dla pewnych $\lambda \in \mathbb{C}$ i operatora zwartego $K \in B(H)$. Wówczas istnieje $\delta > 0$ (zależące tylko od $\mathrm{diam}\,(W_e(T))$) z następującą własnością: jeśli $B \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest podprzekątny i dopuszczalny, $\{a_{nj} : (n, j) \in B\} \subset \mathbb{C}$ spełnia

$$\sum_{n:(n,j)\in B} |a_{nj}| \le \delta \qquad \forall j \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{j:(n,j)\in B} |a_{n,j}| \le \delta \qquad \forall n,$$

to istnieje BON $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ taka, że

$$\langle Tu_j, u_n\rangle = a_{nj}, \qquad (n, j) \in B.$$

Twierdzenie (Muller-T, 2022)

Niech $T \in B(H)$ będzie taki, że $\operatorname{Int} W_e(T) \neq \emptyset$, i niech $\epsilon > 0$ będzie ustalone. Wówczas istnieje $\delta > 0$ z następującą własnością: jeśli $B \subset (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus \Delta$ jest dopuszczalny, oraz $\{a_{nj} : (n,j) \in B \cup \Delta\}$ spełnia

(i) $a_{nn} \in \operatorname{Int} W_e(T), \quad \operatorname{dist}\{a_{nn}, \partial W_e(T)\} > \varepsilon \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\sum_{j:(n,j)\in B} |a_{nj}|_\infty \leq \delta \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, *oraz* $\sum_{n:(n,j)\in B} |a_{jn}|_\infty \leq \delta \quad \forall\, j \in \mathbb{N}$,

to dla pewnej BON $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ mamy

$$\langle Tu_j, u_n \rangle = a_{nj}$$

dla wszystkich $n, j \in \mathbb{N}$, $(n,j) \in B \cup \Delta$.

Dla każdego $m \in \mathbb{N}$ zbiór $\{(n, j) : 1 \leq |n - j| \leq m\}$ jest dopuszczalny.
$\Rightarrow$
Możemy dowolnie wyznaczyć skonczoną liczbę przekątnych (modulo ogranicz. na wartości bezwzgł. wyrazow)

Twierdzenie (Muller-T, 2022)

Niech $T \in B(H)$, $\mathrm{Int}\, W_e(T) \neq \emptyset$, *oraz niech* $\epsilon > 0$ *i* $m \in \mathbb{N}$ *bedą ustalone. Wówczas istnieje* $\delta = \delta(k, m, \epsilon) > 0$ *takie, żę jeśli* $\{a_{nj} : (n, j) \in B \cup \Delta\} \subset \mathbb{C}^k$ *spełnia*

(i) $a_{nn} \in \mathrm{Int}\, W_e(T), \mathrm{dist}\, \{a_{nn}, \partial W_e(T)\} > \varepsilon \quad \forall$ *for all* $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\sup\{|a_{nj}| : 1 \leq |n - j| \leq m\} \leq \delta$;

to istnieje BON $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ *taka, że*

$$\langle Tu_j, u_n \rangle = a_{nj}, \qquad |n - j| \leq m.$$